Laboratório 3
CCI-22

Alunos:
Andrei Albani
Vinícius José de Menezes Pereira

Questão 1

A)

```
ans =

    4.0000    3.0000    2.0000   10.0000   13.0000
         0   -1.7500    1.5000   -3.5000   -2.2500
         0         0   -4.7143   -9.0000   -5.4286
         0         0         0   -5.8182   -0.6364


x =

    1.0990
    1.8750
    0.9427
    0.1094
```

Figura 1: Q1 a) Matriz [Ab] e resultado

O sistema em questão é determinado, sendo o posto(A)==posto(Ab)==4, tendo apenas uma solução possível, sendo os vetores linha da matriz linearmente independentes. A solução foi compatível com o resultado calculado pela função do MATLAB.

B)

```
ans =

     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
```

Figura 2: Q1 b) Matriz [Ab]

```
x =

     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
     0
```

Figura 3: Q1 b) Resultado

O sistema em questão é determinado, sendo o posto(A)==posto(Ab)==20, tendo apenas uma solução possível, sendo os vetores linha da matriz linearmente independentes.A solução foi compatível com o resultado calculado pela função do MATLAB.

C)

```
ans =

    8.0000    3.0000    4.0000    1.0000    7.0000
         0    1.7708    2.1500    1.4157    2.3542
         0         0   -0.9730   -0.7098   -0.0354
         0         0         0         0         0


x =

   NaN     0     0     0
```

Figura 4: Q1 c) Matriz [Ab] e resultado

O sistema em questão é possível, mas indeterminado, tendo infinitas soluções possíveis, sendo posto(A)==posto(Ab)==3<n=4, pois uma das linhas de A e uma dos elementos de b, associado a uma linha de A, eram a combinação linear das outras linhas e dos outros elementos, respectivamente.

D)

```
ans =

    5.0000    7.0000    9.0000   10.0000
         0   -0.6000   -1.2000  -11.0000
         0         0         0  -12.0000


x =

   Inf     0     0
```

Figura 5: Q1 d) Matriz [Ab] e resultado

O sistema em questão é impossível, sendo posto(A)==2<posto(Ab)==3, pois uma das linhas de A das linhas de A era a combinação linear das outras linhas. O elemento em b, porém, não foi zerado após o processo de triangularização da matriz, gerando um absurdo 0 == -12.

Questão 2

A)

```
L =

    1.0000         0         0         0
    0.2500    1.0000         0         0
    0.7500    0.1429    1.0000         0
    0.5000   -0.2857   -0.0909    1.0000


U =

    4.0000    3.0000    2.0000   10.0000
         0   -1.7500    1.5000   -3.5000
         0         0   -4.7143   -9.0000
         0         0         0   -5.8182


P =

     0     0     0     1
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     1     0     0     0
```

```
x =

    1.0990
    1.8750
    0.9427
    0.1094


x_g =

    1.0990
    1.8750
    0.9427
    0.1094
```

Figura 6: Decomposição do sistema e resolução encontrada; Comparação com a solução encontrada pelo MatLab.

Na figura 6, x é o valor determinado pela função LUP e x_g é o valor retornado pela função A\b do MatLab. A igualdade dos valores mostra que a solução encontrada é coerente. Assim, nota-se que a função decompõe corretamente a matriz A nas matrizes L e U e armazena a troca de linhas em P (nesse caso, troca da primeira com a quarta linha).
A figura 7 mostra a decomposição feita pela função lu do MatLab.

```
L_g =

    1.0000         0         0         0
    0.2500    1.0000         0         0
    0.7500    0.1429    1.0000         0
    0.5000   -0.2857   -0.0909    1.0000


U_g =

    4.0000    3.0000    2.0000   10.0000
         0   -1.7500    1.5000   -3.5000
         0         0   -4.7143   -9.0000
         0         0         0   -5.8182


P_g =

     0     0     0     1
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     1     0     0     0
```

Figura 7: decomposição LUP realizada pela função lu do MatLab.

B)
Por conta do grande tamanho das matrizes, optou-se por não colocar as figuras.
As matrizes determinadas pela função LUP são:
L = U = P = I_{20} (matriz identidade de ordem 20)

X = $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

Esse sistema é trivial pois pode ser escrito:

$IX = 0 \Rightarrow X = 0$

Mesmo sendo de resolução trivial, o código opera em O(n^3). Assim, para valores grandes de n seria interessante que fosse implementada uma heurística no código para verificar se alguma etapa do escalonamento tem m = 0 e pulá-la (seria O(n)) ou uma heurística para verificar se a matriz já está escalonada (O(n^2)). Em casos de n grande, por exemplo, n = 20 (ou n = 2.10^5), essas heurísticas poderiam economizar tempo computacional.

Questão 3

A)

```
resultado =

  logical

   0


valorCond =

   6.8000e+09
```

Figura 8: resultados Q3 - a)

Como a última linha é quase uma soma das linhas de cima, uma pequena perturbação na matriz A pode tornar o sistema indeterminado. Esse é um caso contemplado pela teoria, em que uma perturbação de A causa uma grande variação na resposta do sistema. Dessa forma, é esperado que a matriz A seja má-condicionada, concordando com os resultados apresentados na figura 8. A propósito, o valor de condicionamento por norma é muito grande, o que indica que a matriz é muito mal condicionada!

B)

```
x1 =

    3.3333
   -3.3333


resultado1 =

  logical

   0


valorCond1 =

  350.3590
```

```
x3 =

  -85.3500
  150.2500


resultado3 =

  logical

   0


valorCond3 =

   6.8880e+03
```

```
x2 =

  -65.0000
  115.0000


resultado2 =

  logical

   1


valorCond2 =

   6.8880e+03
```

Figura 9: Da esquerda para a direita, as respectivas soluções, resultado do teste de condicionamento por resíduos e valor do teste de condicionamento por norma dos sistemas 1, 2 e 3.

Nota-se que a única coisa que muda entre os sistemas 1, 2 e 3 são pequenas perturbações nos valores de A e de b, porém as soluções são bem diferentes em cada sistema. Isso mostra, portanto, que a matriz A é mal condicionada. Nos três casos, o valor do condicionamento por norma é maior que 10^2, o que é suficiente para se suspeitar de mau condicionamento. No entanto, no segundo sistema, o teste de condicionamento por resíduos indicou uma matriz A bem condicionada, o que é um equívoco do teste, não contemplado pela teoria. Seria necessário que fossem avaliados mais resíduos nesse caso ou então que o operador lógico fosse definido por algo do tipo
resultado = (ValorCond > 5*10^3 & resultado). Vemos, portanto, que também é necessário verificar empiricamente se uma matriz é mal condicionada pela mudança sutil dos parâmetros da matriz A, pois na prática na um valor de condicionamento acima de 10^2 já pode indicar ou não mal condicionamento, sendo necessário verificar.

C)

```
resultado =

  logical

   0


valorCond =

   3.3873e+10
```

Figura 10: condicionamento da matriz de Hilbert de ordem 8

```
x =

   1.0e+07 *

  -0.0001
   0.0032
  -0.0469
   0.2818
  -0.8316
   1.2757
  -0.9754
   0.2934
```

```
x1 =

   1.0e+08 *

  -0.0002
   0.0090
  -0.1214
   0.6768
  -1.8669
   2.6962
  -1.9527
   0.5594
```

```
x2 =

   1.0e+08 *

  -0.0003
   0.0159
  -0.2090
   1.1381
  -3.0799
   4.3775
  -3.1276
   0.8856
```

Figura 11: solução, em ordem de apresentação dos sistemas, de cada um dos sistemas lineares Q3 - c)

Como mostrado pela figura 10, os testes de condicionamento indicam a matriz de Hilbert de ordem 8 como mal condicionada. De fato, a única diferença entre os sistemas apresentados são pequenas perturbações em b, as quais levam a grandes diferenças nas soluções determinadas, como se vê na figura 11. Portanto, confirma-se o resultado dos testes: a matriz de Hilbert é, de fato, mal condicionada.

Avaliação da dupla

Aluno	Atividades	Percentual
Andrei Albani	Q2 e Q3, ajudando na Q1	100%
Vinícius Pereira	Q1 e revisou Q2 e Q3	100%