BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢN LÝ VÀ CÔNG NGHỆ THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA CÔNG NGHỆ

BÁO CÁO TIẾN ĐỘ GIẢI ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

HƯỚNG TỚI KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN 2025

Giảng viên tập huấn: ThS. Nguyễn Quản Bá Hồng
Sinh viên thực hiện: Phan Vĩnh Tiến – 2201700177

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NGÀY 28 THÁNG 2 NĂM 2025

Mục lục

1 ĐỀ CHÍNH THỨC NĂM 2024

1.1 Nhận xét chung

Nhận xét tổng quan của em về đề thi, cơ bản cả hai phân môn không có sự thay đổi nhiều về format so với kỳ thi năm 2023. Tuy nhiên, theo quan điểm của em, đề thi 2024 có phần dễ chịu hơn so với đề thi năm trước đó, rút ra được từ phần làm bài của bản thân em trong phòng thi cũng như cut-off điểm cho từng mức giải.

Đại số. Đánh giá mức độ khó (chủ quan) giảm dần B.4 − B.5 − B.2 − B.3 − B.1.

Bài B.1. Hạng và định thức của ma trận, không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất.

Bài B.2. Chéo hóa ma trận, phương trình ma trận.

Bài B.3. Chuyển trạng thái Xích Markov.

Bài B.4. Tổ hợp đếm.

Bài B.5. Không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất, tính chia hết của số nguyên.

Giải tích. Đánh giá mức độ khó (chủ quan) giảm dần B.4 − B.5 − B.1 − B.3 − B.2.

Bài B.1. Giới hạn dãy số, chuỗi số.

Bài B.2. Tính liên tục và khả vi của hàm số.

Bài B.3. Sự tương giao của đồ thị hàm số, cực trị hàm số.

Bài B.4. Bài toán tổng hợp về hàm số.

Bài B.5. Ứng dụng của tích phân trong tính diện tích.

Trong bài báo cáo này, các bài mà em chưa làm lần lượt là A.5c (Đại số) và B.4ab, A.4a, A.5bc (Giải tích).

1.2 Đề thi Đại số

Bài toán B.1 + A.1.

Cho a là một số thực, A là ma trận phụ thuộc vào a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 & 0 \\ a+3 & 1 & 0 & a+2 \\ a+2 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a+2 & a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm hạng của ma trận A khi $a = -1$.

(b) Tìm tất cả các số thực a sao cho A có định thức dương.

(c) Biện luận số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $AX = 0$ theo a (ở đây X là vector cột ứng với các tọa độ lần lượt là x, y, z, t).

Lời giải.

(a) Khi $a = -1$ thì

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đây suy ra $\mathrm{r}(A) = 3$.

(b) Theo khai triển Laplace, ta có

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+2 & a+3 & 1 \end{vmatrix} - (a+1) \begin{vmatrix} a+3 & 0 & a+2 \\ a+2 & 1 & a+1 \\ 0 & a+3 & 1 \end{vmatrix} + (a+2) \begin{vmatrix} a+3 & 1 & a+2 \\ a+2 & 0 & a+1 \\ 0 & a+2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a+3 & 1 \end{vmatrix} + (a+2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a+2 & a+3 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - (a+1) \left(\begin{vmatrix} a+3 & 0 \\ a+2 & 1 \end{vmatrix} - (a+3) \begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(a+2)\left(\begin{vmatrix} a+3 & 1 \\ a+2 & 0 \end{vmatrix} - (a+2)\begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix}\right) \\
&= \left(1-(a+3)(a+1)-(a+2)^2\right) - (a+1)(a+3) - (a+2)^2 \\
&\quad + \left((a+1)(a+3)-(a+2)^2\right)\begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= -4a^2 - 16a - 13 - \begin{vmatrix} a+3 & a+2 \\ a+2 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= -4a^2 - 16a - 12 \\
&= -4(a+1)(a+3).
\end{aligned}
$$

Như vậy $\det(A) > 0 \iff -4(a+1)(a+3) > 0 \iff -3 < a < -1$.

(c) Với $a = -1$, theo câu (a) ta có $\mathrm{r}(A) = 3$ nên số chiều của không gian nghiệm bằng $4 - \mathrm{r}(A) = 1$.

Với $a = -3$, ta có

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

từ đây suy ra $\mathrm{r}(A) = 3$ nên số chiều của không gian nghiệm bằng $4 - \mathrm{r}(A) = 1$.

Với $a \neq -1, -3$ thì $\det(A) \neq 0$ nên hệ phương trình $AX = 0$ có nghiệm duy nhất nên số chiều của không gian nghiệm bằng 0.

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản về ma trận. Câu (a) và (b) yêu cầu các tính toán cơ bản về định thức và hạng của ma trận. Câu (c) liên quan đến tính chất số chiều của không gian nghiệm của phương trình thuần nhất bằng số ẩn tự do, bằng với số hàng toàn 0 khi đưa ma trận hệ số về ma trận bậc thang, và bằng hiệu giữa số ẩn và hạng của ma trận hệ số.

Bài toán B.2.

Cho A, B là hai ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm một ma trận thực P có cấp bằng 2, sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

(b) Tìm một ma trận thực R có cấp bằng 2, định thức bằng 1, sao cho $R^{-1}AR = B$.

Lời giải.

(a) Xét ma trận $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ có $\det(P) = 2\sqrt{2} \neq 0$ nên P khả nghịch.

Khi đó

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \operatorname{adj}(P) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

trong đó $\operatorname{adj}(P)$ là ma trận phụ hợp của ma trận P.

Kiểm tra bằng phép nhân ma trận, ta thấy

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

là ma trận đường chéo.

(b) Xét ma trận $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ có $\det(Q) = 1 \neq 0$ nên Q khả nghịch.

Khi đó

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \cdot \operatorname{adj}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

trong đó $\operatorname{adj}(Q)$ là ma trận phụ hợp của ma trận Q.

Kiểm tra bằng phép nhân ma trận, ta thấy

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Nhận xét. Câu (a) là một bài toán chéo hóa ma trận cơ bản. Câu (b) giải được bằng cách đồng nhất hệ số và giải hệ phương trình. Ma trận Q cần tìm có dạng tổng quát $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, khi đó điều kiện đầu tiên là $\det(Q) = 1$ hay $ad - bc = 1$. Ngoài ra, $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(Q)} \cdot \operatorname{adj}(Q) = \operatorname{adj}(Q) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Khi đó bằng phép nhân ma trận, ta có $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2cd - ab & 2d^2 - b^2 \\ a^2 - 2c^2 & ab - 2cd \end{pmatrix}$ nên từ đó ta phải có

$$\begin{pmatrix} 2cd - ab & 2d^2 - b^2 \\ a^2 - 2c^2 & ab - 2cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

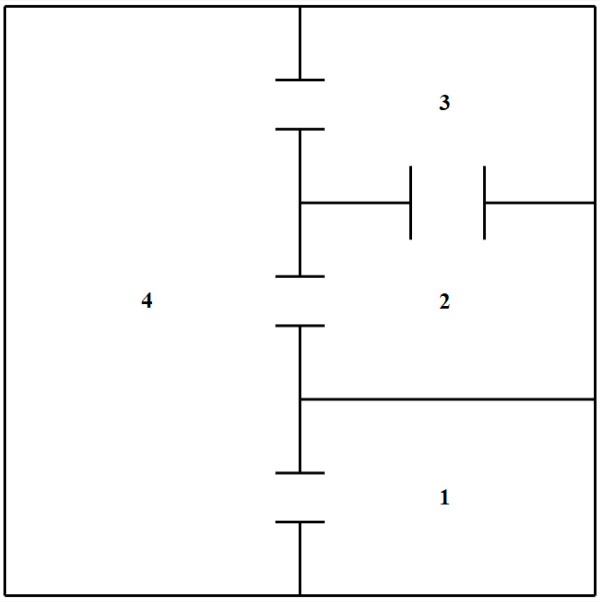
Ta chọn a, b, c, d thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ 2cd - ab = 0 \\ 2d^2 - b^2 = -2 \\ a^2 - 2c^2 = -1 \\ ad - 2cd = 0 \end{cases},$$

từ đó tìm được một bộ (a, b, c, d) thỏa mãn hệ phương trình trên là $(1, -2, 1, -1)$. Đây thực chất là một bài toán phương trình ma trận, khi ta có thể viết lại yêu cầu bài toán rằng tìm ma trân R thỏa mãn $AR = RB$.

Bài toán B.3 + A.2.

Có 200 con muỗi trong một căn hộ gồm 4 phòng với hệ thống cửa nối các phòng như hình vẽ.



Biết rằng, mỗi phút, mỗi con muỗi chỉ ở lại trong phòng nó đang ở hoặc bay sang một phòng bên cạnh. Ngoài ra, người ta thống kê được rằng, với mỗi phòng, có 40% số muỗi ở lại phòng đó, còn trong số muỗi bay ra khỏi phòng thì số lượng muỗi bay sang mỗi phòng bên cạnh đó là bằng nhau. Chẳng hạn, trong số các con muỗi bay từ phòng 3 sang phòng khác, thì có một nửa bay sang phòng 2, một nửa sang phòng 4.

a) Giả sử sau một phút số muỗi ở các phòng 1, phòng 2, phòng 3 và phòng 4 tương ứng là 24, 50, 52 và 74. Tính số muỗi ở mỗi phòng tại thời điểm ban đầu.

b) Gọi trạng thái ổn định là trạng thái mà kể từ đó trở đi số muỗi ở mỗi phòng đều không đổi. Tính số lượng muỗi tương ứng của mỗi phòng tại trạng thái ổn định đó.

Lời giải.

Gọi a_0, b_0, c_0, d_0 lần lượt là số muỗi ban đầu của phòng 1, 2, 3, 4; a_n, b_n, c_n, d_n lần lượt là số muỗi của phòng 1, 2, 3, 4 sau phút thứ n.

Nhận xét rằng sau mỗi phút, phòng 1 có 40% số muỗi ở lại, cùng với 20% số muỗi của phòng 4 bay ra (do 60% số muỗi phòng 4 bay sang phòng 1, 2, 3) nên ta có phương trình

$$a_{n+1} = 0.4a_n + 0.2d_n.$$

Lập luận tương tự, ta thiết lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.4a_n + 0.2d_n \\ b_{n+1} = 0.4b_n + 0.3c_n + 0.2d_n \\ c_{n+1} = 0.3b_n + 0.4c_n + 0.2d_n \\ d_{n+1} = 0.6a_n + 0.3b_n + 0.3c_n + 0.4d_n \end{cases}.$$

(a) Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} 0.4a_0 + 0.2d_0 = 24 \\ 0.4b_0 + 0.3c_0 + 0.2d_0 = 50 \\ 0.3b_0 + 0.4c_0 + 0.2d_0 = 52 \\ 0.6a_0 + 0.3b_0 + 0.3c_0 + 0.4d_0 = 74 \end{cases}.$$

Xét ma trận bổ sung và thực hiện biến đổi sơ cấp theo dòng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 24 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 50 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 52 \\ 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 74 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 24 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 50 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 52 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 24 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 50 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0.05 & 14.5 \\ 0 & 0 & 0.075 & -0.05 & 0.5 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 24 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 50 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0.05 & 14.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1/14 & -40/7 \end{array}\right).$$

Từ đó ta có được $(a_0, b_0, c_0, d_0) = (20, 40, 60, 80)$.

(b) Ở trạng thái ổn định, ta có

$$\begin{cases} a_n = 0.4a_n + 0.2d_n \\ b_n = 0.4b_n + 0.3c_n + 0.2d_n \\ c_n = 0.3b_n + 0.4c_n + 0.2d_n \\ d_n = 0.6a_n + 0.3b_n + 0.3c_n + 0.4d_n \end{cases} \iff \begin{cases} 0.6a_n - 0.2d_n = 0 \\ 0.6b_n - 0.3c_n - 0.2d_n = 0 \\ 0.3b_n - 0.6c_n + 0.2d_n = 0 \\ 0.6a_n + 0.3b_n + 0.3c_n - 0.6d_n = 0 \end{cases}.$$

Xét ma trận hệ số và biến đổi sơ cấp theo dòng

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ 0 & 0.3 & -0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.3 & -0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ 0 & 0.3 & -0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.45 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.45 & -0.3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.45 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình trên là $(a_n, b_n, c_n, d_n) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a\right)$ với mọi số thực a. Mặc khác, vì tổng số muỗi trong các phòng không đổi và bằng $24 + 50 + 52 + 74 = 200$ nên $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a + a = 200$, kéo theo $a = 75$. Như vậy số muỗi ở trạng thái ổn định trong phòng 1, 2, 3, 4 lần lượt là 25, 50, 50, 75.

Nhận xét. Đây là một bài toán Xích Markov chuyển trạng thái cơ bản, mấu chốt là phân tích được các giả thiết của bài toán và suy ra được hệ phương trình truy hồi ở trên. Bài toán dạng này có thể còn có câu hỏi rằng sau x phút (5 phút, 10 phút,...) số muỗi của mỗi phòng tương ứng là bao nhiêu? Để giải quyết bài toán dạng này, ta viết lại hệ phương trình dưới dạng phương trình ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & -1/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}.$$

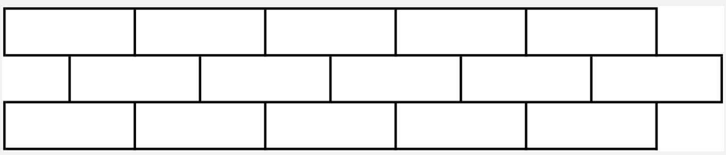
Tính số muỗi của từng phòng sau x phút, tức cần tính

$$\begin{pmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{x-1} \\ b_{x-1} \\ c_{x-1} \\ d_{x-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{x-2} \\ b_{x-2} \\ c_{x-2} \\ d_{x-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^x \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix},$$

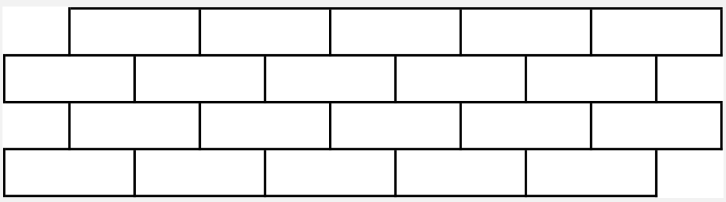
đến đây quy về việc tính lũy thừa ma trận A^x là xong.

Bài toán B.4.

(a) Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có hai viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau (hai viên gạch được gọi là kề nhau nếu có chung một phần của một cạnh)?



(b) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên gạch, mỗi viên từ một hàng trong hình sau đây, sao cho không có hai viên gạch nào được lấy ra nằm kề nhau?



Lời giải.

Ta sẽ giải bài toán tổng quát với n hàng gạch. Đánh số các hàng gạch từ trên xuống dưới tương ứng với từ 1 đến n. Ký hiệu a_{ij} là viên gạch thứ j ở hàng i (tính từ trái qua phải).

Theo giả thiết, ta cần tính số dãy

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\dots a_{nj_n}$$

được xây dựng thỏa mãn với hai phần tử kề nhau trong dãy thì hai viên gạch tương ứng trong bảng gạch không kề nhau (trong phần lập luận bên dưới, khi nói đến xây dựng dãy các viên gạch, thì dãy được xây dựng phải thỏa mãn tính chất này).

Ta xây dựng dãy nói trên bằng cách thêm lần lượt các viên gạch ở hàng n, $n-1$, $n-2$, $\dots$, 1 vào dãy. Gọi s_{ij} là số các dãy gạch xây dựng từ hàng i về hàng 1, trong đó viên gạch ở hàng i là viên gạch a_{ij}, khi đó số các dãy cần tìm trong đề bài bằng $\sum\limits_j s_{nj}$. Gọi $a_{(i-1)j_1}$, $a_{(i-1)j_2}$, $\dots$, $a_{(i-1)j_k}$ là các viên gạch ở hàng $(i-1)$ không kề với viên gạch a_{ij}. Theo cách gọi ở trên, có $s_{(i-1)j_1}$, $s_{(i-1)j_2}$, $\dots$, $s_{(i-1)j_k}$ số các dãy gạch xây dựng từ hàng 1 đến hàng $i-1$, trong đó viên gạch ở hàng $i-1$ lần lượt là viên gạch $a_{(i-1)j_1}$, $a_{(i-1)j_2}$, $\dots$, $a_{(i-1)j_k}$. Như vậy có tất cả $\sum s_{(i-1)j_\ell}$ dãy gạch xây dựng từ hàng 1 đến hàng $i-1$ mà các viên gạch $a_{(i-1)j_\ell}$ trong các dãy này thì không kề với viên gạch a_{ij}. Việc chọn viên gạch a_{ij} để tạo thành dãy gạch từ hàng 1 đến hàng i có 1 cách, do đó theo quy tắc nhân thì sẽ có tất cả $\sum s_{(i-1)j_\ell}$ dãy gạch từ hàng 1 đến hàng i thỏa mãn điều kiện đề.

Ta điền số s_{ij} vào các viên gạch a_{ij}. Khi đó, theo lập luận ở trên, ta thấy rằng các viên gạch ở hàng 1 đều được điền số 1, mỗi viên gạch ở hàng dưới thì bằng tổng các số trong các viên gạch hàng trên mà không kề với nó, và tổng số cách chọn cần tìm là tổng các số ở hàng gạch cuối cùng.

(a) Các viên gạch sau khi đã điền các số s_{ij} vào như sau

1	1	1	1	1
3	3	3	3	4
13	10	10	10	9

Như vậy số cách chọn thỏa mãn đề bài là $13+10+10+10+9=52$ cách.

(a) Các viên gạch sau khi đã điền các số s_{ij} vào như sau

1	1	1	1	1
4	3	3	3	3
9	10	10	10	13
43	33	32	32	29

Như vậy số cách chọn thỏa mãn đề bài là $43+33+32+32+29=169$ cách.

Nhận xét. Bài toán này có thể được giải bằng cách xét từng trường hợp mỗi ô trong hàng cuối được chọn, do số lượng các viên gạch trên mỗi hàng và số lượng các hàng không nhiều. Cách giải được đề xuất bản chất cũng là cách giải đó, nhưng dựa vào lập luận và tinh gọn bớt các tính toán trùng lặp thông qua việc sử dụng tư tưởng truy hồi.

Ở câu (a), nếu thay 5 viên gạch bằng n viên gạch thì: đầu tiên, chọn một viên hàng 2; nếu viên này thuộc $n-1$ viên đầu, có $(n-2)^2$ cách chọn hai viên của hàng 1 và 3; nếu viên đó là viên cuối của hàng 2 thì có $(n-1)^2$ cách chọn hai viên còn lại của hàng 1 và 3. Tổng cộng có tất cả $(n-1)(n-2)^2+(n-1)^2=(n-1)(n^2-3n+3)$ cách chọn thỏa mãn.

Còn ở câu (b), cũng thay 5 viên gạch bởi n viên gạch, áp dụng lập luận trong lời giải thì:

- ở hàng 1 toàn số 1;
- ở hàng 2, ô đầu tiên là $n-1$, các ô còn lại là $n-2$.
- ở hàng 3, ô đầu tiên là $(n-2)^2$, $n-2$ ô tiếp theo là $(n-2)^2+1$, ô cuối cùng là $(n-2)^2+n-1$.
- ở hàng 4, ô đầu tiên là $(n-2)\left((n-2)^2+1\right)+(n-2)^2+n-1=(n-2)^3+(n-2)^2+2(n-2)+1$, ô thứ hai là $(n-3)\left((n-2)^2+1\right)+(n-2)^2+n-1=(n-2)^3+2(n-2)$, ô thứ ba đến ô thứ $n-1$ là $(n-4)\left((n-2)^2+1\right)+(n-2)^2=(n-2)^3+2(n-2)-1$, ô cuối cùng là $(n-3)\left((n-2)^2+1\right)+(n-2)^2=(n-2)^3+(n-2)-1$; khi đó tổng số cách chọn sẽ là tổng các ô này, bằng $\left(N^2+N+1\right)^2$ với $N=n-2$, hay bằng $(n^2-3n+3)^2$.

Bài toán B.5 + A.4.

Với x, y, z là các số thực, đặt

$$A(x,y,z)=\det\begin{pmatrix} x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{pmatrix}$$

(a) Tìm một không gian con V của $\mathbb{R}^3$ với $\dim(V)=2$ thỏa mãn $A(x,y,z)=0$ với mọi $(x,y,z)\in V$. Tìm một cơ sở của không gian V vừa tìm được.

(b) Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z sao cho $A(x,y,z)=24$?

Lời giải.

(a) Theo khai triển Laplace, ta có

$$\begin{aligned} A(x,\, y,\, z) &= x\begin{vmatrix} z & x \\ x & y \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & x \\ z & y \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix} \\ &= x(yz - x^2) - y(y^2 - zx) + z(xy - z^2) \\ &= 3xyz - (x^3 + y^3 + z^3) \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2). \end{aligned}$$

Ta có

$$A(x,\, y,\, z) = 0 \iff \left[\begin{aligned} &x + y + z = 0 \\ &xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

Nhận xét rằng $xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \iff (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \iff x = y = z$ nên để không gian con V cần tìm có $\dim(V) = 2$ thì V là không gian nghiệm của phương trình $x + y + z = 0$. Phương trình có nghiệm tổng quát $(x,\, y,\, z) = (-y - z,\, y,\, z) = y(-1,\, 1,\, 0) + z(-1,\, 0,\, 1)$ với mọi $y,\, z \in \mathbb{R}$ nên V có một cơ sở là $\{(-1,\, 1,\, 0),\, (-1,\, 0,\, 1)\}$.

(b) Giả sử tồn tại các số nguyên $x,\, y,\, z$ thỏa mãn $A(x,\, y,\, z) = 24$ hay

$$\begin{aligned} &(x + y + z)(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2) = 24 \\ \iff &(x + y + z)\left(3(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2\right) = 24 \\ \iff &3(x + y + z)(xy + yz + zx) - (x + y + z)^3 = 24. \end{aligned}$$

Vì 24 chia hết cho 3 nên vế trái cũng phải chia hết cho 3, kéo theo $(x + y + z)^3$ phải chia hết cho 3 hay $x + y + z$ chia hết cho 3. Khi đó $3(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2$ chia hết cho 3, kéo theo $(x + y + z)\left(3(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2\right)$ chia hết cho 9. Như vậy 24 cũng phải chia hết cho 9, thế nhưng đây là điều mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, hay không tồn tại $x,\, y,\, z$ để $A(x,\, y,\, z) = 24$.

Nhận xét. Mấu chốt trong bài toán này là tìm ra được đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$. Đến đây nếu đã vững tính chất về không gian vector thì câu (a) được giải quyết gọn gàng. Câu (b) liên quan tới tính chia hết của số nguyên, mấu chốt là biến đổi $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)$ và nhận xét được $x + y + z$ chia hết cho 3. Nếu thay số 24 bởi một bội của 9, thì quy về giải phương trình nghiệm nguyên, bằng cách tách số ở vế phải thành tích của 2 số nguyên.

Giả sử cần tìm $x,\, y,\, z$ để $A(x,\, y,\, z) = 9$. Để ý rằng $xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = -\dfrac{1}{2}\left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right) < 0$ và tương tự trên ta có được $x + y + z$ chia hết cho 3 nên ta chỉ xét trường hợp $x+y+z = xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2 = -3$. Từ đây $3(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2 = -3$ nên tính được $xy+yz+zx = 2$. Không mất tính tổng quát, giả sử x là số nhỏ nhất trong ba số (trường hợp nếu $x+y+z>0$ thì giả sử x là số lớn nhất). Khi đó $x<0$, vì nếu $x \geq 0$ thì $x+y+z \geq 0$ mâu thuẫn với $x+y+z = -3 < 0$. Như vậy ta đã thu hẹp được tập giá trị của x, đến đây xét từng giá trị x. Ứng với mỗi giá trị của x, từ $x+y+z=-3$ tính được $y+z$; từ $x(y+z)+yz = 2$ tính được yz, từ đó tính được xyz. Khi có được $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz thì áp dụng Viete đảo để tìm x, y, z.

Bài toán A.3.

Cho $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực thỏa mãn $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.

(a) Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt.

(b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện trên.

Lời giải.

(a) Cho $x=-1$ thì có $P(-1) = 0$. Cho $x = 1$ thì có $P(1) = 0$. Cho $x=0$ thì có $2P(0) = -P(1) = 0$ nên $P(0) = 0$. Như vậy $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm thực là -1, 0, 1.

(b) Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Nếu đa thức $Q(x)$ hệ số thực thỏa mãn $Q(x) = Q(x+1)$ thì $Q(x) \equiv c$ với c là hằng số.

Thật vậy, giả sử $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$. Xét đa thức $T(x) = Q(x) - a_0$ thì ta có $T(0) = 0$. Mặt khác $T(x+1) = Q(x+1) - a_0 = Q(x) - a_0 = T(x)$ nên từ đó ta có $T(m) = T(m-1) = \ldots = T(1) = T(0) = 0$ với mọi m nguyên dương nên $T(x)$ có vô số nghiệm, do đó $T(x) \equiv 0$. Như vậy $Q(x) \equiv a_0$ hay $Q(x) \equiv c$ với c là hằng số.

Quay trở lại bài toán, từ câu (a) thì $P(x)$ có ba nghiệm -1, 0, 1 nên $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x)$. Thay vào hệ thức ở đề bài, ta có

$$(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) = (x+2)x(x-1)(x+1)Q(x) \iff Q(x+1) = Q(x).$$

Áp dụng bổ đề vừa chứng minh, ta có $Q(x) \equiv c$ nên $P(x) \equiv cx(x-1)(x+1)$ với c là hằng số thực. Thử lại, đa thức này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản về đa thức, sử dụng các tính chất về nghiệm của đa thức. Khi đề bài cho một hệ thức liên quan đến đa thức, một cách rất tự nhiên khi bắt tay vào làm là thế một vài giá trị đặc biệt để tìm ra tính chất nào đó của đa thức, mà ở đây là tìm ra được ba nghiệm của $P(x)$, chính là mấu chốt để giải quyết câu (b).

Bài toán A.5.

Cặp ma trận thực, vuông cùng cấp (A, B), được gọi là **tốt** nếu cả hai đều khả nghịch và thỏa mãn $AB - BA = B^2A$.

(a) Chứng minh rằng nếu (A, B) là một cặp ma trận tốt thì

$$B = A^{-1}(B^2 + B)A.$$

(b) Tìm một cặp ma trận tốt (A, B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng 2.

(c) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại ít nhất một cặp ma trận tốt (A, B) với cấp của mỗi ma trận đều bằng n.

Lời giải.

(a) Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} AB - BA = B^2A &\iff AB = B^2A + BA \\ &\iff AB = (B^2 + B)A \\ &\iff A^{-1}AB = A^{-1}(B^2 + B)A \\ &\iff B = A^{-1}(B^2 + B)A. \end{aligned}$$

(b) Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vì $\det(A) = 1$, $\det(B) = -1$ đều khác 0 nên A, B khả nghịch. Bằng tính toán, ta kiểm tra được hai ma trận này thỏa mãn hệ thức $AB - BA = B^2A$.

Nhận xét. Câu (a) là bài toán cơ bản về chứng minh hệ thức ma trận, ý tưởng giải tương đối tự nhiên. Câu (b) có ý tưởng giải giống với câu (b) của bài B.2. Trước hết ta để ý rằng từ $B = A^{-1}(B^2 + B)A$, lấy định thức hai vế thì $\det(B) = \det(B^2 + B)$, mà $\det(B) \neq 0$ do B khả nghịch nên $\det(B + I) = 1$. Như vậy ta chọn một ma trận B thỏa mãn $\det(B + I) = 1$ $\left(\text{ở đây ta chọn } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ và tìm ma trận A thỏa mãn đẳng thức trên, dựa vào đồng nhất hệ số như câu (b) bài B.2.

1.3 Đề thi Giải tích

Bài toán B.1 + A.1.

Cho (a_n) là dãy số thực được xác định bởi các điều kiện

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^n}{n!} \, \forall n \geq 1.$$

(a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $a_n \geq \frac{1}{2}$.

(b) Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ.

(c) Giới hạn của dãy số (a_n) là một số hữu tỷ hay vô tỷ? Vì sao?

Lời giải.

(a) Bằng tính toán, ta có $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{3}{8}$. Ta sẽ chứng minh rằng $a_n < \frac{1}{2}$ với mọi $n > 3$.

Thật vậy, mệnh đề cần chứng minh đúng với $n = 4$ và $n = 5$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = 2k$ và $n = 2k + 1$ (trong đó $k \in \mathbb{Z}^+$), tức đã có $a_{2k} < \frac{1}{2}$ và $a_{2k+1} < \frac{1}{2}$. Ta có

$$a_{2k+2} = a_{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)!} < \frac{1}{2}$$

và

$$a_{2k+3} = a_{2k+2} + \frac{1}{(2k+2)!} = a_{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k+2)!} = a_{2k+1} - \frac{2k}{(2k+2)!} < \frac{1}{2}.$$

Như vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, $a_n < \frac{1}{2}$ với mọi $n > 3$. Do đó tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $a_n \geq \frac{1}{2}$ là 1 và 3.

(b) Với mọi $n \geq 2$ ta có

$$a_n = a_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = a_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} = \cdots = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Xét hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Ta thấy

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-x}, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \mathrm{e}^{-x}, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases},$$

trong đó $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm cấp n của hàm số f. Theo khai triển Maclaurin, ta có

$$f(x) = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)^n}x^{n-1} + \frac{(-1)^n \cdot \mathrm{e}^{-c}}{n!}x^n,$$

trong đó c là số thực nào đó nằm giữa 0 và x.

Từ đây suy ra

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = f(1) = 1 + \frac{-1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)^n} + \frac{(-1)^n \cdot \mathrm{e}^{-c}}{n!} = a_n + \frac{(-1)^n \cdot \mathrm{e}^{-c}}{n!},$$

với c là số thực nào đó thỏa mãn $0 < c < 1$, với mọi $n \geq 2$.

Do đó với mọi $n \geq 2$ thì

$$\left|a_n - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-c}}{n!},$$

với c là số thực nào đó thỏa mãn $0 < c < 1$.

Trong đẳng thức trên, cho $n \to +\infty$, để ý rằng $\frac{\mathrm{e}^{-c}}{n!} \to 0$, ta thu được $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Như vậy dãy số (a_n) hội tụ.

(c) Theo câu (b), ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$ là một số vô tỷ.

Nhận xét. Đây là một bài toán giới hạn dãy số liên quan giới hạn của chuỗi số. Câu (a) là một câu cơ bản, đòi hỏi việc tính toán một số giá trị đầu của dãy số và kỹ năng chứng minh quy nạp. Câu (b) có thể tách dãy số đã cho làm hai dãy con chẵn và lẻ, từ đó sử dụng định nghĩa để chứng minh; cách giải đề xuất ở đây có phần gọn hơn, nhưng đòi hỏi phải nhận xét được dãy số đã cho liên quan đến khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Tuy nhiên cách giải được đề xuất ở đây lại hiệu quả trong việc chỉ ra chính xác giới hạn của dãy (a_n) là $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Bài toán B.2 + A.2.

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{nếu } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^x + cx, & \text{nếu } x > 0 \end{cases},$$

trong đó a, b, c là các tham số thực.

(a) Xác định a, b, c sao cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$.

(b) Xác định a, b, c sao cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$.

(c) Xác định a, b, c sao cho hàm f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

(a) Với $x \leq 0$ thì $f(x) = ax^2 + b$, còn với $x > 0$ thì $f(x) = \mathrm{e}^x + cx$ nên f liên tục tại mọi điểm khác 0. Do đó để f liên tục trên $\mathbb{R}$ thì f cần phải liên tục tại 0.

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax^2 + b) = b, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x + cx) = 1 = f(0).$$

Để f liên tục tại 0 thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ hay $b = 1$. Như vậy khi $b = 1$ và a, c tùy ý thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

(b) Nhận xét rằng f khả vi tại mọi điểm khác 0. Do đó để f khả vi trên $\mathbb{R}$ thì f cần phải khả vi tại 0. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} f \text{ liên tục tại } 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \text{ tồn tại} \end{cases}.$$

Theo câu (a), để f liên tục tại 0 thì $b = 1$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^2 + b - b}{x} = \lim_{x\to 0^-} ax = 0$$

và

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x + cx - 1}{x} = c + 1,$$

để ý rằng $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1} = 1$ theo quy tắc l'Hospital.

Do đó để $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ tồn tại thì $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ hay $c = -1$. Như vậy, khi $b = 1$, $c = -1$ và a tùy ý thì f khả vi trên $\mathbb{R}$.

(c) Để f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ thì trước hết f phải khả vi cấp một trên $\mathbb{R}$. Theo câu (b), để

f khả vi cấp một trên $\mathbb{R}$ thì $b = 1$, $c = -1$ và khi đó

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax, & \text{nếu } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^x - 1, & \text{nếu } x > 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Nhận xét rằng f khả vi cấp hai tại mọi điểm khác 0. Do đó để f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ thì f cần phải khả vi cấp hai tại 0. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} f' \text{ liên tục tại } 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} \text{ tồn tại} \end{cases}.$$

Ta có

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2ax) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1) = 0 = f'(0).$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0)$ nên f' liên tục tại 0.

Ta lại có

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2ax}{x} = 2a$$

và

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Do đó để $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$ tồn tại thì $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$ hay $a = \dfrac{1}{2}$.

Như vậy, khi $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -1$ thì f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản về tính liên tục và khả vi của hàm số. Để giải quyết bài toán này đòi hỏi phải nắm vững tính chất về tính liên tục và tính khả vi.

Để hàm số f liên tục tại điểm $x = x_0$ thì f phải thỏa mãn đồng thời ba điều kiện

(i) f xác định tại x_0;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Còn để hàm số f khả vi tại điểm $x = x_0$ thì f phải thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

(i) f liên tục tại điểm $x = x_0$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại.

khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là đạo hàm của hàm số f tại điểm $x = x_0$ hay $f'(x_0)$.

Bài toán B.3 + A.3.

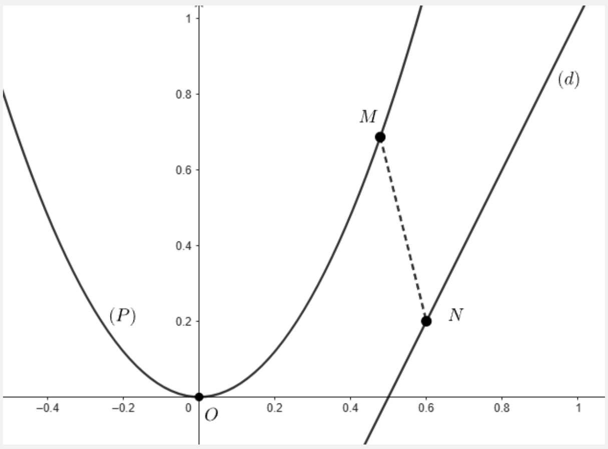
Hình vẽ bên thể hiện một phần đường thẳng (d) có phương trình

$$y = 2x - 1$$

và một phần parabol (P) có phương trình

$$y = 3x^2$$

trong mặt phẳng tọa độ Oxy.



(a) Đường thẳng (d) và parabol (P) có cắt nhau không? Vì sao?

(b) Cho các điểm $M \in (P)$ và $N \in (d)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách MN.

Lời giải.

(a) Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$3x^2 = 2x - 1 \iff 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Phương trình trên là phương trình bậc hai có $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$ nên không có nghiệm thực. Như vậy (d) và (P) không cắt nhau.

(b) Gọi m, n lần lượt là hoành độ của M, N. Vì $M \in (P)$ và $N \in (d)$ nên ta có $M(m;\, 3m^2)$ và $N(n;\, 2n-1)$. Khi đó

$$MN = \sqrt{(m-n)^2 + (3m^2 - 2n + 1)^2}.$$

Xét hàm số (theo biến n)

$$f(n) = (m-n)^2 + (3m^2 - 2n + 1)^2 = 5n^2 - (12m^2 + 2m + 4)n + 9m^4 + 7m^2 + 1.$$

Vì f là hàm số bậc hai theo biến n nên f đạt cực tiểu tại $n = \dfrac{6m^2 + m + 2}{5}$, khi đó

$$f\left(\frac{6m^2 + m + 2}{5}\right) = \frac{9}{5}m^4 - \frac{12}{5}m^3 + 2m^2 - \frac{4}{5}m + \frac{1}{5}.$$

Nhận xét rằng $\dfrac{9}{5}m^4 - \dfrac{12}{5}m^3 + 2m^2 - \dfrac{4}{5}m + \dfrac{1}{5} = \left(m - \dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{9}{5}m^2 - \dfrac{6}{5}m + 1\right) + \dfrac{4}{45} = \left(m - \dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{5}(3m-1)^2 + \dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{4}{45} \geq \dfrac{4}{45}$ với mọi m. Suy ra MN^2 đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{4}{45}$ khi $m = \dfrac{1}{3}$ và $n = \dfrac{6m^2 + m + 2}{5} = \dfrac{3}{5}$. Như vậy MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$ khi $M\left(\dfrac{1}{3};\, \dfrac{1}{3}\right)$ và $N\left(\dfrac{3}{5};\, \dfrac{1}{5}\right)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản về vị trí tương đối của đồ thị hàm số và tìm cực trị.

Bài toán B.4.

Cho $f :\, [0;\, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục trên $[0;\, 1]$ và khả vi trong $(0;\, 1)$.

(a) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 0$ thì tồn tại một số thực $x_0 \in (0;\, 1)$ sao cho

$$|f(x_0)| \leq 2024|f'(x_0)|.$$

(b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 0$ và

$$|f(x)| \geq 2024|f'(x)| \text{ với mọi } x \in (0;\, 1)$$

thì f là hàm hằng.

(c) Khẳng định trong ý (b) có còn đúng không nếu ta không giả thiết $f(1) = 0$ (nếu câu trả lời là "có", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "không", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm số f)?

Lời giải.

(c) Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại hàm số thỏa mãn $|f(x)| \geq 2024|f'(x)|$ với mọi $x \in (0; 1)$ và $f(1) \neq 0$ nhưng f không là hàm hằng.

Xét hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x/2024}$ trên $[0; 1]$. Ta có $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x/2024}}{2024}$. Ta thấy $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ và

$$|f(x)| = f(x) = 2024f'(x) = 2024|f'(x)| \text{ với mọi } x \in [0; 1]$$

nhưng f không là hàm hằng.

Nhận xét. Đây là một bài toán tổng hợp về hàm số, đòi hỏi vận dụng linh hoạt các tính chất liên tục, khả vi, bị chặn cùng với các định lý trung bình. Ở câu (c), ta thử tìm ra phản ví dụ cho bài toán, tức chỉ ra rằng tồn tại hàm số thỏa mãn $|f(x)| \geq 2024|f'(x)|$ với mọi $x \in (0; 1)$ và $f(1) \neq 0$ nhưng f không là hàm hằng. Khi đó, để đơn giản thì ta sẽ thử tìm hàm số thỏa mãn $f(x) = 2024f'(x) \iff \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2024} \iff \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{2024} \iff \ln f(x) = \dfrac{x}{2024} \iff f(x) = \mathrm{e}^{x/2024}$.

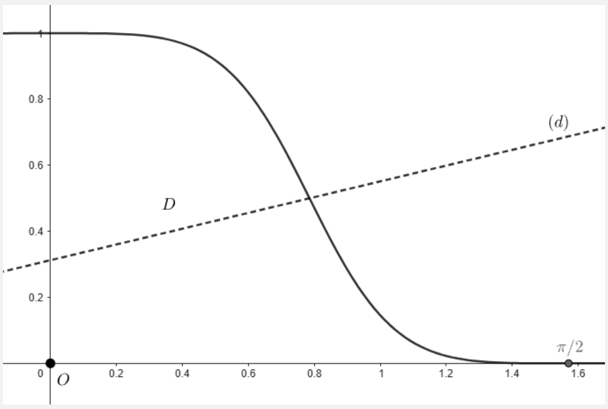
Bài toán B.5.

Cho D là một phần của mặt phẳng tọa độ Oxy gồm những điểm có tọa độ $(x; y)$ mà

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

và

$$0 \leq y \leq \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \text{ với } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$



(a) Tính diện tích của D.

(b) Cho (d) là một đường thẳng đi qua hai điểm $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$ và $(0; a)$ với $0 < a < 1$. Người ta muốn cắt D dọc theo (d) để thu được hai phần rời nhau có cùng diện tích (hình vẽ trong bài thể hiện một cách cắt dọc theo đường nét đứt). Coi việc cắt không làm ảnh hưởng đến diện tích của D. Xác định giá trị của a tương ứng với một cách cắt thỏa mãn yêu cầu.

Lời giải.

(a) Đặt $f(x) = \dfrac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4}$. Phần diện tích của D cần tính chính là diện tích phần không gian được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành, $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$ nên sẽ bằng

$$I = \int_0^{\pi/2} \left| \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \right| \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \mathrm{d}x.$$

Đổi biến $x = \dfrac{\pi}{2} - u$, để ý rằng $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$, khi đó

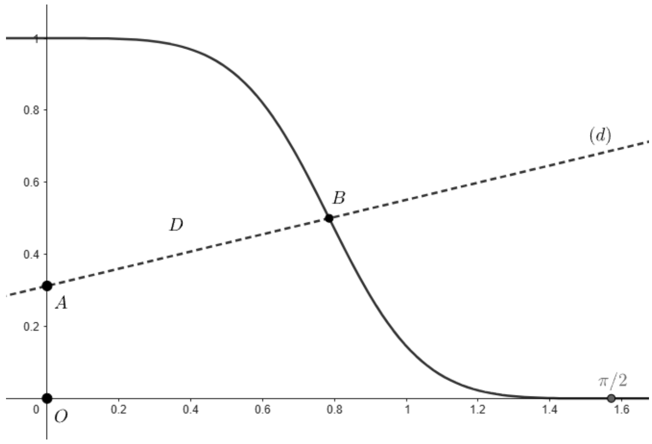
$$I = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^4}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^4 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^4} \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin u)^4}{(\sin u)^4 + (\cos u)^4} \mathrm{d}u.$$

Suy ra

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Như vậy phần diện tích của D cần tính bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

(b) Gọi $A(0; a)$ và $B\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng (d) với trục tung và đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Vì (d) đi qua A, B nên bằng tính toán ta có được phương trình đường thẳng (d) là

$$y = \frac{2-4a}{\pi}x + a.$$

Đường thẳng (d) cắt D thành hai phần, trong đó diện tích của phần phía trên là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = \dfrac{2-4a}{\pi}x + a$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ nên bằng

$$J = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} - \frac{2-4a}{\pi}x - a \right) \mathrm{d}x = J_1 - J_2,$$

trong đó $J_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{(\cos x)^4}{(\sin x)^4 + (\cos x)^4} \mathrm{d}x$ và $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(\frac{2-4a}{\pi}x + a \right) \mathrm{d}x$.

Ta có

$$J_2 = \left(\frac{1-2a}{\pi}x^2 + ax \right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1-2a}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{16} + a \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{(1+2a)\pi}{16}.$$

Với $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ thì $\cos x > 0$ nên ta có $J_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\tan x)^4 + 1} \mathrm{d}x$. Đặt $t = \tan x$ thì $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = (\tan^2 x + 1)\,\mathrm{d}x = (t^2+1)\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^4+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2-1}{t^4+1} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}t-1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}(\tan u)}{\tan^2 u+1} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1/\cos^2 u}{1/\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$.

Tiếp theo ta lại có $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}t+1}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{(2+\sqrt{2})/2} \frac{\sqrt{2}u}{u^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}u =$
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{(2+\sqrt{2})/2} \frac{\mathrm{d}\left(u^2+\frac{1}{2}\right)}{u^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln\left(u^2+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^{(2+\sqrt{2})/2} = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$.

Và cuối cùng ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}t-1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{2}t-1}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{(2-\sqrt{2})/2} \frac{\sqrt{2}u}{u^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}u =$
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{(2-\sqrt{2})/2} \frac{\mathrm{d}\left(u^2+\frac{1}{2}\right)}{u^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln\left(u^2+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}/2}^{(2-\sqrt{2})/2} = \frac{\ln(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$.

Từ đó suy ra

$$J = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{(1+2a)\pi}{16}.$$

Theo đề bài thì diện tích hai phần bị cắt ra từ D là bằng nhau nên $J = \frac{\pi}{8}$, do đó

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\ln(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{(1+2a)\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \iff a = \frac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Như vậy $a = \dfrac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})}{\pi} - \dfrac{1}{2}$ là giá trị a cần tìm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. Bài toán là một bài ứng dụng của tích phân trong tính diện tích hình phẳng. Câu (a) là một bài toán tích phân lượng giác sử dụng phương pháp đổi biến khá quen thuộc. Lời giải được đề xuất ở đây cho câu (b) có phần hơi phức tạp hơn so với lời giải trong đáp án; tuy nhiên lời giải này sử dụng phân tách phân thức hữu tỷ và đổi biến, mà không thực hiện biến đổi lượng giác biểu thức dưới tích phân của J_1. Hướng giải này yêu cầu nhiều biến đổi đòi hỏi tính tỉ mỉ và cẩn thận cao, đây cũng chính là hướng giải của tác giả khi làm bài thi tại kỳ thi năm 2024; tuy nhiên khi đó vì áp lực thời gian nên tác giả chưa thể đi đến được đáp số cuối cùng.

Bài toán A.4.

Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có

$$|f''(x)| \le 1 \text{ với mọi } x.$$

Hàm f được gọi là có tính chất **SAT** nếu $f \in \mathcal{F}$ và

$$(f'(x))^2 \le 2024|f(x)| \text{ với mọi } x.$$

(a) Chứng minh rằng nếu f là một hàm số thuộc lớp $\mathcal{F}$ và $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì f có tính chất **SAT**.

(b) Tìm một hàm số f thuộc lớp $\mathcal{F}$ nhưng f không có tính chất **SAT**.

Lời giải.

(b) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+2}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ và $f'''(x) = \dfrac{-3(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4}$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$\searrow$	$\dfrac{2\sqrt{2}-3}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{2}+3}{8}$	$\searrow$	$\dfrac{-2\sqrt{2}-3}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{-2\sqrt{2}+3}{8}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $-1 < f''(x) < 1$ hay $|f''(x)| < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f \in \mathcal{F}$.

Ta sẽ chứng minh rằng hàm f nói trên không có tính chất **SAT**, hay tồn tại x_0 để

$$(f'(x_0))^2 > 2024|f(x_0)| \iff \frac{(1-x_0^2)^2}{4(x_0^2+1)^4} > \frac{2024|x_0|}{2x_0^2+2} \iff \frac{(1-x_0^2)^2}{|x_0|(x_0^2+1)^3} > 4048.$$

Thật vậy, vì $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-x^2)^2}{(x^2+1)^3}=1$, $\lim_{x\to 0}|x|=0$ nên ta có $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-x^2)^2}{|x|(x^2+1)^3}=+\infty$. Do đó chỉ cần chọn x_0 đủ nhỏ thì ta có ngay $\dfrac{(1-x_0^2)^2}{|x_0|(x_0^2+1)^3}>4048$. Như vậy hàm f nói trên thuộc $\mathcal{F}$ nhưng không có tính chất **SAT**.

Nhận xét. Câu (b) của bài toán nếu xét hàm $f(x)=\sin x$ thì việc giải quyết sẽ đơn giản hơn nhiều, tuy nhiên tác giả muốn thử thách hơn bằng việc tìm một hàm khác hàm lượng giác. Vì hàm cần tìm phải thỏa $|f''(x)|\le 1$ nên nếu chọn hàm thỏa $|f(x)|\le 1$ thì khả năng điều kiện trên cũng thỏa, nên sẽ thử chọn hàm f có dạng $\dfrac{1}{g(x)}$. Lúc này thử chọn $g(x)$ là một đại lượng điều hòa $x+\dfrac{1}{x}$, tức khi đó $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x}{x^2+1}$ thì may mắn $|f''(x)|\le 2$ và tồn tại x_0 để $\left(f'(x_0)\right)^2>2024|f(x_0)|$. Lúc này chỉ việc nhân thêm $\dfrac{1}{2}$ vào $f(x)$ để $|f''(x)|\le 1$ là xong.

Ngoài ra, ở câu (b) ta cũng có thể chọn hàm đa thức thỏa mãn $f''(x)=1$ với mọi x, tức $f'(x)=x+c_1$ và $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+c_1x+c_2$. Khi đó cần chọn c_1, c_2 để tồn tại x_0 thỏa mãn $(f'(x_0))^2>2024|f(x_0)| \iff x_0^2+2c_1x_0+c_1^2>2024\left|\dfrac{x_0^2}{2}+c_1x_0+c_2\right|$. Giả sử chọn $x_0=0$ thì cần chọn c_1, c_2 thỏa mãn $c_1^2>2024|c_2|$. Đến đây thấy ngay một cặp $(c_1,\, c_2)=(1,\, 0)$ thỏa mãn. Điều đó có nghĩa là $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$ cũng là một ví dụ hàm f trong câu (b). Việc tìm ra hàm số này là khả thi hơn trong điều kiện phòng thi, so với hàm số trong lời giải trên.

Bài toán A.5.

Cho $f:\ [0;\,+\infty)\to\mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$$

tồn tại và hữu hạn.

(a) Cho một ví dụ về hàm số f thỏa mãn tất cả các yêu cầu trên.

(b) Chứng minh rằng nếu f' bị chặn trên $[0;\,+\infty)$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

(c) Khẳng định trong ý (b) có còn đúng không nếu ta không giả thiết f' bị chặn trên $[0;\,+\infty)$ (nếu câu trả lời là "có", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "không", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f)?

Lời giải.

(a) Xét hàm số $f(x) = 2024^{-x}$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x 2024^{-2t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(-2)\cdot\ln 2024}\left(2024^{-2x}-1\right) = \frac{1}{2\cdot\ln 2024}.$$

Nhận xét. Ở câu (a), mục tiêu ta cần phải chọn hàm f thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hữu hạn $\left(\text{thì khi đó khả năng } \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t \text{ tồn tại và hữu hạn}\right)$, đồng thời khi bình phương lẫn lấy nguyên hàm thì không làm mất tính chất của hàm đó và việc lấy nguyên hàm được thực hiện dễ dàng. Như vậy thấy ngay hàm mũ $f(x) = a^{-x}$ là đáp ứng được những yêu cầu này.