EP2-MAP3122:

Opções no mercado financeiro

Augusto Barbosa Villar Silva - 11805130
Vinícius Barros Alvarenga - 11257564

MAP3122 - Métodos numéricos e aplicações

15 de Abril de 2022

1 Introdução

Nesse trabalho, foi desenvolvida uma implementação do modelo de Black-Scholes para a precificação de opções. Para isso, foi desenvolvido um método numérico que foi testado posteriormente em três casos: um fictício, um para o câmbio dólar-real e outro um cenário real. No presente relatório, temos uma explicação da precificação de opções por meio desse modelo, uma demonstração de como a equação de Black-Scholes pode ser escrita na forma de equação de calor, uma comparação entre os métodos com vetorização e sem vetorização e, por fim, as simulações dos cenários com suas respectivas interpretações.

2 Precificação de opções e a equação de Black-Scholes

Desenvolvido em 1973 por Fischer Black, Robert Merton, e Myron Scholes a equação de Black-Scholes foi o primeiro modelo matemático para a precificação de opções usado em larga escala. O modelo foi responsável pela grande procura na comercialização de opções, levando seus criadores a receberem o prêmio Nobel pelo trabalho.

O modelo nos dá uma estimativa teórica do preço de opções europeias, mostrando que esse preço é único dado o risco do ativo e seu retorno esperado. Para isso, o modelo propõe uma série de hipóteses, mostrada a seguir.

Hipóteses sobre o ativo:

- A ação não paga dividendos
- A opção só pode ser exercida no vencimento
- É possível emprestar e tomar emprestado dinheiro a uma taxa de juros constante e conhecida, livre de risco.
- O preço do ativo segue um movimento Browniano geométrico com tendência e volatilidade constantes.

Hipóteses sobre o mercado:

- Não há custos de transação
- Não existe risco de arbitragem (i.e. não há como fazer lucro sem risco).
- As transações dos instrumentos financeiros são feitas em tempo contínuo, isto é, os preços e o tempo são variáveis contínuas.
- Preço das ações seguem uma distribuição lognormal.

Enquanto o modelo original não computa o efeito da distribuição de dividendos nas ações existem variações dele que fazem esse cálculo. No modelo de Black-Scholes temos como entradas a volatilidade, o preço do ativo, o preço de exercício da opção, o tempo até a expiração da opção e taxa de empréstimos livre de risco. A solução da equação é obtida levando em consideração as condições finais e de contorno. Com isso, podemos obter o preço de uma opção dadas as entradas. Assim sendo, podemos estimar o valor justo de uma opção para diferentes valores do preço da ação no dia do exercício.

Esse modelo calcula opções de compra (call options) e opções de venda (put options). Para a primeira, a solução da equação é 1.

$$C(S_t, t) = N(d_1)S_t - N(d_2)PV(K) \tag{1}$$

Para a opção de venda, tem-se a equacao 2

$$P(S_t, t) = N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S_t \tag{2}$$

sendo que $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)]$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ e $PV(K) = Ke^{-r(T-t)}$

3 Equação de Black-Scholes na forma de equação do calor

De início, temos a equação de Black-Scholes 3:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, 0 \leq S, 0 \leq t \leq T \tag{3}$$

sendo que $V(S,T)$ pode ser escrito como $V(S,T) = f(S), 0 \leq S, V(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T$.

Se V é o preço de uma opção de compra (call option), a condição de contorno é que $f(S) = max(S-k, 0)$, aonde K é o preço de exercício da opção e S é o preço da ação.A seguir, fazemos mudança de variáveis para transformar o problema da condição de contorno da equação de Black-Scholes para um problema de condição de contorno da equação do calor, tem-se que $S = e^x, t = T = \frac{-2\tau}{\sigma^2}$.

Logo, pode-se reescrever como a equação 4:

$$V(S,t) = v(x,\tau) = v(ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t))) \tag{4}$$

Calculamos as derivadas parciais de V em relação a S e t em termos das derivadas parciais de V em relação a x e τ, resultando em 5, 6 e 7.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{7}$$

Substituindo essas expressões na equação de Black-Scholes e simplificando, temos a equação 8.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}v \tag{8}$$

Fazendo $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ e $t = \tau$, o problema da condição de contorno se transforma nas equações 9 e 10:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv; -\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq \frac{\sigma^2}{2}T \tag{9}$$

$$v(x,0) = V(e^x, T) = f(e^x), -\infty < x < \infty \tag{10}$$

Mais uma mudança de variável é necessária para eliminar os dois últimos termos do lado esquerdo da última equação, resultando na equação 11.

$$v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x,t) = \phi u \tag{11}$$

Aonde α e β serão escolhidos depois. Com isso, computamos as derivadas parciais de V em termos de x e t, tem-se as equacoes **??**, **??** e **??**.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta\phi u + \phi\frac{\partial u}{\partial t} \tag{12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha\phi u + \phi\frac{\partial u}{\partial x} \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2\phi u + 2\alpha\phi\frac{\partial u}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14}$$

Agora, escolhemos os valores de α e β, segundo as equações 15 e 16.

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1) = \frac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2} \tag{15}$$

$$\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 = -(\frac{\sigma^2 + 2r}{2\sigma^2})^2 \tag{16}$$

Substituindo esses valores na equação, chegamos, finalmente, na equação de Black-Scholes na forma de equação do calor (17):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; -\infty < x < \infty; 0 \leq t \leq \frac{\sigma^2}{2}T \tag{17}$$

sendo que $u(x,0) = e^{-\alpha x}max(e^x - K, 0)$.

4 Comparação entre os métodos vetorizados e não vetorizados

Foram desenvolvidos dois métodos para a resolução da equação de Black-Scholes na forma de equação do calor. Para isso, uma matriz foi construída ao se discretizar o tempo e o espaço. A partir dessa matriz, obtemos o tempo e o espaço corretos que resultam na melhor aproximação numérica da solução da equação. O primeiro método é iterativo, com iterações nos dois eixos da matriz, o segundo é vetorizado, com iterações apenas sobre os vetores.

Assim sendo, é esperado que por ter menos iterações o segundo método seja mais rápido. Além disso, as operações em vetores são mais rápidas, fazendo com que as somas necessárias para cada iteração sejam feitas de maneira mais eficiente.

Na figura 1 podemos ver um exemplo que mostra que o cálculo da matriz u é cerca de 20 vezes mais rápido para o método vetorizado.

```
-----------------------MENU--------------------------

 Selecione o que deseja rodar:
 1) Cenario fictício com K=R$1, sigma = 0.01, T = 1 ano e r = 0.01
 2) Cenário de câmbio com sigma = 0.1692, r = 0.1075, S = R$5.6376, K = R$5.7, T = 3/12
 3) Cenário real com dados reais fornecidos (COLOPQUE OS DADOS AQUI!)
 4) Comparacão entre versão vetorizada e não vetorizada

 Entrada: 4
O tempo gasto para a versão não vetorizada foi de:  0.6666975021362305
O tempo gasto para a versão vetorizada foi de:  0.03100132942199707
```

Figura 1: Comparação entre os métodos de calculo da matriz u

5 Cenários de simulação

Uma vez implementadas todas as partes do código, foram feitas diversas simulações que são melhor descritas nas subseções abaixo.

5.1 Cenário fictício

No cenário fictício, vamos algumas simulações. Para isso, usamos que K = R$1,00, T = 1 ano, S_0 = R$1,00.

5.1.1 Parte 1

Na primeira parte, calculamos o prêmio da opção que pode ser visto na figura 2 que mostra o valor total para 1000 unidades do ativo, que foi o que foi comprado no cenário. Nesse caso, usamos $\sigma = 1\%$, $t = 0$ e $r = 1\%$

```
----------------------MENU-------------------------

 Selecione o que deseja rodar:
 1) Cenario fictício com K=R$1, sigma = 0.01, T = 1 ano e r = 0.01
 2) Cenário de câmbio com sigma = 0.1692, r = 0.1075, S = R$5.6376, K = R$5.7, T = 3/12
 3) Cenário real com dados reais fornecidos (COLOPQUE OS DADOS AQUI!)
 4) Comparacão entre versão vetorizada e não vetorizada

 Entrada: 1
A precificacao da opcao de compra de R$ 1000 do ativo para o tempo presente é de 10.775409516329532.
```

Figura 2: Premio da opção do cenário fictício

5.1.2 Parte 2

A segunda parte é dividida em duas. Em primeiro lugar, fazemos uma análise do lucro para diversos valores de S. Esses valores foram definidos discretizando um intervalo de S $\in$ [0.5, 1.5]. O gráfico gerado permite que se verifique a partir de qual preço de S a opção gera lucro, conforme podemos ver na figura 3. Já na segunda parte, foram feitas curvas do preço da opção em relação ao preço do ativo para vários instantes de tempo, ou seja, o comprador da opção realizando a compra em diferentes instantes, podemos ver esse cenário na figura 4

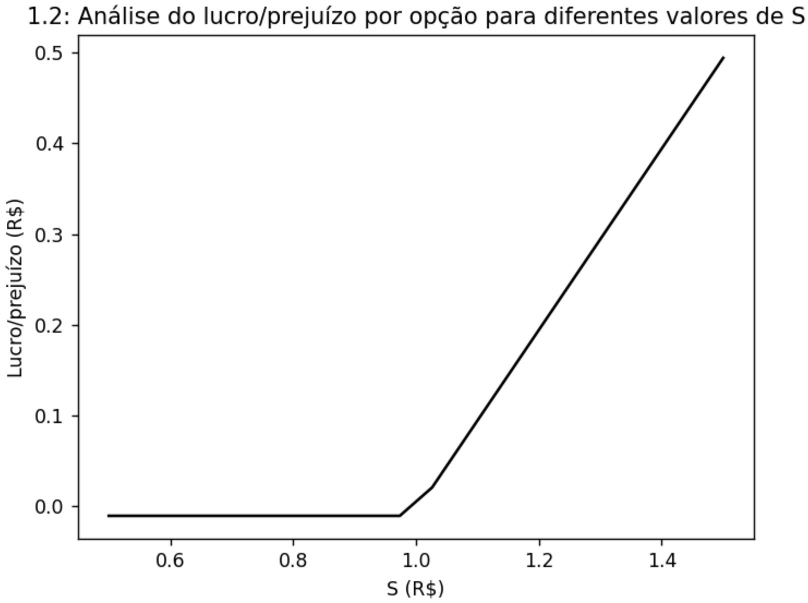


Figura 3: Análise do lucro da opção do cenário fictício com os valores de S com sigma = 1%

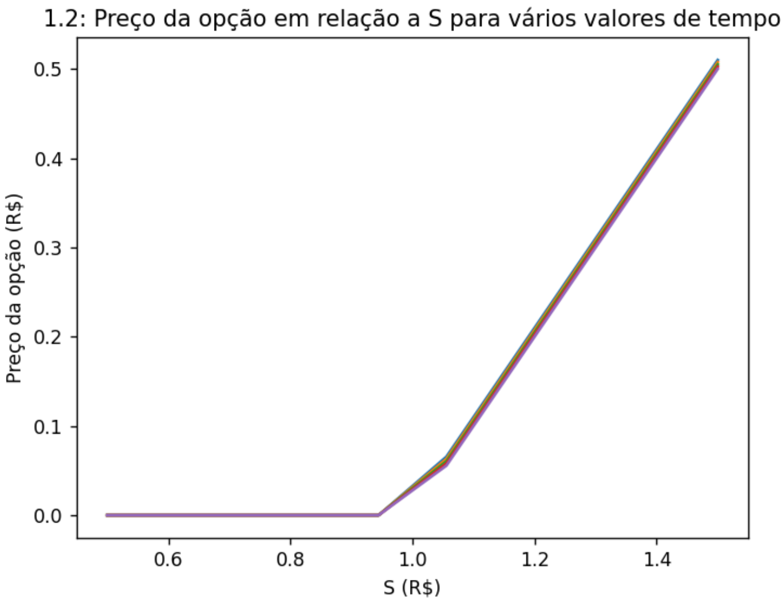


Figura 4: Curvas de preço da opção em relação ao preço do ativo para diferentes instantes de compra de S com sigma = 1% no cenário fictício

5.1.3 Parte 3

Na terceira parte, repetimos o processo do da parte anterior, porém, dessa vez nós utilizamos $\sigma = 2\%$, podemos ver os resultados nas figuras 4 e 5.

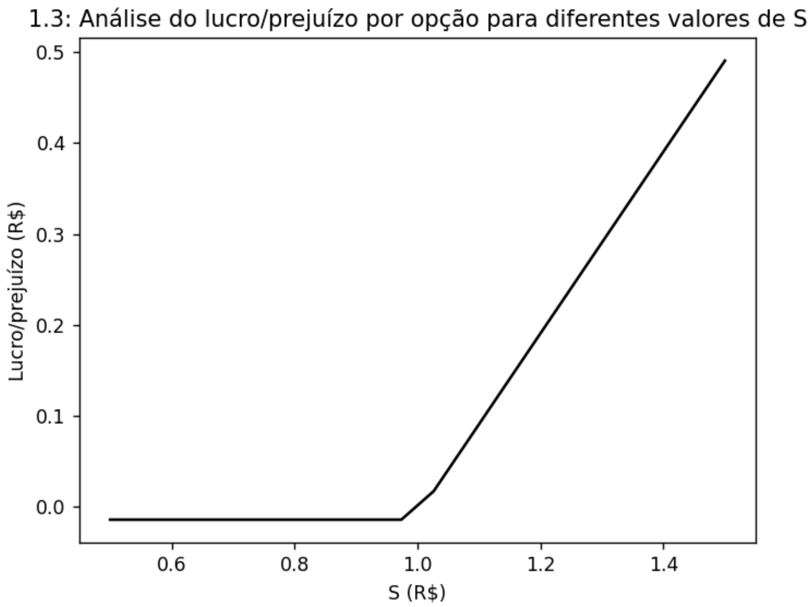


Figura 5: Análise do lucro da opção do cenário fictício com os valores de S com sigma = 2%

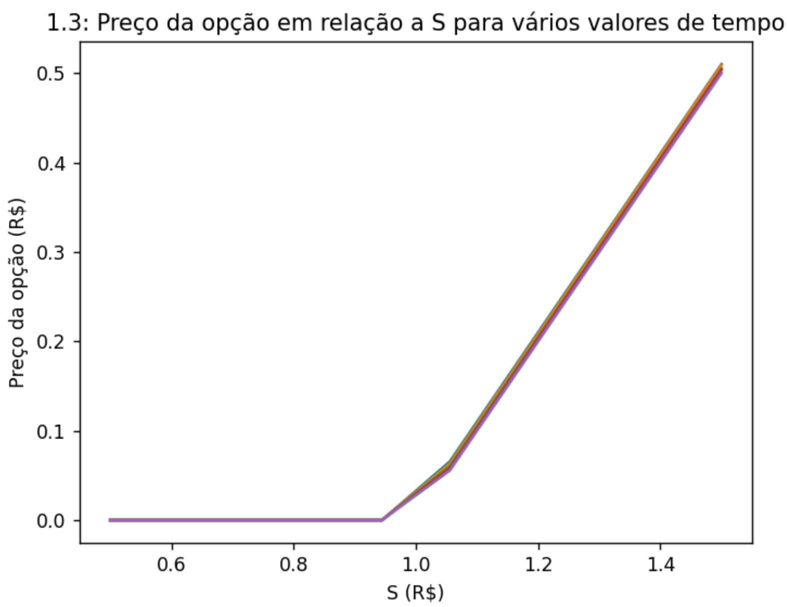


Figura 6: Curvas de preço da opção em relação ao preço do ativo para diferentes instantes de compra de S com sigma = 2% no cenário fictício

5.1.4 Parte 4

Por fim, na parte 4 alteramos $\sigma = 10\%$ e $r = 10\%$, fazendo os mesmos testes, obtendo os resultados das figuras

```
----------------------MENU-------------------------

 Selecione o que deseja rodar:
 1) Cenario fictício com K=R$1, sigma = 0.01, T = 1 ano e r = 0.01
 2) Cenário de câmbio com sigma = 0.1692, r = 0.1075, S = R$5.6376, K = R$5.7, T = 3/12
 3) Cenário real com dados reais fornecidos (COLOPQUE OS DADOS AQUI!)
 4) Comparacão entre versão vetorizada e não vetorizada

 Entrada: 1
A precificacao da opcao de compra de R$ 1000 do ativo para o tempo presente é de 10.775409516329532.
```

Figura 7: Premio da opção do cenário fictício com sigma = 10% e r = 10%

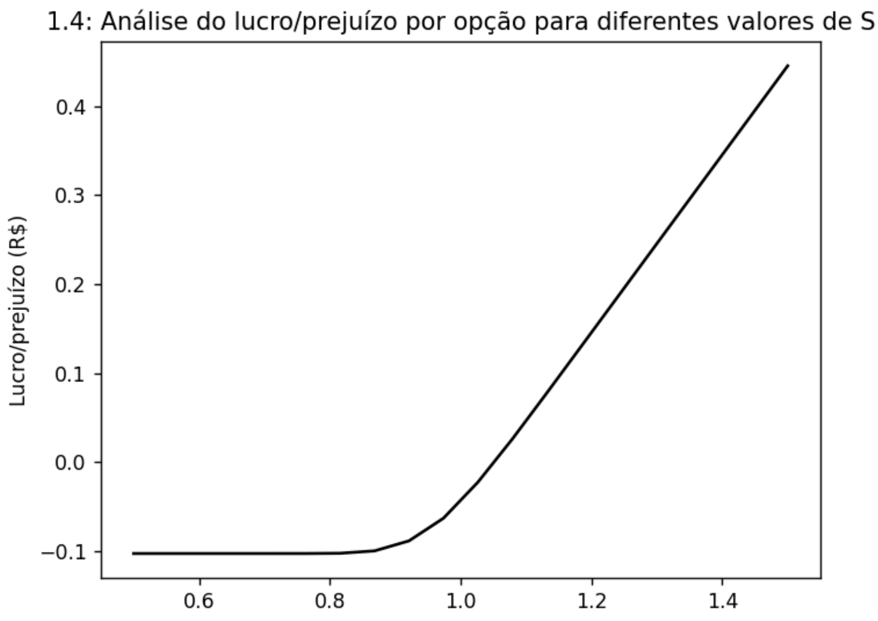


Figura 8: Análise do lucro da opção do cenário fictício com os valores de S com sigma = 10% e r = 10%

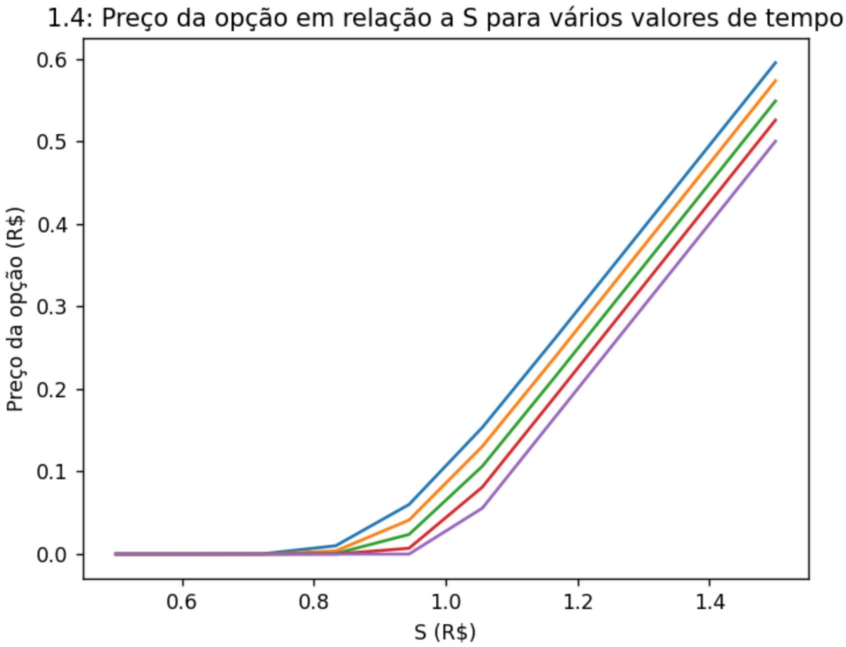


Figura 9: Curvas de preço da opção em relação ao preço do ativo para diferentes instantes de compra de S com sigma = 10% e r = 10% no cenário fictício

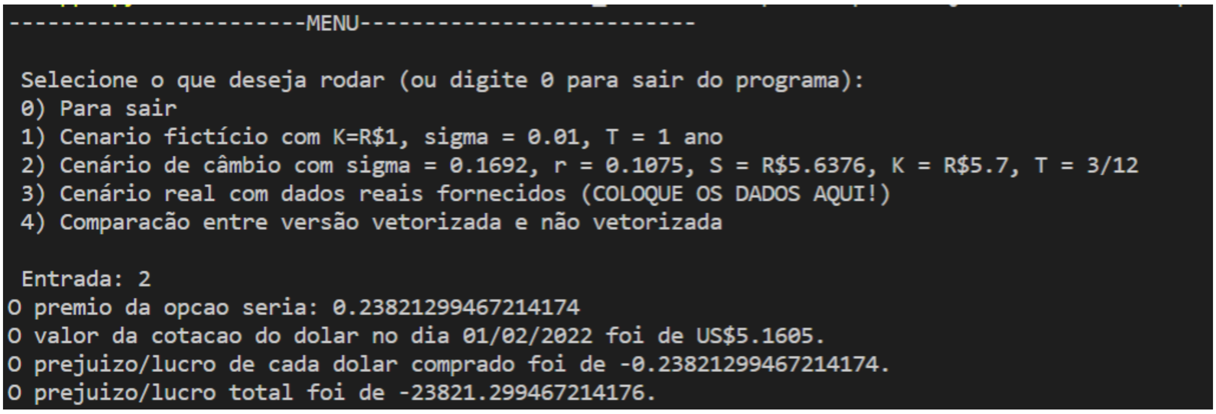
5.1.5 Parte 5

Os parâmetros que são alterados na simulação são o σ e o r, podemos notar que uma pequena variação na volatilidade não gera uma grande variação nas curvas de lucro/prejuízo e nem nas curvas do preço da opção. Da parte 2 para a parte 3, dobrou-se o sigma e mesmo assim as curvas ainda não variaram tanto. Isso pode ser constatado comparando as figuras 3 com a 5 e as figuras 4 com a 6.

Na parte 4, muda-se o σ e o r de forma expressiva, o que leva as curvas a mudarem suas formas de maneira também expressiva. Comparando as figuras citadas há pouco com as figuras 8 e 9 vemos que o lucro é menor, o que é aceitável já que temos mais volatilidade e taxas de juros livres de risco muito maiores. Vemos também que o momento em que se compra a opção também tem maior influência sobre o preço dela, o que faz sentido pois, quanto mais perto do vencimento mais previsível é o preço do ativo e, portanto, a opção deve custar mais. Assim sendo, as curvas de preço com o tempo serem mais distantes também faz sentido, com as opções compradas antes sendo mais baratas. Isso se evidenciou nessa última parte, pois com a maior taxa de juros e volatilidade o comprador assume um maior risco, logo, ele paga menos pela opção já que há menos pessoas no mercado dispostas a correr o mesmo risco. Conforme o tempo passa, mais pessoas entram na disputa, uma vez que o preço final do ativo é mais previsível.

5.2 Cenário de câmbio

Primeiramente, calculamos o prêmio desta opção. Utilizando T = 1/12 e t = 0, com isso, chegamos aos valores mostrados na figura 10. Na mesma figura, podemos ver o valor do cambio nesta data e, com isso, o cálculo do prejuízo/lucro da operação segundo a fórmula: $L(S,T) = max(S - K, 0) - V_*$



```
-----------------------MENU-------------------------

 Selecione o que deseja rodar (ou digite 0 para sair do programa):
 0) Para sair
 1) Cenario fictício com K=R$1, sigma = 0.01, T = 1 ano
 2) Cenário de câmbio com sigma = 0.1692, r = 0.1075, S = R$5.6376, K = R$5.7, T = 3/12
 3) Cenário real com dados reais fornecidos (COLOQUE OS DADOS AQUI!)
 4) Comparacão entre versão vetorizada e não vetorizada

 Entrada: 2
O premio da opcao seria: 0.23821299467214174
O valor da cotacao do dolar no dia 01/02/2022 foi de US$5.1605.
O prejuizo/lucro de cada dolar comprado foi de -0.23821299467214174.
O prejuizo/lucro total foi de -23821.299467214176.
```

Figura 10: Cenário de câmbio - prêmio da opção e o lucro/prejuízo da operação

Após isso, supondo não conhecidos os valores futuros do câmbio foi feita uma análise do prejuízo/lucro estimado para 1 de Janeiro de 2022 de uma opção emitida em 1 de Dezembro de 2021 com vencimento em 1 de Março de 2022. A semelhança dos cenários anteriores foi feita uma discretização com S ∈ [5.2, 6.2], obtendo a tabela abaixo e a figura 11.

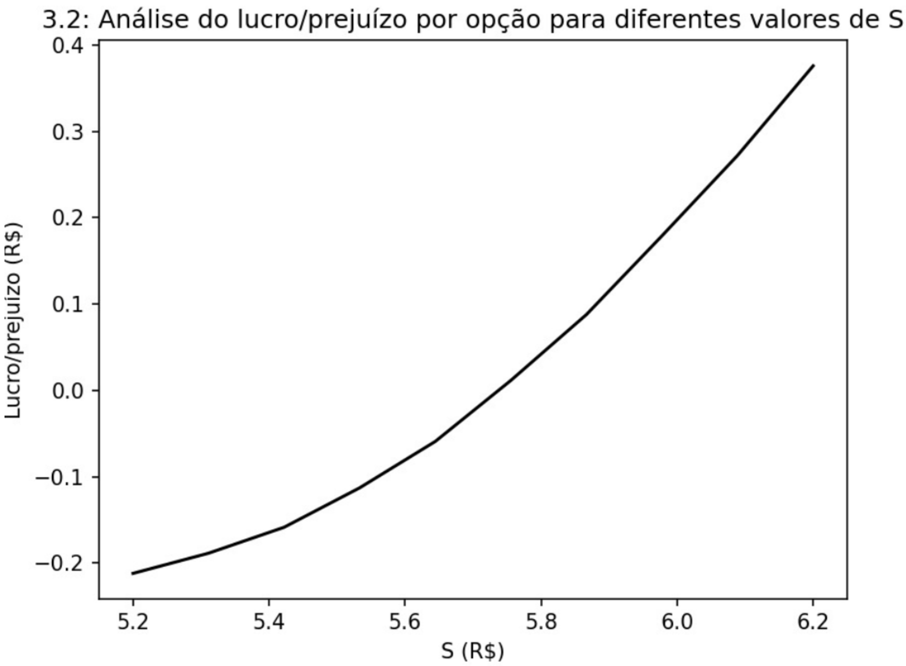


Figura 11: Cenário de câmbio - prêmio da opção e o lucro/prejuízo da operação

A seguinte tabela mostra os valores utilizados e calculados para o gráfico acima. Como pode-se ver, o comprador para de ter prejuízo, neste caso, a partir do valor de 5.76 reais do dólar.

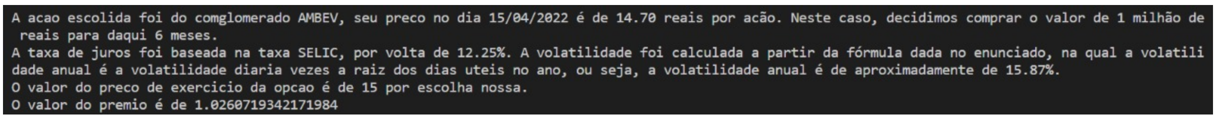
Preco da Acão	Prejuizo/Lucro
5.2	-0.212
5.31	-0.189
5.42	-0.159
5.53	-0.113
5.65	-0.059
5.76	0.012
5.86	0.088
5.98	0.179
6.09	0.272
6.2	0.376

5.3 Cenário real

No cenário real, escolheu-se as acoes do conglomerado AMBEV. No dia 15/04/2022 o preço é de 14.70 reais por ação. Neste caso, decidimos comprar o valor de 1 milhão de ações para daqui 6 meses. A taxa de juros foi baseada na taxa SELIC, por volta de 12.25%. A volatilidade foi calculada a partir da fórmula dada no enunciado (mostrada a baixo), na qual a volatilidade anual é a volatilidade diária ($\sigma_{diario} = 0.01$) vezes a raiz dos dias uteis no ano ($\sqrt{P}$, com P = 252), ou seja, a volatilidade anual é de aproximadamente de 15.87%.

$$\sigma_{anual} = \sigma_{diario} \cdot \sqrt{P} \tag{18}$$

A figura 12 mostra a saída do terminal do nosso programa. Pode-se ver que o valor do prêmio de cada opção gerado pelo nossos parâmetros é de 1.026 aproximadamente.



```
A acao escolida foi do comglomerado AMBEV, seu preco no dia 15/04/2022 é de 14.70 reais por acão. Neste caso, decidimos comprar o valor de 1 milhão de
 reais para daqui 6 meses.
A taxa de juros foi baseada na taxa SELIC, por volta de 12.25%. A volatilidade foi calculada a partir da fórmula dada no enunciado, na qual a volatili
dade anual é a volatilidade diaria vezes a raiz dos dias uteis no ano, ou seja, a volatilidade anual é de aproximadamente de 15.87%.
O valor do preco de exercicio da opcao é de 15 por escolha nossa.
O valor do premio é de 1.0260719342171984
```

Figura 12: Saída do terminal - Informações do cenário escolhido

Para um analise interessante, optamos por refazer os gráficos já desenvolvidos nesse EP. Como pode ser visto nas figuras 13 e 14.

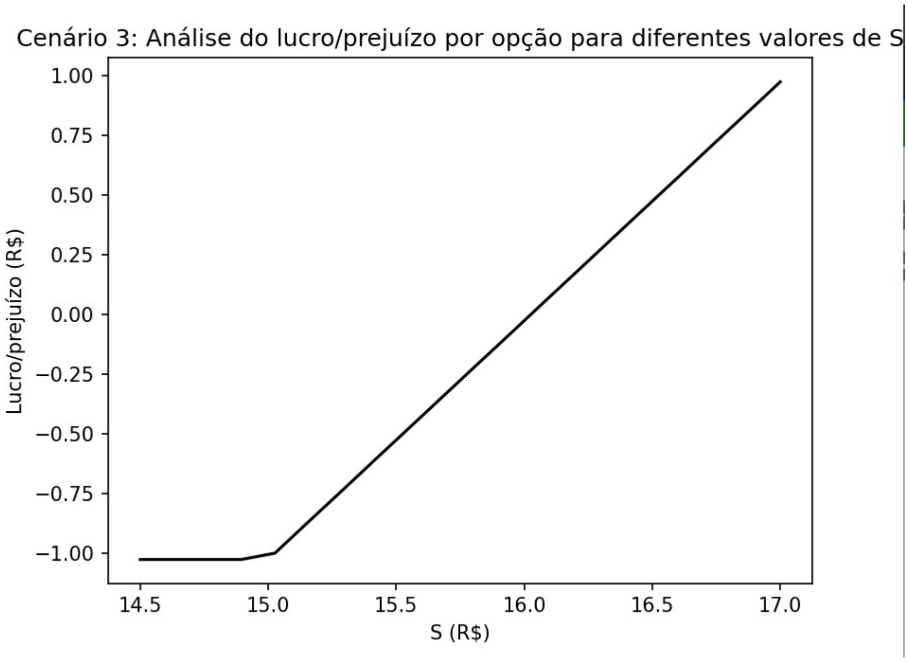


Figura 13: Cenário real - Análise do lucro da opção

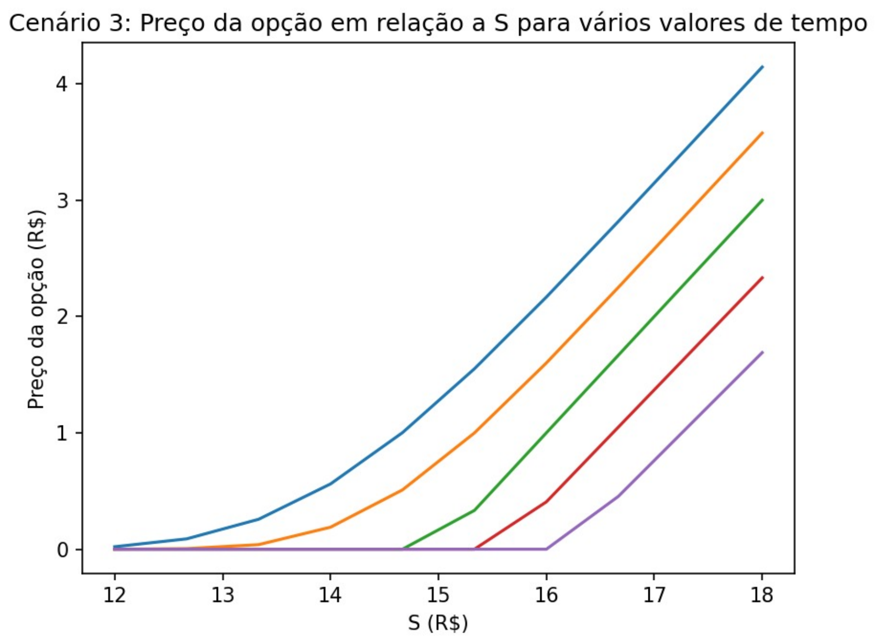


Figura 14: Cenário real - Curvas de preço da opção em relação ao preço do ativo para diferentes instantes de compra de S

Como pode ser visto, para essas taxas e para o tempo de 6 meses, a cenário 3 apenas fornece lucro ao comprador quando ele passa de 16.5 aproximadamente, caso ele viesse a comprar a ação. Além disso, é possível ver na segunda imagem que para tempos diferentes, temos curvas diferentes.