BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢN LÝ VÀ CÔNG NGHỆ THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CÔNG NGHỆ

BÁO CÁO BÀI TẬP

TỔ HỢP VÀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ & GIẢI TÍCH

Giảng viên hướng dẫn: ThS. Nguyễn Quản Bá Hồng
Sinh viên thực hiện: Phan Vĩnh Tiến – 2201700177 – IT2207A

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NGÀY 13 THÁNG 7 NĂM 2025

Mục lục

Tiến trình

Tuần	Bài tập
1 (06/05)	1, 12
2 (13/05)	2, 3, 4, 16, 22, 21, 20, ??b
3 (20/05)	
4 (27/05)	
5 (05/06)	8, 7, 6, 5
6 (26/06)	
7 (03/07)	
8 (15/07)	

Phần I

Tổ hợp và Lý thuyết đồ thị

1 Các phép đếm nâng cao

1.1 Nguyên lý bù trừ

Định lý 1 (Inclusion–exclusion principle)**.** For any $n \in \mathbb{N}^\star$, and any finite sets $A_1, \ldots, A_n$, one has the identity

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n|,$$

which can be compactly written as

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

or

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \ne J \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|.$$

Định lý 2 (Inclusion–exclusion principle in probability)**.** For any $n \in \mathbb{N}^\star$, and for any events $A_1, \ldots, A_n$ in a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, in general

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right),$$

which can be written in closed form as

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\subset[n],\,|I|=k} \mathbb{P}(A_I), \tag{1}$$

where the last sum runs over all subsets I of the indices $1, \ldots, n$ which contain exactly k elements, and $A_I := \bigcap_{i\in I} A_i$ denotes the intersection of all those A_i with index in I.
In particular, if the probability of the intersection A_I only depends on the cardinality of I, i.e., for every $k \in [n]$, there is an a_k s.t. $a_k = \mathbb{P}(A_I)$ for every $I \in [n]$ with $|I| = k$, then (1) simplifies to

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} a_k.$$

In addition, if the events A_i are independent & identically distributed (i.i.d.), then $\mathbb{P}(A_i) = p$, $\forall i$, and

$a_k = p^k$, hence

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n.$$

Bài toán 1. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, xét A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là n tập hợp hữu hạn bất kỳ.

(a) Chứng minh rằng

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|.$$

(b) Chứng minh rằng khi lấy tổng $m < n$ hạng tử đầu tiên của vế phải, nếu m chẵn thì ta có chặn dưới và nếu m lẻ thì ta có chặn trên của $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$.

Lời giải.

(a) Trường hợp $n = 1, 2$, đẳng thức dễ dàng chứng minh.

Giả sử đẳng thức đúng đến $n = N$, tức ta đã có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| = \sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n = N + 1$, tức cần chứng minh

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| = \sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \ldots, N+1\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|.$$

Thật vậy, áp dụng $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ và giả thiết quy nạp, ta được

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| + |A_{N+1}| - \left|A_{N+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)\right| \\
&= \sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right| + |A_{N+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i)\right|
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng tập con khác rỗng của $\{1, 2, \ldots, N+1\}$ gồm hai loại:

- các tập con của $\{1, 2, \ldots, N\}$, ký hiệu $S_1, S_2, \ldots, S_m$ (không có phần tử thứ $N+1$);
- tập $\{N+1\}$ và các tập $\{N+1\} \cup S_i$ (có phần tử thứ $N+1$).

Suy ra

$$\sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \ldots, N+1\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right| = \sum_{\substack{T \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right| + |A_{N+1}| + \sum_{\substack{T \subseteq \{N+1\} \cup S_i \\ T \neq \varnothing}} (-1)^{|T|+1} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N}(A_{N+1}\cap A_i)\right| = -\left(\sum_{\substack{T\subseteq\{N+1\}\cup S_i\\ T\neq\varnothing}}(-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T}A_i\right|\right).$$

Thật vậy, tiếp tục áp dụng giả thiết quy nạp cho vế trái ta được

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{N}(A_{N+1}\cap A_i)\right| &= \sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,N\}\\ T\neq\varnothing}}(-1)^{|T|+1}\left|\bigcap_{i\in T}(A_{N+1}\cap A_i)\right|\\ &= -\left(\sum_{\substack{T\subseteq\{1,2,\ldots,N\}\\ T\neq\varnothing}}(-1)^{|T|+2}\left|\left(\bigcap_{i\in T}A_i\right)\cap A_{N+1}\right|\right)\\ &= -\left(\sum_{\substack{T'\subseteq\{N+1\}\cup S_i\\ T'\neq\varnothing}}(-1)^{|T'|+1}\left|\bigcap_{i\in T'}A_i\right|\right).\end{aligned}$$

Như vậy đẳng thức cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

(b) Đặt $P(n,\, k) = (-1)^{k+1}\displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\right|$ đẳng thức vừa chứng minh có thể được viết lại

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\right| = \sum_{k=1}^{n}P(n,\, k).$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $m\in\mathbb{Z}^+$, $m<n$ thì

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| \le \sum_{k=1}^{m}P(n,\, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| \ge \sum_{k=1}^{m}P(n,\, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn}$$

bằng phương pháp quy nạp toán học.

Trường hợp $n=1$, mệnh đề hiển nhiên đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến $n=N$, tức ta đã có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right| \le \sum_{k=1}^{m}P(N,\, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right| \ge \sum_{k=1}^{m}P(N,\, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn.}$$

Ta cần phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=N+1$, tức cần chứng minh

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1}A_i\right| \le \sum_{k=1}^{m}P(N+1,\, k) \text{ nếu } m \text{ lẻ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N+1}A_i\right| \ge \sum_{k=1}^{m}P(N+1,\, k) \text{ nếu } m \text{ chẵn.}$$

Thật vậy, áp dụng $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, ta được

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| = |A_{N+1}| + \left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i)\right|.$$

Xét trường hợp m chẵn, trường hợp m lẻ việc chứng minh hoàn toàn tương tự. Khi m chẵn thì $m-1$ lẻ, áp dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| \geq \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) \text{ và } \left|\bigcup_{i=1}^{N} (A_{N+1} \cap A_i)\right| \leq \sum_{k=1}^{m-1} Q(N,\, k),$$

với $Q(N,\, k) = (-1)^{k+1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \left|\bigcap\limits_{j=1}^{k} (A_{N+1} \cap A_{i_j})\right| = (-1)^{k+1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \left|A_{N+1} \cap \left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right|$.
Suy ra

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq |A_{N+1}| + \sum_{k=1}^{m} P(N,\, k) - \sum_{k=1}^{m-1} Q(N,\, k) = |A_{N+1}| + P(N,\, 1) + \sum_{k=2}^{m} \left(P(N,\, k) - Q(N,\, k-1)\right).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
P(N+1,\, k) &= (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N+1} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| \\
&= (-1)^{k+1} \left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k = N+1}\right) \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right) \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq N} \left|\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j}\right) \cap A_{N+1}\right| \\
&= P(N,\, k) - Q(N,\, k-1)
\end{aligned}$$

và

$$|A_{N+1}| + P(N,\, 1) = |A_{N+1}| + \sum_{1 \leq i \leq N} |A_i| = \sum_{1 \leq i \leq N+1} |A_i| = P(N+1,\, 1).$$

Do đó $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{N+1} A_i\right| \geq P(N+1,\, 1) + \sum\limits_{k=2}^{m} P(N+1,\, k) = \sum\limits_{k=1}^{m} P(N+1,\, k)$. Như vậy đối với trường hợp m chẵn, mệnh đề cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi n nguyên dương. Hoàn tất chứng minh.

1.2 Nguyên lý quy nạp

1.3 Lý thuyết tập hợp

Bài toán 2. Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

(i) $Z \subset A$;

(ii) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in A$;

(iii) $x+y \in A$, $xy \in A$ với mọi x, $y \in A$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in A$.

Lời giải.
Vì $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in A$, theo (iii) ta có $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \in A \iff 5+2\sqrt{6} \in A \iff 2\sqrt{6} \in A$.
Suy ra $2\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \in A$ hay $4\sqrt{3}+6\sqrt{2} \in A$. Kéo theo $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2} = 5(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(4\sqrt{3}+6\sqrt{2}) \in A$.

1.4 Quy tắc đếm

Bài toán 3. Cho m, $n \in \mathbb{Z}^+$, $2m \le n$. Đếm số các dãy a_1, a_2, $\ldots$, a_n chứa m số 0 và $n-m$ số 1, thỏa mãn không có hai phần tử nào kề nhau đều là số 0.

Lời giải. Xếp m số 0 thành hàng ngang, khi đó sẽ có $m-1$ khoảng trống ở giữa (cần chèn vào tối thiểu một số 1) và 2 khoảng trống ở hai đầu. Như vậy số dãy thỏa mãn chính là số nghiệm nguyên của phương trình $a_1+a_2+\cdots+a_{m+1} = n-m$, với a_1, $a_{m+1} \ge 0$ và $a_i \ge 1\,(2 \le i \le m)$. Đặt $b_1 = a_1+1$, $b_{m+1} = a_{m+1}+1$ thì ta cần tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $b_1+a_2+\cdots+a_m+b_{m+1} = n-m+2$. Theo bài toán chia kẹo Euler, phương trình có tất cả $\dbinom{n-m+1}{m}$ cách, cũng là số các dãy a_1, a_2, $\ldots$, a_n cần tìm.

Bài toán 4. Đặt $f(n)$ là số tập con của $[n]$. Chứng minh rằng $f(n) = 2^n$ với mọi n nguyên dương.

Lời giải. Trường hợp $n = 1$, có hai tập con của $[1]$ là $\varnothing$, $\{1\}$ nên $f(1) = 2^1$.
Giả sử mệnh đề đúng tới $n = N$, tức ta đã có $f(N) = 2^N$. Xét các tập con của $[N+1]$, có hai loại

- các tập con của $[N]$ (không chứa phần tử $N+1$), có 2^N tập;
- các tập hợp là hợp của $\{N+1\}$ và từng tập con của $[N]$, cũng có 2^N tập.

Như vậy $f(N+1) = 2^N + 2^N = 2^{N+1}$ nên mệnh đề cũng đúng với $n = N+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 5. Giả sử rằng $n \in \mathbb{Z}^+$ người đưa n chiếc mũ của họ cho mỗi người kiểm tra mũ. Đặt $f(n)$ là số cách trả lại các chiếc mũ, sao cho mỗi người có đúng 1 mũ và không ai nhận lại mũ của họ lúc ban đầu.

(a) Chứng minh rằng $f(n) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$ với mọi số nguyên dương n.

(b) Chứng minh rằng $f(n)$ là số nguyên gần nhất với $\frac{n!}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

(a) Khi $n = 1$ thì $f(1) = 0$ (không có cách nào vì một người không thể nhận mũ của chính họ). Khi $n = 2$ thì $f(2) = 1$ (có duy nhất một cách trả lại các chiếc mũ thỏa mãn là đổi mũ cho nhau). Khi $n = 3$ thì $f(3) = 2$ (xét 3 người là A, B, C; giả sử A nhận lại mũ của B, B có thể nhận lại mũ của A hoặc C, nhưng B chỉ có thể nhận lại mũ của C để C không nhận lại mũ của chính mình, nên trường hợp này có 1 cách; tương tự nếu giả sử A nhận lại mũ của C thì cũng sẽ có 1 cách; như vậy tổng tất cả có 2 cách).

Ta có nhận xét sau (derangement, [1]): mỗi người có thể nhận được bất kỳ chiếc mũ nào trong số $n-1$ chiếc mũ không phải của mình. Gọi chiếc mũ mà người P_1 nhận được là h_i và xét đến chủ sở hữu của h_i: P_i nhận được mũ của P_1, h_1 hoặc 1 chiếc mũ khác. Theo đó, bài toán chia thành 2 trường hợp có thể xảy ra:

- P_i nhận được 1 chiếc mũ khác với h_1. Trường hợp này tương đương với việc giải bài toán với $n-1$ người và $n-1$ chiếc mũ vì đối với mỗi $n-1$ người ngoài P_1 thì có đúng 1 chiếc mũ trong số $n-1$ chiếc mũ còn lại mà họ không được nhận (đối với bất kỳ P_j nào ngoài P_i, chiếc mũ không được nhận là h_j, trong khi đối với P_i thì là h_1). Một cách khác để thấy điều này là đổi tên h_1 thành h_i, trong đó sự sắp xếp rõ ràng hơn: đối với bất kỳ j nào từ 2 đến n, P_j không thể nhận được h_j.
- P_i nhận được h_1. Trong trường hợp này, bài toán được rút gọn thành $n-2$ người và $n-2$ mũ, vì P_1 nhận được mũ của h_i và P_i nhận được mũ của h_1, về cơ bản là loại cả hai ra khỏi việc xem xét thêm.

Đối với mỗi $n-1$ mũ mà P_1 có thể nhận được, số cách mà $P_2, \ldots, P_n$ có thể nhận được mũ là tổng số đếm của 2 trường hợp. Từ đây ta có

$$f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(n) = (n-1)(f(n-1) + f(n-2)),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+,\ n \geq 3.$$

Từ công thức truy hồi trên, ta có $f(n) - nf(n-1) = -f(n-1) + (n-1)f(n-2)$ nên truy hồi ngược về thì $f(n) - nf(n-1) = (-1)^{n-2}(f(2) - f(1)) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$. Suy ra $\frac{f(n)}{n!} = \frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$, truy hồi ngược về thì được $\frac{f(n)}{n!} = \frac{f(1)}{1!} + \sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$. Như vậy $f(n) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$ với mọi số nguyên dương n.

(b) Theo công thức khai triển chuỗi Maclaurin của hàm số e^x tại $x = -1$, ta có

$$\left|\frac{n!}{\mathrm{e}} - f(n)\right| = \left|n!\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} - n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right| = \left|n!\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right|.$$

Trường hợp 1. n chẵn. Khi đó

$$n!\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = -\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

Vì $-\dfrac{1}{(n+1)\cdots(n+2k-1)}+\dfrac{1}{(n+1)\cdots(n+2k-1)(n+2k)} = \dfrac{-n-2k+1}{(n+1)\cdots(n+2k-1)(n+2k)} < 0$ nên $n!\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} < 0$. Mặt khác, vì $\dfrac{1}{(n+1)\cdots(n+2k)}-\dfrac{1}{(n+1)\cdots(n+2k-1)(n+2k+1)} = \dfrac{n+2k}{(n+1)\cdots(n+2k-1)(n+2k+1)} > 0$ nên $n!\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} > -\frac{1}{n+1}$. Từ đó suy ra $-\dfrac{1}{n+1} < n!\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} < 0$.

Trường hợp 2. n lẻ. Bằng việc ghép cặp tương tự trường hợp trên, ta chứng minh được $0 < n!\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} < \frac{1}{n+1}$.

Như vậy trong mọi trường hợp thì $\left|n!\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| < \dfrac{1}{n+1}$. Do đó $\left|\dfrac{n!}{\mathrm{e}}-f(n)\right| < \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{2}$ với mọi số nguyên dương n nên $f(n)$ là số nguyên gần nhất với $\dfrac{n!}{\mathrm{e}}$.

Bài toán 6. Cho số nguyên dương n. Đặt $f(n)$ là số các tập con của $[n]$ không chứa bất kỳ hai số nguyên dương liên tiếp nào.

(a) Tính $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

(b) Chứng minh rằng $f(n) = f(n-1)+f(n-2)$ với mọi n nguyên dương, $n \ge 3$.

(c) Chứng minh rằng $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+2}-\overline{\tau}^{n+2}\right)$, với $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\tau} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Gọi S_n là tập hợp các tập con của $[n]$ không chứa bất kỳ hai số nguyên dương liên tiếp nào.

(a) $S_1 = \{\varnothing, \{1\}\}$ nên $f(1) = 2$;
$S_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$ nên $f(2) = 3$;
$S_3 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ nên $f(3) = 5$;
$S_4 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$ nên $f(4) = 8$.

(b) Ta phân S_n thành hai tập:
- tập những tập con của $[n]$ không chứa phần tử n: các tập như vậy chính là các tập con của $[n-1]$, nên sẽ có tất cả $f(n-1)$ tập.
- tập những tập con của $[n]$ có chứa phần tử n: các tập như vậy sẽ không chứa phần tử $n-1$, nên sẽ là các tập con của $[n-2]$ hợp với tập $\{n\}$, nên sẽ có tất cả $f(n-2)$ tập.

Như vậy $f(n) = f(n-1)+f(n-2)$.

(c) Xét phương trình đặc trưng $\tau^2 = \tau+1$, phương trình có nghiệm $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\overline{\tau} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Suy ra $f(n) = A\cdot\tau^n + B\cdot\overline{\tau}^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Vì $A\cdot\tau + B\cdot\overline{\tau} = f(1) = 2$ và $A\cdot\tau^2 + B\cdot\overline{\tau}^2 = f(2) = 3$, nên

$A = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$ và $B = \dfrac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$. Suy ra $f(n) = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cdot \tau^n + \dfrac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \cdot \overline{\tau}^n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{n+2} - \overline{\tau}^{n+2})$.

1.5 Các số Stirling

Định nghĩa 1 (Stirling numbers of the 2nd kind)**.** Let $s, t \in \mathbb{N}$. We define $\left\{ {s \atop t} \right\}$ to be the number of ways of putting s distinct balls into t identical boxes with at least 1 ball per box. Equivalently, $\left\{ {s \atop t} \right\}$ is the number of ways of partitioning a set of s elements, i.e.,

$$[s] = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, s\} & \text{if } s > 0, \\ [0] = \varnothing & \text{if } s = 0. \end{cases}$$

into t nonempty parts. $\left\{ {s \atop t} \right\}$ is called a Stirling number of the 2nd kind (some denote the Stirling numbers of the 2nd kind by $S(s, t)$ or $s_2(s, t)$).

Định lý 3 ([2], Thm. 6.9, p. 198)**.** Let $s, t \in \mathbb{N}$, and let $R = \{\infty \cdot U_1, \infty \cdot U_2, \ldots, \infty \cdot U_t\}$ be a multiset with t types of elements, each with an infinite repetition number. Then the following numbers are equal: (a) The number of ways of placing s distinct balls into t nonempty distinct boxes. (b) The number of s-permutations of R that contain each of $U_1, \ldots, U_t$ at least once. (c) $t! \cdot \left\{ {s \atop t} \right\}$.

Bài toán 7. Cho $n, k \in \mathbb{Z}^+$ và $n \geq k$. Mỗi lần mở ứng dụng ngôn ngữ yêu thích, 1 quảng cáo được chọn ngẫu nhiên trong số k lựa chọn có thể xuất hiện. Giả sử thuật toán có khả năng chọn bất kỳ quảng cáo nào ở mỗi lần là như nhau (uniformly distributed). Tính xác suất sau n lần mở ứng dụng bạn xem đúng k quảng cáo.

Lời giải 1. Ở mỗi lượt xem có k cách chọn quảng cáo, nên trong n lượt xem có tất cả k^n cách chọn quảng cáo, hay $|\Omega| = k^n$.
Đặt A là biến cố "sau n lần mở ứng dụng bạn xem đúng k quảng cáo", khi đó số trường hợp thuận lợi của A cũng chính là số cách phân hoạch n lượt xem phân biệt vào k loại quảng cáo phân biệt. Theo định lý 3, ta có $|A| = k! \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$.
Như vậy xác suất sau n lần mở ứng dụng xem đúng k quảng cáo là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(k-1)!}{k^{n-1}} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Lời giải 2. Đặt A là biến cố "sau n lần mở ứng dụng bạn xem đúng k quảng cáo", A_i là biến cố "sau n lần mở ứng dụng không xem được quảng cáo thứ i" (với $i = 1, 2, \ldots, k$). Ta có

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right),$$

trong đó $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$ là xác suất để sau n lần mở ứng dụng chưa xem được ít nhất một quảng cáo.
Theo định lý 2, ta có

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right).$$

Ta có

- $\mathbb{P}(A_i)$: xác suất sau n lần mở ứng dụng không xem được quảng cáo thứ i; trong mỗi lượt xem quảng cáo, xác suất không xem được quảng cáo thứ i là $1 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k}$, do các lần xem là độc lập nên

$$\mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n,$$

  có tất cả $\binom{k}{1}$ biến cố A_i như vậy.
- $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$ $(i < j)$: xác suất sau n lần mở ứng dụng không xem được quảng cáo thứ i và thứ j; trong mỗi lượt xem quảng cáo, xác suất không xem được quảng cáo thứ i và thứ j là $1 - \dfrac{2}{k} = \dfrac{k-2}{k}$, nên

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \left(\frac{k-2}{k}\right)^n,$$

  có tất cả $\binom{k}{2}$ biến cố $A_i \cap A_j$ như vậy.
- Tổng quát, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right)$: xác suất sau n lần mở ứng dụng không xem được quảng cáo thứ $i_1, i_2, \ldots, i_m$, tương tự trên ta có

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) = \left(\frac{k-m}{k}\right)^n,$$

  có tất cả $\binom{k}{m}$ biến cố $\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}$ như vậy.

Suy ra

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \binom{k}{m} \left(\frac{k-m}{k}\right)^n.$$

Như vậy xác suất cần tìm sẽ là

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \binom{k}{m} \left(\frac{k-m}{k}\right)^n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m} \binom{k}{m} \left(\frac{k-m}{k}\right)^n.$$

Bài toán 8. Cho n, $k \in \mathbb{Z}^+$ và $n \ge k$. Mỗi lần mở ứng dụng ngôn ngữ yêu thích, 1 quảng cáo được chọn ngẫu nhiên trong số k lựa chọn có thể xuất hiện. Giả sử thuật toán có khả năng chọn bất kỳ quảng cáo nào ở mỗi lần là như nhau (uniformly distributed). Tính xác suất bạn cần đúng n lần để xem tất cả k quảng cáo.

Để cần đúng n lần để xem hết tất cả k quảng cáo thì phải thỏa mãn hai điều kiện:

- sau n lần mở, tất cả k quảng cáo được xem ít nhất 1 lần;
- sau $n-1$ lần mở, chỉ xem đúng $k-1$ quảng cáo.

Lời giải 1. Theo bài toán 7, số cách chọn để sau $n-1$ lần mở xem đúng $k-1$ quảng cáo bằng $(k-1)!\cdot\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$.

Chọn $k-1$ quảng cáo trong k quảng cáo để xuất hiện trong $n-1$ lần xem đầu tiên, có $\binom{k}{k-1}$ cách; chọn quảng cáo còn lại để xuất hiện trong lần xem cuối, có 1 cách.

Do đó tổng số cách chọn k quảng cáo thỏa mãn đề bài bằng $\binom{k}{k-1}\cdot(k-1)!\cdot\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$, như vậy xác suất sẽ bằng

$$\frac{\binom{k}{k-1}(k-1)!}{k^n}\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} = \frac{(k-1)!}{k^{n-1}}\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}.$$

Lời giải 2. Nhận xét rằng, để trong n lần xem đúng k quảng cáo có hai trường hợp

- trong $n-1$ lần đầu đã xem hết quảng cáo: tức trong $n-1$ lần xem đúng k quảng cáo;
- trong $n-1$ lần đầu chưa xem hết quảng cáo: tức trong $n-1$ lần xem đúng $k-1$ quảng cáo, lần thứ n xem quảng cáo còn lại (ta cần tính xác suất của trường hợp này).

Theo bài toán 7, xác suất để trong n lần xem đúng k quảng cáo bằng $\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\left(\frac{k-m}{k}\right)^n$ và xác suất để trong $n-1$ lần xem đúng k quảng cáo bằng $\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\left(\frac{k-m}{k}\right)^{n-1}$. Khi đó xác suất cần tính sẽ bằng

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\left(\frac{k-m}{k}\right)^n - \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\left(\frac{k-m}{k}\right)^{n-1} = \sum_{m=0}^{k}(-1)^{m+1}\binom{k}{m}\frac{m(k-m)^{n-1}}{k^n}.$$

1.6 Số Bell

1.7 Số Catalan

1.8 Số Fibonacci & Lucas

1.9 Đếm bằng hai cách

1.10 Quan hệ hồi quy

Bài toán 9 ([2], P1.3.3, p. 22)**.** Giả sử h_n biểu thị số cách phủ mảng $2 \times n$ bằng 1×2 domino. Tìm h_1, h_2, h_3, & 1 quan hệ đệ quy cho h_n. Sử dụng chúng để tìm h_8.

Lời giải. Với $n = 1$ có 1 cách nên $h_1 = 1$. Với $n = 2$ có 2 cách (đặt 2 miếng domino cùng dọc, hoặc cùng ngang). Với $n \geq 2$, nếu ô đầu tiên là domino dọc thì còn lại mảng $2 \times (n-1)$ nên có h_{n-1} cách; nếu ô đầu tiên là domino ngang thì cũng phải có 1 domino ngang đặt song song bên dưới, khi đó còn lại mảng $2 \times (n-2)$ nên có h_{n-2} cách. Như vậy $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.

Bài toán 10 ([2], P1.3.8, p. 23)**.** Bạn làm việc tại 1 đại lý ô tô bán 3 mẫu xe: Một xe bán tải, 1 xe SUV, & 1 xe hybrid nhỏ gọn. Công việc của bạn là đỗ những chiếc xe này thành 1 hàng. Xe bán tải & xe SUV chiếm 2 chỗ trong khi xe hybrid chiếm 1 chỗ. Giả sử $n \in \mathbb{N}^\star$ & giả sử $f(n)$ là số cách sắp xếp xe trong đúng n chỗ. Tìm 1 hệ thức đệ quy cho $f(n)$ & sử dụng nó để tìm $f(10)$, số cách sắp xếp xe nếu bạn có 10 chỗ đỗ xe.

Lời giải. Với $n = 1$ thì có 1 cách để sắp xếp xe (1 xe hybrid) nên $f(1) = 1$. Với $n = 2$ thì có 3 cách sắp xếp xe (2 xe hybrid, 1 xe bán tải, 1 xe SUV). Với $n \geq 2$, nếu xe đầu hàng là xe hybrid thì còn $n-1$ chỗ nên có $f(n-1)$ cách xếp, nếu xe đầu hàng là xe bán tải hoặc xe SUV thì còn $n-2$ chỗ nên có $f(n-2)$ cách xếp. Như vậy $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$ với mọi $n \geq 2$.

Bài toán 11 ([2], P1.3.10, pp. 23–24)**.** Tại 1 bữa tiệc tối trên tàu vũ trụ Enterprise, có 3 dạng sống hiện diện: Con người, người Klingon, & Romulan. Bàn ăn là 1 tấm ván dài $1 \times n$, & các dạng sống ngồi ở 1 phía của bàn, cạnh nhau. Từ mỗi dạng sống có $> n$ cá thể hiện diện, & do đó chỉ có tổng cộng n ngồi vào bàn. Vấn đề duy nhất là không có 2 con người nào muốn ngồi cạnh nhau. Giả sử h_n biểu thị số cách khác nhau để n cá nhân có thể ngồi vào bàn ăn. Giả sử rằng tất cả con người đều giống nhau, giống như tất cả người Klingon & tất cả người Romulan. (a) h_1, h_2 là gì? (b) Trong các câu sau, câu nào (nếu có) là đúng, & câu nào là sai? (i) $h_n = 3h_{n-1} - h_{n-2}$. (ii) $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$. (iii) $h_n = 3h_{n-1} - (n-1)!$. (iv) $h_n = h_{n-1} + 3h_{n-2} + 2h_{n-3}$. Đưa ra lý lẽ & đầy đủ cho câu trả lời của bạn.

Lời giải. Ký hiệu H là con người, K là Klingon và R là Romulan. Với $n = 1$, có 3 cách xếp (hoặc H, hoặc K, hoặc R) nên $h_1 = 3$. Với $n = 2$ có 8 cách xếp (HK, HR; KH, KK, KR; RH, RK, RR) nên $h_2 = 8$. Với $n \geq 2$, nếu người đầu tiên không phải là con người (tức là Klingon hoặc Romulan), khi đó trong mỗi trường hợp thì $n-1$ chỗ ngồi còn lại sẽ được sắp xếp theo h_{n-1} cách; nếu người đầu tiên là con người thì người tiếp theo phải là Klingon hoặc Romulan, khi đó trong mỗi trường hợp thì $n-2$ chỗ ngồi còn lại sẽ được sắp xếp theo h_{n-2} cách. Như vậy $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.

2 Nhị thức Newton

2.1 Nhị thức Newton

Bài toán 12.

(a) Khai triển $(a+b+c)^n$.

(b) Khai triển $(a+b+c+d)^n$.

(c) Khai triển $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\right)^n$.

Lời giải.

(a) $(a+(b+c))^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot (b+c)^i = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \cdot b^{i-j} \cdot c^j\right)$

$= \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j} a^{n-i} b^{i-j} c^j.$

(b) $(a+b+c+d)^n = (a+(b+c+d))^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot (b+c+d)^i$

$= \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot \left(\sum\limits_{j=0}^{i} \sum\limits_{k=0}^{j} \binom{i}{j}\binom{j}{k} b^{i-j} c^{j-k} d^k\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{i} \sum\limits_{k=0}^{j} \binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k} a^{n-i} b^{i-j} c^{j-k} d^k.$

(c) Ta sẽ chứng minh quy nạp theo m rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{i_{m-2}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{m-2}}{i_{m-1}} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2} \cdots a_{m-1}^{i_{m-2}-i_{m-1}} a_m^{i_{m-1}}\right).$$

Với $m = 1, 2, 3$ thì đẳng thức trên đúng.

Giả sử đẳng thức trên đúng tới $m = M$, tức ta đã có

$$\left(\sum_{i=1}^{M} a_i\right)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_{M-1}=0}^{i_{M-2}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{M-2}}{i_{M-1}} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2} \cdots a_{M-1}^{i_{M-2}-i_{M-1}} a_M^{i_{M-1}}\right).$$

Ta cần chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $m = M+1$, tức cần chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i\right)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_M=0}^{i_{M-1}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{M-1}}{i_M} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2} \cdots a_M^{i_{M-1}-i_M} a_{M+1}^{i_M}\right).$$

Thật vậy, áp dụng Nhị thức Newton và giả thiết quy nạp ở trên ta được,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i\right)^n &= \sum_{i_1=0}^{n} \binom{n}{i_1} a_1^{n-i_1} \left(\sum_{i=2}^{M+1} a_i\right)^{i_1} \\
&= \sum_{i_1=0}^{n} \binom{n}{i_1} a_1^{n-i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{i_1}\sum_{i_3=0}^{i_2}\cdots\sum_{i_M=0}^{i_{M-1}} \left(\binom{i_1}{i_2}\binom{i_2}{i_3}\cdots\binom{i_{M-1}}{i_M} a_2^{i_1-i_2} a_3^{i_2-i_3}\cdots a_{M+1}^{i_M}\right)\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{i_1}\cdots\sum_{i_M=0}^{i_{M-1}} \left(\binom{n}{i_1}\binom{i_1}{i_2}\cdots\binom{i_{M-1}}{i_M} a_1^{n-i_1} a_2^{i_1-i_2}\cdots a_M^{i_{M-1}-i_M} a_{M+1}^{i_M}\right).
\end{aligned}$$

Như vậy đẳng thức cũng đúng với $m = M + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học ta có điều phải chứng minh.

2.2 Đẳng thức tổ hợp

2.3 Chia kẹo Euler

3 Phân hoạch nguyên

3.1 Phân hoạch nguyên

Bài toán 13 ([2], P.7.1.7, p. 238)**.** Cho $n, j \in \mathbb{N}^\star$, $j \leq n$. Cho $\mathcal{A}$ là tập hợp các phân hoạch của n có ít nhất j phần bằng 1. $|\mathcal{A}|$ là gì theo hàm phân hoạch p?

Lời giải. Hàm sinh cho hàm phân hoạch $p(n)$ là

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

Hàm sinh cho các phân hoạch có ít nhất j phần bằng 1 là

$$G(x) = \left((x^1)^j + (x^1)^{j+1} + \cdots\right) \prod_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \frac{x^j}{1-x} \prod_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = x^j P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p(m) x^{m+j}.$$

Số phân hoạch của n cần tìm chính là hệ số của x^n trong $G(x)$, nên $m + j = n$ hay $m = n - j$. Như vậy $|\mathcal{A}| = p(n-j)$.

Bài toán 14 ([2], P.7.1.8, p. 238)**.** Cho $n, k \in \mathbb{N}^\star$ với $k \leq n$. Cho $\mathcal{A}$ là tập hợp các phân hoạch của n có ít nhất 1 phần bằng k. Tìm $|\mathcal{A}|$ theo hàm phân hoạch p.

Lời giải. Hàm sinh cho hàm phân hoạch $p(n)$ là

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

Hàm sinh cho các phân hoạch có ít nhất 1 phần bằng k là

$$G(x) = \left((x^k)^1 + (x^k)^2 + \cdots\right) \prod_{i=1,\, i\neq k}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \frac{x^k}{1-x^k} \prod_{i=1,\, i\neq k}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = x^k P(x).$$

Tương tự Bài 13 ta có $|\mathcal{A}| = p(n-k)$.

Bài toán 15 ([2], P.7.1.9, p. 238)**.** Xét $k \in \mathbb{N}^\star$ cố định. Chứng minh rằng $p_{n-k}(n) = p(k)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$.

Lời giải. Xét một phân hoạch của n thành $n-k$ phần $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k})$, trong đó $\sum \lambda_i = n$ và $\lambda_i \geq 1$. Xây dựng phân hoạch mới μ bằng cách đặt $\mu_i = \lambda_i - 1$. Khi đó tổng của phân hoạch mới là $\sum_{i=1}^{n-k} \mu_i = k$ và $\mu_i \geq 0$. Do đó μ là một phân hoạch của k thành $n-k$ phần không âm, từ đây có điều phải chứng minh.

3.2 Định lý số ngũ giác

4 Hàm sinh

4.1 Hàm sinh cơ bản

Bài toán 16. Xét $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$a_0 = 1 \text{ và } \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

(a) Gọi $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Chứng minh rằng $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(b) Chứng minh rằng $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$.

Lời giải.

(a) Ta có $F^2(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$. Suy ra $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(b) Ta có $F(x) = (1-x)^{-1/2}$, $F'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$, $F''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}(1-x)^{-5/2}$, từ đó quy nạp được

$$F^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}(1-x)^{-(2n+1)/2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Áp dụng khai triển Maclaurin, ta có

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

So sánh hệ số của x^n, suy ra

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

5 Lý thuyết đồ thị

5.1 Đồ thị cơ bản

Bài toán 17 ([2], P2.2.1, p. 58)**.** Vào đầu những năm 1970, Giải bóng bầu dục quốc gia bao gồm 2 hội nghị, mỗi hội nghị có 13 đội. Các quy tắc của giải đấu quy định rằng trong mùa giải kéo dài 14 tuần, mỗi đội sẽ chơi 11 trận với các đội trong hội nghị của mình & 3 trận với các đội trong hội nghị đối diện. Chứng minh rằng điều này là không thể.

Lời giải. Xem 13 đội trong từng hội nghị là 13 đỉnh trong một đồ thị đơn vô hướng. Mỗi trận đấu giữa hai đội trong nội bộ hội nghị là một cạnh nối hai đỉnh tương ứng trong đồ thị. Khi đó tổng bậc sẽ bằng $13 \cdot 11 = 143$ là số lẻ, mâu thuẫn với định lý Euler. Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 18 ([2], P2.2.2, p. 58)**.** Trong 1 đồ thị đơn hữu hạn, liệu tất cả các bậc của các đỉnh có thể khác nhau không? Hãy đưa ra 1 ví dụ trong đó tất cả các bậc đều khác nhau hoặc chứng minh rằng trong 1 đồ thị đơn hữu hạn, chúng ta luôn có thể tìm thấy ít nhất 2 đỉnh có cùng bậc.

Lời giải. Giả sử tồn tại đồ thị đơn n đỉnh có bậc các đỉnh đôi một khác nhau. Khi đó tập bậc đúng bằng $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Như vậy tồn tại một đỉnh có bậc $n-1$ (tức được nối với tất cả các đỉnh còn lại) và một đỉnh có bậc 0 (tức không nối với đỉnh nào). Điều này mâu thuẫn nên luôn tồn tại hai đỉnh có cùng bậc.

Bài toán 19 ([2], P2.2.3, p. 58)**.** Bạn được cung cấp 1 đồ thị đơn giản với $n \in \mathbb{N}^\star$ đỉnh. Bạn cũng biết rằng đồ thị là đồ thị hai phần. Số cạnh tối đa có thể có trong đồ thị này là bao nhiêu?

Lời giải. Xét hai phần của đồ thị hai phía G này là U và V. Để đồ thị có số cạnh tối đa, thì đồ thị G phải là đồ thị đầy đủ. Gọi k là số đỉnh trong U thì $n-k$ là số đỉnh trong V, khi đó số cạnh trong G bằng

$k(n-k)$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM thì $k(n-k) \leq \left(\frac{k+(n-k)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$. Tuy nhiên $k(n-k)$ là số nguyên nên $k(n-k) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

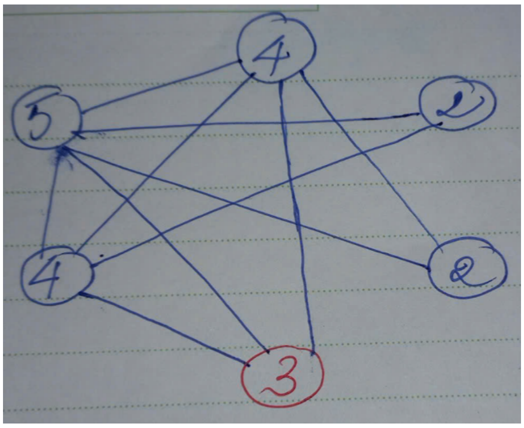
5.2 Dãy graphic

(a) Xét đồ thị đơn với dãy bậc $d_1, d_2, \ldots, d_p$, ta thêm vào các cạnh để trở thành đồ thị đầy đủ và bỏ đi những cạnh ban đầu. Khi đó đồ thị thu được là đồ thị với dãy bậc $p-d_p-1, \ldots, p-d_2-1, p-d_1-1$ nên ta có điều phải chứng minh.

(b) Áp dụng tính chất ở ý (a), dãy 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8 là một dãy graphic khi và chỉ khi dãy 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 là một dãy graphic. Theo thuật toán Havel-Hakimi, điều đó tương đương với 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 cũng là một dãy graphic; điều này đúng vì tồn tại đồ thị có dãy bậc là dãy này, chẳng hạn xét đồ thị 10 đỉnh trong đó các đỉnh được chia thành 5 cặp, mỗi đỉnh trong một cặp nối với nhau (hay nói cách khác là 5 đoạn thẳng rời nhau).

Bài toán 20 ([2], P10.1.14, p. 368). Xét đồ thị đơn 6 đỉnh có bậc của năm đỉnh lần lượt là 5, 4, 4, 2, 2. Hỏi bậc của đỉnh thứ sáu có thể nhận những giá trị nào?

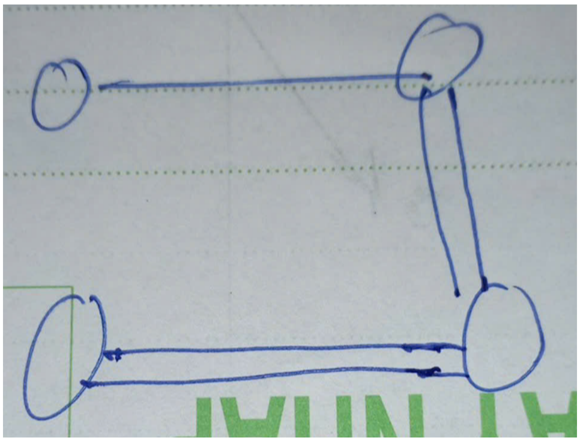
Lời giải. Theo định lý Euler, bậc của đỉnh còn lại phải là số lẻ, nên phải thuộc $\{1, 3, 5\}$.
Trường hợp 1. Bậc của đỉnh còn lại bằng 5. Khi đó, dãy bậc của đồ thị là 5, 5, 4, 4, 2, 2, là một dãy graphic. Theo thuật toán Havel-Hakimi, dãy 4, 3, 3, 1, 1 và 2, 2, 0, 0 cũng là các dãy graphic. Tuy nhiên, không tồn tại đồ thị đơn 4 đỉnh có dãy bậc là 2, 2, 0, 0; vì có hai đỉnh không nối với đỉnh nào, nên trong hai đỉnh còn lại chỉ có thể có bậc cao nhất bằng 1. Do đó bậc của đỉnh còn lại của đồ thị đã cho không thể bằng 5.
Trường hợp 2. Bậc của đỉnh còn lại bằng 3. Chẳng hạn, đồ thị như bên dưới thỏa mãn.



Trường hợp 3. Bậc của đỉnh còn lại bằng 1. Khi đó, dãy bậc của đồ thị là 5, 4, 4, 2, 2, 1, là một dãy graphic. Theo thuật toán Havel-Hakimi, dãy 3, 3, 1, 1, 0 và 2, 0, 0, 0 cũng là các dãy graphic. Tuy nhiên, hiển nhiên không tồn tại đồ thị đơn 4 đỉnh có dãy bậc 2, 0, 0, 0. Do đó bậc của đỉnh còn lại của đồ thị đã cho không thể bằng 1.
Như vậy bậc của đỉnh còn lại của đồ thị đã cho chỉ có thể là 3.

Bài toán 21 ([2], P10.1.15, p. 368)**.** Liệu có tồn tại đồ thị đơn mà các đỉnh có bậc là các số nguyên phân biệt? Câu hỏi tương tự cho đồ thị đa.

Lời giải. Giả sử tồn tại đồ thị đơn có n đỉnh thỏa mãn các đỉnh có bậc là các số nguyên phân biệt, ký hiệu các đỉnh là $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Khi đó bậc của mỗi đỉnh sẽ thuộc tập $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Tập hợp này có n phần tử, mà mỗi đỉnh trong đồ thị phải có bậc là các số nguyên phân biệt nên $\deg(v_i) = i$ với mọi i. Khi đó, đỉnh v_{n-1} có bậc là $n-1$ nên sẽ nối với tất cả các đỉnh còn lại, đỉnh v_0 có bậc là 0 nên không nối với đỉnh nào, điều này mâu thuẫn. Như vậy không tồn tại đồ thị đơn thỏa mãn đề.
Đối với đồ thị đa, câu trả lời là khẳng định. Thật vậy, chẳng hạn xét đồ thị đa có 4 đỉnh như hình bên dưới, khi đó bậc của các đỉnh lần lượt là 1, 2, 3, 4.



Bài toán 22 ([2], P10.1.16, p. 368)**.** Xét đồ thị đơn G có 94 đỉnh. Giả sử rằng tất cả các đỉnh của G đều có bậc là số lẻ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất ba đỉnh có cùng bậc.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh cho trường hợp tổng quát với đồ thị G có $2n$ đỉnh. Do G là đồ thị đơn nên bậc của mỗi đỉnh sẽ thuộc tập $\{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Mặt khác, tất cả các đỉnh của G đều có bậc lẻ nên bậc của mỗi đỉnh sẽ thuộc tập $U = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$. Giả sử chỉ có tối đa hai đỉnh có cùng bậc, thì khi đó mỗi phần tử trong U sẽ có đúng 2 đỉnh nhận làm bậc, suy ra dãy bậc của đồ thị G sẽ là

$$2n-1,\ 2n-1,\ 2n-3,\ 2n-3,\ \ldots,\ 3,\ 3,\ 1,\ 1.$$

Áp dụng thuật toán Havel-Hakimi, khi đó dãy

$$2n-2,\ 2n-4,\ 2n-4,\ \ldots,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0$$

phải là một dãy graphic. Tuy nhiên, không tồn tại đồ thị đơn có $2n-1$ đỉnh thỏa mãn tồn tại một đỉnh có bậc $2n-2$ và một đỉnh có bậc 0. Như vậy, có ít nhất ba đỉnh trong G có cùng bậc.

Bài toán 23. Cho $G = (V, E)$ là đồ thị tổng quát với $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}$ là bậc của các đỉnh. Chứng minh: Bậc cao nhất $d_{\max} := \max_{1 \le i \le p} d_i$ thỏa $d_{\max} \ge \dfrac{2|E|}{|V|}$.

Lời giải. Theo định lý Euler thì $d_1 + d_2 + \cdots + d_p = 2|E|$. Vì $d_{\max} \geq d_i, \forall i$ nên $2|E| \leq p \cdot d_{\max} = |V| \cdot d_{\max}$. Suy ra $d_{\max} \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$.

6 Lý thuyết Ramsey

6.1 Định lý Ramsey

6.2 Số Ramsey

7 Ứng dụng trong Lập trình thi đấu

Tài liệu

[1] Nguyễn Quản Bá Hồng. *Bài giảng Tổ hợp và Lý thuyết đồ thị*. 2025. URL: https://github.com/NQBH/advanced_STEM_beyond/blob/main/combinatorics/lecture/NQBH_combinatorics_graph_theory_lecture.pdf.

[2] Shahriar Shahriari. *An Invitation to Combinatorics*. Cambridge University Press, 2021.