



Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

7600100 - Acústica Física

Estudo da Formação de Som por um Instrumento de Cordas usando Simulação Numérica

Aluno: Vinícius Bastos Marcos - 12556715
Docente: Prof. Dr. José Pedro Donoso Gonzalez

São Carlos
2023

Sumário

Sumário	1
1 Introdução	2
2 Métodos	3
2.1 Modelagem matemática da corda	3
2.2 Escolha das constantes	3
2.3 Resolução numérica da EDP	3
2.4 Transformando dados em som	4
3 Resultados e Discussão	4
3.1 Diferentes notas com a mesma condição inicial	5
3.2 Variando a condição inicial (nota Lá)	6
4 Conclusão	8
Referências	9

1 Introdução

A música, uma expressão universal da criatividade humana, tem sido uma fonte de fascínio ao longo da história. Instrumentos musicais desempenham um papel fundamental na criação e na transmissão dessa arte, e entre eles, os instrumentos de cordas têm uma presença única e distinta. O som produzido por esses instrumentos é o resultado de uma complexa interação entre diversos fatores físicos e acústicos, proporcionando um campo fértil para a investigação científica.



Figura 1: Djavan, renomado músico, cantor e compositor, exibe sua maestria com o violão.

Este trabalho concentra-se no estudo da formação de som em instrumentos de cordas, empregando técnicas de simulação numérica. A compreensão profunda dos processos físicos subjacentes à geração de som por instrumentos de cordas não apenas amplia nosso conhecimento científico, mas também contribui para o refinamento da construção desses instrumentos e aprimora as técnicas de execução musical.

A simulação numérica emerge como uma ferramenta poderosa nesse contexto, permitindo a modelagem matemática e computacional dos fenômenos acústicos envolvidos. Ao adotar uma abordagem interdisciplinar que combina princípios da física, matemática e engenharia acústica, podemos desvendar os segredos acústicos que permeiam a produção sonora em instrumentos de cordas.

Ao longo deste estudo, exploraremos os diferentes componentes que contribuem para a formação do som, incluindo a ressonância das cordas, efeitos de amortecimento e outros fatores cruciais. Além disso, examinaremos como parâmetros específicos, como materiais utilizados na construção influenciam diretamente nas características sonoras resultantes.

Este trabalho não apenas busca aprimorar a compreensão teórica dos fenômenos acústicos associados a instrumentos de cordas, mas também almeja contribuir para a otimização da qualidade sonora e do design desses instrumentos, proporcionando valiosas perspectivas para fabricantes, músicos e entusiastas da música.

2 Métodos

Os códigos feitos, com comentários e explicações, podem ser acessados e testados em: <https://github.com/vinibastosm/Acustica-Fisica/blob/main/acustica.ipynb>.

2.1 Modelagem matemática da corda

A vibração de uma corda, levando em conta aspectos de dissipação do ambiente e de características da própria corda, pode ser descrita a partir da seguinte equação diferencial parcial: [1]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial y}{\partial t} - l^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

Podemos observar que nela, temos a famosa equação de onda com amortecimento. Para incorporar os importantes efeitos do acoplamento entre tensão e deformação (incorporar o Módulo de Young), introduzimos um termo de rigidez na equação de onda, que é a derivada parcial de quarta ordem no espaço.

2.2 Escolha das constantes

- Comprimento da corda de um violão $L = 0.6m$. Com $n_x = 100$ (passos no espaço), temos que $\Delta x = \frac{0.6m}{100} = 0.6cm$.
- Escolheremos $t_{total} = 5s$ e $n_t = 10^6$, o que nos leva em $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}s$.
- Pelo método que vamos utilizar, existe uma condição de estabilidade que será testada no código:

$$v < \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v \Delta t}{\Delta x} < 1$$

- A velocidade que vamos utilizar é vai depender da frequência f da nota que queremos simular. Vamos considerar que a corda estará vibrando no harmônico fundamental ($L = \lambda/2$), o primeiro harmônico, mas podemos fazer modificações simples para simular de outros. A velocidade será então:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = 2Lf$$

- Os parâmetros utilizados $\gamma = 2.6 \cdot 10^{-5}s/m$ e $l = 2 \cdot 10^{-6}$. Não achei nenhuma referência para esses valores, apenas as ordens deles, mas eu testei alguns e os utilizados são os que o som produzido próximo ao real.

2.3 Resolução numérica da EDP

Vamos fazer uso de ferramentas de Cálculo Numérico tanto para resolver essa EDP, quanto para, posteriormente, transformar a simulação em som. Discretizando a equação ficamos com: [2] [3]

$$\frac{y_{n+1,m} - 2y_{n,m} + y_{n-1,m}}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{v^2} \frac{y_{n,m+1} - 2y_{n,m} + y_{n,m-1}}{(\Delta t)^2} - \gamma \frac{y_{n,m+1} - y_{n,m-1}}{2\Delta t} - l^2 \frac{y_{n+2,m} - 4y_{n+1,m} + 4y_{n,m} - 4y_{n-1,m} + y_{n-2,m}}{(\Delta x)^4} = 0 \quad (2)$$

Isolando o termo que dá a corda no instante de tempo seguinte, $y_{n,m+1}$, temos

$$y_{n,m+1} = \left(\frac{2v^2(\Delta t)^2}{2 + \gamma v^2 \Delta t} \right) \cdot \left[\gamma \frac{y_{n,m-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{v^2} \frac{y_{n,m-1} - 2y_{n,m} + y_{n-1,m}}{(\Delta t)^2} + \frac{l^2 y_{n+2,m} - 4y_{n+1,m} + 4y_{n,m} - 4y_{n-1,m} + y_{n-2,m}}{(\Delta x)^4} + \frac{y_{n+1,m} - 2y_{n,m} + y_{n-1,m}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (3)$$

que será utilizado no programa em *loops* para encontrar todos os estados da corda ao longo de todo o tempo.

2.4 Transformando dados em som

Para transformar os dados da onda em som, faremos uma transformada de Fourier. No nosso problema, não importa as constantes, vamos apenas colocar a proporcionalidade.

$$Amplitude \propto \int_0^L y(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (4)$$

No caso, o computador não consegue fazer a integral analítica. Assim, vamos discretizar a integral de maneira aproximada:

$$\int_0^L y(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \approx \sum_0^n y_{sol}(x,s) \cdot \sin(n\pi x) \quad (5)$$

em que $x = 0, 1, \dots, 100$ e s são todos os elementos temporais da solução.

Com essa função e a solução, e usando bibliotecas de python conseguimos gerar arquivos de áudio "*.wav". [5]

3 Resultados e Discussão

Para as simulações, foram utilizadas as notas lá ($400Hz$) e mi ($330Hz$). [1]. A primeira comparação foi feita entre a corda vibrando nessas duas notas com uma mesma condição inicial. Nessa primeira parte, foram gerados gráficos, e uma animação e um som para cada caso, que estarão disponíveis em links (https://drive.google.com/drive/folders/1QUOWhcXUpUTCXX93s7NSsS43bGcmcjN3?usp=drive_link).

Depois, foi testada a diferença de vibração da corda mudando a condição inicial, sendo gerada uma animação para cada caso, assim como gráficos.

Nos gráficos, os estados das ondas em tempos diferentes são dados em termos de N_t . Esse número é o passo temporal, caso prefira pensar unidades temporais, multiplique esse número pelo $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}s$.

3.1 Diferentes notas com a mesma condição inicial

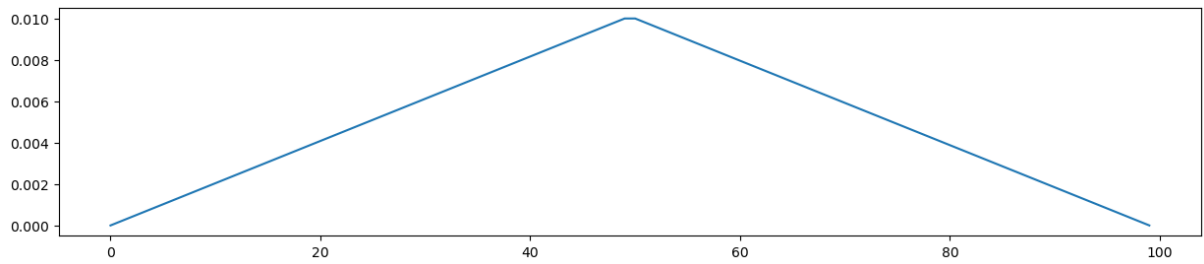


Figura 2: A primeira condição inicial, para ambos os casos, perturbando a corda exatamente na sua metade.

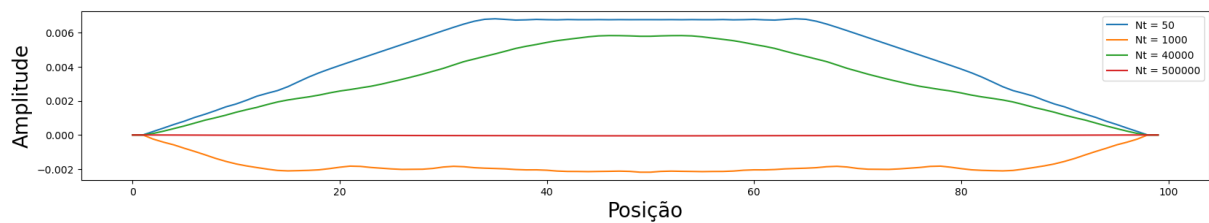


Figura 3: O estado da onda vibrando em **mi** em quatro tempos diferentes. A animação https://drive.google.com/file/d/1IZM_dq-AYiXtMpnFeET8W0qIWVLnHRDZ/view?usp=drive_link

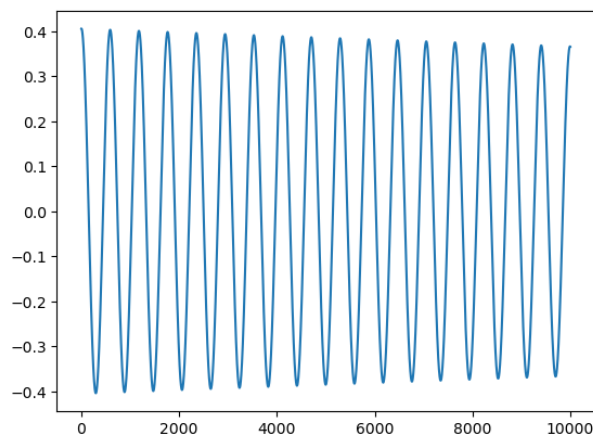


Figura 4: O seno proporcional a corda vibrando em **mi**. O som gerado https://drive.google.com/file/d/1qQdztSTkyFXX7lUvtwsYRZv3YP0tI0rg/view?usp=drive_link

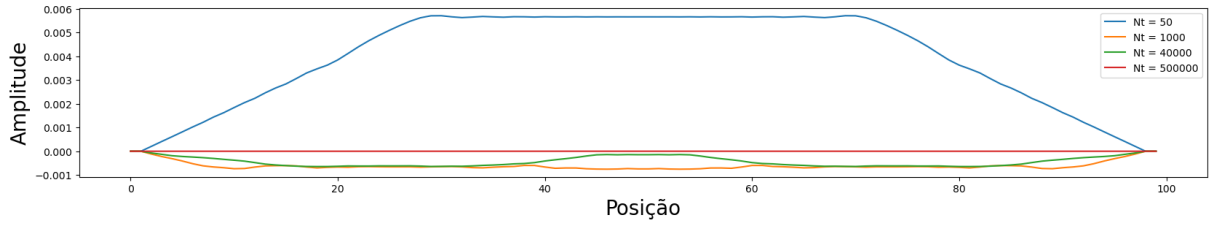


Figura 5: O estado da onda vibrando em lá em quatro tempos diferentes. A animação https://drive.google.com/file/d/1x4AdlxUQsydb0bIvjL1BYEyhHJWb1lEd/view?usp=drive_link

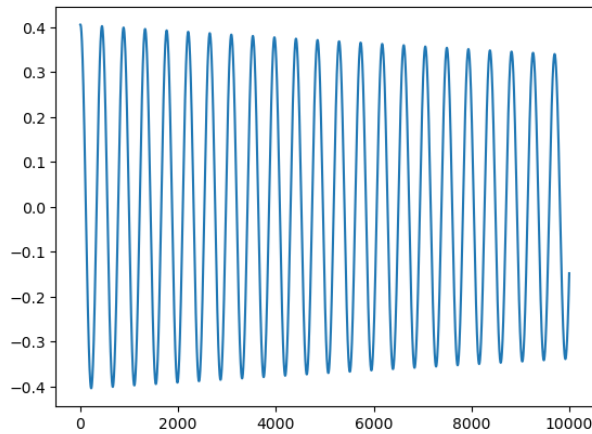


Figura 6: O seno proporcional a corda vibrando em lá. O som gerado https://drive.google.com/file/d/14iBr6VVh-096AXBupgef-gSkFp_ckhen/view?usp=drive_link

3.2 Variando a condição inicial (nota Lá)

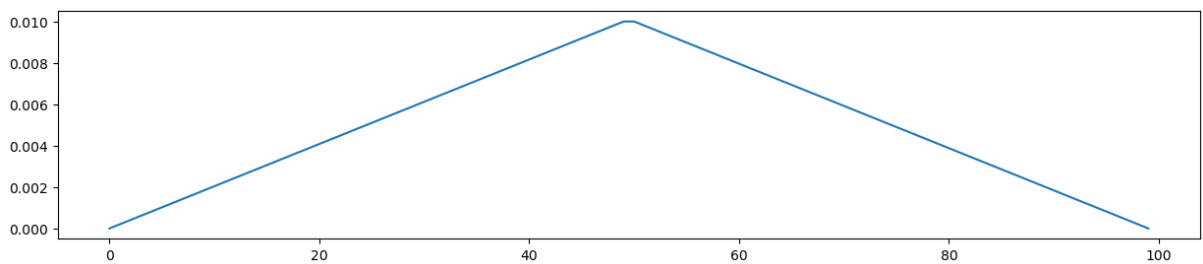


Figura 7: A primeira condição inicial, perturbando a corda exatamente na sua metade.

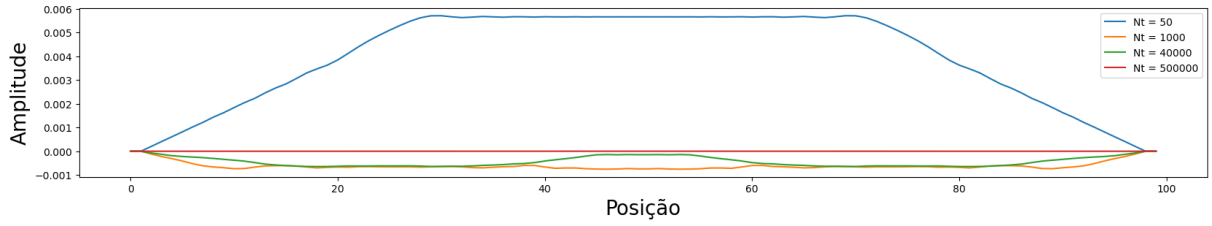


Figura 8: Resultados referentes à primeira condição inicial. A animação gerada: https://drive.google.com/file/d/1x4AdlxUQsydb0bIvjL1BYEyhHJWb1lEd/view?usp=drive_link

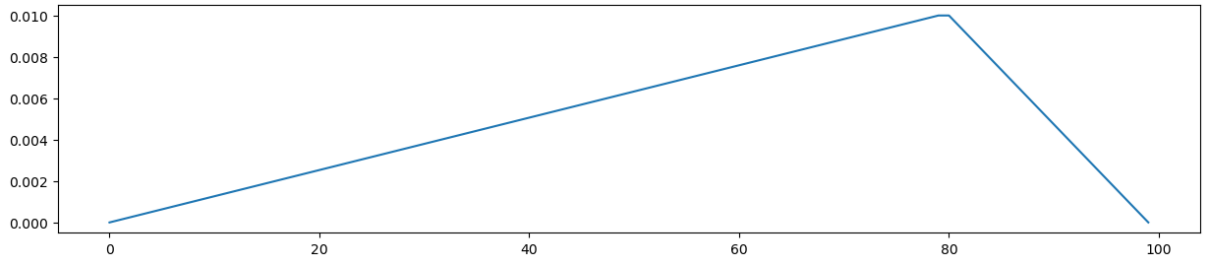


Figura 9: A segunda condição inicial, perturbando a corda mais na sua parte direita.

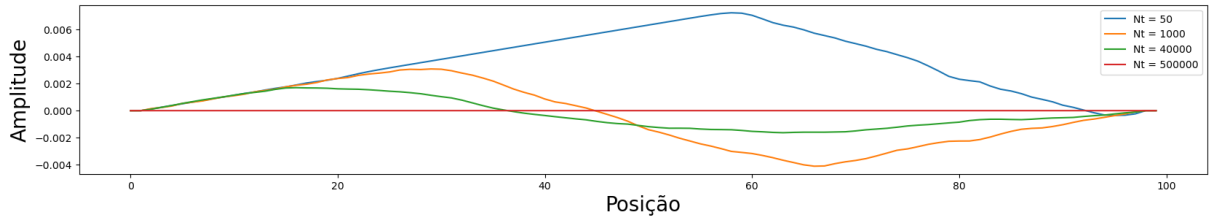


Figura 10: Resultados referentes à segunda condição inicial. A animação gerada: https://drive.google.com/file/d/1c8_lr63IG9PG1YJ1vsSIQ_tPFPpgEKTo/view?usp=drive_link

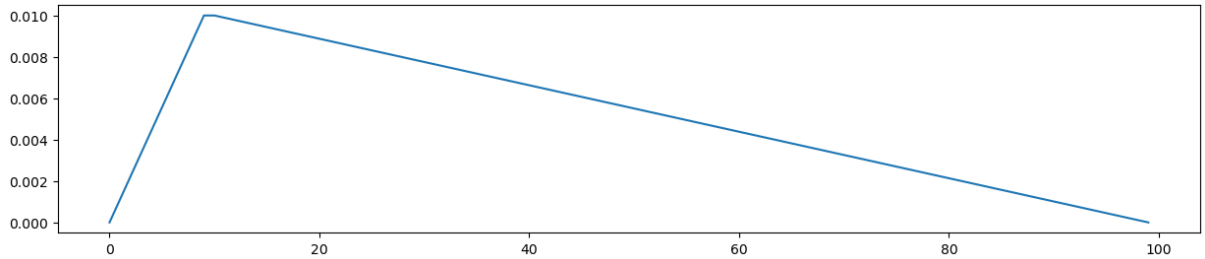


Figura 11: A terceira condição inicial, perturbando a corda mais na sua parte esquerda.

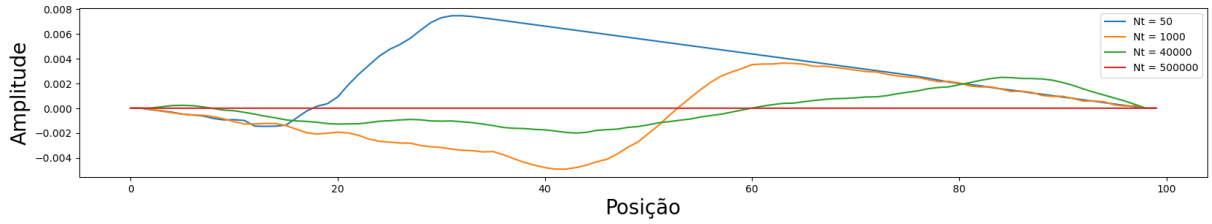


Figura 12: Resultados referentes à terceira condição inicial. A animação gerada: https://drive.google.com/file/d/12nBWIqU9M6topNPCLZ9vi2BApUik77r_/view?usp=drive_link

4 Conclusão

Ao analisarmos atentamente as vibrações das cordas em Lá e Mi, observamos que a precisão em termos de clareza é notável, embora o som resultante se assemelhe mais ao de um piano do que a um violão.

A manipulação das condições iniciais revela uma variação significativa na vibração, resultando, por conseguinte, em uma sonoridade distinta. Este fenômeno ressalta a sensibilidade do sistema às mudanças nos parâmetros iniciais.

Em suma, é incontestável que a abordagem matemático-computacional se mostrou não apenas eficaz, mas também altamente precisa. Essa conclusão ressalta não apenas a qualidade do método utilizado, mas também a compreensão profunda das nuances acústicas subjacentes ao estudo das vibrações das cordas, proporcionando uma valiosa contribuição ao entendimento e aprimoramento da produção sonora.

Referências

- [1] PEC, Jason. "Solving the Sound of a Guitar String". Stanford University. Disponível em <http://large.stanford.edu/courses/2007/ph210/pelc2/>.
- [2] HERMAN, Russell L.. "The Heat Equation". LibreTexts. Disponível em [https://batch.libretexts.org/print/url=https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_\(Herman\)/10%3A_Numerical_Solutions_of_PDEs/10.02%3A_The_Heat_Equation.pdf](https://batch.libretexts.org/print/url=https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_(Herman)/10%3A_Numerical_Solutions_of_PDEs/10.02%3A_The_Heat_Equation.pdf)
- [3] HUANG, Huei-Ping. "Numerical methods for PDE (two quick examples)". Arizona State University. Disponível em https://www.public.asu.edu/~hhuang38/pde_slides_numerical.pdf
- [4] NAPOLITANO, Reginaldo de Jesus. "A transformada de Fourier". Notas de aula da disciplina "Física Matemática Avançada". Universidade de São Paulo, 2023. Disponível em <https://ifsc.usp.br/~reginaldo/deep/fisica-matematica-avancada-2023/aula-01.pdf>
- [5] Disponível em https://github.com/lukepolson/youtube_channel/blob/main/Python%20Metaphysics%20Series/vid5.ipynb