# Laboratório 5
# Interpolação

Alunos:
Andrei Albani
Vinícius Pereira

## Q1.

Na figura 1 observa-se os polinômios obtidos por cada método:

```
P_MV =

   -0.0417    0.2500   -0.4583   -0.7500    1.0000


P_FL =

   -0.0417    0.2500   -0.4583   -0.7500    1.0000


P_FN =

   -0.0417    0.2500   -0.4583   -0.7500    1.0000
```

Figura 1. Polinômio obtido pelo sistema linear (P_MV), polinômio obtido pelo método Forma de Lagrange (P_FL) e polinômio obtido pelo método Forma de Newton (P_FN).

Como se pode observar, os polinômios coincidem, como já era esperado.

Na figura 2 pode-se ver o gráfico do polinômio obtido pelos métodos.

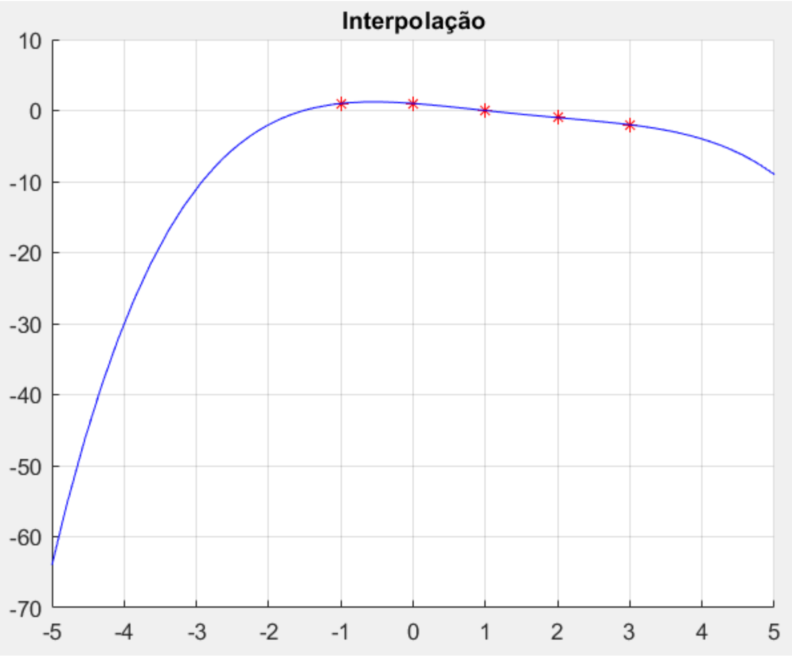



Figura 2. Gráfico do polinômio obtido pela interpolação dos pontos (marcados com estrela).

Na figura 3 é possível ver uma comparação feita com o polinômio obtido pela interpolação da função polyfit do Matlab (é usado grau 4 na função).

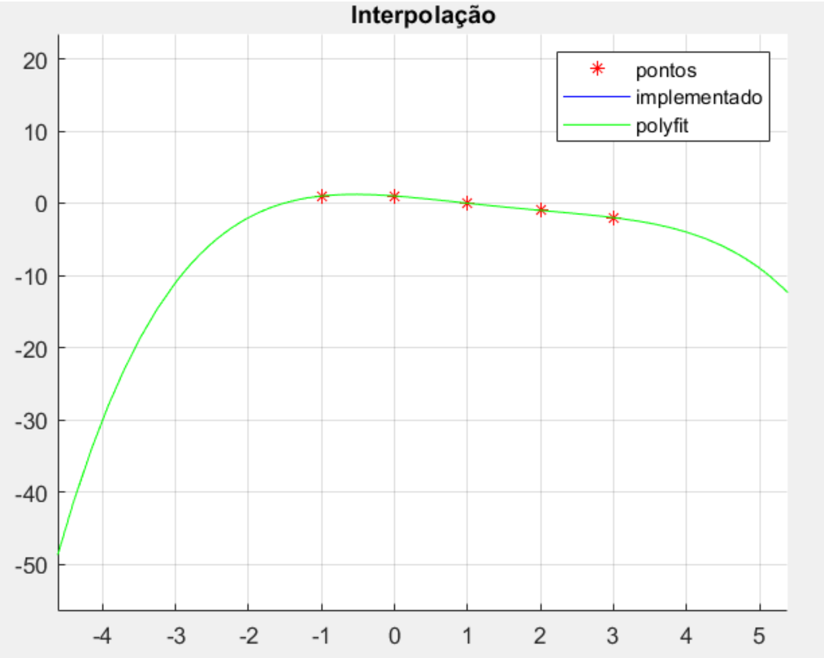



Figura 3. Comparação entre o polinômio obtido com os métodos implementados e o polinômio obtido com um dos métodos prontos do MatLab (polyfit). Como os polinômios se sobrepõem perfeitamente, só é possível enxergar a linha verde.

# Q2.

**(a)**
A figura 4 mostra os pontos utilizados para fazer a interpolação de f:

```
x = [1; 2; 3];
y = [0.333; 0.8; 0.931];
```

Figura 4. Pontos utilizados na interpolação

Os pontos foram determinados por tentativa e erro - é claro que a raiz esperada deveria estar entre os pontos utilizados - , e os pontos apresentados na figura 4 foram os que apresentaram melhores resultados.

A figura 5 apresenta o resultado da função TabelaDiferencasDivididas:

```
0.3330    0.4670   -0.1680
0.8000    0.1310         0
0.9310         0         0
```

Figura 5. Matriz obtida em (a) pela função TabelaDiferencasDivididas

A figura 6 apresenta o polinômio obtido com a interpolação dos pontos:

```
P =

   -0.1680    0.9710   -0.4700
```

Figura 6. Polinômio obtido pela interpolação dos pontos de (a).

Para obter o x correspondente a f(x) = 0.85, obteve-se um novo polinômio F ao somar-se [-0.85] ao polinômio P obtido com a interpolação e, em seguida, aplicou-se a função roots.

O resultado está presente na figura 7:

```
ans =

    3.5929
    2.1868
```

Figura 7. roots(F).

O único valor que deve ser considerado é **x = 2.1868**, que possui **erro absoluto** em módulo de **0.0594**. O outro valor não pode ser considerado pois ao observar-se a tabela da função, as abcissas 3 e 4 possuem ordenadas 0.931, 0.9697 e logo, a função não deve possuir raiz entre esses valores. Essa previsão errada do polinômio interpolador já era esperada, pois 3.59 está fora do intervalo dos pontos interpolados ( abcissas entre 1 e 3).

O gráfico do polinômio interpolador e dos pontos de f está apresentado na figura 8, demonstrando graficamente o que foi comentado:

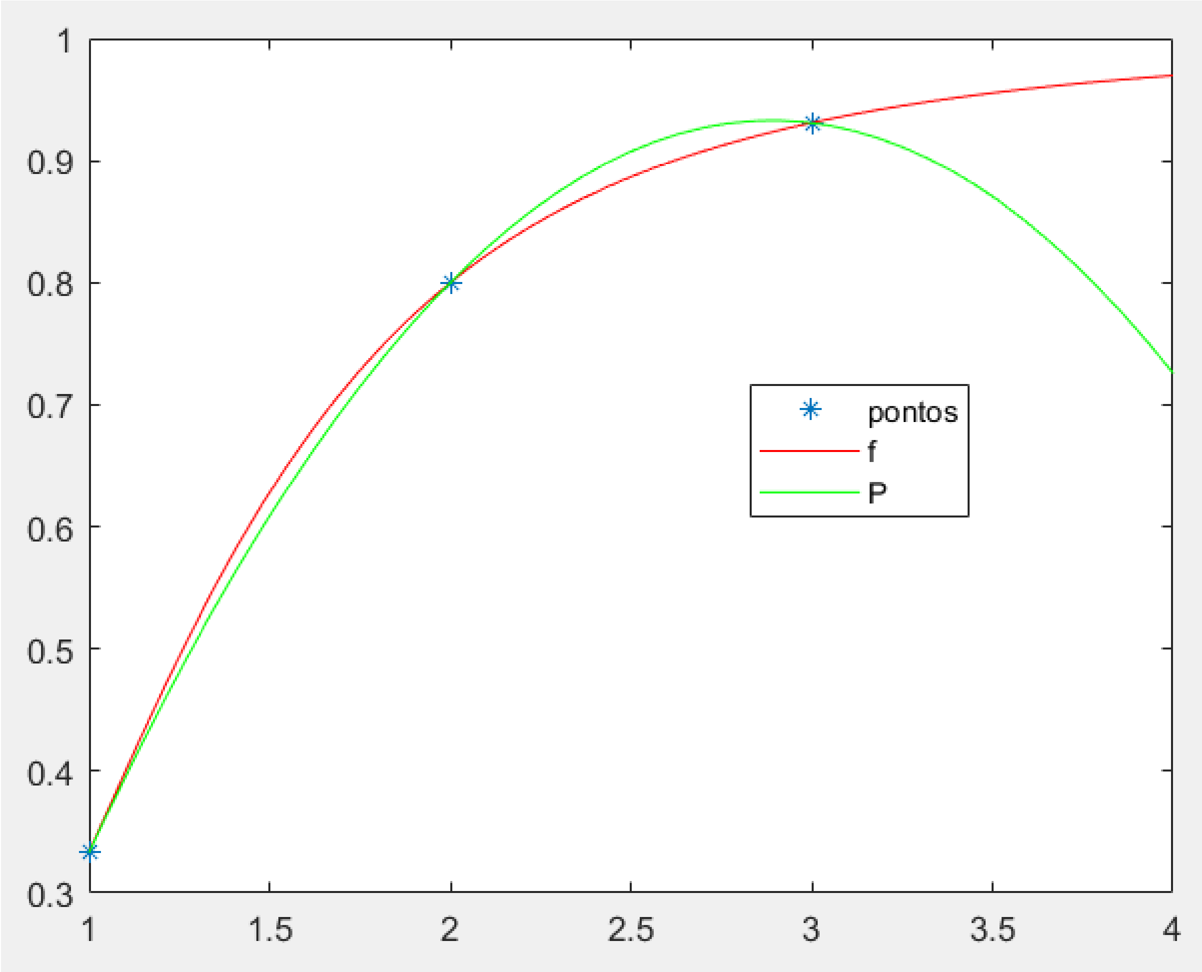



Figura 8. Pontos interpolados pelo polinômio P e gráfico de f.

**(b)**

Procedeu-se analogamente à (a), com a utilização dos mesmos pontos apresentados na figura 4, os quais apresentaram os melhores resultados. Ressalta-se que, como trata-se da função inversa, apenas foi necessário inverter as abcissas com as ordenadas de lugar na função TabelaDiferencasDivididas.

A TabelaDiferecasDivididas apresentou a matriz presente na figura 9.

```
T_I =

    1.0000    2.1413    9.1844
    2.0000    7.6336         0
    3.0000         0         0
```

Figura 9. TabelaDiferencasDivididas para f-1.

Assim, o polinômio obtido P_I é apresentado na figura 10.

```
P_I =

    9.1844   -8.2646    2.7337
```

Figura 10. Polinômio interpolador para os pontos utilizados de f-1.

Para se determinar o x correspondente a f(x) = 0.85, basta fazer f-1(0.85), o que se realizou utilizando a função polyval, cujo resultado é apresentado na figura 11.

```
ans =

    2.3445
```

Figura 11. Polyval(P_I, 0.85).

**Portanto, x = 2.3445 com erro absoluto de 0.0983.**

Nota-se que o erro obtido em (a) é menor. Isso pode ser explicado analisando-se o gráfico de f-1 e o polinômio interpolador P_I, presentes na figura 12.

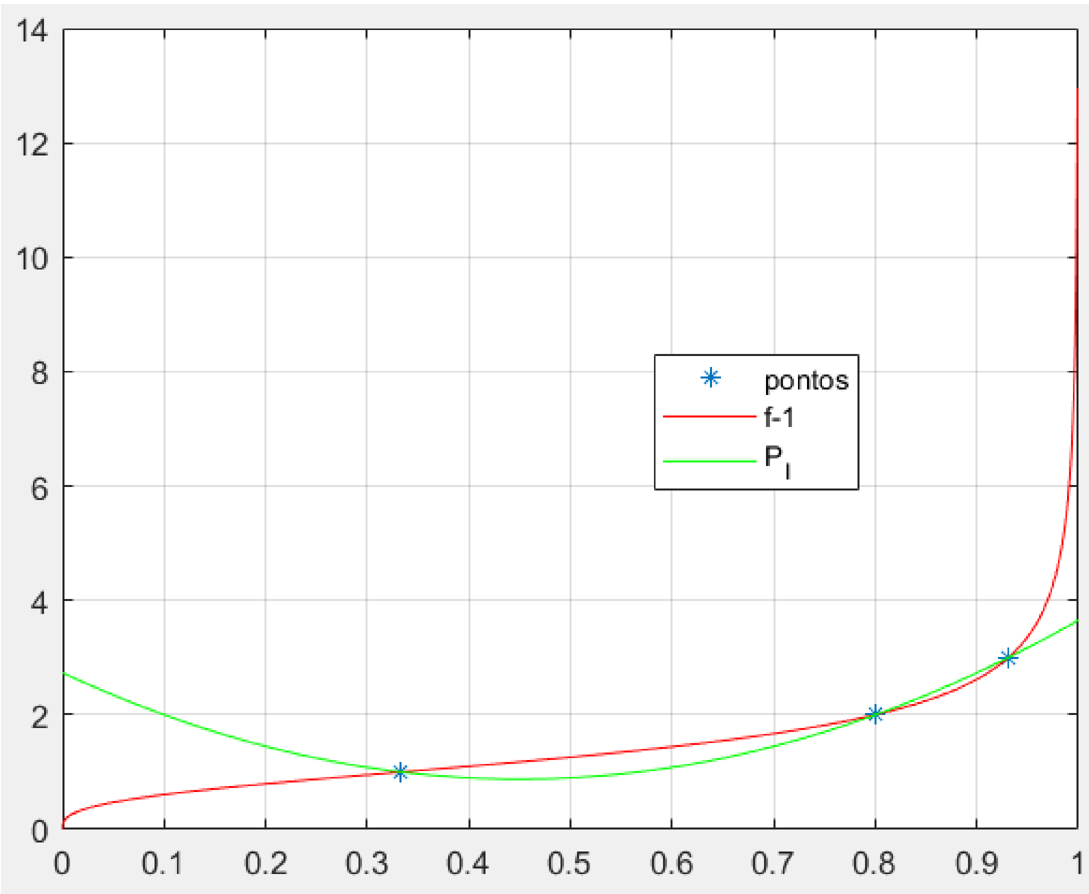



Figura 12. Pontos interpolados por P_I e gráfico de f-1.

Pode-se concluir que o erro é maior em (b), em comparação com (a), pois a função f-1(x) é descontínua em x = 1. Como um dos pontos interpolados possui abscissa x = 0.931, a curva de f-1 já começa a apresentar rápido crescimento nessa localidade, o que dificulta um bom ajuste do polinômio de grau 2. Já a curva de f é um pouco mais adequada para ser ajustada com um polinômio de grau 2, nos pontos utilizados para a interpolação.

# Q3.

1. Tabela de diferenças divididas
2. Polinômio na Forma de newton e comentários
3. Tabela Comparativa
4. Gráfico

- f1(x)

  1.Tabela de diferenças:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0625 | 0.1592 | 0.3759 | 0.9560 | 1.8534 | -8.7793 | -0.9145 | 41.1530 | -94.3090 | 128.6031 | -128.6031 |
| 0.0943 | 0.3096 | 0.9495 | 2.4387 | -6.9259 | -9.8767 | 56.6997 | -109.7413 | 137.1767 | -128.6031 | 0 |
| 0.1563 | 0.6893 | 2.4127 | -3.1020 | -16.8026 | 58.1629 | -96.9382 | 109.7413 | -94.3090 | 0 | 0 |
| 0.2941 | 1.6544 | 0.5515 | -16.5441 | 41.3603 | -58.1629 | 56.6997 | -41.1530 | 0 | 0 | 0 |
| 0.6250 | 1.8750 | -9.3750 | 16.5441 | -16.8026 | 9.8767 | -0.9145 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -1.8750 | 0.5515 | 3.1020 | -6.9259 | 8.7793 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.6250 | -1.6544 | 2.4127 | -2.4387 | 1.8534 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2941 | -0.6893 | 0.9495 | -0.9560 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1562 | -0.3096 | 0.3759 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.0943 | -0.1592 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.0625 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

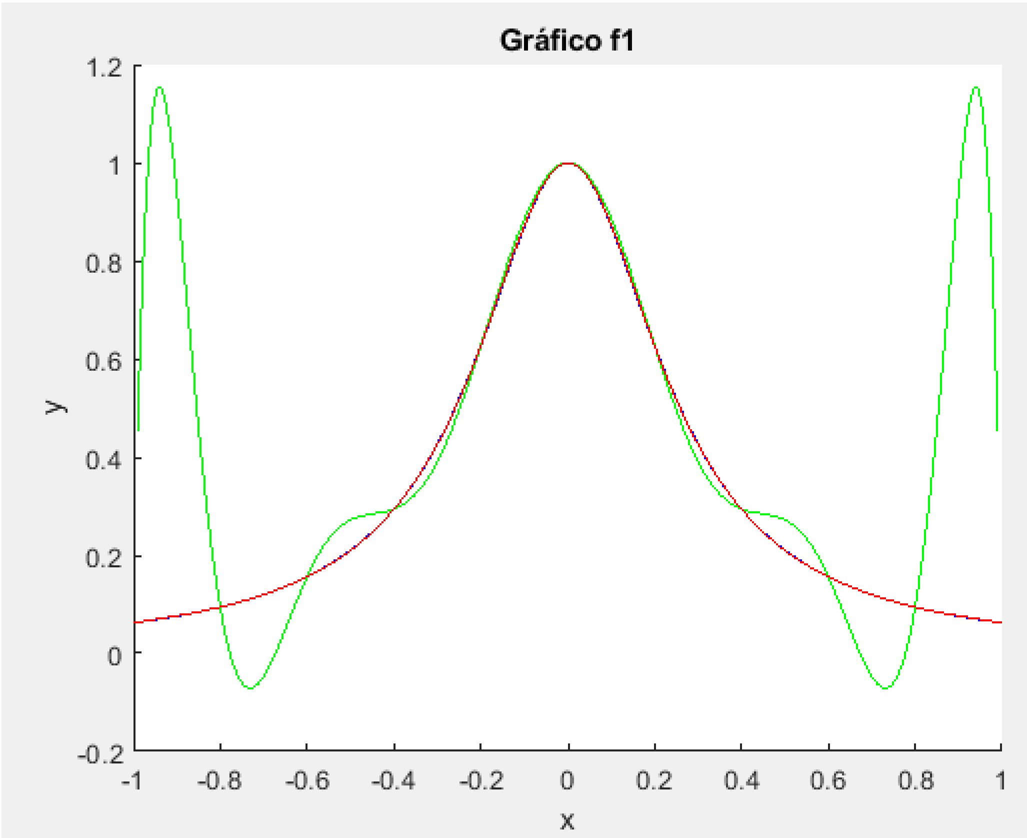
2.Polinômio de newton: $p(x) =- 128 + 291x^2 - 229x^4 + 78x^6 - 12x^8 + x^{10}$

O grau 10 para o polinômio é o melhor, pois a função é par e o grau 10 passa por todos os pontos desejados. Vemos, porém, que nas extremidades o polinômio apresenta péssimo desempenho.

3. Tabela comparativa:

| x | -0.9 | -0.7 | -0.5 | -0.3 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.076 | 0.120 | 0.210 | 0.425 | 0.870 | 0.870 | 0.425 | 0.210 | 0.120 | 0.076 |
| p(x) | 0.940 | -0.04 | 0.273 | 0.391 | 0.886 | 0.886 | 0.391 | 0.273 | -0.04 | 0.940 |
| s(x) | 0.076 | 0.120 | 0.210 | 0.426 | 0.872 | 0.872 | 0.426 | 0.210 | 0.120 | 0.076 |

4. Gráfico




- f2(x)

  1.Tabela de diferenças:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -30 | 71.3616 | -76.8800 | 45.0000 | -13.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -15.7277 | 40.6096 | -49.8800 | 34.6000 | -12.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -7.6058 | 20.6576 | -29.1200 | 25.0000 | -11.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -3.4742 | 9.0096 | -14.1200 | 16.2000 | -10.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -1.6723 | 3.3616 | -4.4000 | 8.2000 | -9.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -1 | 1.6016 | 0.5200 | 1.0000 | -8.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.6797 | 1.8096 | 1.1200 | -5.4000 | -7.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.3178 | 2.2576 | -2.1200 | -11.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1338 | 1.4096 | -8.7200 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.4157 | -2.0784 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

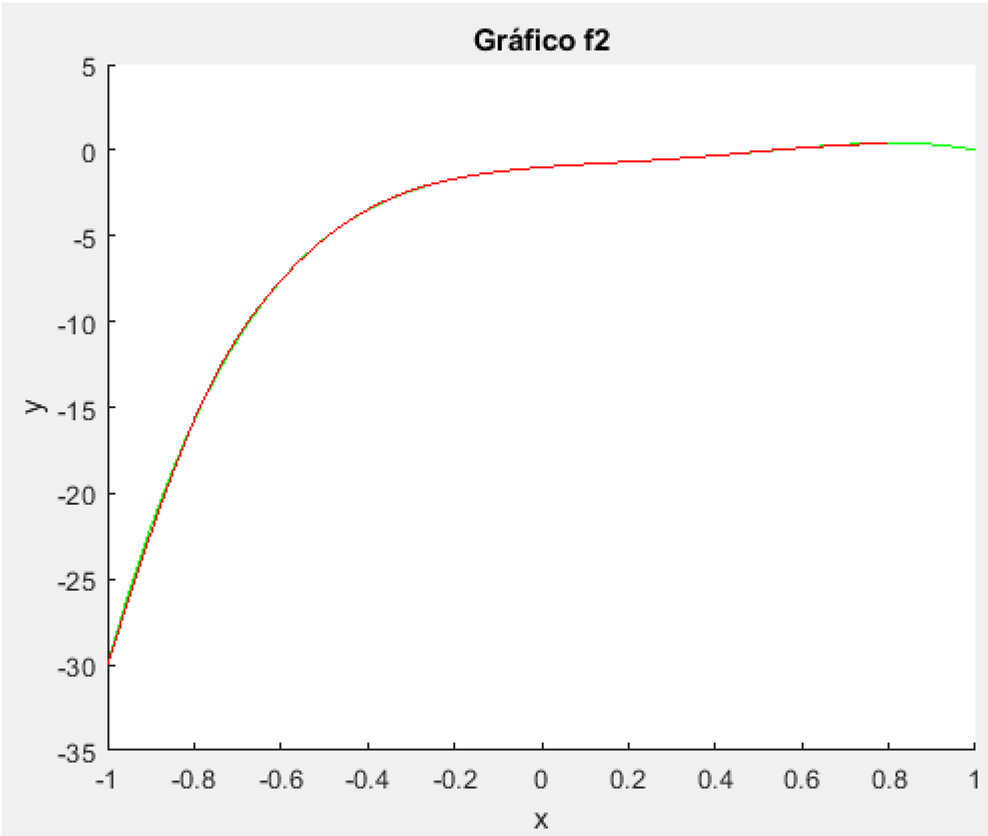
2.Polinômio de Newton: $p(x) \;= 1 - 10x + 12x^2 - 4x^3 + 2x^4 - x^5$

Vemos que a coluna 6 é um vetor nulo, sendo o grau 5 ideal para se adequar à função. Essa função teve o melhor fitting polinomial, já que ela realmente é um polinômio de grau 5..

3. Tabela comparativa:

| x | -0.9 | -0.7 | -0.5 | -0.3 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -21.9 | -11.0 | -5.16 | -2.37 | -1.25 | -0.83 | -0.51 | -0.09 | 0.32 | 0.34 |
| p(x) | -21.9 | -11.0 | -5.16 | -2.37 | -1.25 | -0.83 | -0.51 | -0.09 | 0.32 | 0.34 |
| s(x) | -22.3 | -10.9 | -5.18 | -2.36 | -1.25 | -0.83 | -0.51 | -0.09 | 0.34 | 0.27 |

4. Gráfico:




- f3(x)

1.Tabela de diferenças:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.3826 | -0.4930 | -3.5027 | 9.7278 | 2.2456 | -25.8637 | 45.8893 | -45.8154 | 25.4530 | 0 |
| 0.2840 | -1.8941 | 2.3340 | 11.5242 | -28.7909 | 38.3813 | -27.4152 | 0 | 25.4530 | 0 |
| -0.0948 | -0.9605 | 9.2485 | -17.2667 | 17.2667 | 0 | -27.4152 | 45.8154 | 0 | 0 |
| -0.2869 | 2.7389 | -4.5649 | 0 | 17.2667 | -38.3813 | 45.8893 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2608 | 0 | -4.5649 | 17.2667 | -28.7909 | 25.8637 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2608 | -2.7389 | 9.2485 | -11.5242 | 2.2456 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.2869 | 0.9605 | 2.3340 | -9.7278 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.0948 | 1.8941 | -3.5027 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2840 | 0.4930 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.3826 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

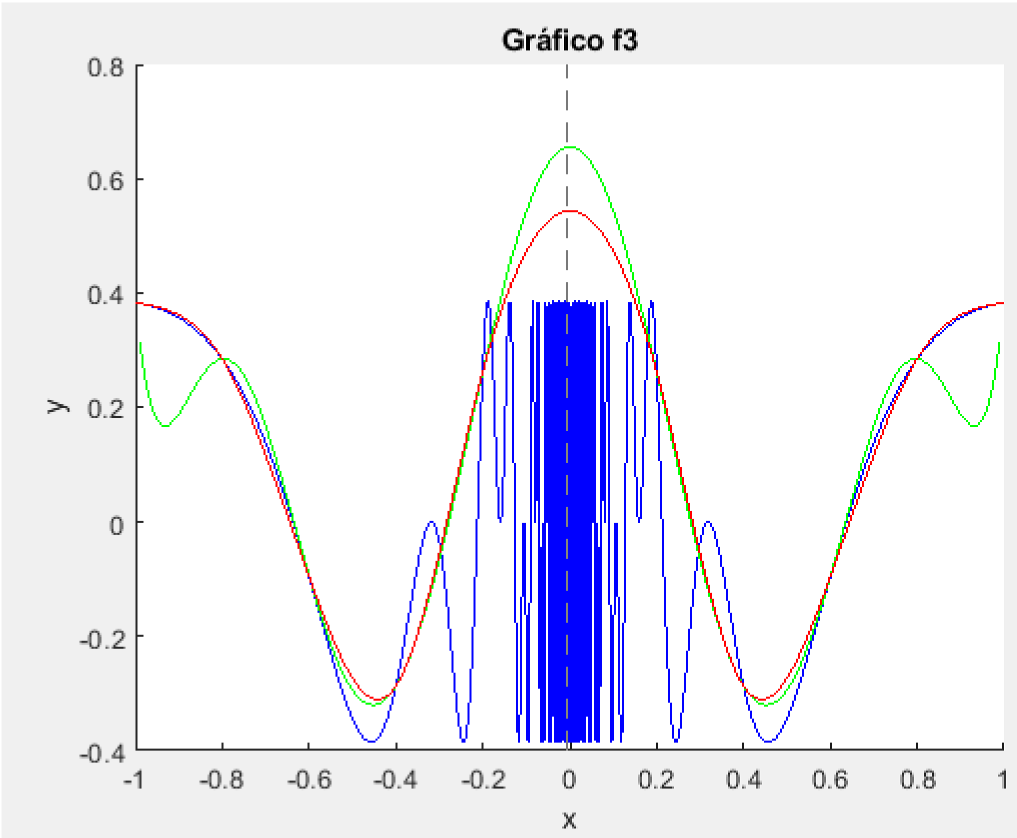
2.Polinômio de newton:$p(x) = 25 - 57x^2 + 44x^4 - 11x^6 + 0.65x^8$

O grau 8 se adequa bastante, pois a função é par e tem 9 pontos por onde é possível passar, já que 0 não está no domínio da função. Vemos isso na tabela, onde a última coluna é nula, requisitando grau 8.

3.Tabela comparativa:

| x | -0.9 | -0.7 | -0.5 | -0.3 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.356 | 0.139 | -0.344 | -0.036 | -0.248 | -0.248 | -0.036 | -0.344 | -0.139 | -0.356 |
| p(x) | 0.188 | 0.168 | -0.294 | -0.067 | 0.544 | 0.544 | -0.067 | -0.294 | 0.168 | 0.188 |
| s(x) | 0.360 | 0.117 | -0.273 | -0.055 | 0.473 | 0.473 | -0.055 | -0.273 | 0.117 | 0.360 |

4. Gráfico:



- f4(x)

  1.Tabela de diferenças:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9091 | -0.1010 | -0.1443 | -0.2886 | -0.9620 | -9.6200 | 96.2001 | -320.6670 | 641.3340 | -916.1914 | 1.0180e+03 |
| 0.8889 | -0.1587 | -0.3175 | -1.0582 | -10.5820 | 105.8201 | -352.7337 | 705.4674 | -1.0078e+03 | 1.1198e+03 | 0 |
| 0.8571 | -0.2857 | -0.9524 | -9.5238 | 95.2381 | -317.4603 | 634.9206 | -907.0295 | 1.0078e+03 | 0 | 0 |
| 0.8000 | -0.6667 | -6.6667 | 66.6667 | -222.2222 | 444.4444 | -634.9206 | 705.4674 | 0 | 0 | 0 |
| 0.6667 | -3.3333 | 33.3333 | -111.1111 | 222.2222 | -317.4603 | 352.7337 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 10.0000 | -33.3333 | 66.6667 | -95.2381 | 105.8201 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2.0000 | -3.3333 | 6.6667 | -9.5238 | 10.5820 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.3333 | -0.6667 | 0.9524 | -1.0582 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.2000 | -0.2857 | 0.3175 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.1429 | -0.1587 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.1111 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

  2.Polinômio de newton:

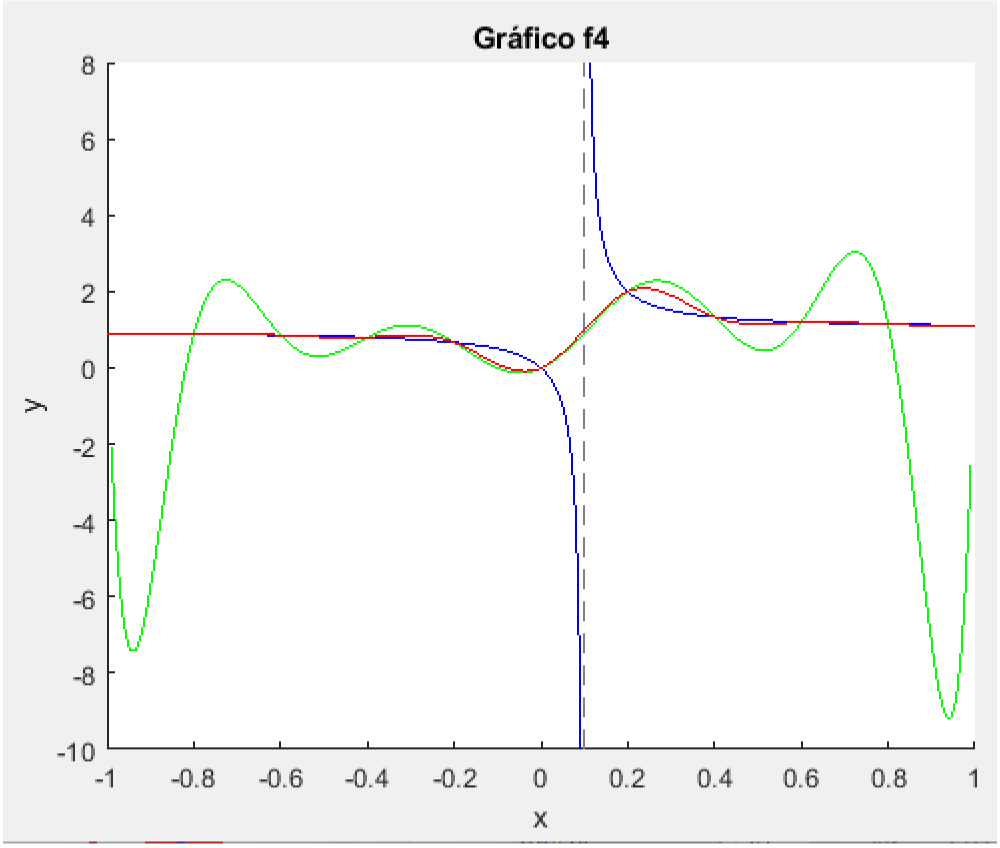
$$p(x) = 1018 - 102x - 2229x^2 - 223x^3 + 1644x^4 + 164x^5 - 481x^6 - 48x^7 + 50x^8 + 5x^9$$

Escolheu-se um polinômio de grau 9, pois, apesar de ele ter mau desempenho nas extremidades e próximo a 0.1, nas regiões intermediárias eles é o que melhor se adequa à função. Ele foi escolhido, pois tem o menor erro ao observarmos a última coluna e tem grau ímpar, o que é bom, já que a função é ímpar.

3. Tabela comparativa:

| x | -0.9 | -0.7 | -0.5 | -0.3 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.900 | 0.875 | 0.833 | 0.750 | 0.500 | | 1.50 | 1.25 | 1.17 | 1.13 |
| p(x) | -5.76 | 2.19 | 0.32 | 1.11 | 0.00 | 0.91 | 2.22 | 0.48 | 2.92 | -7.20 |
| s(x) | 0.897 | 0.883 | 0.806 | 0.854 | 0.103 | 1.00 | 1.90 | 1.15 | 1.19 | 1.12 |

4. Gráfico:




## Dificuldades e Efeito Runge

Vemos que funções com descontinuidade como f4 são extremamente problemáticas para conseguir um ajuste polinomial, principalmente quando essa descontinuidade resulte em limites que tendem ao infinito ou menos infinito, como é o caso. o polinômio não consegue tender ao infinito em hipótese alguma caso seu argumento seja real.
Outra dificuldade encontrada foi na função f3(x), onde a função, além de ser indefinida em 0, o que é muito difícil de assimilar para um polinômio, oscila muito perto de 0, o que o polinômio simplesmente não consegue acompanhar muito, devido à alta mudança de sinal da derivada.
Também é notável que o polinômio só consegue se adaptar à função dentro do intervalo dos pontos fornecidos. Fora do intervalo a correspondência é muito baixa quando a função a ser interpolada não é polinômio. Nas funções f1(x) e f4(x), que não são polinômios, vemos que na extremidades a o polinômio já começa a apresentar baixo desempenho.
Tal fenômeno tem muito a ver com a efeito de Runge, segundo o qual, quanto maior a ordem do polinômio interpolador, maior a tendência de alta divergência no intervalo estipulado, mesmo havendo alta correspondência nos pontos já fornecidos. Os polinômios utilizados, porém, foram escolhidos com o fim de minimizar o efeito de Runge, já que os graus selecionados foram justamente os menores possíveis e tais que o ajuste ainda ficasse razoavelmente aceitável, pois pequenos graus acabam por fornecer modelos muito simples que não apresentam formato da curva e boa correspondência.
Para melhorar a interpolação, poderia-se tentar adicionar um heurística dentro da formação do polinômio que evite grandes erros. Também, em alguns casos, deve valer a pena utilizar uma interpolação não polinomial, que se adeque melhor ao problema. Mudar a forma de

selecionar os espaçamentos no vetor x também deve ajudar-nos, pois, em funções como f3, o ideal é que o espaçamento acompanhe a oscilação da função, não sendo uniforme.

## *Avaliação da dupla*

| Aluno | Atividades | Percentual |
|---|---|---|
| Andrei Albani | Q1 e Q2 e revisão | 100% |
| Vinícius Pereira | Q3 | 100% |