Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica - Departamento de Sistemas e Controle
EES-40 – Controle Moderno – 2023/2
LAB 4: Projeto de controlador DLQG com filtro de Kalman – caso SISO

Prof. Jacques Waldmann

Trataremos do problema de controle estocástico LQG discreto no tempo – DLQG – de sistema SISO. O modelo é linear, a função custo é quadrática, ponderando a saída da planta e o controle, e as perturbações no modelo e na medida são sequências ruidosas brancas aditivas Gaussianas. O *Princípio da Separação* é resultado importante para sistemas discretos no tempo como os estudados em EES-40, submetidos a distúrbios do tipo aditivo apenas (não há, por exemplo, distúrbios multiplicativos).

Segundo o Princípio acima referido, o controle ótimo DLQG é o mesmo que seria obtido na ausência dos distúrbios aditivos e contando com o estado da planta disponível para realimentação. O LGR-S do sistema contínuo determinará relação entre os polos de malha fechada da solução DLQR e a ponderação da sequência de controle na função custo quadrático discreto. Já o estimador do estado da planta será o *filtro de Kalman discreto*, que considera a incerteza acerca do estado inicial da planta e pondera as estatísticas das sequências ruidosas de modelo e de medida na determinação do ganho de estimação. O filtro de Kalman (KF) tem *ganho variante no tempo* e estima a média do estado da planta e respectiva covariancia do erro de estimação, que idealmente é Gaussiano. *O controlador DLQG com filtragem de Kalman é um sistema dinâmico linear variante no tempo*. Em funcionamento ótimo, a inovação do filtro – a diferença entre a medida da saída da planta e sua predição pelo KF – será uma sequência branca, não enviesada e Gaussiana. *A prática, entretanto, terá o filtro operando em condição subótima.*

Usaremos para projeto o modelo linear $Y(s)/\hat{U}(s) = G(s)$ já visto e novamente aumentado com ação integral, representado no espaço de estado, discretizado no tempo e alterado para incluir sequências ruidosas brancas Gaussianas aditivas no modelo e na medida. Para o controle, primeiro investigaremos o uso pelo KF da pseudomedida $\int_0^t (r-y)d\tau$ (i.e., a integral do erro de rastreio na saída) para estimar o estado da planta aumentado com a integral do erro de rastreio; depois, investigaremos o uso no KF da medida y para estimar apenas o estado da planta.

Antes, duas questões acerca de tempo de amostragem T_s tendendo a zero:

1. Seja uma planta SISO cujo modelo dinâmico linear invariante no tempo é controlável e observável. Sua representação no espaço de estado é (**A**,**B**,**C**,0). Considere o método de discretização 'zoh', que produzindo uma representação discretizada ($\mathbf{A_d}$,$\mathbf{B_d}$,**C**,0). Qual o efeito de T_s tender a zero sobre a controlabilidade e a observabilidade do sistema discretizado?

2. Um controlador projetado no domínio contínuo tem função de transferência C(s)=U(s)/E(s)=1/(s+1). O controlador é discretizado com método 'tustin' e extremamente pequeno tempo de amostragem, $T_s = 10^{-5}$[s], por exemplo. O comando *zpk* informa zero, polo e ganho da função de transferência pulso $C_d(z)= U_d(z)/E_d(z)$. O sinal de erro é normalizado, $|e[k]|_{max}=1$. A representação dos coeficientes da lei de controle e os cálculos empregarão apenas três casas decimais, sem notação científica. A sequência u[k] resultante é afetada pela sequência e[k] com esse tempo de amostragem? Por que a seleção de frequência de amostragem bastante elevada para obter controle "quase-contínuo" requer considerar se é adequada a quantidade de bits para representação numérica?

Parte 1 – Projeto DLQR da lei de realimentação ótima de estado discreta no tempo. O modelo contínuo SISO LIT tem função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{1000}{(s+10)(s+0{,}5+10j)(s+0{,}5-10j)} \tag{1}$$

Cada grupo deve adotar uma realização distinta para o modelo G(s):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \; ; \; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \qquad y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

A ação de integral do erro de rastreio é obtida aumentando a dimensão do vetor de estado $\boldsymbol{x}$ do modelo com o componente escalar x_I, daí resultando o vetor de estado aumentado $\boldsymbol{x_{aug}}$:

$$x_I(t) = \int_0^t \underbrace{\big(r(\tau) - y(\tau)\big)}_{erro\ de\ rastreio} d\tau \;\; ; \; x_I \in \mathbb{R} \tag{3}$$

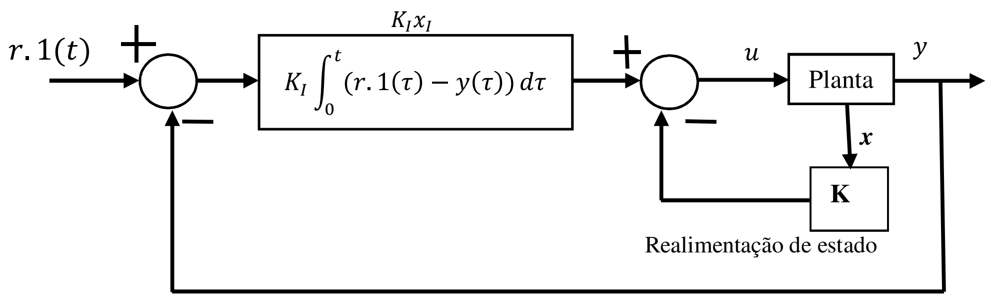

Figura 1 – Estrutura do controle LQR $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + k_I x_I$ com ação integral do erro de rastreio e realimentação de estado; o estado $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ é uma abstração, como o modelo nominal da planta, e não é acessível sem sensores para medí-lo. Ruídos não aparecem.

Aumentado com ação integral e representado no espaço de estado, $\boldsymbol{x_{aug}} \in \mathbb{R}^4$, é:

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}_{aug}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0_{3x1}} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A_{aug}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x_{aug}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B_{aug}}} u + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} w + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{0_{3x1}} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G_{aug}}} r \;\; ; \tag{4}$$

sendo o par $\{\boldsymbol{A_{aug}}, \boldsymbol{B_{aug}}\}$ controlável, assim assegurando que o ruído branco Gaussiano aditivo *w* na entrada excita todos os componentes do vetor de estado. A pseudomedida y' é a integral do erro de rastreio x_I, modelada com ruído artificial aditivo:

$$y' = [\boldsymbol{0_{1x3}} \quad 1]\boldsymbol{x_{aug}} + v(t) = \boldsymbol{C_{xi}}\boldsymbol{x_{aug}} + v \tag{5}$$

O par $\{\boldsymbol{A_{aug}}, \boldsymbol{C_{xi}}\}$ é observável assim que assegurando todos os componentes do vetor de estado contribuem para a pseudomedida de maneira particular e recuperável.

Tarefa 1: Desconsiderando-se os ruídos, com o modelo determinístico projetar a realimentação de estado discreto $u[k] = -\boldsymbol{K_{dlqr}}.\boldsymbol{x_{aug}}[k]$. Verificar se a resposta amostrada à referência degrau da malha fechada do modelo determinístico discreto com saída $[y \quad y']^T$ com realimentação de estado ótima DLQR atende aos requisitos.

Inicialmente, o projeto LQR no domínio contínuo determina o ganho $\boldsymbol{K_{lqr}}$ para conhecer a banda passante ω_b da resposta em frequência de malha fechada e selecionar o tempo de amostragem T_s adequado para discretizar o modelo da planta com o equivalente ZOH. Para isso, determinam-se os polos de malha fechada no plano-s da função de transferência *"artificial"* $G_{xi}(s) = \boldsymbol{C_{xi}}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_{aug}}\right)^{-1}\boldsymbol{B_{aug}}$ e o respectivo peso ρ que pondera o controle contínuo $u(t)$ no custo $J_{LQR} = \int_0^\infty (x_I^2 + \rho u^2)dt$ do problema contínuo, conforme o LGR-S (lugar geométrico das raízes simétrico).

O peso ρ selecionado do LGR-S depois irá ponderar a sequência de controle quadrático no custo do problema LQR discreto. Notar que a seleção do peso ρ afeta os polos da malha fechada, portanto afeta a banda passante, a seleção do intervalo de amostragem T_s e o resultado $\boldsymbol{K_{dlqr}}$ do projeto DLQR.

Vide os comandos no *script* de projeto Lab4_EES40_2023_semana14_DLQGcomKF_alunado.m.

```
C_xi=[0 0 0 1];
Klqr=lqr(Aaug,Baug,C_xi'*C_xi,rho);
Aaugmf=Aaug-Baug*Klqr;
SysMF=ss(Aaugmf,Gaug,[Caug;C_xi],0);
```
(projeto lqr, malha fechada no plano-s; saídas y e y')

```
figure;bodemag(Sysmf);
```
(ler banda passante ω_b de $Y(j\omega)/R(j\omega)$ e selecionar T_s adequado.

.....(*código para determinar se a resposta contínua em malha fechada atende requisitos – vide script*)

.....(*código para verificar controlabilidade do par (*`Aaugd`, `Baugd`*) do sistema discretizado pelo método 'zoh'*)

O modelo determinístico discreto no tempo para o projeto DLQR é $\boldsymbol{x_{aug}}[k+1] = \boldsymbol{A_{augd}}\boldsymbol{x_{aug}}[k] + \boldsymbol{B_{augd}}u[k] + \boldsymbol{G_{augd}}r[k], y' = \boldsymbol{C_{xi}}\boldsymbol{x_{aug}}[k]$. O projeto produz o vetor de ganhos $\boldsymbol{K_{dlqr}}$ de realimentação do estado discreto no tempo que minimiza o custo $J_{DLQR} = \sum_{k=0}^{\infty}(x_I^2[k] + \rho.u^2[k])$:

```
[Kd,~,Eig_d]=dlqr(Aaugd,Baugd,C_xid'* C_xid,rho);
```

Parte 2 – Filtro de Kalman discreto no tempo e controle DLQG

A primeira versão do KF empregará a pseudomedida y', i.e., a integral do erro de rastreio x_I, modelada – erroneamente, e de forma intencional – com ruído branco aditivo artificial:

$$y' = [\boldsymbol{0_{1x3}} \quad 1]\boldsymbol{x_{aug}} + v(t) = \boldsymbol{C_{xi}}\boldsymbol{x_{aug}} + v(t) = x_I(t) + v(t) \tag{6}$$

A formulação do filtro estimará, com problemas, o estado aumentado. O par $\{\boldsymbol{A_{aug}}, \boldsymbol{C_{xi}}\}$ do sistema contínuo é observável. O modelo contínuo estocástico é $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}} = \boldsymbol{A_{aug}}\boldsymbol{x_{aug}} + \boldsymbol{B_{aug}}u + \boldsymbol{B_{aug}}w + \boldsymbol{G_{aug}}r,\ y' = \boldsymbol{C_{xi}}\boldsymbol{x_{aug}} + v$. Os processos ruidosos em tempo contínuo w e v são assumidos brancos, Gaussianos, com média nula e descorrelacionados entre si e da condição inicial $\boldsymbol{x_{aug}}(0)$, a qual é assumida Gaussiana com covariância $\boldsymbol{P_{aug0}}$. Os parâmetros q e r são densidades espectrais de potência (PSD):

$$E[w(t)] = 0,\ E[w(t)w(\tau)] = q.\delta(t-\tau), \forall t, \tau \geq 0,\ E[v(t)] = 0,\ E[v(t)v(\tau)] = r.\delta(t-\tau),$$
$$E[w(t)v(\tau)] = 0,\ E\left[w(t)\boldsymbol{x_{aug}}(0)\right] = \boldsymbol{0},\ E\left[v(t)\boldsymbol{x_{aug}}(0)\right] = \boldsymbol{0}\ \forall t \geq 0$$

Convém verificar a observabilidade do par $(\boldsymbol{A_{augd}}, \boldsymbol{C_{xi}})$ do sistema discretizado.

O modelo estocástico discreto no tempo é perturbado aditivamente por sequência branca Gaussiana $w_d[k]$. [*Brown, R.G. e Hwang, P.Y.C., Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, John Wiley & Sons, 1992, pg.299-300*] mostram que amostrar diretamente o ruído contínuo branco na medida $v(t)$ produz matematicamente uma sequência ruidosa com variância infinita. Para evitar isso, a amostragem da saída $y'[k]$ equivale à média do sinal $y'(t)$ no intervalo de amostragem T_s. Isto se justifica porque o estado $\boldsymbol{x_{aug}}(t)$ *não é processo estocástico branco* e pode ser aproximado como constante no intervalo de amostragem T_s suficientemente curto, produzindo a sequência de ruído com variância finita $r_d = r/T_s$ da sequência ruidosa $v_d[k]$ na medida amostrada $y'[k]$. (vide Apêndice)

$$E\big[w_d[k]\big] = 0,\ E\big[w_d[k]w_d[j]\big] = q.T_s.\delta_{k-j} = q_d,\ E[w_d[k]v_d[j]] = 0\ \forall k,j \geq 0$$

$$E\big[v_d[k]\big] = 0,\ E\big[v_d[k]v_d[j]\big] = r/T_s\,.\delta_{k-j} = r_d \quad E\big[w_d[k]\boldsymbol{x_{aug}}(0)\big] = E\big[v_d[k]\boldsymbol{x_{aug}}(0)\big] = \boldsymbol{0}$$

Estudo e testes com a planta e o sensor embasam a escolha, com o melhor conhecimento disponível, da incerteza no estado inicial da planta aumentada $\boldsymbol{P_{aug0}}$ e dos parâmetros q e r. Ainda assim, $\boldsymbol{P_{aug0}}$ e as variâncias q_d e r_d são parâmetros que o projetista precisa sintonizar em vista da impossibilidade de conhecimento completo e exato das incertezas na planta e no sensor.

Assumiremos que o ruído de pseudomedida é bastante reduzido. Por exemplo, para $\rho^{-1} = 5 \times 10^3$ e $T_s = 5 \times 10^{-3}[s]$, uma escolha é $\boldsymbol{P_{aug0}} = diag(0{,}01\ \ 1\ \ 1\ \ 0{,}01)$, $q_d = 0{,}25.T_s$ e $r_d = 5 \times 10^{-5}/T_s$. Tente outras.

Tarefa 2: Sintonize o filtro de Kalman discreto apresentado no *script* de projeto, simule o controlador DLQG; use a função de autocorrelação normalizada para avaliar a hipótese de brancura da sequência de inovação $y'[k] - \boldsymbol{C_{xi}}\boldsymbol{\hat{x}_{aug}}[k|k-1]$ segundo os resultados da simulação. Em seguida, use o script que controla a placa AD/DA da NI, EES40_2023_PlacaNI_Lab4controller_DLQGcomKF.m, para implementar o controlador DLQG na bancada. A frequência máxima de amostragem do D/A é 150 Hz. Verifique os resultados e analise se a hipótese é válida.

2.1 Para conhecimento, as equações recursivas das matrizes de covariância do erro de estimação $\boldsymbol{P_{aug}}$ propagada e atualizada, da variância *S* da inovação e do vetor de ganho $\boldsymbol{L_{aug}}$ *não requerem, neste problema específico invariante no tempo,* a realização dos processos estocásticos $\boldsymbol{x}$ e y'.

a. $\boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k) = \boldsymbol{A_{augd}}\boldsymbol{P}(k|k)\boldsymbol{A_{augd}}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{B_{augd}}\, q_d \boldsymbol{B_{augd}}^{\boldsymbol{T}}$,
$\boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k) \geq 0,\ k \geq 0\ \boldsymbol{P_{aug}}(0|0) = \boldsymbol{P_{aug0}}$ (covariância predita)

b. $S(k+1|k) = \boldsymbol{C_{xi}}\boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k)\boldsymbol{C_{xi}^T} + r_d$ (variância da inovação)

c. $\boldsymbol{L_{aug}}(k+1) = \boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k)\boldsymbol{C_{xi}^T}S^{-1}(k+1|k)$ (ganho de Kalman)

d. $\boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k+1) = \big[\boldsymbol{I_4} - \boldsymbol{L_{aug}}(k+1)\boldsymbol{C_{xi}}\big]\,\boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k)$,
$\boldsymbol{P_{aug}}(k+1|k+1) \geq 0$ (covariância atualizada)

e. $k \leftarrow k+1$ (nova iteração; voltar para a.)

2.2 Simulação da planta. A planta discreta é controlada com a realimentação do estado estimado e gera o estado *"verdadeiro"* $\boldsymbol{x_{aug}}[k]$ e a medida $y'[k]$:

1. $\hat{u}[k] = -\boldsymbol{K_{dlqr}}.\boldsymbol{\hat{x}_{aug}}(k|k),\ k \geq 0,\ \boldsymbol{\hat{x}_{aug}}(0|0) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{P_{aug0}})$
(Princípio da Separação: realimentação do estado estimado)

2. $\boldsymbol{x_{aug}}[k+1] = \boldsymbol{A_{augd}}\boldsymbol{x_{aug}}[k] + \boldsymbol{B_{augd}}\hat{u}[k] + \boldsymbol{B_{augd}}w_d[k] + \boldsymbol{G_{augd}}r[k]$,
$\boldsymbol{x_{aug}}[0] = \boldsymbol{0}$ (estado verdadeiro)

3. $y'[k] = \boldsymbol{C_{xi}} \boldsymbol{x_{aug}}[k] + v_d[k]$ (medida verdadeira)

4. $e[k] = r[k] - \boldsymbol{C_{aug}} \boldsymbol{x_{aug}}[k]$ (erro de rastreio)

O estado inicial da planta não é conhecido pelo projetista em circunstâncias práticas. O filtro é iniciado com $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(0|0) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{P_0})$ (vide 2.2.1 e o comando `mvnrnd`)

2.3 – Simulação do filtro de Kalman. As equações recursivas computam a estimativa do estado propagado (*a priori*) $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(k+1|k)$, a inovação $\tilde{y}(k+1|k)$ e a estimativa do estado atualizado (*a posteriori*) $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(k+1|k+1)$. A inicialização do filtro já foi vista acima.

5. $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(k+1|k) = \boldsymbol{A_{augd}} \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}(k|k) + \boldsymbol{B_{augd}} \hat{u}_i[k] + \boldsymbol{G_{augd}} r[k],\ k \geq 0,$ (estimativa predita)

6. $\tilde{y}(k+1|k) = y'[k+1] - \boldsymbol{C_{xi}} \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(k+1|k)$ (inovação)

7. $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(k+1|k+1) = \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{aug}}(k+1|k) + \boldsymbol{L_{aug}}(k+1).\tilde{y}(k+1|k)$ (estimativa atualizada)

9. $k \leftarrow k+1$ (nova iteração; voltar para 2.2.1)

Armazenar $\hat{u}[k]$, $e[k]$, $\tilde{y}(k+1|k)$ a cada instante $k \geq 0$ para investigar o desempenho do controle em malha fechada e o do filtro de Kalman em uma única realização. A operação na bancada confirma a hipótese de brancura da inovação? Explique.

Tarefa 3: Projetar filtro de Kalman de ordem três que estima somente o estado da planta com a medida da saída da planta y e o empregar no controlador DLQG. Vide o *script* de projeto Lab4_EES40_2023_semana14_DLQGcomKFRedux_alunado.m. Implementar na bancada com o *script* EES40_2023_PlacaNI_Lab4controller_DLQGcomKFRedux.m e sintonizar. A hipótese de brancura da sequência de inovação se sustenta na operação em bancada? Explique.

Apêndice:

$$y[k] = 1/T_s \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} y(\tau)d\tau = 1/T_s \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} [\boldsymbol{Cx}(\tau) + v(\tau)]d\tau \approx \boldsymbol{Cx}[k] + 1/T_s \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} v(\tau)d\tau$$

$$v_d[k] = 1/T_s \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} v(\tau)d\tau$$

$$E[v_d[k]] = 0,\ E[(v_d[k])^2] = E[\,1/T_s \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} v(\tau_1)d\tau_1 \,.\, 1/T_s \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} v(\tau_2)d\tau_2]$$

$$\Rightarrow r_d = E[(v_d[k])^2] = E[\,1/T_s^2 \iint_{(k-1)T_s}^{kT_s} E[v(\tau_1)v(\tau_2)]\, d\tau_1 d\tau_2] = 1/T_s^2\, E[\,\int_{(k-1)T_s}^{kT_s} r d\tau_2] = r/T_s$$

Estrutura do sistema de controle DLQG com filtragem de Kalman. No projeto, a planta aumentada contínua foi discretizada com método de equivalência ZOH e representada no espaço de estado.

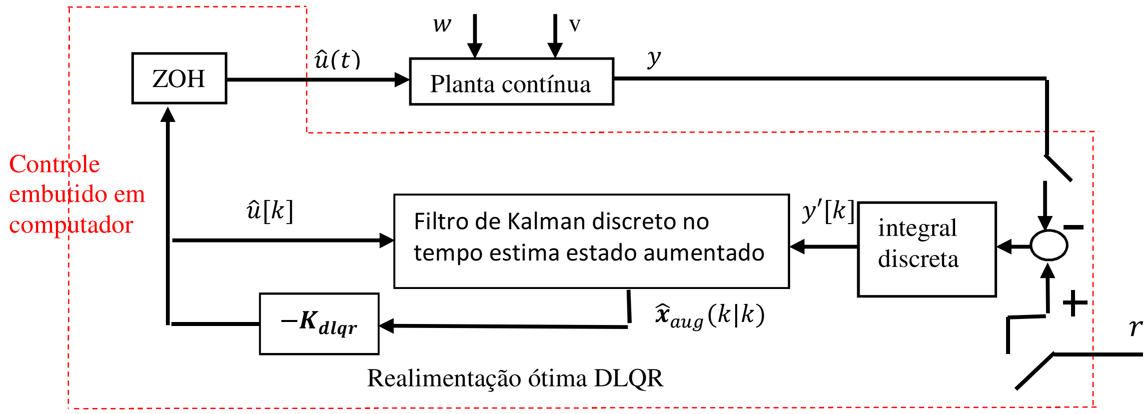

Figura 2 – Controle DLQG com filtro de Kalman estimando o estado aumentado usando a pseudomedida $y'[k]$.