

1. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai đỉnh có cùng một bậc trong đồ thị vô hướng.

Giải:

- Ta gọi n là số đỉnh của đồ thị vô hướng đó.
- Với một đỉnh ta sẽ có tương ứng một bậc x bất kì với $(0 \leq x < n)$.
- Ta có nhận xét rằng bậc 0 và bậc $n-1$ không tồn tại cùng một lúc, nghĩa là không thể nào có một đỉnh không nối một đỉnh nào mà tồn tại một đỉnh khác nối với tất cả các đỉnh còn lại.
- > Theo nguyên lí Dirichlet, ta có điều phải chứng minh.

2. Cho ba thùng nước có dung tích lần lượt là V_1, V_2, V_3 hiện đang chứa lần lượt A_1, A_2, A_3 lít nước. Người ta muốn đưa số lít nước lần lượt trong cả ba thùng nước về B_1, B_2, B_3 lít bằng cách dùng một trong hai loại thao tác sau:

- Đổ nước từ thùng A sang thùng B cho đến khi thùng B đầy.
- Đổ nước từ thùng A sang thùng B cho đến khi thùng A rỗng.

Nhiệm vụ của bạn là hãy sử dụng ít nhất các loại thao tác sao cho thoả mãn đề bài.

Giải:

- Ta sẽ sử dụng kĩ thuật BFS nhằm tìm ra đường đi ngắn nhất giữa hai trạng thái.
- Trạng thái nguồn gồm ba tham số (A_1, A_2, A_3) và trạng thái đích gồm ba tham số (B_1, B_2, B_3)
- Giữa hai trạng thái (A_1, A_2, A_3) và (A_1', A_2', A_3') có đường đi đến nhau khi ta thực hiện một trong hai loại thao tác trên.
- Độ phức tạp: $O(N)$ với N là số đỉnh có trong đồ thị.