BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢN LÝ VÀ CÔNG NGHỆ THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CÔNG NGHỆ

BÁO CÁO TIẾN ĐỘ GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN 2024

HƯỚNG TỚI KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN 2025

Giảng viên tập huấn: ThS. Nguyễn Quản Bá Hồng
Sinh viên thực hiện: Phan Vĩnh Tiến – 220170017

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NGÀY 29 THÁNG 1 NĂM 2025

Mục lục

1 Đề thi Đại số

Bài toán B.1.

Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a (ở đây X là vector cột ứng với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t).

Lời giải.

(a) Khi $a = -1$ thì

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đây suy ra $\mathrm{r}(A) = 3$.

(b) Theo khai triển Laplace, ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{vmatrix} - (a+1) \begin{vmatrix} a+3 & 0 & a+2 \\ a+2 & 1 & a+1 \\ 0 & a+3 & 1 \end{vmatrix} + (a+2) \begin{vmatrix} a+3 & 1 & a+2 \\ a+2 & 0 & a+1 \\ 0 & a+2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a+3 & 1 \end{vmatrix} + (a+2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - (a+1) \left(\begin{vmatrix} a+3 & 0 \\ a+2 & 1 \end{vmatrix} - (a+3) \begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(a+2)\left(\begin{vmatrix} a+3 & 1 \\ a+2 & 0 \end{vmatrix} - (a+2)\begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix}\right) \\
&= \left(1-(a+3)(a+1)-(a+2)^2\right) - (a+1)(a+3) - (a+2)^2 \\
&+ \left((a+1)(a+3)-(a+2)^2\right)\begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= -4a^2 - 16a - 13 - \begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= -4a^2 - 16a - 12 \\
&= -4(a+1)(a+3).
\end{aligned}
$$

Như vậy $\det(A) > 0 \Leftrightarrow -4(a+1)(a+3) > 0 \Leftrightarrow -3 < a < -1$.

(c) Với $a = -1$, theo câu (a) ta có $\mathrm{r}(A) = 3$ nên số chiều của không gian nghiệm bằng $4 - \mathrm{r}(A) = 1$.

Với $a = -3$, ta có

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

từ đây suy ra $\mathrm{r}(A) = 3$ nên số chiều của không gian nghiệm bằng $4 - \mathrm{r}(A) = 1$.

Với $a \neq -1, -3$ thì $\det(A) \neq 0$ nên hệ phương trình $AX = 0$ có nghiệm duy nhất nên số chiều của không gian nghiệm bằng 0.

Bài toán B.2.

Cho A, B là hai ma trận vuông

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(a) Tìm một ma trận thực P có cấp bằng 2, sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm một ma trận thực R có cấp bằng 2, định thức bằng 1, sao cho $R^{-1}AR = B$.

Lời giải.

(a) Xét ma trận $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ có $\det(P) = 2\sqrt{2} \neq 0$ nên P khả nghịch.

Khi đó

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \operatorname{adj}(P) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

trong đó $\operatorname{adj}(P)$ là ma trận phụ hợp của ma trận P.

Kiểm tra bằng phép nhân ma trận, ta thấy

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

là ma trận đường chéo.

(b) Xét ma trận $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ có $\det(Q) = 1 \neq 0$ nên Q khả nghịch.

Khi đó

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \cdot \operatorname{adj}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

trong đó $\operatorname{adj}(Q)$ là ma trận phụ hợp của ma trận Q.

Kiểm tra bằng phép nhân ma trận, ta thấy

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Nhận xét. Câu (a) là một bài toán chéo hóa ma trận cơ bản. Câu (b) giải được bằng cách đồng nhất hệ số và giải hệ phương trình. Ma trận Q cần tìm có dạng tổng quát $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, khi đó điều kiện đầu tiên là $\det(Q) = 1$ hay $ad - bc = 1$. Ngoài ra, $Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \cdot \operatorname{adj}(Q) = \operatorname{adj}(Q) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Khi đó bằng phép nhân ma trận, ta có $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2cd - ab & 2d^2 - b^2 \\ a^2 - 2c^2 & ab - 2cd \end{pmatrix}$ nên từ đó ta phải có

$$\begin{pmatrix} 2cd - ab & 2d^2 - b^2 \\ a^2 - 2c^2 & ab - 2cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta chọn a, b, c, d thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ 2cd - ab = 0 \\ 2d^2 - b^2 = -2 \\ a^2 - 2c^2 = -1 \\ ad - 2cd = 0 \end{cases},$$

từ đó tìm được một bộ (a, b, c, d) thỏa mãn hệ phương trình trên là $(1, -2, 1, -1)$.

2 Đề thi Giải tích