Laboratório 9 CCI-22

Autovalores e autovetores

Alunos:
Andrei Albani
Vinicius Jose de Menezes Pereira

Q1.

Matriz companheira:

```
-8.5000  -20.1429   -9.0714    7.2143    5.1429    0.6429
 1.0000         0         0         0         0         0
      0    1.0000         0         0         0         0
      0         0    1.0000         0         0         0
      0         0         0    1.0000         0         0
      0         0         0         0    1.0000         0
```

Método	Raízes
Matlab *roots* para o polinômio p(x)	`-4.6458  -3.0000  0.6458  -0.8273  -0.5000  -0.1727`
Matlab *eig* para matriz P associada a p(x)	`-4.6458  -3.0000  0.6458  -0.8273  -0.5000  -0.1727`

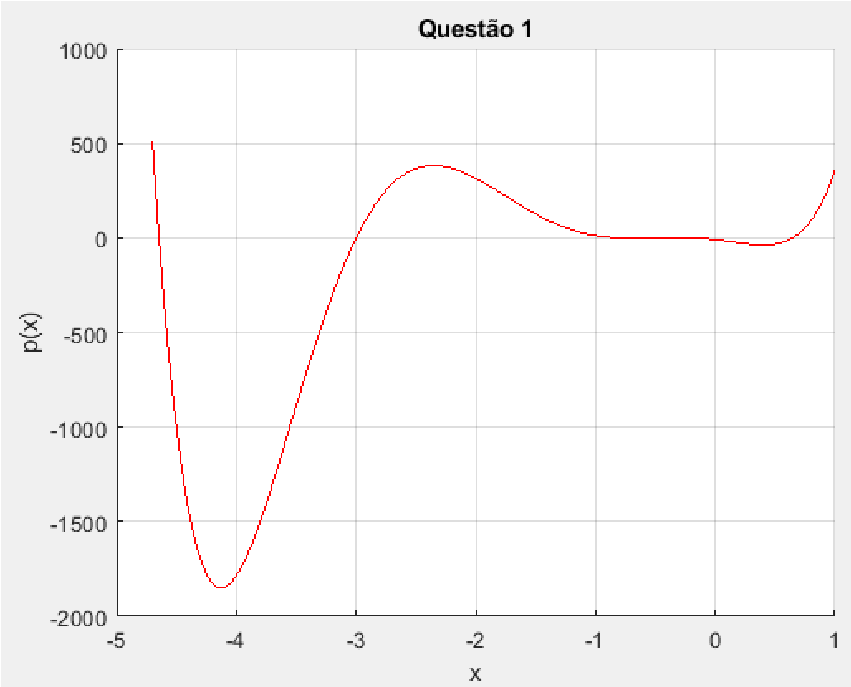

Figura 1: Gráfico do polinômio

Comentários: Vemos que, no método proposto, para determinar as raízes do polinômio pode-se calcular os autovalores da matriz companheira. Isso acontece porque o polinômio característico da matriz companheira é uma versão normalizada do polinômio inicial, com as mesmas raízes. Os valores calculados pela função do MATLAB ‘roots’ são os mesmos encontrados pela determinação dos autovalores da matriz companheira. As raízes podem ser vistas no gráfico da figura 1.

Q2.

a) Autovalor dominante: 1.1533

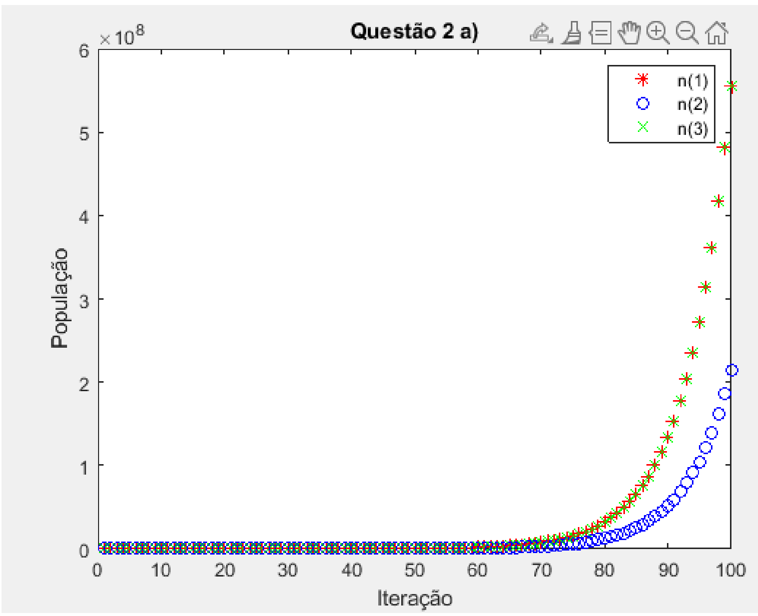

Figura 2: Questão 2a)
Lambda > 1, logo deve haver crescimento, como é observado.

b) Autovalor dominante: 0.98

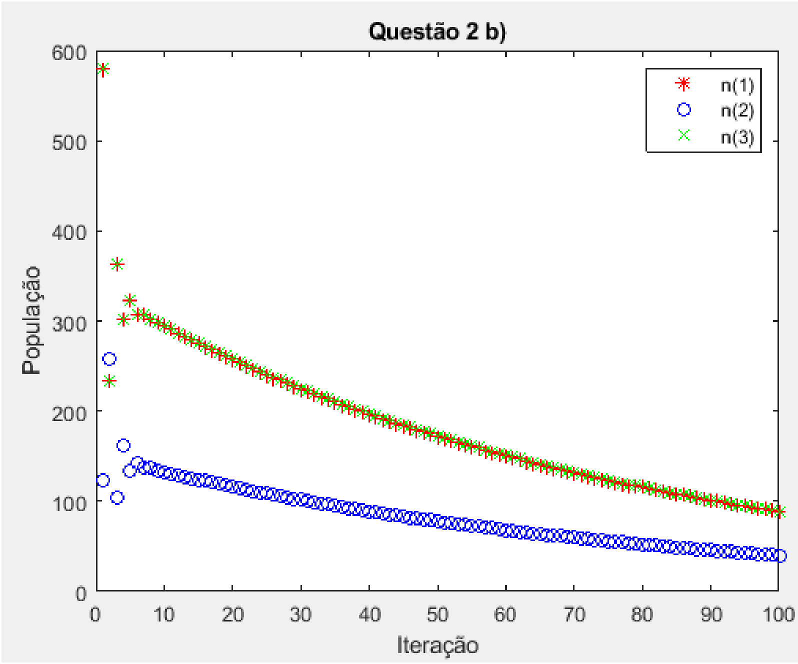

Figura 3: Questão 2b)
Lambda < 1, logo deve haver decrescimento, como é observado.

c) Autovalor dominante: 0.9981

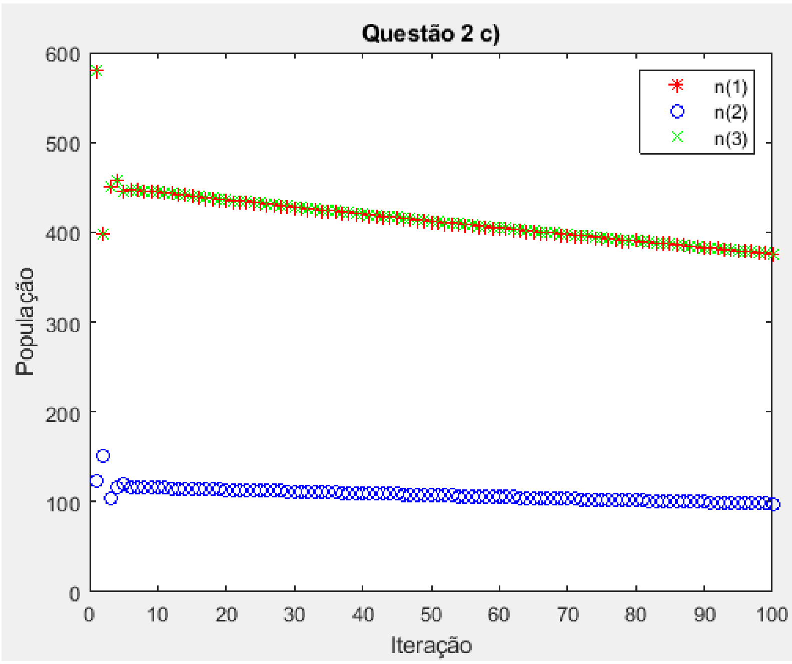

Figura 4: Questão 2c)
Lambda < 1, logo deve haver decrescimento, como é observado.

d) Autovalor dominante: 0.9981

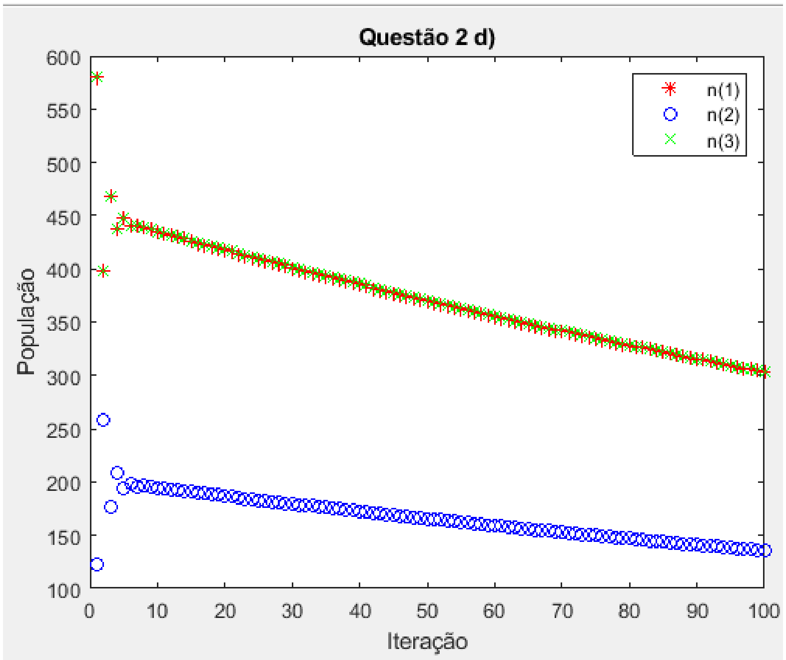

Figura 5: Questão 2d)
Lambda < 1, logo deve haver decrescimento, como é observado.

e) Autovalor dominante: 1

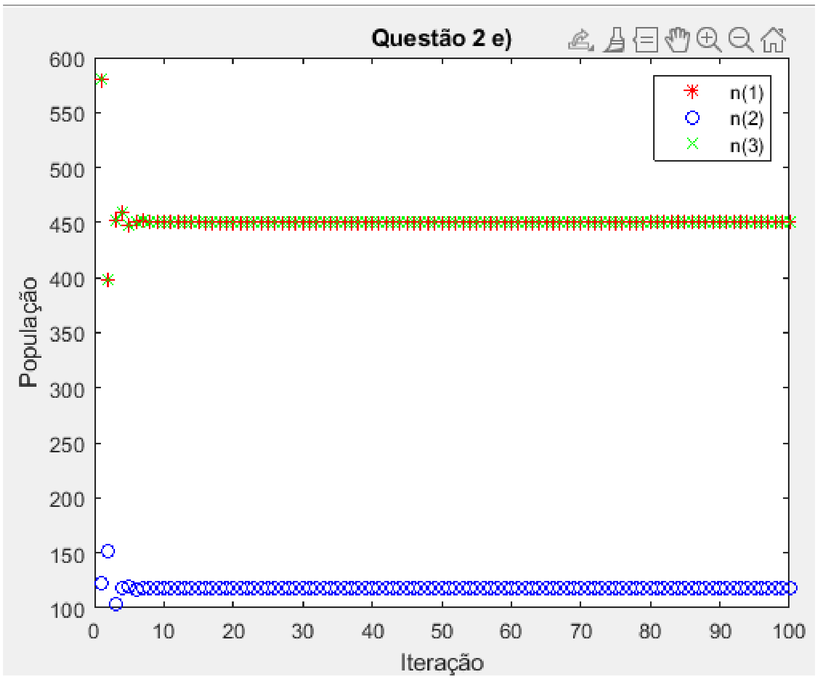

Figura 6: Questão 2e)
Lambda = 1, logo deve haver constância, como é observado.

f) Autovalor dominante: 1

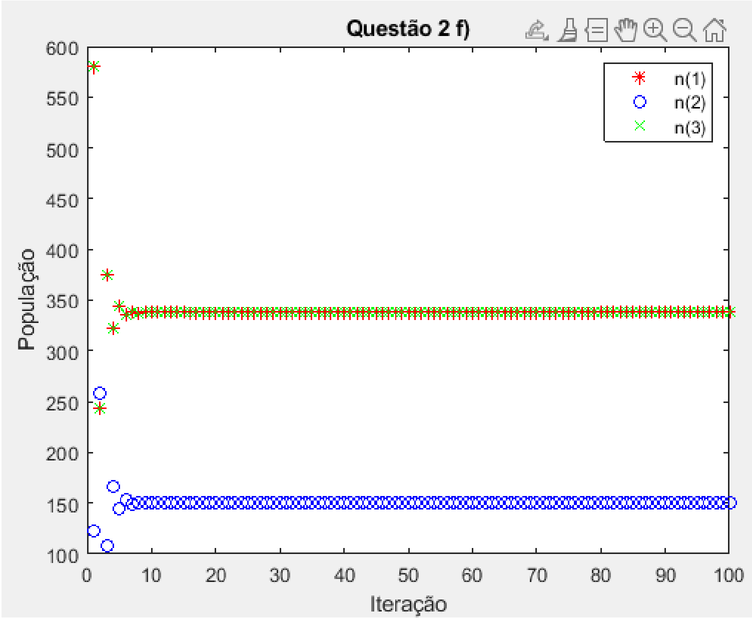

Figura 7: Questão 2f)
Lambda = 1, logo deve haver constância, como é observado.

Comentários: percebe-se que a teoria do autovalor dominante é muito bem comprovada nos exemplos acima. Quanto mais perto de 1 for o autovalor dominante em módulo, maior é a tendência que a população encontre um valor constante. Quando menor for o autovalor dominante em módulo, maior a tendência ao decrescimento, como é observado ao compararmos b) com c), onde um autovalor mais próximo de 1 resulta num crescimento mais lento. Também sabemos que, quanto maior for o autovalor, maior a tendência de crescimento.

Q3.

(a)
Utilizando-se o Teorema 1, obtém-se o vetor v* mostrado na figura 8.

```
v =

    0.3871
    0.1290
    0.2903
    0.1935
```

Figura 8: v* obtido com o Teorema 1.

Já o Teorema 2 indica que o autovetor correspondente ao autovalor 1 de A é v*.

Utilizando-se o método *eig( )* do *MatLab*, obtém-se:

```
V =

   0.7210 + 0.0000i   0.7552 + 0.0000i   0.7552 + 0.0000i   0.5065 + 0.0000i
   0.2403 + 0.0000i  -0.3037 - 0.3461i  -0.3037 + 0.3461i  -0.6057 + 0.0000i
   0.5408 + 0.0000i  -0.0932 + 0.2747i  -0.0932 - 0.2747i  -0.3815 + 0.0000i
   0.3605 + 0.0000i  -0.3584 + 0.0714i  -0.3584 - 0.0714i   0.4807 + 0.0000i


D =

   1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.3606 + 0.4110i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.3606 - 0.4110i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.2788 + 0.0000i
```

Figura 9: retorno do método *eig( ).* D é a matriz diagonal e V a matriz de autovetores.

Assim, nota-se que o autovalor 1 é o elemento D(1, 1) e então a primeira coluna de V é o autovetor v* buscado:

```
0.7210
0.2403
0.5408
0.3605
```

Mesmo que os v* retornados sejam diferentes, seus significados são os mesmos, pois ao dividir um v* encontrado por outro, tem-se:

```
>> V(:,1)./v

ans =

    1.8626
    1.8626
    1.8626
    1.8626
```

Figura 10: Proporção entre os elementos dos v* obtidos pelos teoremas 1 e 2.

Como se pode observar na figura 10, a proporção entre os respectivos elementos de cada vetor v* é a mesma. Logo, a proporção entre os elementos de cada vetor é a mesma, indicando a mesma importância. Conclui-se, assim, que ambos os métodos fornecem a mesma ordem de importância:
página 1 > página 3 > página 4 > página 2

(b)
v* obtido com o Teorema 1:

```
v =

    0.3682
    0.1418
    0.2880
    0.2021
```

Figura 11: v* obtido com o teorema 1.

E usando-se o teorema 2:

```
V =

   0.6965 + 0.0000i  -0.7552 + 0.0000i  -0.7552 + 0.0000i   0.5065 + 0.0000i
   0.2683 + 0.0000i   0.3037 + 0.3461i   0.3037 - 0.3461i  -0.6057 + 0.0000i
   0.5448 + 0.0000i   0.0932 - 0.2747i   0.0932 + 0.2747i  -0.3815 + 0.0000i
   0.3823 + 0.0000i   0.3584 - 0.0714i   0.3584 + 0.0714i   0.4807 + 0.0000i


D =

   1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.3065 + 0.3493i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.3065 - 0.3493i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.2369 + 0.0000i
```

Figura 12: Decomposição de M em matriz diagonal D e matriz de autovetores V.

Logo, o autovetor v* buscado é:

```
0.6965
0.2683
0.5448
0.3823
```

Figura 13: vetor v* obtido com o teorema 2.

Novamente, a proporção entre os respectivos elementos dos vetores v* encontrados é:

```
>>  V(:, 1)./v

ans =

    1.8918
    1.8918
    1.8918
    1.8918
```

Figura 14: Proporção entre os elementos dos v* obtidos pelos teoremas 1 e 2.

O que mostra que os dois vetores v* são coerentes entre si.
Ao comparar-se com os vetores v* obtidos em (a), nota-se que os valores dos elementos dos vetores são ligeiramente diferentes. Isso deve ser explicado pelo valor de p, que é um bom valor, mas não um valor ótimo, ou seja, ele não fornece o mesmo resultado exato de (a).
A ordem de importância das páginas, como esperado, permanece a mesma:
página 1 > página 3 > página 4 > página 2

(c)
Repetindo-se o procedimento de (b) para a matriz do exemplo 2, tem-se:

```
v =

    0.2000
    0.2000
    0.2000
    0.2000
    0.2000
```

Figura 15: Vetor v* obtido com teorema 1.

```
V =

    0.7071    0.0000   -0.0000    0.5477   -0.4472
   -0.7071   -0.0000    0.0000    0.5477   -0.4472
   -0.0000   -0.2598   -0.7741   -0.3651   -0.4472
    0.0000   -0.5404    0.6120   -0.3651   -0.4472
         0    0.8003    0.1620   -0.3651   -0.4472


D =

   -0.8500         0         0         0         0
         0   -0.4250         0         0         0
         0         0   -0.4250         0         0
         0         0         0    0.8500         0
         0         0         0         0    1.0000
```

Figura 16: Decomposição de M em matriz diagonal D com matriz de autovetores V.

```
-0.4472
-0.4472
-0.4472
-0.4472
-0.4472
```

Figura 17: v* obtido com o teorema 2.

Dessa vez, não é nem preciso fazer a divisão elemento a elemento dos vetores v* encontrados: os elementos de cada um deles têm todos o mesmo valor!
As páginas, portanto, têm todas a mesma importância. Esse resultado faz sentido, afinal, em cada um dos dois subgrafos, cada nó tem o mesmo número de arestas que o restante dos nós do subgrafo (isto é, há o mesmo número de links para cada página).

(d)
Ficará maçante se eu colocar uma figura para cada valor de p, mostrando a decomposição em V e D e depois o autovalor obtido, afinal, já fiz isso nos itens acima. Além disso, acho que já ficou comprovado que ambos os métodos chegam em resultados coerentes, então deixarei de mostrar também a razão entre os respectivos elementos. Vou mostrar apenas o vetor obtido com o teorema 1, colocando ao lado o vetor obtido com o teorema 2.
A figura 18 mostra a matriz A utilizada. É importante notar que, como a página 1 não aponta para nenhuma outra página, foi necessário acrescentar peso igual para todas as páginas, como se a página 1 apontasse para todas, menos para si mesma, a fim de contabilizar de maneira coerente o seu peso.

```
A = [ 0,    0,   1, 0,   0, 0;
      1/5, 0,   0, 1/2, 0, 0;
      1/5, 1/2, 0, 0,   0, 1;
      1/5, 0,   0, 0,   1, 0;
      1/5, 1/2, 0, 1/2, 0, 0;
      1/5,  0,  0, 0,   0, 0];
```

Figura 18: Matriz A utilizada.

```
0.1389        -0.3054
0.1667        -0.3665
0.1389        -0.3054
0.2778        -0.6108
0.2500        -0.5498
0.0278        -0.0611
```

Figura 19: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 0.**

```
0.1645        -0.3790
0.1555        -0.3584
0.1641        -0.3781
0.2413        -0.5561
0.2216        -0.5107
0.0530        -0.1220
```

Figura 20: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 0,15.**

```
0.1779        0.4276
0.1498        0.3601
0.1891        0.4546
0.1948        0.4681
0.1873        0.4501
0.1011        0.2431
```

Figura 21: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 0,50.**

```
0.1667        0.4082
0.1667        0.4082
0.1667        0.4082
0.1667        0.4082
0.1667        0.4082
0.1667        0.4082
```

Figura 22: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 1.**

Quando se usa p = 0, toma-se unicamente a matriz A. Já para p = 1, toma-se unicamente B, e por isso, nesse caso, as importâncias são todas iguais. Pode-se notar que, conforme aumenta o valor de p, as importâncias de cada página se aproximam mais. Como a matriz A não representa um grafo desconexo, o resultado de p = 0 deve ser o mais confiável, visto que a utilização de uma matriz M não é necessária nesse caso (pelo menos, não há nada que me leve a crer nisso). Portanto, a ordem de importância das páginas é:
página 4 > página 5 > página 2 > página 3 = página 1 > página 2

(e)

Como esse caso é análogo a (d), valem as mesmas considerações.

```
A = [ 0,   1, 1, 0, 0, 0, 0, 0;
      1/7, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0;
      1/7, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1;
      1/7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
      1/7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
      1/7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
      1/7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
      1/7, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];
```

Figura 23: matriz A utilizada.

0.3684	0.7876
0.1579	0.3375
0.2105	0.4500
0.0526	0.1125
0.0526	0.1125
0.0526	0.1125
0.0526	0.1125
0.0526	0.1125

Figura 24: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 0.**

0.3335	-0.7484
0.1600	-0.3590
0.2103	-0.4720
0.0592	-0.1329
0.0592	-0.1329
0.0592	-0.1329
0.0592	-0.1329
0.0592	-0.1329

Figura 25: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 0,15.**

0.2420	0.6134
0.1596	0.4045
0.1995	0.5056
0.0798	0.2022
0.0798	0.2022
0.0798	0.2022
0.0798	0.2022
0.0798	0.2022

Figura 26: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 0,50.**

0.1250	0.3536
0.1250	0.3536
0.1250	0.3536
0.1250	0.3536
0.1250	0.3536
0.1250	0.3536
0.1250	0.3536
0.1250	0.3536

Figura 27: v* obtido por teorema 1 (esquerda) e teorema 2 (direita), para **p = 1.**

Concluindo, assim como em (d), a matriz A não representa um grafo desconexo. Logo, não há necessidade de usar M. Mas nesse caso, a menos para p = 1, todos os v* obtidos indicam a mesma ordem de importância:
página 1 > página 3 > página 2 > todas as demais (que têm a mesma importância entre si). O grafo de páginas analisado aqui é um ótimo exemplo para demonstrar a funcionalidade do método utilizado. É fácil notar que as páginas 4, 5, 6, 7 e 8 precisam ter mesma importância e importância menor porque estão na base da pirâmide e nenhuma página aponta para elas. Como a página 3 é mais apontada que a 2, claro que sua importância deve ser maior que a da 2. Por fim, a página 1 deve ser obviamente a mais importante, já que 2 e 3 apontam para ela.

Avaliação da dupla

Aluno	Atividades	Percentual
Andrei Albani	Q3 (5 pts)	100%
Vinícius Pereira	Q1 e Q2 (5 pts)	100%