TÍCH PHÂN TRÊN TỔNG LƯỢNG GIÁC

Phan Vĩnh Tiến
Trường Đại học Quản lý và Công nghệ Thành phố Hồ Chí Minh

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này, tác giả sẽ thực hiện tính toán bằng Toán học và viết mã thực thi tính toán tích phân cho tổng $\sum_{i=0}^{n} \gamma_i f_i^{\alpha_i}(\beta_i x)$ với $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ và f_i là một trong các hàm lượng giác $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arccot, arcsec, arccsc.

Từ khóa: integral, trigonometry.

Mục lục

1 Bài toán

1. Input: gồm 5 dòng
   - dòng đầu tiên chứa số nguyên dương n;
   - dòng thứ hai chứa n số tự nhiên $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cách nhau bởi khoảng trắng;
   - dòng thứ ba chứa n số nguyên $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ cách nhau bởi khoảng trắng;
   - dòng thứ tư chứa n số nguyên $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ cách nhau bởi khoảng trắng;
   - dòng cuối cùng chứa n chuỗi là các hàm lượng giác cần tính $f_1, f_2, \ldots, f_n$ cách nhau bởi khoảng trắng.
2. Output: một dòng duy nhất in ra kết quả là tích phân bất định của tổng $\sum_{i=0}^{n} \gamma_i f_i^{\alpha_i}(\beta_i x)$.

2 Chứng minh bằng Toán học

Một số công thức được tham khảo từ [3] và [7]. Đối với nguyên hàm các lũy thừa các hàm trong 2.1 và 2.2, có thể đưa về tổng các hàm sơ cấp; riêng các hàm trong 2.3 không thể đưa về tổng các hàm sơ cấp khi số mũ $\alpha_i \geq 2$.

2.1 Nhóm hàm lượng giác $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$

Công thức 1.

$$\int \sin^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ -\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x + C & \text{nếu } n = 1, \\ -\dfrac{1}{\beta n}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \sin^{n-2}\beta x \mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int \sin^n \beta x \mathrm{d}x &= \int \sin^{n-1}\beta x \sin\beta x \mathrm{d}x \\ &= \int \sin^{n-1}\beta x \mathrm{d}\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right) \\ &= -\frac{1}{\beta}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + \int \frac{\cos\beta x}{\beta}\mathrm{d}\left(\sin^{n-1}\beta x\right) \\ &= -\frac{1}{\beta}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + (n-1)\int \sin^{n-2}\beta x\cos^2\beta x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\beta}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + (n-1)\int \sin^{n-2}\beta x\left(1-\sin^2\beta x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\beta}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + (n-1)\int \sin^{n-2}\beta x \mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n\beta x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Suy ra $n\displaystyle\int \sin^n \beta x \mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + (n-1)\int \sin^{n-2}\beta x \mathrm{d}x$, nên $\displaystyle\int \sin^n\beta x \mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta n}\sin^{n-1}\beta x\cos\beta x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\beta x \mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.

Với $n = 0$ thì $\displaystyle\int \sin^0\beta x \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n = 1$ thì $\displaystyle\int \sin^1\beta x \mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta}\cos\beta x + C$, trong đó C là hằng số.

Công thức 2.

$$\int \cos^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ \dfrac{1}{\beta}\sin\beta x + C & \text{nếu } n = 1, \\ \dfrac{1}{\beta n}\cos^{n-1}\beta x\sin\beta x + \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int \cos^{n-2}\beta x \mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int \cos^n \beta x \mathrm{d}x &= \int \cos^{n-1}\beta x \cos\beta x \mathrm{d}x \\ &= \int \cos^{n-1}\beta x \mathrm{d}\left(\frac{\sin\beta x}{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\cos^{n-1}\beta x\sin\beta x - \int \frac{\sin\beta x}{\beta}\mathrm{d}\left(\cos^{n-1}\beta x\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\cos^{n-1}\beta x\sin\beta x + (n-1)\int \cos^{n-2}\beta x\sin^2\beta x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta}\cos^{n-1}\beta x\sin\beta x + (n-1)\int \cos^{n-2}\beta x\left(1-\cos^2\beta x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta}\cos^{n-1}\beta x\sin\beta x + (n-1)\int \cos^{n-2}\beta x \mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n\beta x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Suy ra $n\int \cos^n \beta x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta}\cos^{n-1}\beta x \sin\beta x + (n-1)\int \cos^{n-2}\beta x \mathrm{d}x$, nên $\int \cos^n \beta x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta n}\cos^{n-1}\beta x \sin\beta x + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\beta x \mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.

Với $n = 0$ thì $\int \cos^0 \beta x \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n = 1$ thì $\int \cos^1 \beta x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta}\sin\beta x + C$, trong đó C là hằng số.

Công thức 3.

$$\int \tan^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ -\dfrac{1}{\beta}\ln|\cos\beta x| + C & \text{nếu } n = 1, \\ \dfrac{1}{\beta(n-1)}\tan^{n-1}\beta x - \displaystyle\int \tan^{n-2}\beta x \mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned} \int \tan^n \beta x \mathrm{d}x &= \int \tan^{n-2}\beta x \tan^2\beta x \mathrm{d}x \\ &= \int \tan^{n-2}\beta x \left(\frac{1}{\cos^2\beta x} - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \tan^{n-2}\beta x \mathrm{d}\left(\tan\beta x\right) - \int \tan^{n-2}\beta x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta(n-1)}\tan^{n-1}\beta x - \int \tan^{n-2}\beta x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Như vậy $\int \tan^n \beta x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\beta(n-1)}\tan^{n-1}\beta x - \int \tan^{n-2}\beta x \mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.

Với $n = 0$ thì $\int \tan^0 \beta x \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n = 1$ thì $\int \tan^1 \beta x \mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin\beta x}{\cos\beta x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos\beta x}\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x\right) = -\dfrac{1}{\beta}\ln|\cos\beta x| + C$, trong đó C là hằng số.

Công thức 4.

$$\int \cot^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ \dfrac{1}{\beta}\ln|\sin\beta x| + C & \text{nếu } n = 1, \\ -\dfrac{1}{\beta(n-1)}\cot^{n-1}\beta x - \displaystyle\int \cot^{n-2}\beta x \mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned} \int \cot^n \beta x \mathrm{d}x &= \int \cot^{n-2}\beta x \cot^2\beta x \mathrm{d}x \\ &= \int \cot^{n-2}\beta x \left(\frac{1}{\sin^2\beta x} - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \cot^{n-2}\beta x \mathrm{d}\left(-\cot\beta x\right) - \int \cot^{n-2}\beta x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\beta(n-1)}\cot^{n-1}\beta x - \int \cot^{n-2}\beta x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Như vậy $\int \cot^n \beta x \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\beta(n-1)}\cot^{n-1}\beta x - \int \cot^{n-2}\beta x \mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.

Với $n = 0$ thì $\int \cot^0 \beta x \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n = 1$ thì $\int \cot^1 \beta x \mathrm{d}x = \int \dfrac{\cos\beta x}{\sin\beta x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sin\beta x}\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\beta}\sin\beta x\right) = \dfrac{1}{\beta}\ln|\sin\beta x| + C$, trong đó C là hằng số.

Công thức 5.

$$\int \sec^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ \dfrac{1}{2\beta} \ln \left| \dfrac{1+\sin \beta x}{1-\sin \beta x} \right| + C & \text{nếu } n = 1, \\ \dfrac{1}{\beta(n-1)} \sec^{n-1} \beta x \sin \beta x + \dfrac{n-2}{n-1} \displaystyle\int \sec^{n-2} \beta x \mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int \sec^n \beta x \mathrm{d}x &= \int \sec^{n-2} \beta x \sec^2 \beta x \mathrm{d}x \\ &= \int \sec^{n-2} \beta x \mathrm{d} \left(\frac{1}{\beta} \tan \beta x \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \sec^{n-2} \beta x \tan \beta x - \int \frac{1}{\beta} \tan \beta x \mathrm{d} \left(\sec^{n-2} \beta x \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \sec^{n-1} \beta x \sin \beta x - (n-2) \int \sec^{n-2} \beta x \tan^2 \beta x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta} \sec^{n-1} \beta x \sin \beta x - (n-2) \int \sec^{n-2} \beta x \left(\sec^2 \beta x - 1 \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta} \sec^{n-1} \beta x \sin \beta x + (n-2) \int \sec^{n-2} \beta x \mathrm{d}x - (n-2) \int \sec^n \beta x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Suy ra $(n-1) \int \sec^n \beta x \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} \sec^{n-1} \beta x \sin \beta x + (n-2) \int \sec^{n-2} \beta x \mathrm{d}x$, nên từ đó ta có $\int \sec^n \beta x \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta(n-1)} \sec^{n-1} \beta x \sin \beta x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} \beta x \mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.
Với $n = 0$ thì $\int \sec^0 \beta x \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n = 1$ thì $\int \sec^1 \beta x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos \beta x}{\cos^2 \beta x} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 - \sin^2 \beta x} \mathrm{d} \left(\frac{1}{\beta} \sin \beta x \right)$ $= \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{1+\sin \beta x}{1-\sin \beta x} \right| + C$, trong đó C là hằng số.

Công thức 6.

$$\int \csc^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ \dfrac{1}{2\beta} \ln \left| \dfrac{1-\cos \beta x}{1+\cos \beta x} \right| + C & \text{nếu } n = 1, \\ -\dfrac{1}{\beta(n-1)} \csc^{n-1} \beta x \cos \beta x + \dfrac{n-2}{n-1} \displaystyle\int \csc^{n-2} \beta x \mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int \csc^n \beta x \mathrm{d}x &= \int \csc^{n-2} \beta x \csc^2 \beta x \mathrm{d}x \\ &= \int \csc^{n-2} \beta x \mathrm{d} \left(-\frac{1}{\beta} \cot \beta x \right) \\ &= -\frac{1}{\beta} \csc^{n-2} \beta x \cot \beta x + \int \frac{1}{\beta} \cot \beta x \mathrm{d} \left(\csc^{n-2} \beta x \right) \\ &= -\frac{1}{\beta} \csc^{n-1} \beta x \cos \beta x - (n-2) \int \csc^{n-2} \beta x \cot^2 \beta x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\beta} \csc^{n-1} \beta x \cos \beta x - (n-2) \int \csc^{n-2} \beta x \left(\csc^2 \beta x - 1 \right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\beta} \csc^{n-1} \beta x \cos \beta x + (n-2) \int \csc^{n-2} \beta x \mathrm{d}x - (n-2) \int \csc^n \beta x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Suy ra $(n-1)\int \csc^n \beta x \mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta}\csc^{n-1}\beta x\cos\beta x + (n-2)\int \csc^{n-2}\beta x\mathrm{d}x$, nên từ đó ta có $\int \csc^n \beta x \mathrm{d}x = -\frac{1}{\beta(n-1)}\csc^{n-1}\beta x\cos\beta x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}\beta x\mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.

Với $n=0$ thì $\int \csc^0 \beta x\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n=1$ thì $\int \csc^1 \beta x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin\beta x}{\sin^2\beta x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2\beta x - 1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right)$ $= \frac{1}{2\beta}\ln\left|\frac{1-\cos\beta x}{1+\cos\beta x}\right| + C$, trong đó C là hằng số.

2.2 Nhóm hàm lượng giác $\arcsin$, $\arccos$

Công thức 7.

$$\int \arcsin^n \beta x\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0,\\ x\arcsin\beta x + \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2} + C & \text{nếu } n = 1,\\ x\arcsin^n\beta x + \frac{n}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2}\arcsin^{n-1}\beta x - n(n-1)\int \arcsin^{n-2}\beta x\mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2.\end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \arcsin^n \beta x\mathrm{d}x &= x\arcsin^n\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\arcsin^n\beta x\right)\\ &= x\arcsin^n\beta x - \frac{n}{\beta}\int \arcsin^{n-1}\beta x\frac{\beta^2 x}{\sqrt{1-\beta^2x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\arcsin^n\beta x + \frac{n}{\beta}\int \arcsin^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\sqrt{1-\beta^2x^2}\right)\\ &= x\arcsin^n\beta x + \frac{n}{\beta}\left(\sqrt{1-\beta^2x^2}\arcsin^{n-1}\beta x - \int\sqrt{1-\beta^2x^2}\mathrm{d}\left(\arcsin^{n-1}\beta x\right)\right)\\ &= x\arcsin^n\beta x + \frac{n}{\beta}\left(\sqrt{1-\beta^2x^2}\arcsin^{n-1}\beta x - \int\beta(n-1)\arcsin^{n-2}\beta x\mathrm{d}x\right)\\ &= x\arcsin^n\beta x + \frac{n}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2}\arcsin^{n-1}\beta x - n(n-1)\int\arcsin^{n-2}\beta x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Như vậy $\int \arcsin^n\beta x\mathrm{d}x = x\arcsin^n\beta x + \frac{n}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2}\arcsin^{n-1}\beta x - n(n-1)\int\arcsin^{n-2}\beta x\mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.

Với $n = 0$ thì $\int \arcsin^0\beta x\mathrm{d}x = \int\mathrm{d}x = x + C$, với $n=1$ thì $\int\arcsin^1\beta x\mathrm{d}x = x\arcsin\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\arcsin\beta x\right) = x\arcsin\beta x - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta^2x}{\sqrt{1-\beta^2x^2}} = x\arcsin\beta x + \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2} + C$, trong đó C là hằng số.

Công thức 8.

$$\int \arccos^n \beta x\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0,\\ x\arccos\beta x - \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2} + C & \text{nếu } n = 1,\\ x\arccos^n\beta x - \frac{n}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2}\arccos^{n-1}\beta x - n(n-1)\int \arccos^{n-2}\beta x\mathrm{d}x & \text{nếu } n \geq 2.\end{cases}$$

Chứng minh. Với $n \geq 2$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \arccos^n \beta x\mathrm{d}x &= x\arccos^n\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\arccos^n\beta x\right)\\ &= x\arccos^n\beta x + \frac{n}{\beta}\int \arccos^{n-1}\beta x\frac{\beta^2 x}{\sqrt{1-\beta^2x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\arccos^n\beta x - \frac{n}{\beta}\int \arccos^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\sqrt{1-\beta^2x^2}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x\arccos^n \beta x - \frac{n}{\beta}\left(\sqrt{1-\beta^2x^2}\arccos^{n-1}\beta x - \int \sqrt{1-\beta^2x^2}\mathrm{d}\left(\arccos^{n-1}\beta x\right)\right)\\
&= x\arccos^n \beta x - \frac{n}{\beta}\left(\sqrt{1-\beta^2x^2}\arccos^{n-1}\beta x + \int \beta(n-1)\arccos^{n-2}\beta x\mathrm{d}x\right)\\
&= x\arccos^n \beta x - \frac{n}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2}\arccos^{n-1}\beta x - n(n-1)\int \arccos^{n-2}\beta x\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Như vậy $\int \arccos^n \beta x\mathrm{d}x = x\arccos^n \beta x - \frac{n}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2}\arccos^{n-1}\beta x - n(n-1)\int \arccos^{n-2}\beta x\mathrm{d}x$ với mọi $n \geq 2$.
Với $n = 0$ thì $\int \arccos^0 \beta x\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$, với $n = 1$ thì $\int \arccos^1 \beta x\mathrm{d}x = x\arccos\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\arccos\beta x\right) = x\arccos\beta x + \frac{1}{\beta}\int \frac{\beta^2 x}{\sqrt{1-\beta^2x^2}} = x\arccos\beta x - \frac{1}{\beta}\sqrt{1-\beta^2x^2} + C$, trong đó C là hằng số.

2.3 Nhóm hàm lượng giác $\arctan$, arccot, arcsec, arccsc

Công thức 9.

$$
\int \arctan^n \beta x\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0,\\ x\arctan\beta x - \dfrac{1}{2\beta}\ln\left(1+\beta^2x^2\right) + C & \text{nếu } n = 1,\\ x\arctan^n\beta x - \dfrac{n}{2\beta}\displaystyle\int \arctan^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right) & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}
$$

Chứng minh. Với $n = 0$ thì $\int \arctan^0 \beta x\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$. Với $n = 1$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$
\begin{aligned}
\int \arctan\beta x\mathrm{d}x &= x\arctan\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\arctan\beta x\right)\\
&= x\arctan\beta x - \frac{1}{2\beta}\int \frac{1}{1+\beta^2x^2}\mathrm{d}\left(1+\beta^2x^2\right)\\
&= x\arctan\beta x - \frac{1}{2\beta}\ln\left(1+\beta^2x^2\right) + C,
\end{aligned}
$$

trong đó C là hằng số.
Với $n \geq 2$, cũng sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$
\begin{aligned}
\int \arctan^n\beta x\mathrm{d}x &= x\arctan^n\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\arctan^n\beta x\right)\\
&= x\arctan^n\beta x - \frac{n}{2\beta}\int \arctan^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

Trong phần Phụ lục A ta sẽ chứng minh $\int \arctan^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right)$ không thể biểu diễn về các hàm sơ cấp.

Công thức 10.

$$
\int \operatorname{arccot}^n\beta x\mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0,\\ x\operatorname{arccot}\beta x + \dfrac{1}{2\beta}\ln\left(1+\beta^2x^2\right) + C & \text{nếu } n = 1,\\ x\operatorname{arccot}^n\beta x + \dfrac{n}{2\beta}\displaystyle\int \operatorname{arccot}^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right) & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}
$$

Chứng minh. Với $n = 0$ thì $\int \operatorname{arccot}^0\beta x\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$. Với $n = 1$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arccot}\beta x\mathrm{d}x &= x\operatorname{arccot}\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\operatorname{arccot}\beta x\right)\\ &= x\operatorname{arccot}\beta x + \frac{1}{2\beta}\int \frac{1}{1+\beta^2x^2}\mathrm{d}\left(1+\beta^2x^2\right)\\ &= x\operatorname{arccot}\beta x + \frac{1}{2\beta}\ln\left(1+\beta^2x^2\right)+C,\end{aligned}$$

trong đó C là hằng số.
Với $n \geq 2$, cũng sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arccot}^n\beta x\mathrm{d}x &= x\operatorname{arccot}^n\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\operatorname{arccot}^n\beta x\right)\\ &= x\operatorname{arccot}^n\beta x + \frac{n}{2\beta}\int \operatorname{arccot}^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right).\end{aligned}$$

Trong phần Phụ lục A ta sẽ chứng minh $\int \operatorname{arccot}^{n-1}\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right)$ không thể biểu diễn về các hàm sơ cấp.

Công thức 11.

$$\int \operatorname{arcsec}^n\beta x\mathrm{d}x = \begin{cases} x+C & \text{nếu } n=0,\\ x\operatorname{arcsec}\beta x - \dfrac{1}{\beta}\ln\left(|\beta x|+\sqrt{\beta^2x^2-1}\right)+C & \text{nếu } n=1\\ x\operatorname{arcsec}^n\beta x - \dfrac{n}{\beta}\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsec}^{n-1}\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right) & \text{nếu } n\geq 2.\end{cases}$$

Chứng minh. Với $n=0$ thì $\int \operatorname{arcsec}^0\beta x\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x+C$. Với $n=1$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsec}\beta x\mathrm{d}x &= x\operatorname{arcsec}\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\operatorname{arcsec}\beta x\right)\\ &= x\operatorname{arcsec}\beta x - \int \frac{\beta x}{|\beta x|\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}x\\ &= x\operatorname{arcsec}\beta x - \frac{1}{\beta}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} \quad (\text{với } u=|\beta x|)\\ &= x\operatorname{arcsec}\beta x - \frac{1}{\beta}\int \frac{\mathrm{d}\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)}{u+\sqrt{u^2-1}}\\ &= x\operatorname{arcsec}\beta x - \frac{1}{\beta}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)+C\\ &= x\operatorname{arcsec}\beta x - \frac{1}{\beta}\ln\left(|\beta x|+\sqrt{\beta^2x^2-1}\right)+C,\end{aligned}$$

trong đó C là hằng số.
Với $n \geq 2$, cũng sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsec}^n\beta x\mathrm{d}x &= x\operatorname{arcsec}^n\beta x - \int x\mathrm{d}\left(\operatorname{arcsec}^n\beta x\right)\\ &= x\operatorname{arcsec}^n\beta x - \frac{n}{\beta}\int \frac{\operatorname{arcsec}^{n-1}\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right).\end{aligned}$$

Trong phần Phụ lục A ta sẽ chứng minh $\int \frac{\operatorname{arcsec}^{n-1}\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right)$ không thể biểu diễn về các hàm sơ cấp.

Công thức 12.

$$\int \operatorname{arccsc}^n \beta x \mathrm{d}x = \begin{cases} x + C & \text{nếu } n = 0, \\ x\operatorname{arccsc}\beta x + \dfrac{1}{\beta} \ln\left(|\beta x| + \sqrt{\beta^2x^2 - 1}\right) + C & \text{nếu } n = 1, \\ x\operatorname{arccsc}^n \beta x + \dfrac{n}{\beta} \displaystyle\int \dfrac{\operatorname{arccsc}^{n-1}\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}} \mathrm{d}\left(|\beta x|\right) & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với $n = 0$ thì $\displaystyle\int \operatorname{arccsc}^0 \beta x \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$. Với $n = 1$, sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arccsc}\beta x \mathrm{d}x &= x\operatorname{arccsc}\beta x - \int x \mathrm{d}\left(\operatorname{arccsc}\beta x\right) \\ &= x\operatorname{arccsc}\beta x + \int \frac{\beta x}{|\beta x| \sqrt{\beta^2x^2-1}} \mathrm{d}x \\ &= x\operatorname{arccsc}\beta x + \frac{1}{\beta} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} \ (\text{với } u = |\beta x|) \\ &= x\operatorname{arccsc}\beta x + \frac{1}{\beta} \int \frac{\mathrm{d}\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)}{u + \sqrt{u^2-1}} \\ &= x\operatorname{arccsc}\beta x + \frac{1}{\beta} \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) + C \\ &= x\operatorname{arccsc}\beta x + \frac{1}{\beta} \ln\left(|\beta x| + \sqrt{\beta^2x^2-1}\right) + C, \end{aligned}$$

trong đó C là hằng số.
Với $n \geq 2$, cũng sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arccsc}^n \beta x \mathrm{d}x &= x\operatorname{arccsc}^n \beta x - \int x \mathrm{d}\left(\operatorname{arccsc}^n \beta x\right) \\ &= x\operatorname{arccsc}^n \beta x + \frac{n}{\beta} \int \frac{\operatorname{arccsc}^{n-1}\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}} \mathrm{d}\left(|\beta x|\right). \end{aligned}$$

Trong phần Phụ lục A ta sẽ chứng minh $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccsc}^{n-1}\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}} \mathrm{d}\left(|\beta x|\right)$ không thể biểu diễn về các hàm sơ cấp.

3 Cài đặt chương trình

3.1 Tổng quan cài đặt

Để giữ độ chính xác cho kết quả, các hệ số sẽ được lưu bằng kiểu dữ liệu tự định nghĩa `Fraction` [6] (do $\beta_i \in \mathbb{Z}$, có tinh chỉnh thêm một số chỗ cho phù hợp), thay vì dùng `float` hay `double`. Tuy nhiên, nhược điểm là thao tác tính toán sẽ lâu hơn khi số mũ của hàm cần tính nguyên hàm càng lớn.
Các hàm lượng giác nói trên được chia thành ba nhóm để tiện cho việc lập trình:

- **Nhóm 1.** Gồm các hàm $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$.
- **Nhóm 2.** Gồm các hàm $\arcsin$, $\arccos$.
- **Nhóm 3.** Gồm các hàm $\arctan$, arccot, arcsec, arccsc.

3.2 Cài đặt tính toán lũy thừa cho từng hàm lượng giác

Việc tính toán lũy thừa cho từng hàm lượng giác được thực hiện như sau:

- nhóm 1, 2: tính truy hồi bằng quy hoạch động theo công thức truy hồi, trả về mảng (`vector`) 2 chiều chứa hệ số từ lũy thừa bậc 0 đến lũy thừa bậc cần tính;

- nhóm 3: tính và trả về trực tiếp hệ số của lũy thừa bậc cần tính (mặc dù chỉ cần mảng 1 chiều để lưu hệ số nhưng vẫn sử dụng mảng 2 chiều (với 2 cột, 1 dòng) để đồng bộ với các hàm lượng giác nhóm 1 và 2).

Bảng 1 trình bày cách sử dụng mảng 2 chiều để lưu trữ hệ số của các số hạng trong lũy thừa các hàm lượng giác $f^n(\beta x)$; tương ứng với dòng thứ i (đối với các hàm nhóm 1, 2) và dòng đầu tiên (đối với các hàm nhóm 3) trong mảng 2 chiều trả về. Bảng này được lập nên từ việc khảo sát dạng số hạng của lũy thừa các hàm, cùng với quy luật của các số hạng đó.

Hàm	0	$j\,(1 \le j \le n)$	$n+1$	**Ghi chú**
$\sin$	$\sin^0 \beta x \cos \beta x$	$\sin^j \beta x \cos \beta x$	x	
$\cos$	$\cos^0 \beta x \sin \beta x$	$\cos^j \beta x \sin \beta x$	x	
$\tan$	$\ln \lvert\cos \beta x\rvert$	$\tan^j \beta x$	x	
$\cot$	$\ln \lvert\sin \beta x\rvert$	$\cot^j \beta x$	x	
$\sec$	$\ln \left\lvert\dfrac{1+\sin \beta x}{1-\sin \beta x}\right\rvert$	$\sec^j \beta x \sin \beta x$	x	
$\csc$	$\ln \left\lvert\dfrac{1-\cos \beta x}{1+\cos \beta x}\right\rvert$	$\csc^j \beta x \cos \beta x$	x	
$\arcsin$	$\arcsin^0 \beta x$	$\arcsin^j \beta x$		Nếu $j\,(0 \le j \le n)$ cùng tính chẵn lẻ với i thì là $x \arcsin^j \beta x$, ngược lại là $\sqrt{1-\beta^2 x^2} \arcsin^j \beta x$.
$\arccos$	$\arccos^0 \beta x$	$\arccos^j \beta x$		Nếu $j\,(0 \le j \le n)$ cùng tính chẵn lẻ với i thì là $x \arccos^j \beta x$, ngược lại là $\sqrt{1-\beta^2 x^2} \arccos^j \beta x$.
$\arctan$	$x \arctan^n \beta x$	$\int \arctan^{n-1} \beta x \mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2 x^2\right)\right)$		
arccot	$x \operatorname{arccot}^n \beta x$	$\int \operatorname{arccot}^{n-1} \beta x \mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2 x^2\right)\right)$		
arcsec	$x \operatorname{arcsec}^n \beta x$	$\int \dfrac{\operatorname{arcsec}^{n-1} \beta x}{\sqrt{\beta^2 x^2 - 1}} \mathrm{d}\left(\lvert\beta x\rvert\right)$		
arccsc	$x \operatorname{arccsc}^n \beta x$	$\int \dfrac{\operatorname{arccsc}^{n-1} \beta x}{\sqrt{\beta^2 x^2 - 1}} \mathrm{d}\left(\lvert\beta x\rvert\right)$		

Bảng 1. Lưu trữ dữ liệu cho việc tính toán lũy thừa các hàm lượng giác.

3.3 Cài đặt tính toán tổng lượng giác

Quá trình tính toán tổng lượng giác được cài đặt theo các bước:

1. Lưu các giá trị α_i, β_i, γ_i, f_i được nhập vào trong cấu trúc dữ liệu `std::tuple`.
2. Phân cụm các `std::tuple` dựa vào f_i.
3. Trong mỗi cụm nói trên, tiếp tục phân cụm các `std::tuple` dựa vào β_i:
   - nhóm 1: mỗi cụm chứa các `std::tuple` có cùng β_i;
   - nhóm 2: mỗi cụm chứa các `std::tuple` có cùng β_i và cùng tính chẵn lẻ của α_i;
   - nhóm 3: mỗi cụm chứa các `std::tuple` có cùng β_i và cùng α_i.
4. Tính toán kết quả theo từng cụm đưa vào `std::stringstream`, sau đó tổng hợp cho ra kết quả cuối cùng.

3.4 Kiểm thử chương trình

Kết quả in ra được kiểm thử bằng WolframAlpha và Maple. Việc truy vấn trên WolframAlpha không đòi hỏi cú pháp phức tạp, tuy nhiên có giới hạn số lượng ký tự; ngược lại Maple tính toán hiệu quả với các biểu thức lớn, nhưng cần tuân theo cú pháp của hệ thống. Vì vậy, để tiện cho việc kiểm thử và đối chiếu, chương trình in ra ba dòng:

- dòng đầu tiên viết lại tổng các hàm lượng giác được nhập vào;
- dòng thứ hai là kết quả của phép toán từ đầu vào, khi truy vấn trên WolframAlpha cần sao chép biểu thức đó và đặt trong `d/dx(<biểu thức>)`;

- dòng thứ ba là câu truy vấn dùng trong Maple, khi truy vấn chỉ cần sao chép; là `d/dx(<output>) - <input>`.

Lưu ý. Từ việc kiểm thử các truy vấn trên Maple và tổng hợp thông tin từ Large Language Model (Google Gemini 2.5 Pro, Grok 3), có một số điểm lưu ý sau (đã lập trình cho câu truy vấn in ra màn hình):

- đối với các biểu thức liên quan đến hàm $\sin$, $\cos$, $\arcsin$, $\arccos$: đơn giản dùng lệnh `simplify(<biểu thức>)`;
- đối với các biểu thức liên quan đến hàm $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$: do trong biểu thức gồm nhiều thành phần phức tạp hơn như $\ln$ và trị tuyệt đối, khi thực hiện phép lấy đạo hàm sẽ sinh ra các hàm đặc biệt như `signum` hay `csgn`, vì vậy phải dùng dùng lệnh `simplify(evalc((<biểu thức>)));`
- đối với các biểu thức liên quan đến các hàm còn lại: do trong biểu thức lại chứa tích phân khác, dẫn đến khi lấy đạo hàm kết quả sẽ có dạng $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cdots)\right)\right)$, điều này khiến quá trình tính toán bị sai lệch đối với biểu thức lớn nên cần tách ra; riêng đối với các hàm arcsec, arccsc thì phải dùng thêm `convert(<biểu thức>, 'piecewise', x)`, do đạo hàm của chúng liên quan đến đạo hàm của hàm $|x|$ (đạo hàm này giáng đoạn tại 0) nên cần chia trường hợp $x = 0$, $x \neq 0$, có thể dùng `op(-1, simplify(convert(...)))` để chỉ in ra kết quả của trường hợp tổng quát khi không muốn in ra giá trị tại những điểm gián đoạn/đặc biệt; một điểm đáng lưu ý nữa là các phép tính với hàm $\sec$ thường chậm hơn rất nhiều so với $\csc$ và các hàm khác, dẫn đến các phép toán phức tạp trên hàm $\sec$ đòi hỏi việc tách ra và tính riêng phần.

Một số ví dụ cho kết quả chạy chương trình và kiểm thử được trình bày trong Phụ lục B.

Tài liệu

[1] Daniel Duverney. An Introduction to Hypergeometric Functions. pages 239–251, 2024.

[2] Alexander B Goncharov. Multiple polylogarithms and mixed Tate motives. 2001.

[3] Nguyễn Quản Bá Hồng. Bài giảng Giải tích toán học & Giải tích số, 2025. URL https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/analysis/lecture/NQBH_mathematical_analysis_lecture.pdf.

[4] Leonard Lewin. Polylogarithms and Associated Functions. pages 189–191, 1981.

[5] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*, volume 1. Princeton University Press, 2011.

[6] Martin Thoma. Fractions in C++. URL https://martin-thoma.com/fractions-in-cpp/.

[7] Wikipedia. Lists of Integrals. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_integrals.

Phụ lục A

Mục này sẽ trình bày chứng minh cho các tích phân không thể đưa về tổng của các hàm sơ cấp như đã đề cập ở trên. Ta quy ước rằng một hàm không thể đưa về tổng của các hàm sơ cấp được gọi là một hàm không sơ cấp. Theo [4] và [1], hàm polygarithm và hàm Clausen (một trường hợp riêng của hàm polygarithm) được định nghĩa như bên dưới.

Định nghĩa 1. Cho số nguyên $n \geq 0$. Trên khoảng $(-\infty, 1)$, hàm polygarithm Li_n được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Li}_0(x) = \frac{x}{1-x}, \qquad \mathrm{Li}_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{Li}_{n-1}(t)}{t}\mathrm{d}t \quad (n \geq 1),$$

và có công thức tổng quát

$$\mathrm{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n} \quad (|x| < 1).$$

Định nghĩa 2. Với mọi $\theta \in (0, 2\pi)$, hàm Clausen Cl_n được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Cl}_n(\theta) = \mathrm{Li}_n\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k^n},$$

trong đó

$$\mathrm{Cl}_{2n}(\theta) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{Li}_{2n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k^{2n}}, \qquad \mathrm{Cl}_{2n+1}(\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{Li}_{2n+1}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k^{2n+1}}.$$

Để chứng minh các tích phân đã nêu ở 2.3 là không sơ cấp, trước tiên ta phát biểu và chứng minh một số bổ đề và hệ quả bên dưới.

Bổ đề 1. Tích phân $K_{m,j} := \int x^m \mathrm{Cl}_j(ax+b)\,\mathrm{d}x$ là một biểu thức chứa các hàm Clausen với bậc cao nhất là $j+m+1$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo m. Trường hợp $m=0$ thì $K_{0,j} = \int \mathrm{Cl}_j(ax+b)\,\mathrm{d}x$. Theo định nghĩa 2, trường hợp $j=2n$ thì $K_{0,j} = \int \mathrm{Cl}_{2n}(ax+b)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int\frac{\sin k(ax+b)}{k^{2n}}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\cos k(ax+b)}{a\cdot k^{2n+1}} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{Cl}_{2n+1}(ax+b) + C = -\frac{1}{a}\mathrm{Cl}_{j+1}(ax+b) + C$, còn trường hợp $j=2n-1$ thì $K_{0,j} = \int \mathrm{Cl}_{2n-1}(ax+b)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int\frac{\cos k(ax+b)}{k^{2n-1}}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(ax+b)}{a\cdot k^{2n}} + C = \frac{1}{a}\mathrm{Cl}_{2n}(ax+b) + C = \frac{1}{a}\mathrm{Cl}_{j+1}(ax+b) + C$ nên $K_{0,j}$ là biểu thức chứa các hàm Clausen với bậc cao nhất là $j+1$. Như vậy $m=0$ thì mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến $m-1$ (với m nguyên dương). Ta cần chứng minh mệnh đề cũng đúng với m. Sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần, ta có

$$\begin{aligned} K_{m,j} &= x^m \int \mathrm{Cl}_j(ax+b)\,\mathrm{d}x - m\int x^{m-1}\left(\int \mathrm{Cl}_j(ax+b)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \pm\frac{1}{a}x^m \mathrm{Cl}_{j+1}(ax+b) \mp \frac{m}{a}\int x^{m-1}\mathrm{Cl}_{j+1}(ax+b)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, $\int x^{m-1}\mathrm{Cl}_{j+1}(ax+b)\,\mathrm{d}x$ là biểu thức chứa các hàm Clausen với bậc cao nhất là $(j+1)+(m-1)+1 = j+m+1$. Như vậy bậc cao nhất của các hàm Clausen trong $K_{m,j}$ là $j+m+1$, mệnh đề đúng với m. Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề đúng với mọi số nguyên không âm m.

Bổ đề 2. Tổng $\sum_{j=2}^{m} p_j(x)\,\mathrm{Cl}_j(x)$ là một hàm không sơ cấp, trong đó $p_j(x)$ là các đa thức.

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng $F(x) = \sum_{j=2}^{m} p_j(x)\,\mathrm{Cl}_j(x)$ là một hàm sơ cấp. Khi đó ta có

$$\mathrm{Cl}_m(x) = \frac{F(x) - \sum_{j=2}^{m-1} p_j(x)\,\mathrm{Cl}_j(x)}{p_m(x)}.$$

Có nghĩa là hàm $\mathrm{Cl}_m(x)$ có thể được biểu diễn thông qua các hàm sơ cấp và các hàm Clausen có bậc thấp hơn. Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với tính độc lập đại số của dãy hàm Clausen [2]. Như vậy, tổng $\sum_{j=2}^{m} p_j(x)\,\mathrm{Cl}_j(x)$ là một hàm không sơ cấp.

Bổ đề 3. Đẳng thức $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ (Dirichlet kernel, [5]). Từ đó, tích phân $\int_0^{\pi}\frac{\sin mx}{\sin x}\mathrm{d}x$ bằng π khi m lẻ và bằng 0 khi m chẵn.

Chứng minh. Áp dụng đẳng thức $2\cos u \sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$ ta có

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right) = \sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right) = \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right).$$

Suy ra $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left((n+1/2)\,x\right)}{2\sin\left(x/2\right)}$. Đến đây, ta xét hai trường hợp, chú ý rằng $\int_0^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x = \left.\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{\pi} = 0$:

1. $m = 2n+1$ thì $\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} = 2D_n(2x) = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$, nên khi đó $\int_0^{\pi}\frac{\sin mx}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right)\mathrm{d}x = \pi$.

2. $m = 2n$ thì $\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{\sin x} = \frac{\sin\left(2n+1\right)x+\sin 2nx}{\sin x} - \frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} = \frac{2\cos\left(x/2\right)\sin\left(\left(2n+1/2\right)x\right)}{\sin x} - \frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\left(2n+1/2\right)x\right)}{\sin\left(x/2\right)} - \frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} = 2\left(D_{2n}(x)-D_n(x)\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$, nên khi đó $\int_0^{\pi}\frac{\sin mx}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\left(2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x\right)\mathrm{d}x = 0$.

Bổ đề 4. Khai triển Fourier của các hàm $\ln|\sin x|$ và $\ln|\cos x|$:

$$\ln|\sin x| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}, \qquad \ln|\cos x| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{n}.$$

Chứng minh. Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ khả tích trên $[-\pi,\,\pi]$ có dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right),$$

trong đó $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ [5].
Khi đó áp dụng với $f(x) = \ln|\sin x|$ (để ý rằng đây là hàm chẵn) thì:

1. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin x|\mathrm{d}x = -2\ln 2$. Thật vậy, $\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\ln|\sin x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\sin x\right)+\ln\left(\cos x\right)\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2}\ln\left(\sin 2x\right)\mathrm{d}x - \pi\ln 2 = \int_0^{\pi}\ln\left(\sin u\right)\mathrm{d}u - \pi\ln 2$; từ đó suy ra $\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = -\pi\ln 2$, kéo theo $a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot(-\pi\ln 2) = -2\ln 2$.

2. $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin x|\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases}-\frac{2}{n} & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ}\end{cases}$. Thật vậy, $\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin x|\cos nx\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\cos nx\mathrm{d}x$ $= 2\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = 2\left.\ln(\sin x)\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\cot x\mathrm{d}x$. Vì $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin nx}{nx} = 1$ và $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\cot x}{1/x} = \lim_{x\to0^+}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x} = 1$ nên $\lim_{x\to0^+}\ln(\sin x)\frac{\sin nx}{n} = \lim_{x\to0^+}x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$. Sử dụng kết quả đó, $\lim_{x\to\pi^-}\ln(\sin x)\frac{\sin nx}{n} = \lim_{y\to0^+}\ln(\sin(\pi-y))\frac{\sin n(\pi-y)}{n} = \lim_{y\to0^+}(-1)^{n+1}\ln(\sin y)\frac{\sin ny}{n} = 0$. Suy ra $\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin x|\cos nx\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\cot x\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} + \frac{\sin(n-1)x}{\sin x}\right)$. Áp dụng bổ đề 3, khi n chẵn thì $n-1$ và $n+1$ cùng lẻ nên $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cdot 2\pi\right) = -\frac{2}{n}$, còn khi n lẻ thì $n-1$ và $n+1$ cùng chẵn nên $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0$.

3. $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|\sin x|\sin nx\mathrm{d}x = 0$ do $\ln|\sin x|$ là hàm chẵn.

Như vậy, hàm $\ln|\sin x|$ có khai triển Fourier là

$$\ln|\sin x| = \frac{-2\ln 2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos 2nx = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}.$$

Khi đó ta có khai triển Fourier của hàm $\ln|\cos x|$ là

$$\ln|\cos x| = \ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx+n\pi)}{n} = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{n}.$$

Bổ đề 5. Các tích phân bất định $\int \ln|\sin x|\mathrm{d}x$, $\int \ln|\cos x|\mathrm{d}x$, $\int \ln|\tan x|\mathrm{d}x$, $\int \ln|\cot x|\mathrm{d}x$ là các hàm không sơ cấp.

Chứng minh. Từ bổ đề 4 kết hợp với định nghĩa 2, ta có

$$\begin{aligned}\int \ln|\sin x|\mathrm{d}x &= \int\left(-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}\right)\mathrm{d}x\\ &= C - x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^2}\\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{Cl}_2(2x) - x\ln 2 + C,\end{aligned}$$

trong đó C là hằng số. Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\int \ln|\cos x|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Cl}_2(\pi - 2x) - x\ln 2 + C.$$

Để ý rằng $\ln|\tan x| = \ln|\sin x| - \ln|\cos x|$ và $\ln|\cot x| = -\ln|\tan x|$ nên

$$\int \ln|\tan x|\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left(\operatorname{Cl}_2(2x) + \operatorname{Cl}_2(\pi-2x)\right) + C, \qquad \int \ln|\cot x|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Cl}_2(2x) + \operatorname{Cl}_2(\pi-2x)\right) + C.$$

Các tích phân này được biểu diễn thành tổng của các hàm sơ cấp và hàm Clausen, vì thế là không sơ cấp.

Hệ quả 1. Các tích phân bất định $\int x^n\ln|\sin x|\mathrm{d}x$, $\int x^n\ln|\cos x|\mathrm{d}x$, $\int x^n\ln|\tan x|\mathrm{d}x$, $\int x^n\ln|\cot x|\mathrm{d}x$ là các hàm không sơ cấp, với mọi số nguyên không âm n.

Chứng minh. Mỗi hàm g thuộc $\{\ln|\sin x|, \ln|\cos x|, \ln|\tan x|, \ln|\cot x|\}$ có dạng

$$g(x) = \alpha\ln|\sin x| + \beta\ln|\cos x|.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $I_n[g] := \int x^n g(x)\mathrm{d}x$ không sơ cấp và chứa các hàm Clausen đến bậc $n+2$. Với $n=0$ thì mệnh đề đúng theo bổ đề 5, ta có

$$I_0[g] = E_0(x) + H_0(x),$$

trong đó $E_0(x) := -(\alpha+\beta)x\ln 2 + C$, $H_0(x) := -\frac{1}{2}\left(\alpha\operatorname{Cl}_2(2x) - \beta\operatorname{Cl}_2(\pi-2x)\right)$ và C là hằng số.
Giả sử mệnh đề đã đúng đến $n=k$, ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$. Thật vậy, theo công thức nguyên hàm từng phần thì

$$\begin{aligned}I_{k+1}[g] &= x^{k+1}I_0[g] - (k+1)\int x^k I_0[g]\mathrm{d}x\\ &= x^{k+1}\left(E_0(x)+H_0(x)\right) - (k+1)\int x^k\left(E_0(x)+H_0(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(x^{k+1}E_0(x) - (k+1)\int x^k E_0(x)\mathrm{d}x\right) + \left(x^{k+1}H_0(x) - (k+1)\int x^k H_0(x)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Đặt $E_{k+1}(x) := x^{k+1}E_0(x) - (k+1)\displaystyle\int x^k E_0(x)\mathrm{d}x$ và $H_{k+1}(x) := x^{k+1}H_0(x) - (k+1)\displaystyle\int x^k H_0(x)\mathrm{d}x$. Nhận xét rằng $E_{k+1}(x) = x^{k+1}E_0(x) - (k+1)\displaystyle\int x^k\left(-(\alpha+\beta)x\ln 2 + C\right)\mathrm{d}x = x^{k+1}E_0(x) + (k+1)\displaystyle\int \left((\alpha+\beta)\ln 2x^{k+1} - Cx^k\right)\mathrm{d}x = x^{k+1}E_0(x) + (k+1)\left(\dfrac{(\alpha+\beta)\ln 2}{k+2}x^{k+2} - \dfrac{C}{k+1}x^{k+1}\right) + C_{k+1}$ là một hàm sơ cấp, trong đó C và C_{k+1} là các hằng số. Bên cạnh đó, $H_{k+1}(x) = x^{k+1}H_0(x) + \dfrac{k+1}{2}\left(\alpha\displaystyle\int x^k\,\mathrm{Cl}_2\,(2x)\,\mathrm{d}x - \beta\displaystyle\int x^k\,\mathrm{Cl}_2\,(\pi - 2x)\,\mathrm{d}x\right)$ theo bổ đề 1 là hàm không sơ cấp và chứa các hàm Clausen đến bậc $k+2+1 = k+3$. Như vậy $I_{k+1}[g]$ không sơ cấp và chứa các hàm Clausen đến bậc $k+3$, nên mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề nêu trên đúng với mọi số nguyên n không âm.
Từ những bổ đề và hệ quả trên, ta đi đến hệ quả 2, cũng là phép chứng minh cho tính không sơ cấp của các tích phân đã nêu ở 2.3.

Hệ quả 2. Các tích phân bất định $\displaystyle\int \arctan^n \beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right)$, $\displaystyle\int \mathrm{arccot}^n\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right)$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arcsec}^n\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right)$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arccsc}^n\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right)$ là các hàm không sơ cấp, với mọi số nguyên dương n.

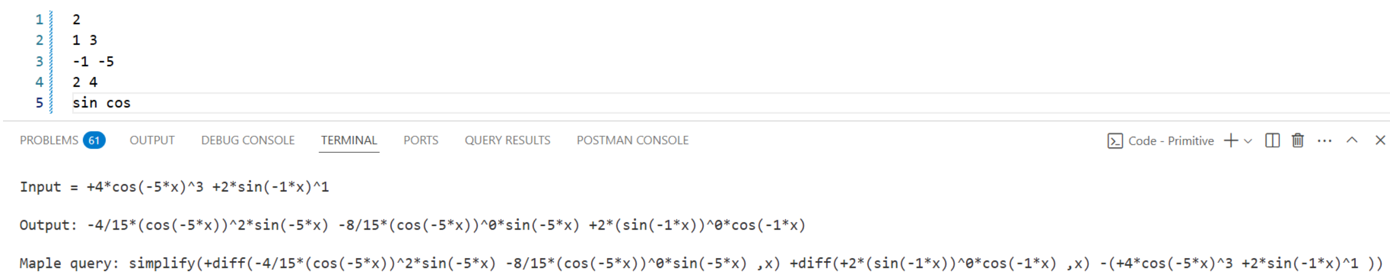
Chứng minh. Xét tích phân bất định $\displaystyle\int \arctan^n \beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right)$. Đặt $u = \arctan\beta x$ thì $\tan u = \beta x$ và $\mathrm{d}u = \dfrac{\beta}{1+\beta^2x^2}\mathrm{d}x$. Suy ra $\displaystyle\int \arctan^n \beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right) = \int \arctan^n \beta x\frac{2\beta^2x}{1+\beta^2x^2}\mathrm{d}x = 2\int u^n\tan u\mathrm{d}u$. Áp dụng công thức tích phân toàn phần thì $\displaystyle\int u^n\tan u\mathrm{d}u = \int u^n\mathrm{d}\left(-\ln|\cos u|\right) = -u^n\ln|\cos u| + n\int u^{n-1}\ln|\cos u|\mathrm{d}u$. Do đó $\displaystyle\int \arctan^n \beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right) = -2\left(u^n\ln|\cos u| - n\int u^{n-1}\ln|\cos u|\mathrm{d}u\right)$.
Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

- $\displaystyle\int \mathrm{arccot}^n\beta x\mathrm{d}\left(\ln\left(1+\beta^2x^2\right)\right) = -2\left(u^n\ln|\sin u| - n\int u^{n-1}\ln|\sin u|\mathrm{d}u\right)$ với $u = \mathrm{arccot}\beta x$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arcsec}^n\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right) = u^n\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - n\int u^{n-1}\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}u$ với $u = \mathrm{arcsec}\beta x$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arccsc}^n\beta x}{\sqrt{\beta^2x^2-1}}\mathrm{d}\left(|\beta x|\right) = -u^n\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + n\int u^{n-1}\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|\mathrm{d}u$ với $u = \mathrm{arccsc}\beta x$.

Các tích phân trên đều đưa được về dạng chứa tích phân của các hàm $u^k\ln|\sin u|$, $u^k\ln|\cos u|$, $u^k\ln|\tan u|$ với $k = n-1$ là số nguyên không âm. Áp dụng hệ quả 1, ta có điều phải chứng minh.

Phụ lục B

Mục này trình bày một số ví dụ cho kết quả chạy chương trình và kiểm thử trên WolframAlpha và Maple.



Hình 1. Kết quả chạy chương trình ví dụ 1.

```
(d/dx(-4/15*(cos(-5*x))^2*sin(-5*x) -8/15*(cos(-5*x))^0*sin(-5*x) +2*(sin(-1*x))^0*cos(-1*x)))-(+4*cos(-5
```

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input interpretation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{4}{15}\cos^2(-5x)\sin(-5x)-\frac{8}{15}\cos^0(-5x)\sin(-5x)+2\sin^0(-x)\cos(-x)\right)-\left(+4\cos^3(-5x)+2\sin^1(-x)\right)$$

Result

0

Hình 2. Kiểm thử kết quả ở hình 1 bằng WolframAlpha.

```
12
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
-1 2 3 -4 -5 6 7 -8 9 10 11 12
-1 2 3 -4 -5 6 7 -8 9 10 11 12
arccsc arcsec sin cos tan cot sec csc arcsin arccos arctan arccot
```

PROBLEMS 61 | OUTPUT | DEBUG CONSOLE | TERMINAL | PORTS | QUERY RESULTS | POSTMAN CONSOLE | Code - Primitive

```
Input = +10*arccos(10*x)^10 +12*arccot(12*x)^12 -1*arccsc(-1*x)^1 +2*arcsec(2*x)^2 +9*arcsin(9*x)^9 +11*arctan(11*x)^11 -4*cos(-4*x)^4 +6*cot(6*x)^6 -8*csc(-8*x)^8
 +7*sec(7*x)^7 +3*sin(3*x)^3 -5*tan(-5*x)^5

Output: +10*x*(arccos(10x))^10 -10*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^9 -900*x*(arccos(10x))^8 +720*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^7 +50400*x*(arccos(10x))^6 -3024
0*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^5 -1512000*x*(arccos(10x))^4 +604800*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^3 +18144000*x*(arccos(10x))^2 -3628800*sqrt(1-(10)^2*x^2)*
(arccos(10x))^1 -36288000*x*(arccos(10x))^0 +12*x*arccot(12*x)^12 +((6)*(int((arccot(12*x)^11)*(d/dx(ln(1+(12)^2*x^2)))dx))) -1*x*arccsc(-1*x)^1 +(1*(ln(abs(-1x)+s
qrt((-1)^2*x^2-1))) +2*x*arcsec(2*x)^2 -(2*(int((arcsec(2*x)^1)/(sqrt((2)^2*x^2-1))*(d/dx(abs(2*x)))dx))) +9*x*(arcsin(9x))^9 +9*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^8 -
648*x*(arcsin(9x))^7 -504*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^6 +27216*x*(arcsin(9x))^5 +15120*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^4 -544320*x*(arcsin(9x))^3 -181440*sqrt(1-
(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^2 +3265920*x*(arcsin(9x))^1 +362880*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^0 +11*x*arctan(11*x)^11 -((11/2)*(int((arctan(11*x)^10)*(d/dx(ln(1+(11)^
2*x^2)))dx))) +1/4*(cos(-4*x))^3*sin(-4*x) +3/8*(cos(-4*x))^1*sin(-4*x) -3/2*x -1/5*(cot(6x))^5 +1/3*(cot(6x))^3 -1*(cot(6x))^1 -6*x -1/7*(csc(-8x))^7*cos(-8x) -6/
35*(csc(-8x))^5*cos(-8x) -8/35*(csc(-8x))^3*cos(-8x) -16/35*(csc(-8x))^1*cos(-8x) +1/6*(sec(7x))^6*sin(7x) +5/24*(sec(7x))^4*sin(7x) +5/16*(sec(7x))^2*sin(7x) +5/3
2*ln(abs((1+sin(7x))/(1-sin(7x)))) -1/3*(sin(3*x))^2*cos(3*x) -2/3*(sin(3*x))^0*cos(3*x) +1/4*(tan(-5*x))^4 -1/2*(tan(-5*x))^2 -1*ln(abs(cos(-5*x)))

Maple query: simplify(+diff(+10*x*(arccos(10x))^10 -10*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^9 -900*x*(arccos(10x))^8 +720*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^7 +50400*x*(
arccos(10x))^6 -30240*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^5 -1512000*x*(arccos(10x))^4 +604800*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^3 +18144000*x*(arccos(10x))^2 -3628800
*sqrt(1-(10)^2*x^2)*(arccos(10x))^1 -36288000*x*(arccos(10x))^0 ,x) +diff(+12*x*arccot(12*x)^12,x) +((6)*((arccot(12*x)^11)*(diff(ln(1+(12)^2*x^2),x)))) +convert(+
diff(-1*x*arccsc(-1*x)^1,x) +(1*diff((ln(abs(-1x)+sqrt((-1)^2*x^2-1))),x)) , 'piecewise', x) +convert(+diff(+2*x*arcsec(2*x)^2,x) -(2*((arcsec(2*x)^1)/(sqrt((2)^2*
x^2-1))*(diff(abs(2*x),x)))) , 'piecewise', x) +diff(+9*x*(arcsin(9x))^9 +9*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^8 -648*x*(arcsin(9x))^7 -504*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9
x))^6 +27216*x*(arcsin(9x))^5 +15120*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^4 -544320*x*(arcsin(9x))^3 -181440*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^2 +3265920*x*(arcsin(9x))^1 +
362880*sqrt(1-(9)^2*x^2)*(arcsin(9x))^0 ,x) +diff(+11*x*arctan(11*x)^11,x) -((11/2)*((arctan(11*x)^10)*(diff(ln(1+(11)^2*x^2),x)))) +diff(+1/4*(cos(-4*x))^3*sin(-4
*x) +3/8*(cos(-4*x))^1*sin(-4*x) -3/2*x ,x) +evalc(diff(-1/5*(cot(6x))^5 +1/3*(cot(6x))^3 -1*(cot(6x))^1 -6*x ,x)) +evalc(diff(-1/7*(csc(-8x))^7*cos(-8x) -6/35*(cs
c(-8x))^5*cos(-8x) -8/35*(csc(-8x))^3*cos(-8x) -16/35*(csc(-8x))^1*cos(-8x) ,x)) +evalc(diff(+1/6*(sec(7x))^6*sin(7x) +5/24*(sec(7x))^4*sin(7x) +5/16*(sec(7x))^2*s
in(7x) +5/32*ln(abs((1+sin(7x))/(1-sin(7x)))) ,x)) +diff(-1/3*(sin(3*x))^2*cos(3*x) -2/3*(sin(3*x))^0*cos(3*x) ,x) +evalc(diff(+1/4*(tan(-5*x))^4 -1/2*(tan(-5*x))^
2 -1*ln(abs(cos(-5*x))) ,x)) -(+10*arccos(10*x)^10 +12*arccot(12*x)^12 -1*arccsc(-1*x)^1 +2*arcsec(2*x)^2 +9*arcsin(9*x)^9 +11*arctan(11*x)^11 -4*cos(-4*x)^4 +6*co
t(6*x)^6 -8*csc(-8*x)^8 +7*sec(7*x)^7 +3*sin(3*x)^3 -5*tan(-5*x)^5 ))
```

Hình 3. Kết quả chạy chương trình ví dụ 2.

```
> op(−1, simplify( + diff( + 10 * x * (arccos(10 x)) ^10 − 10 * sqrt(1 − (10) ^2 * x^2) * (arccos(10 x)) ^9 − 900 * x * (arccos(10 x)) ^8 + 720 * sqrt(1 − (10) ^2 * x^2)
  * (arccos(10 x)) ^7 + 50400 * x * (arccos(10 x)) ^6 − 30240 * sqrt(1 − (10) ^2 * x^2) * (arccos(10 x)) ^5 − 1512000 * x * (arccos(10 x)) ^4 + 604800 * sqrt(1 − (10) ^2 * x^2)
  * (arccos(10 x)) ^3 + 18144000 * x * (arccos(10 x)) ^2 − 3628800 * sqrt(1 − (10) ^2 * x^2) * (arccos(10 x)) ^1 − 36288000 * x * (arccos(10 x)) ^0 , x) + diff( + 12 * x
  * arccot(12 * x) ^12, x) + ((6) * ((arccot(12 * x) ^11) * (diff(ln(1 + (12) ^2 * x^2), x)))) + convert( + diff(−1 * x * arccsc(−1 * x) ^1, x) + (1 * diff((ln(abs(−1 x)
  + sqrt((−1) ^2 * x^2−1))), x)) , 'piecewise', x) + convert( + diff( + 2 * x * arcsec(2 * x) ^2, x) − (2 * ((arcsec(2 * x) ^1) / (sqrt((2) ^2 * x^2−1)) * (diff(abs(2 * x),
  x)))) , 'piecewise', x) + diff( + 9 * x * (arcsin(9 x)) ^9 + 9 * sqrt(1 − (9) ^2 * x^2) * (arcsin(9 x)) ^8 − 648 * x * (arcsin(9 x)) ^7 − 504 * sqrt(1 − (9) ^2 * x^2) * (arcsin(9 x))
  ^6 + 27216 * x * (arcsin(9 x)) ^5 + 15120 * sqrt(1 − (9) ^2 * x^2) * (arcsin(9 x)) ^4 − 544320 * x * (arcsin(9 x)) ^3 − 181440 * sqrt(1 − (9) ^2 * x^2) * (arcsin(9 x)) ^2
  + 3265920 * x * (arcsin(9 x)) ^1 + 362880 * sqrt(1 − (9) ^2 * x^2) * (arcsin(9 x)) ^0 , x) + diff( + 11 * x * arctan(11 * x) ^11, x) − ((11/2) * ((arctan(11 * x) ^10)
  * (diff(ln(1 + (11) ^2 * x^2), x)))) + diff( + 1/4 * (cos(−4 * x)) ^3 * sin(−4 * x) + 3/8 * (cos(−4 * x)) ^1 * sin(−4 * x) − 3/2 * x , x) + evalc(diff(−1/5 * (cot(6 x))
  ^5 + 1/3 * (cot(6 x)) ^3 − 1 * (cot(6 x)) ^1 − 6 * x , x)) + evalc(diff(−1/7 * (csc(−8 x)) ^7 * cos(−8 x) − 6/35 * (csc(−8 x)) ^5 * cos(−8 x) − 8/35 * (csc(−8 x)) ^3
  * cos(−8 x) − 16/35 * (csc(−8 x)) ^1 * cos(−8 x) , x)) + evalc(diff( + 1/6 * (sec(7 x)) ^6 * sin(7 x) + 5/24 * (sec(7 x)) ^4 * sin(7 x) + 5/16 * (sec(7 x)) ^2 * sin(7 x)
  + 5/32 * ln(abs((1 + sin(7 x)) / (1−sin(7 x)))) , x)) + diff(−1/3 * (sin(3 * x)) ^2 * cos(3 * x) − 2/3 * (sin(3 * x)) ^0 * cos(3 * x) , x) + evalc(diff( + 1/4 * (tan(−5
  * x)) ^4 − 1/2 * (tan(−5 * x)) ^2 − 1 * ln(abs(cos(−5 * x))) , x)) − ( + 10 * arccos(10 * x) ^10 + 12 * arccot(12 * x) ^12 − 1 * arccsc(−1 * x) ^1 + 2 * arcsec(2 * x) ^2 + 9
  * arcsin(9 * x) ^9 + 11 * arctan(11 * x) ^11 − 4 * cos(−4 * x) ^4 + 6 * cot(6 * x) ^6 − 8 * csc(−8 * x) ^8 + 7 * sec(7 * x) ^7 + 3 * sin(3 * x) ^3 − 5 * tan(−5 * x) ^5 )))
                                                  0                                                                                  (38)
```

Hình 4. Kiểm thử kết quả ở hình 3 bằng Maple.