Laboratório 7- CCI-22

Integração

Alunos:
Andrei Albani
Vinicius Jose de Menezes Pereira

Q1.

a)
A figura 1 mostra a comparação entre os erros no cálculo das integrais para as duas funções com n variando entre 0 e 100.

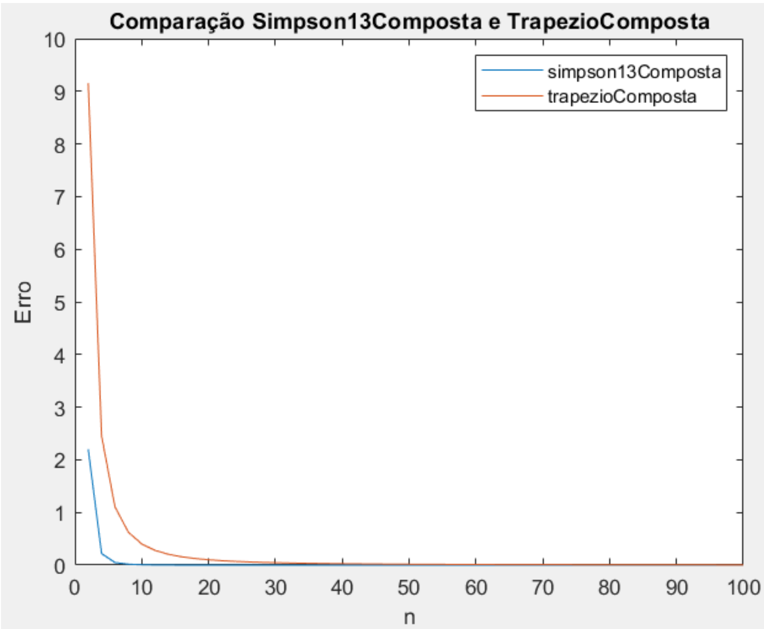

Figura 1. Comparação do erro entre Simpson13Composta e TrapezioComposta

Nota-se que conforme aumenta n, o erro diminui, o que é esperado, dado que quanto maior o número de subintervalos, melhor a aproximação da função como sendo a união de diferentes curvas.
Pode-se notar que o erro da função Simpson13Composta converge bem mais rapidamente para um valor bem pequeno em comparação com a TrapezioComposta, o que já é esperado, visto que a primeira faz aproximações de grau 2 em cada subintervalo e a última faz aproximações de grau 1 - a união de pequenos segmentos de parábolas se aproxima mais da curva da função do que a união de pequenos segmentos de reta-.
Na figura 2 é possível observar com mais detalhamento a convergência de cada função para valores de n situados entre 20 e 100.

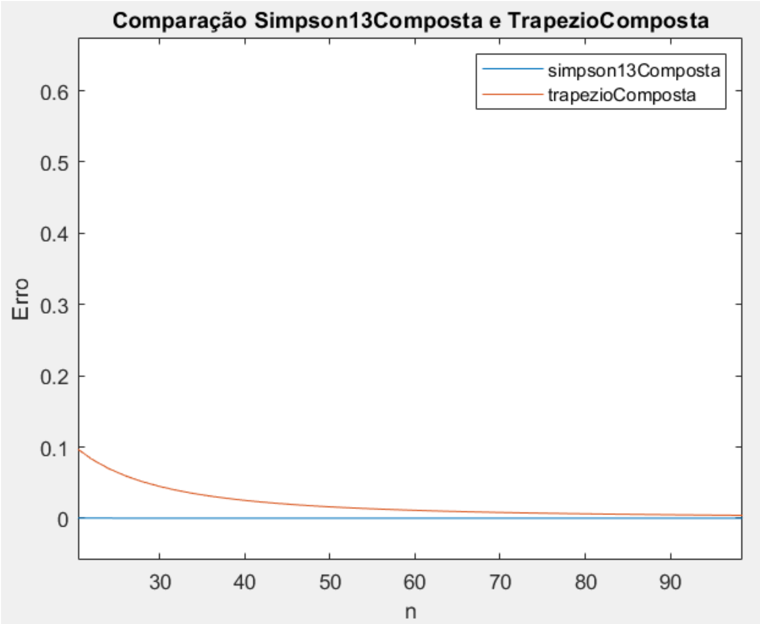

figura 2. Convergência das funções com n variando entre 20 e 100

Pode-se notar que o erro da função Simpson13Composta é muito menor para 0 < n < 70. Para 70 < n < 100 nota-se que os erros já assumem valores mais próximos entre si, mas o erro da função TrapezioComposta continua sempre maior. Para n = 100, o erro da função TrapezioComposta é da ordem de 10^{-2} e o da Simpson13Composta da ordem de 10^{-6}.

Portanto, conclui-se que para um mesmo número de subintervalos, a função Simpson13Composta leva vantagem em relação à TrapezioComposta.

b)

A figura 3 mostra a comparação entre os erros estimado e absoluto da função TrapezioComposta:

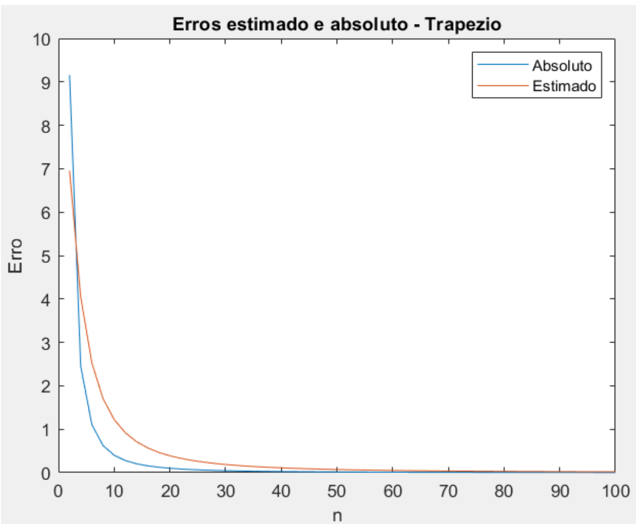

figura 3. Erros estimado e absoluto - TrapezioComposta

Pode-se notar que o erro estimado está próximo do erro absoluto para um número suficientemente grande de subintervalos (n > 60), o que pode ser melhor observado na figura 4. Porém para n pequeno (n < 60), a diferença entre os respectivos erros é significativa e pode-se dizer que a estimativa é bem grosseira, sendo inclusive menor do que o valor absoluto para n muito pequeno.

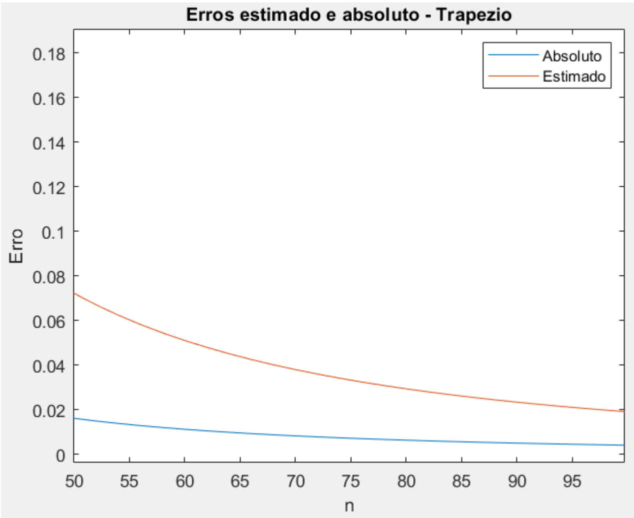

Figura 4. Comparação entre erros absoluto e estimado da função TrapezioComposta para n variando entre 50 e 100.

Ressalta-se, por fim, que como se observa na figura 4, o erro estimado é da mesma ordem de grandeza que o erro absoluto, mas pelo menos duas vezes maior que este em cada ponto do intervalo mostrado, embora se trate de um valor pequeno em comparação com o resultado da integral (25.9399).
Conclui-se, portanto, que o valor do erro estimado é razoavelmente exato, aceitável para várias aplicações. A fim de melhorar essa estimativa, convém utilizar um grande número de subintervalos.

c)

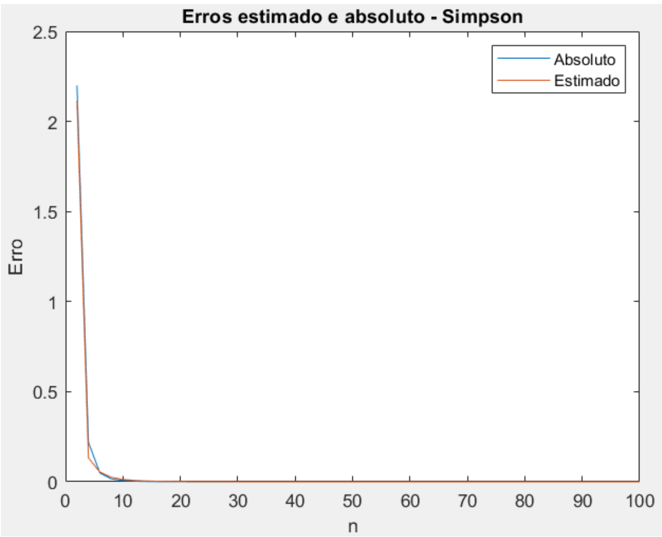

Figura 5. Comparação entre os erros estimado e absoluto da função Simpson13Composta, n variando entre 0 e 100

Como se pode observar na figura 5, as curvas de convergência do erro estimado e do erro absoluto são muito semelhantes no intervalo de valores de n que vai de 0 a 100.
Na figura 6 pode-se observar esses valores no intervalo de 0 a 50.

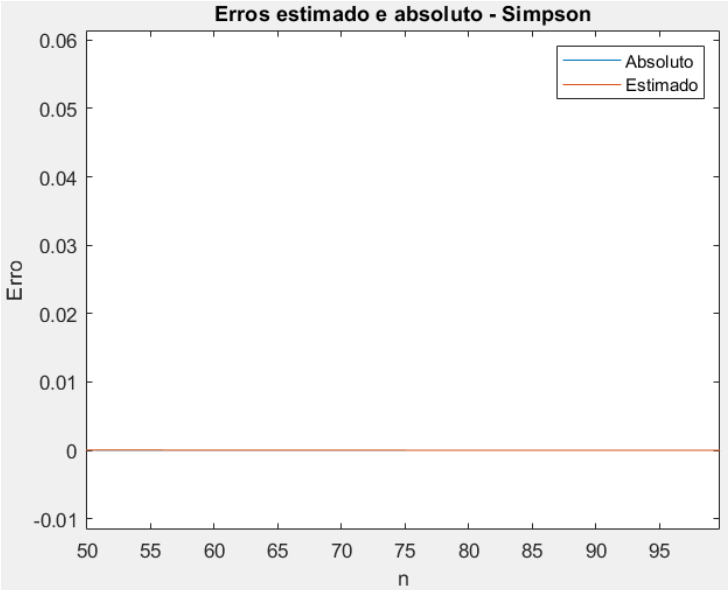

Figura 6. Comparação entre os erros estimado e absoluto da função Simpson13Composta, n variando entre 50 e 100.

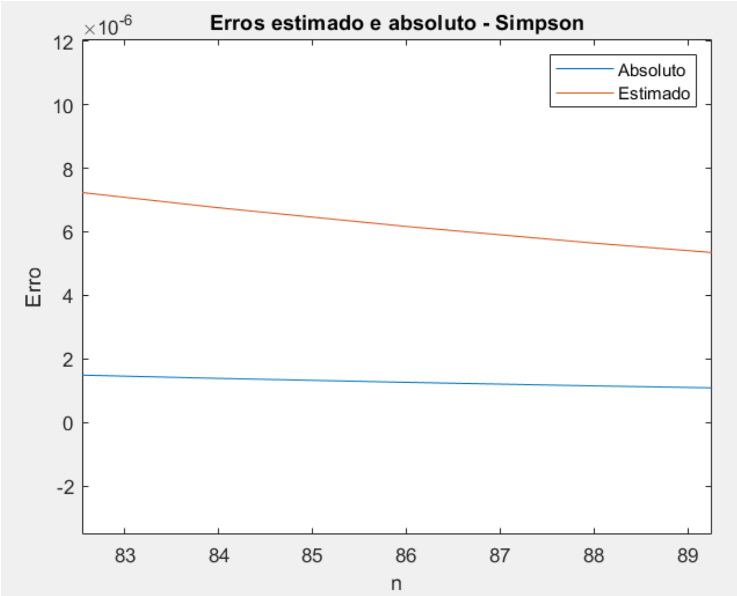

Figura 7. Comparação entre os erros estimado e absoluto da função Simpson13Composta, n variando entre 83 e 89.

Por fim, na figura 7, observa-se que os erros possuem, de fato, mesma ordem de grandeza, embora o erro estimado seja pelo menos 3 vezes maior que o erro absoluto para cada valor de n no intervalo apresentado.

Assim sendo, valem as mesmas considerações feitas na letra (b). A diferença é que o erro da função Simpson é muito menor que o da função Trapézio, mas as proporções entre as estimativas e os erros absolutos são semelhantes.
Conclui-se, portanto, que o valor do erro estimado é razoavelmente exato, aceitável para várias aplicações, e muito pequeno em comparação com o valor da integral calculada. A fim de melhorar essa estimativa, convém utilizar um grande número de subintervalos.

Q2.

Tabela 1. Resultados da questão 02

Integral	**quad** do *MatLab*	**quadAdaptativa (com Simpson Simples 1/3)**	**simpson13Composta**
$\int_0^2 \frac{1}{x^3-2x-5}dx$	I = -0.460502 Tempo = 0.00034 s	I = -0.460502 qdteDiv = 72 Tempo = 0.00019 s	I = -0.460520 n = 72 Tempo = 0.00010 s --------------- I = -0.460502 nNecessario = 210 Tempo = 0.00104 s
$\int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin 2x\,dx$	I = 2.588626 Tempo = 0.00014 s	I = 2.588629 qdteDiv = 36 Tempo = 0.000050 s	I = 2.588629 n = 36 Tempo = 0.000036s --------------- I = 2.588628 nNecessario = 38 Tempo = 0.000038s
$\int_0^4 13(x-x^2)e^{-3x/2}\,dx$	I = -1.548789 Tempo = 0.0010 s	I = -1.548789 qdteDiv = 116 empo = 0.00067 s	I = -1.548790 n = 116 Tempo = 0.00064 s --------------- I = -1.548789 nNecessario = 196 Tempo = 0.00172 s

Analisar-se-á os resultados obtidos para cada função.
I .

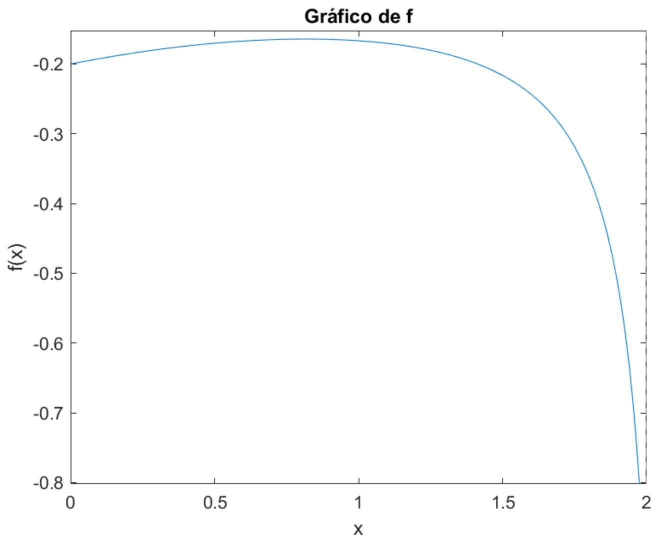

Figura 8. Gráfico de f(x) = 1/(x^3-2x-5);

Pode-se notar que f possui uma descontinuidade em x = 2. Por conta disso, a função tem decrescimento abrupto quando x se aproxima de 2 e a função quad_adaptativa apresenta um resultado melhor que a Simpson13Composta para o mesmo número de divisões, pois estas não são igualmente espaçadas na primeira e o são na última. Assim, para que a Simpson13Composta apresente um resultado com mesmo erro é preciso que faça mais divisões (210). Como consequência, quad_adaptativa acaba tendo custo computacional bem menor (inclusive, ela leva menos tempo que a quad do MatLab, mesmo apresentando resultado igual para 6 digitos de precisão).

II.

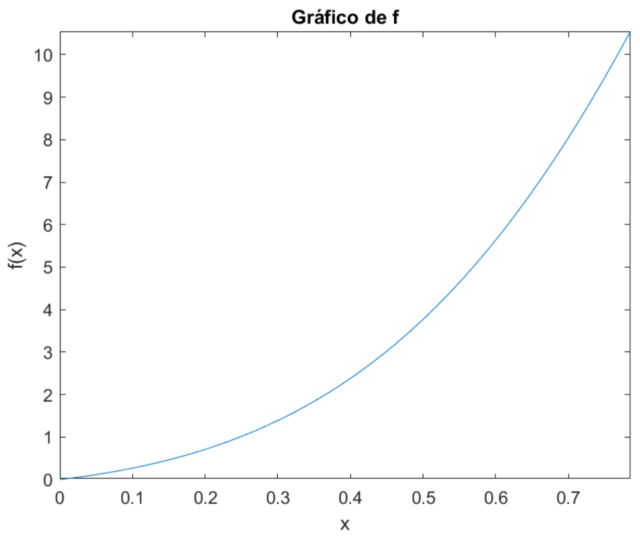

Figura 9. Gráfico de f(x) = exp(3x)*sen(2x);

Dessa vez a função quad_adaptativa teve precisão menor (difere da quad do MatLab por 3 no último dígito) e também levou mais tempo que quad do MatLab. Além disso, a função Simpson13Composta obteve mesmo resultado para o mesmo número de divisões de intervalo e teve um custo de tempo menor. Nesse caso então, não é vantajoso utilizar a

quad_adaptativa. Isso poderia ter sido previsto analizando-se o gráfico de f(x), presente na figura 9: como ele não possui crescimento ou decrescimento abrupto, não se espera a necessidade da divisão recursiva em subintervalos e então a quad_adaptativa faz as mesmas operações que a Simpson13Composta.
Além disso, ao se procurar o n necessário para que a Simpson13Composa apresente mesmo resultado que a quad do MatLab, não foi possível encontrar valor de n (testou-se até 5000) cujo resultado fosse mais próximo do resultado da função quad. Isso ocorre pois, para um determinado valor de n, o erro das aproximações numéricas da máquina acabam compensando a aproximação obtida do resultado, e então não se consegue mais diminuir o valor do erro, apenas aumentá-lo.

III.

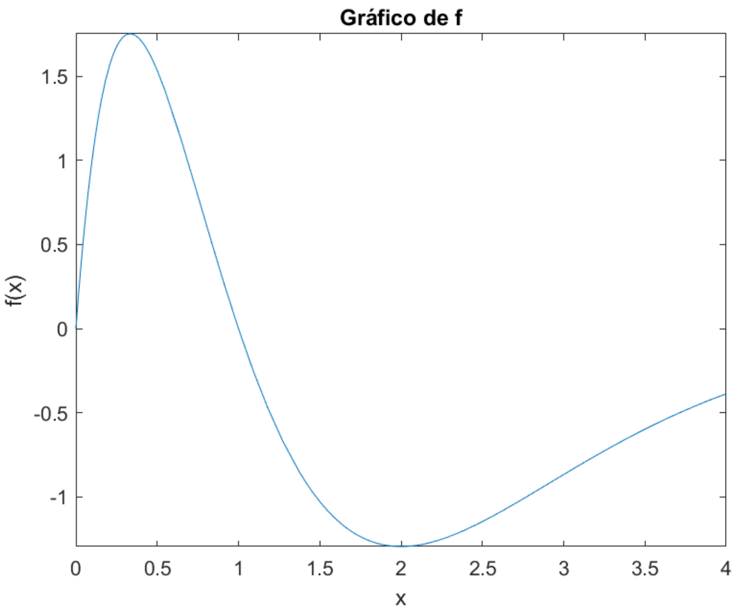

Figura 10. Gráfico de f(x) = 13x(1-x)exp(-3x/2)

Nesse caso, a quad_adpatativa obtém resultado idêntico ao da quad do MatLab, porém com um custo de tempo superior. Nota-se que para o mesmo número de divisões do intervalo, a função Simpson13Composta obtém resultado com menor exatidão. Para obter a mesma exatidão, é necessário um número significativo de divisões a mais (196 em comparação com 116) e então acaba levando mais tempo para realizar o cálculo. Isso ocorre porque o gráfico de f(x) possui um crescimento e um decrescimento ligeiramente abrupto no intervalo [0, 2].

Das análises I, II e III, depreende-se portanto que a função quad_adaptativa é vantajosa quando o gráfico da função a se integrar possui um crecimento/decrescimento abrupto. Em casos de gráficos mais “suaves”, é vantajoso o uso da Simpson13Composta.

Q3.

Tabela 1: Integrações da questão 3

Função	Regra simples do Trapézio	Regra simples Simpson 1/3	Regra simples Simpson 3/8	Newton-Cotes de ordem 4
F1	I = 86.7 qtdeRec = 13452 qtdeDiv = 13454	I = 86.7 qtdeRec = 0 qtdeDiv = 4	I = 86.7 qtdeRec = 0 qtdeDiv = 6	I = 86.7 qtdeRec = 0 qtdeDiv = 8
F2	I = 1.0968e+06 qtdeRec = 3285034 qtdeDiv = 3285036	I = 1.0968e+06 qtdeRec = 1588 qtdeDiv = 3180	I = 1.0968e+06 qtdeRec = 1372 qtdeDiv = 4122	I = 1.0968e+06 qtdeRec = 126 qtdeDiv = 512
F3	I = 4.7116e-32 qtdeRec = 0 qtdeDiv = 2	I = 3.1416 qtdeRec = 6 qtdeDiv = 16	I = 3.5343 qtdeRec = 0 qtdeDiv = 6	I = 3.1416 qtdeRec = 6 qtdeDiv = 32
F4	I = 53.59 qtdeRec = 10356 qtdeDiv = 10358	I = 53.59 qtdeRec = 56 qtdeDiv = 116	I = 53.59 qtdeRec = 46 qtdeDiv = 144	I = 53.59 qtdeRec = 8 qtdeDiv = 40
F5	I = 1.57 qtdeRec = 151042 qtdeDiv = 151044	I = 1.57 qtdeRec = 1464 qtdeDiv = 2932	I = 1.57 qtdeRec = 1160 qtdeDiv = 3486	I = 1.57 qtdeRec = 260 qtdeDiv = 1048
F6	I = -0.0178 qtdeRec = 1922 qtdeDiv = 1924	I = -0.0178 qtdeRec = 60 qtdeDiv = 124	I = -0.0178 qtdeRec = 52 qtdeDiv = 162	I = -0.0178 qtdeRec = 16 qtdeDiv = 72
F7	I = -1.5488 qtdeRec = 5368 qtdeDiv = 5370	I = -1.5488 qtdeRec = 56 qtdeDiv = 116	I = -1.5488 qtdeRec = 48 qtdeDiv = 150	I = -1.5488 qtdeRec = 10 qtdeDiv = 48

F1

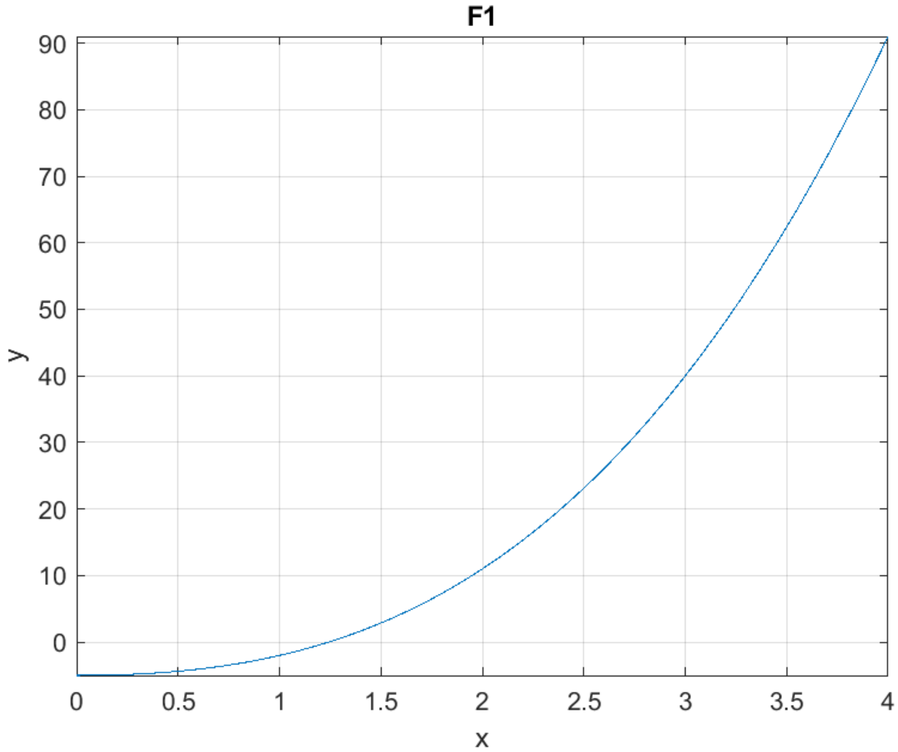

Gráfico 1: F1

Comentários: os valores da integral no intervalo pedido foram iguais para todos os métodos, o que era esperado, já que essa curva polinomial não é complicada, não possuindo particularidades. Pode-se notar que o número de divisões da Regra simples do Trapézio é muito maior que o dos outros métodos, já que ele começa com menos partes já prontas em sua fórmula da integral e divide pouco o intervalo em comparação aos outros métodos. Além disso, vemos que os métodos da opção 2,3 e 4 já são baseados em polinômios, adequando-se perfeitamente para a função polinomial.

F2

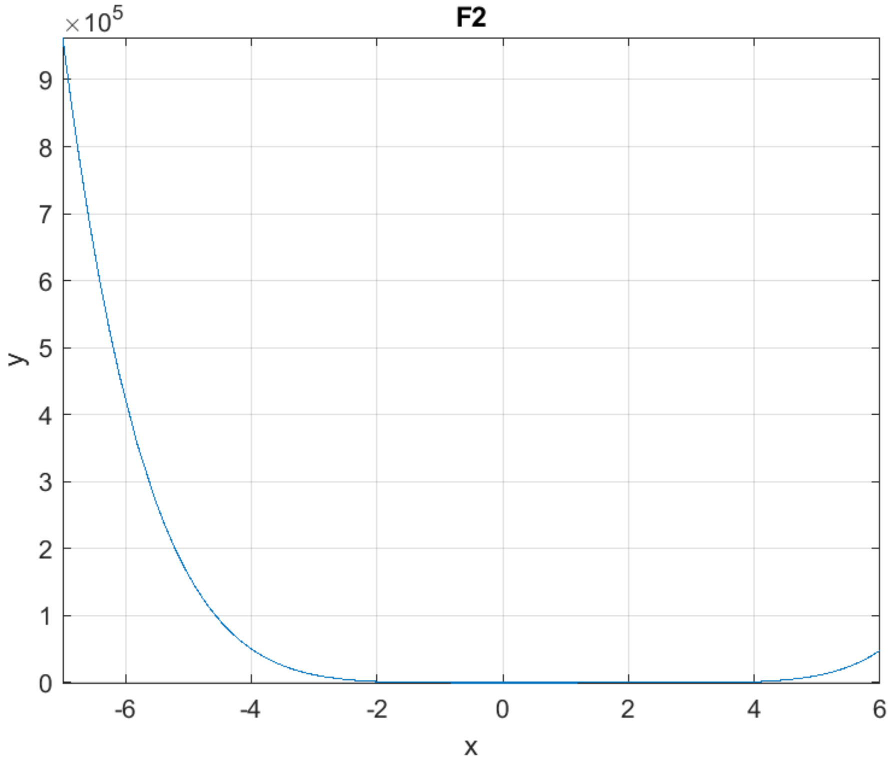

Gráfico 2: F2

Comentários: como a função em análise cresce muito no lado esquerdo, vemos que a integral deve depender quase que completamente desse lado esquerdo, possuindo um valor bem alto. De modo particular, foram necessárias muitas divisões e recursões porque, quando divide-se pouco o intervalo, há uma variação muito grande do valor da função no intervalo, de tal forma que a aproximação com poucas divisões acaba não ajustando bem a curva e gerando muitos erros.

F3

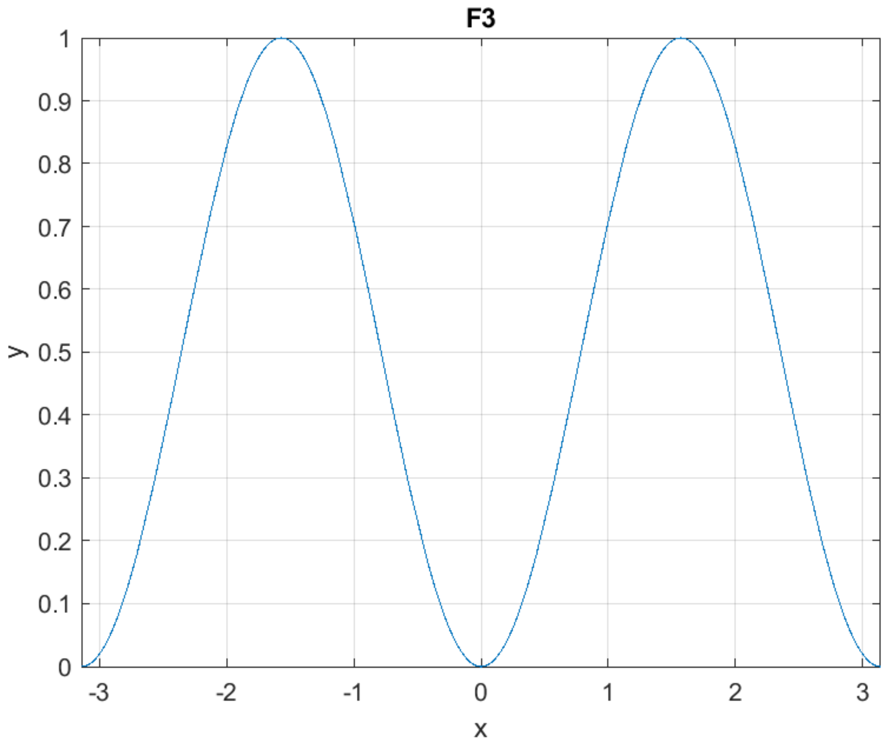

Gráfico 3: F3

Comentários: esta função acaba por confundir a quad_adaptativa para algumas opções, pois ela é uma função par, possuindo simetria em torno de x = 0, e o intervalo pedido também é simétrico em torno de x = 0. Dessa forma, as opções em que há uma divisão par nos intervalos tendem a apresentar um alto erro, pois P = Q logo na primeira iteração, o que, neste caso particularíssimo, não quer dizer que o valor da integral está perfeito. Com isso, as opções 1 e 3 ficam comprometidas, como é possível observar. Como, porém, as opção 3 possui mais divisões, só essa primeira iteração mostra um resultado mais preciso que o obtido pela opção 1.

F4

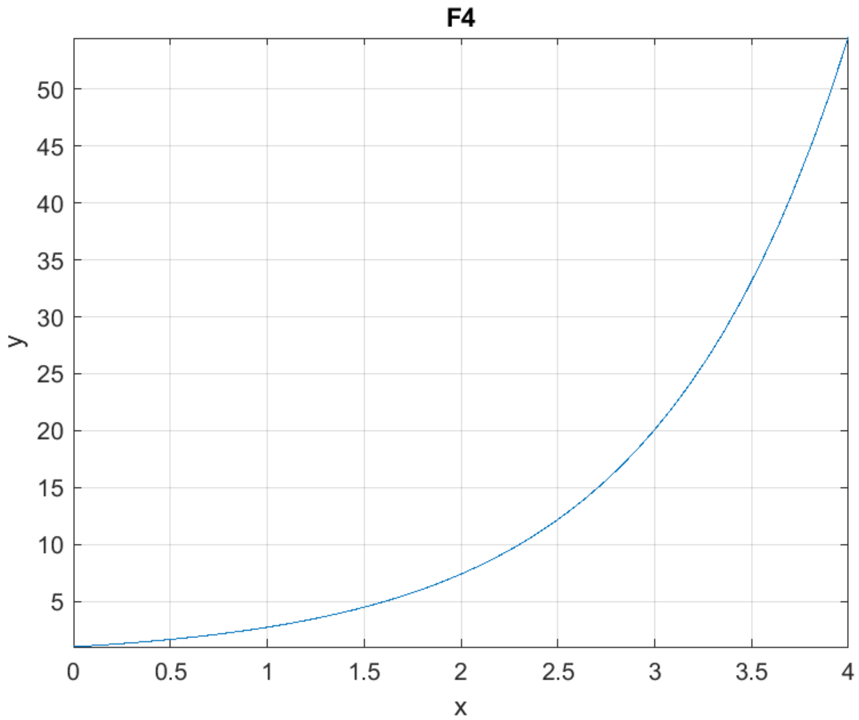

Gráfico 4: F4

Comentários: para esta função, vemos que o valor da integral achado por cada opção é igual. Como não há nenhuma simetria, ao contrário, as opções 1 e 3 que dividem os intervalos num número par tendem a apresentar maior dificuldade em diminuir o erro. A opção 1 novamente demonstrou um número de recursões muito maior que as outras opções, pois é mais fácil aproximar-se de uma curva exponencial com mais divisões e com polinômios de graus maior do que com uma reta.

F5

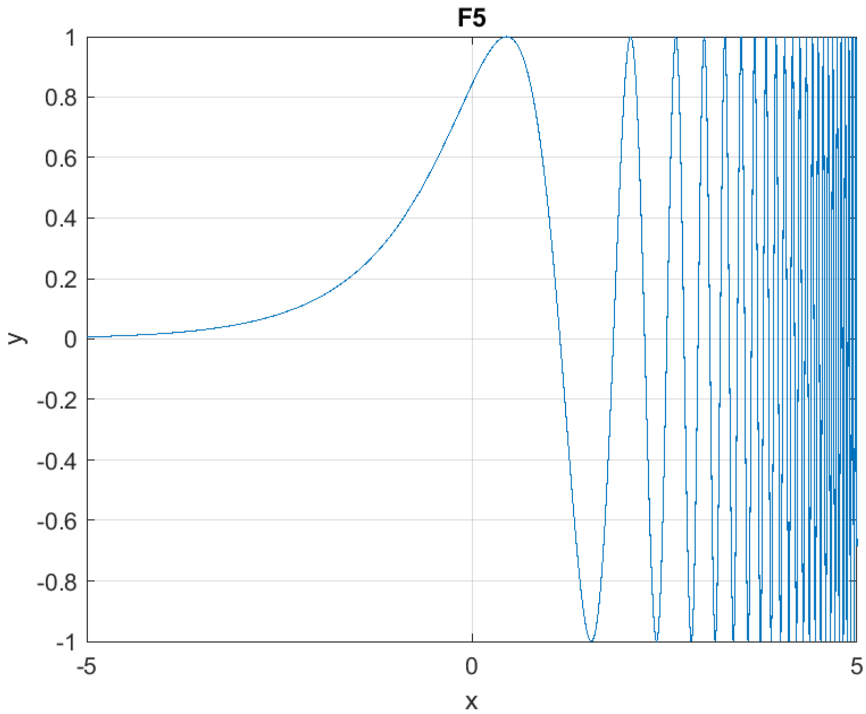

Gráfico 5: F5

Comentários: a função f5 obteve um valor igual para as integrais com todas as opções. Sua grande particularidade, porém, é seu comportamento no lado direito do gráfico, pois ela oscila muito num pequeno intervalo de tempo e essas oscilações só aumentam quando x aumenta. Desse modo, para o cálculo das integrais foi necessário um número elevado de iterações, mesmo não havendo grandes variações em módulo de y, como era o caso de f2.

F6

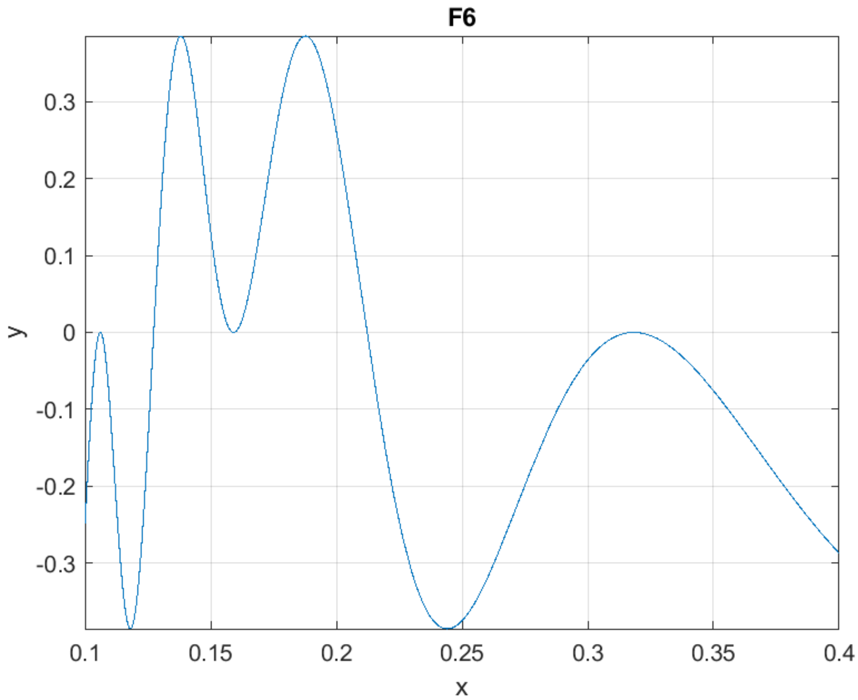

Gráfico 6: F6

Comentários: todos os valores da integral calculados pelas opções neste caso forneceram valores iguais. O intervalo escolhido foi bem pensado, não possuindo particularidades que dificultam a integração. A curva é suave, não variando muito nem muito rápido, sendo propícia para os métodos empregados.

F7

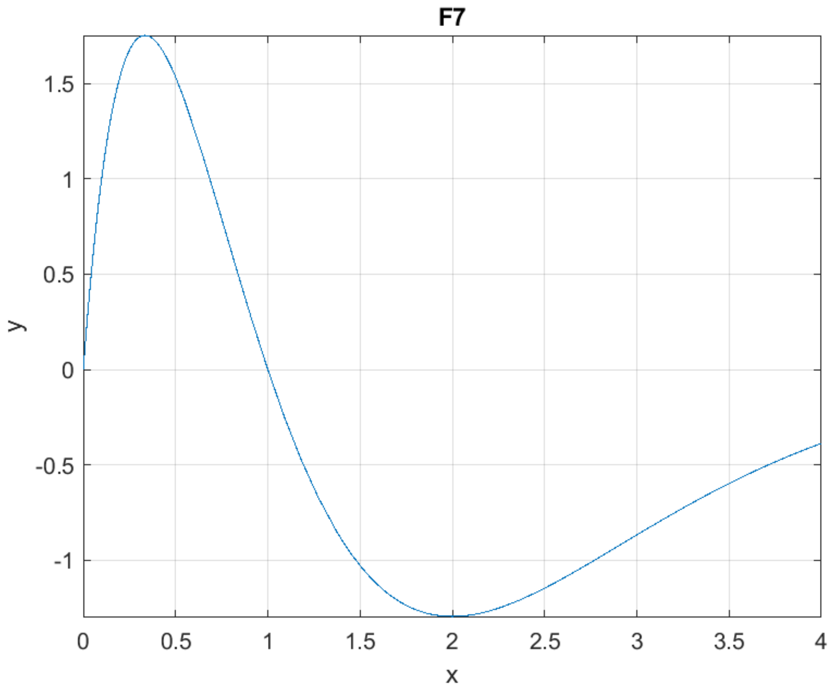

Gráfico 7: F7
Comentários: todos os resultados da integral calculados pelas opções tiveram valores iguais, o que era esperado, já que a função em questão é suave no intervalo dados, não variando muito nem muito rápido nem possuindo particularidades que dificultam a integração.

Respostas

- Em geral, sim, pois menores intervalos tendem a ajustar melhor a integral e diminuir o erro mais rapidamente. Isso é observado de forma geral em todas as opções nos exemplos da Tabela 1. No entanto, em alguns casos particulares isso pode não valer como quando a função se adequa melhor a partições de intervalores pares ou ímpares, como pode ser visto em f3, que as divisões pares atrapalham.
- Sim. Em funções mal comportadas, ou seja, que variam muito ou muito rapidamente, há necessidade de mais divisões no intervalo para se adequar melhor à função, pois em grandes variações de y pode ‘acontecer tudo’ no modo como a função cresce e em mudanças em alta velocidade, é possível que um intervalo grande ignore mudanças significativas na função. Tais comportamentos são vistos em f5(alto crescimento) e em f2(alta frequência).

Avaliação da dupla

Aluno	Atividades	Percentual
Andrei Albani	Q1 e Q2, revisando Q3	100%
Vinícius Pereira	Q3, revisando Q1 e Q2	100%