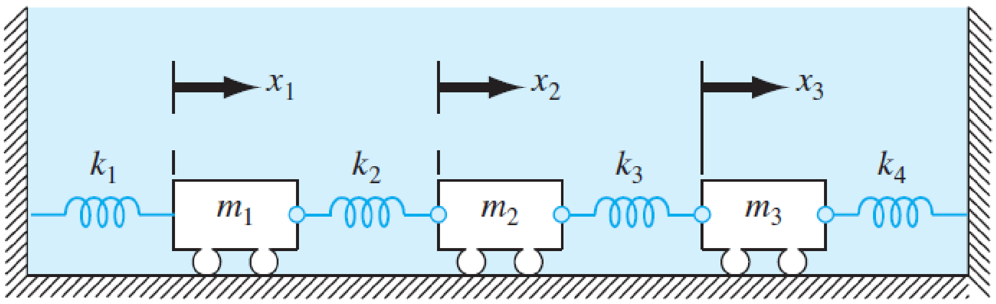
# Lista 13

Para todas as listas de exercício, você deve criar arquivos .m com os códigos implementados e, se necessário, um arquivo em pdf com os resultados gerados (pode ser a impressão dos resultados calculados ou figuras). Todos arquivos devem ser nomeados como RA000000_LXX_YY.m, em que

- 000000 é o número do seu RA
- XX é o número da lista.
- YY é o número do exercício.

1) Um conjunto de massas e molas interligados, mostrado na figura, é um típico exemplo de onde pode surgir o autoproblema.




As equações de movimento de cada massa do sistema mostrado na figura são:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = 0$$
$$m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 = 0$$

Dividindo-se cada equação pela massa, obtemos:

$$\ddot{x}_1 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}x_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 - \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{(k_2 + k_3)}{m_2}x_2 - \frac{k_3}{m_2}x_3 = 0$$
$$\ddot{x}_3 - \frac{k_3}{m_3}x_2 + \frac{(k_3 + k_4)}{m_3}x_3 = 0$$

O sistema de equações acima pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)/m_1 & -k_2/m_1 & 0 \\ -k_2/m_2 & (k_2 + k_3)/m_2 & -k_3/m_2 \\ 0 & -k_3/m_3 & (k_3 + k_4)/m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Admitindo que cada solução é do tipo $x_i(t) = X_i e^{i\omega t}$ ($i$ é a unidade imaginária), então:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{\{X\}} e^{i\omega t}$$

Derivando e substituindo nas equações, obtemos

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} e^{i\omega t} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1+k_2)/m_1 & -k_2/m_1 & 0 \\ -k_2/m_2 & (k_2+k_3)/m_2 & -k_3/m_2 \\ 0 & -k_3/m_3 & (k_3+k_4)/m_3 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que se $\lambda = \omega^2$, obtemos exatamente um autoproblema:

$$([A] - \lambda[I])\{X\} = \{0\}$$

Este tipo de autoproblema surge em problemas dinâmicos de vibrações lineares. A raiz quadrada dos autovalores $\sqrt{\lambda} = \omega$ fornece os valores das frequências naturais características do sistema e os autovetores correspondentes $\{X\}$ fornecem os modos de vibrar de cada frequência.

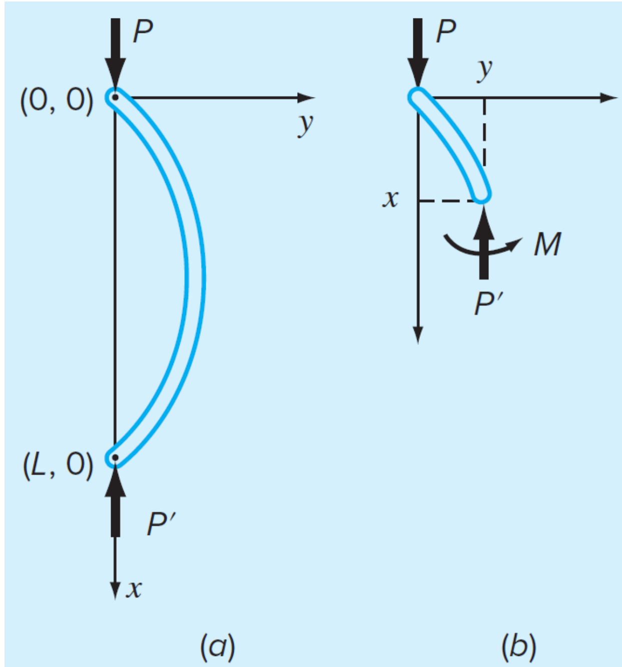
Considerando $k_1 = k_4 = 20\,\mathrm{N/m}$, $k_2 = k_3 = 45\,\mathrm{N/m}$, $m_1 = m_3 = 1.25\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 2.50\,\mathrm{kg}$, determine as frequências naturais e modos de vibrar do sistema de massas e molas mostrados na figura.

Sua função deve retornar um vetor `w` com as frequências naturais e uma matriz `X` com os modos de vibrar correspondentes a cada frequência.

```
[w, X] = RA000000_L13_01;
```

```
function [w, X] = RA000000_L13_01()
    % seu código aqui
end
```

2) O problema de flambagem aparece em barras esbeltas sujeitas a cargas de compressão axiais.




A curvatura de uma barra esbelta pode ser modelada através da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0$$

onde $p^2 = \frac{P}{EI}$, em que $E$ é o módulo de elasticidade do material e $I$ é o segundo momento de área da seção transversal em torno de sua linha neutra.

Esse modelo pode ser convertido a um autoproblema substituindo-se uma aproximação de diferenças finitas para a segunda derivada, de forma a obter:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + p^2y_i = 0$$

em que $i$ é um nó localizado ao longo da barra e $\Delta x$ é o espaçamento entre os nós. Essa equação também pode ser expressa como:

$$\frac{1}{\Delta x^2}y_{i-1} - \left(\frac{2}{\Delta x^2} - p^2\right)y_i + \frac{1}{\Delta x^2}y_{i+1} = 0$$

Escrevendo essa equação para uma série de nós interiores ao longo da barra obtém-se um sistema de equações homogêneo.

Por exemplo, se a barra for dividida em cinco segmentos (isto é, quatro nós no interior da barra), o resultado é:

$$
\begin{bmatrix}
\left(\frac{2}{\Delta x^2} - p^2\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{\Delta x^2} & \left(\frac{2}{\Delta x^2} - p^2\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 \\
0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \left(\frac{2}{\Delta x^2} - p^2\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \left(\frac{2}{\Delta x^2} - p^2\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0
$$

Observe que a matriz acima pode ser escrita como $[A] - p^2[I]$ e, de fato, temos um autoproblema. Nesse tipo de autoproblema, pode-se determinar a carga crítica de flambagem a partir dos autovalores $(\lambda = p^2)$, $P_{\mathrm{cr}} = EIp^2$. Os autovetores são os modos de flambagem correspondentes a cada autovalor.

Admita que uma coluna de madeira carregada axialmente tem as seguintes características: $E = 10 \times 10^9\,\mathrm{Pa}$, $I = 1.50 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^4$ e $L = 3.5\,\mathrm{m}$. Para o modelo de cinco segmentos e quatro nós interiores ($\Delta x = L/5 = 0.7\,\mathrm{m}$), determine os autovalores e autovetores da equação acima. A partir dos autovalores, determine as cargas críticas de flambagem.

Sua função deve retornar um vetor `P_crit` com as cargas críticas de flambagem e uma matriz V com os modos de flambagem correspondentes.

```
[P_crit, V] = RA000000_L13_02;
```

```
function [P_crit, V] = RA000000_L13_02()
    % seu código aqui
end
```