Laboratório 3 CCI-22

Alunos: Andrei Albani Vinícius José de Menezes Pereira

Questão 1

A)

```
ans =

4.0000 3.0000 2.0000 10.0000 13.0000
0 -1.7500 1.5000 -3.5000 -2.2500
0 0 -4.7143 -9.0000 -5.4286
0 0 0 -5.8182 -0.6364

x =

1.0990
1.8750
0.9427
0.1094
```

Figura 1: Q1 a) Matriz [Ab] e resultado

O sistema em questão é determinado, sendo o posto(A)==posto(Ab)==4, tendo apenas uma solução possível, sendo os vetores linha da matriz linearmente independentes. A solução foi compatível com o resultado calculado pela função do MATLAB.

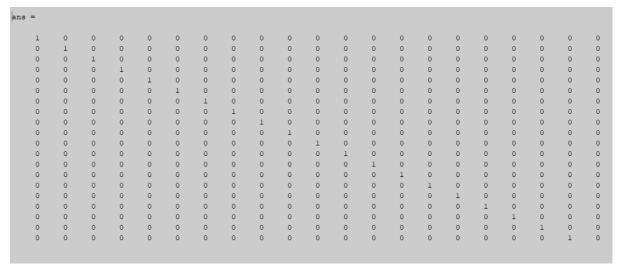


Figura 2: Q1 b) Matriz [Ab]

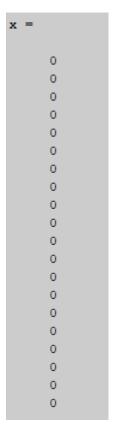


Figura 3: Q1 b) Resultado

O sistema em questão é determinado, sendo o posto(A)==posto(Ab)==20, tendo apenas uma solução possível, sendo os vetores linha da matriz linearmente independentes. A solução foi compatível com o resultado calculado pela função do MATLAB.

```
ans =
           3.0000 4.0000
   8.0000
                           1.0000
                                    7.0000
           1.7708 2.1500
       0
                           1.4157
                                    2.3542
                   -0.9730
                           -0.7098
                                    -0.0354
       0
              0
       0
               0
                       0
                                0
                                         0
  NaN
```

Figura 4: Q1 c) Matriz [Ab] e resultado

O sistema em questão é possível, mas indeterminado, tendo infinitas soluções possíveis, sendo posto(A)==posto(Ab)==3<n=4, pois uma das linhas de A e uma dos elementos de b, associado a uma linha de A, eram a combinação linear das outras linhas e dos outros elementos, respectivamente.

D)

```
ans =

5.0000 7.0000 9.0000 10.0000
0 -0.6000 -1.2000 -11.0000
0 0 0 -12.0000

x =

Inf 0 0
```

Figura 5: Q1 d) Matriz [Ab] e resultado

O sistema em questão é impossível, sendo posto(A)==2<posto(Ab)==3, pois uma das linhas de A das linhas de A era a combinação linear das outras linhas. O elemento em b, porém, não foi zerado após o processo de triangularização da matriz, gerando um absurdo 0 == -12.

Questão 2

A)

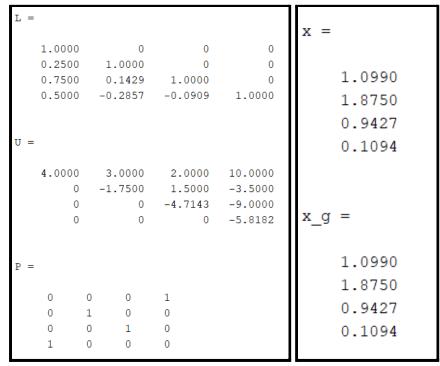


Figura 6: Decomposição do sistema e resolução encontrada; Comparação com a solução encontrada pelo MatLab.

Na figura 6, x é o valor determinado pela função LUP e x_g é o valor retornado pela função A\b do MatLab. A igualdade dos valores mostra que a solução encontrada é coerente. Assim, nota-se que a função decompõe corretamente a matriz A nas matrizes L e U e armazena a troca de linhas em P (nesse caso, troca da primeira com a quarta linha). A figura 7 mostra a decomposição feita pela função lu do MatLab.

```
Lg=
  1.0000 0 0
0.2500 1.0000 0
                              0
                              0
   0.7500 0.1429 1.0000
                              0
   0.5000 -0.2857 -0.0909 1.0000
U g =
  4.0000
         3.0000 2.0000 10.0000
    0 -1.7500 1.5000 -3.5000
      0 0 -4.7143 -9.0000
             0
                   0 -5.8182
Pg =
   0
        0
            0
                 1
            0
   0
        1
                 0
        0
            1
```

Figura 7: decomposição LUP realizada pela função lu do MatLab.

B)

Por conta do grande tamanho das matrizes, optou-se por não colocar as figuras.

As matrizes determinadas pela função LUP são:

L = U = P = I_{20} (matriz identidade de ordem 20)

Esse sistema é trivial pois pode ser escrito:

$$IX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Mesmo sendo de resolução trivial, o código opera em $O(n^3)$. Assim, para valores grandes de n seria interessante que fosse implementada uma heurística no código para verificar se alguma etapa do escalonamento tem m = 0 e pulá-la (seria O(n)) ou uma heurística para verificar se a matriz já está escalonada ($O(n^2)$). Em casos de n grande, por exemplo, n = 20 (ou $n = 2.10^5$), essas heurísticas poderiam economizar tempo computacional.

Questão 3

```
resultado =

logical

0

valorCond =
```

Figura 8: resultados Q3 - a)

6.8000e+09

Como a última linha é quase uma soma das linhas de cima, uma pequena perturbação na matriz A pode tornar o sistema indeterminado. Esse é um caso contemplado pela teoria, em que uma perturbação de A causa uma grande variação na resposta do sistema. Dessa forma, é esperado que a matriz A seja má-condicionada, concordando com os resultados apresentados na figura 8. A propósito, o valor de condicionamento por norma é muito grande, o que indica que a matriz é muito mal condicionada!

B)

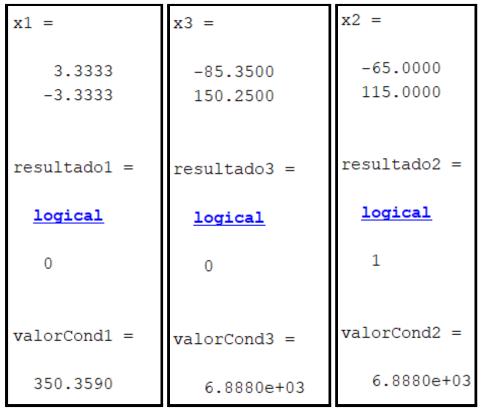


Figura 9: Da esquerda para a direita, as respectivas soluções, resultado do teste de condicionamento por resíduos e valor do teste de condicionamento por norma dos sistemas 1, 2 e 3.

Nota-se que a única coisa que muda entre os sistemas 1, 2 e 3 são pequenas perturbações nos valores de A e de b, porém as soluções são bem diferentes em cada sistema. Isso mostra, portanto, que a matriz A é mal condicionada. Nos três casos, o valor do condicionamento por norma é maior que 10^2, o que é suficiente para se suspeitar de mau condicionamento. No entanto, no segundo sistema, o teste de condicionamento por resíduos indicou uma matriz A bem condicionada, o que é um equívoco do teste, não contemplado pela teoria. Seria necessário que fossem avaliados mais resíduos nesse caso ou então que o operador lógico fosse definido por algo do tipo resultado = (ValorCond > 5*10^3 & resultado). Vemos, portanto, que também é necessário verificar empiricamente se uma matriz é mal condicionada pela mudança sutil dos parâmetros da matriz A, pois na prática na um valor de condicionamento acima de 10^2 já pode indicar ou não mal condicionamento, sendo necessário verificar.

C)

resultado =

logical

0

valorCond =

3.3873e+10

Figura 10: condicionamento da matriz de Hilbert de ordem 8

x =	x1 =	x2 =
1.0e+07 *	1.0e+08 *	1.0e+08 *
-0.0001 0.0032 -0.0469 0.2818 -0.8316 1.2757	-0.0002 0.0090 -0.1214 0.6768 -1.8669 2.6962 -1.9527	-0.0003 0.0159 -0.2090 1.1381 -3.0799 4.3775
-0.9754 0.2934	0.5594	-3.1276 0.8856

Figura 11: solução, em ordem de apresentação dos sistemas, de cada um dos sistemas lineares Q3 - c)

Como mostrado pela figura 10, os testes de condicionamento indicam a matriz de Hilbert de ordem 8 como mal condicionada. De fato, a única diferença entre os sistemas apresentados são pequenas perturbações em b, as quais levam a grandes diferenças nas soluções determinadas, como se vê na figura 11. Portanto, confirma-se o resultado dos testes: a matriz de Hilbert é, de fato, mal condicionada.

Avaliação da dupla

Aluno	Atividades	Percentual
Andrei Albani	Q2 e Q3, ajudando na Q1	100%
Vinícius Pereira	Q1 e revisou Q2 e Q3	100%