

Simulação de Radar

Vinícius Carvalho Pimpim
Discente
FEEC/Unicamp
Campinas, Brasil
v194940@dac.unicamp.br

Luís Geraldo Pedroso Meloni
Docente
FEEC/Unicamp
Campinas, Brasil
meloni@unicamp.br

Index Terms—Sinal Chirp, Filtro Casado, Compressão de Pulso, Função de Autocorrelação, Sinal em Rajada, Efeito Doppler, Transformada Discreta de Fourier (DTFT).

I. INTRODUÇÃO

Nesse relatório será abordado o passo a passo para a criação de um sistema de radar simples, utilizando conceitos da área de processamento de sinais digitais, para a criação desse sistema, foi seguido como literatura base o livro “Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB 5” - James H. McClellan et al., versão de 1998”. Em que no capítulo 10 “Application” é apresentado um guia por meio de exercícios para auxiliar no desenvolvimento desse projeto. Ao final espera-se obter um modelo, capaz de estimar a distância e velocidade de objetos. O ambiente principal de desenvolvimento utilizado foi Jupyter Notebook, com a linguagem de programação Python.

II. ESTIMAR A DISTANCIA DE UM OBJETO

A estratégia para estimar a distância de um objeto é feita seguindo o procedimento de emitir um sinal por um transmissor, o sinal em questão percorrerá uma certa distância e será refletido por um objeto, e então trafegará o caminho de volta até o receptor. O tempo de propagação desse sinal pode ser mensurado como a soma do intervalo de tempo de ida e de retorno, e é especificado por T_d . Por fim, será utilizado a equação (2), para determinar a distância do objeto ao radar.

A. Sinal Chirp

$$s(t) = e^{\frac{j\pi W t^2}{T}}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (1)$$

$$R = \frac{1}{2} c \cdot T_d \quad (2)$$

O Sinal Chirp (1) será o sinal chave para estimar a distância de um objeto, será esse o sinal enviado por um transmissor, esse sinal apresenta a característica de possuir a fase variante com o quadrado do tempo, podendo ser observado na Figura 2, dado a característica de parábola.

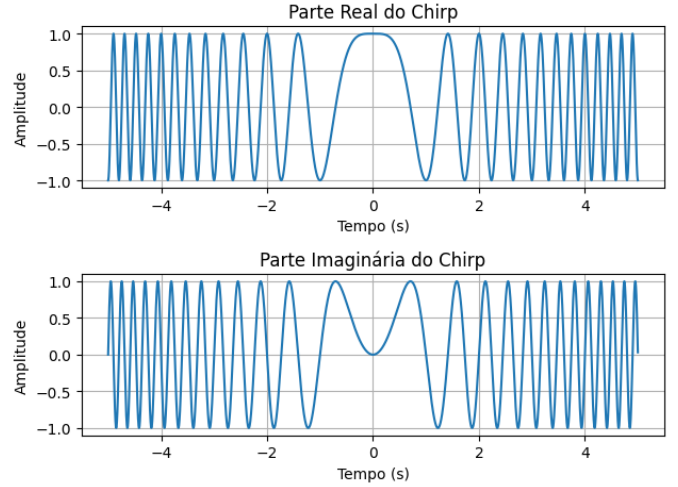


Figura 1: Parte real e imaginária do sinal Chirp com $T = 10$ segundos.

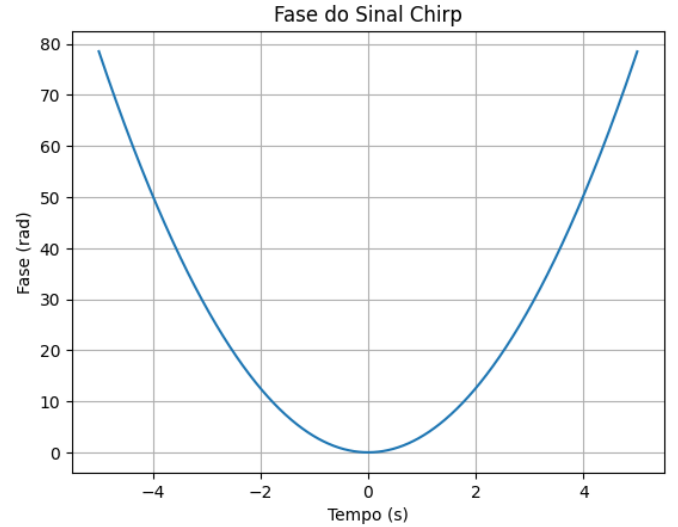


Figura 2: Fase em função do tempo do sinal Chirp

B. Amostragem do Sinal Chirp

Tendo em vista que esse sinal será trabalhado no domínio digital, será necessário discretizá-lo, o que é feito através do processo de amostragem. Esse processo consiste em capturar

amostras do sinal contínuo em instantes separados por um período T_s . Os tempos amostrados e o sinal discretizado são dados por:

$$\begin{aligned} t_n &= -\frac{T}{2} + nT_s \\ s[n] &= s(t_n) = \exp\left(\frac{j\pi W t_n^2}{T}\right) \\ &= \exp\left(\frac{j\pi W}{T} \left(T_s^2 n^2 - TT_s n + \frac{T^2}{4}\right)\right) \\ &= \exp\left(j\pi W \left(\frac{T_s^2 n^2}{T} - T_s n + \frac{T}{4}\right)\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Para simplificar essa equação, é definido os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{WT_s^2}{2T} = \frac{1}{2p^2WT} \\ N &= \frac{WT_s}{2\alpha} = pWR \\ p &= \text{fator de sobreamostragem} \quad (f_s = pW) \end{aligned}$$

Substituindo essas definições, obtemos a forma final do sinal Chirp no domínio discreto:

$$s[n] = \exp\left[j2\pi\alpha \left(n - \frac{1}{2}N\right)^2\right], \quad 0 \leq n < N \quad (4)$$

A parte real do sinal Chirp amostrado pode ser visualizada na Figura 3, nota-se uma grande semelhança da aparência desse sinal no domínio discreto, com sua versão de tempo contínuo.

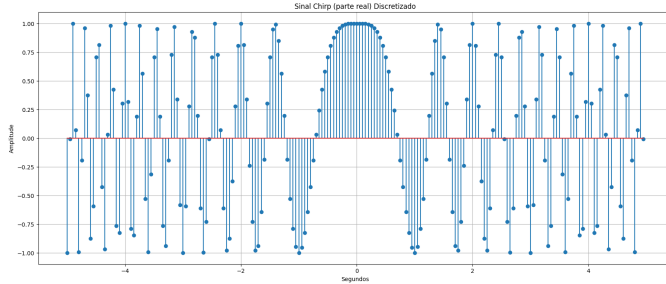


Figura 3: Sinal Chirp discretizado com fator de amostragem $p = 2$ e $T = 10$ segundos

C. Função de Autocorrelação

A função de autocorrelação é uma ferramenta matemática que auxilia a identificar o quanto um sinal se parece consigo mesmo. Essa função é calculada pela seguinte equação:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^* x(t + \tau) dt \quad (5)$$

O entendimento dessa função pode ser esclarecido na Figura 4, que contém um sinal real arbitrário, que apresenta

três diferentes deslocamentos h . Observa-se como dois sinais idênticos, $x(t)$ e $x(t+h)$, se sobrepõem ao longo do tempo. A curva verde representa a multiplicação ponto a ponto entre os dois sinais, evidenciando que, à medida que o deslocamento h tende a zero, a sobreposição é máxima e, consequentemente, o valor da autocorrelação também se aproxima do seu valor máximo.

Esse comportamento evidencia que a autocorrelação atinge seu pico quando os sinais estão perfeitamente alinhados, ou seja, totalmente sobrepostos. Tal característica será fundamental para a etapa de detecção por meio do filtro casado, discutida na seção seguinte.

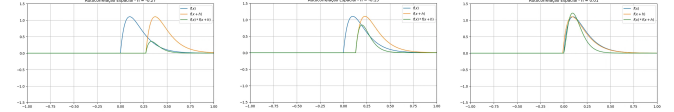


Figura 4: Exemplo ilustrativo do argumento da função de autocorrelação com diferentes deslocamentos h (Adaptado de [2]).

D. Filtro Casado

O filtro Casado, é um sinal muito semelhante ao sinal Chirp sendo representado pelo complexo conjugado revertido no tempo.

$$h(t) = s^*(-t) \quad (\text{Filtro Casado}) \quad (6)$$

A estratégia é: Realizar a convolução do filtro casado, com o sinal Chirp de retorno, aquele que será capturado pelo receptor após ser emitido e refletido por um objeto a uma certa distância, o delay T_d , corresponde ao tempo em que o sinal se propagou no ambiente, durante a ida (até atingir um objeto) e volta (após ser refletido por um objeto). Nota-se que a convolução do sinal Chirp com o filtro Casado resulta na função de autocorrelação.

$$y(t) = h(t) * s(t - T_d) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t - T_d - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(-\tau) s(t - T_d - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo a variável $u = -\tau \Rightarrow \tau = -u \Rightarrow d\tau = -du$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(u)^* s(t - T_d + u) (-du) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(u)^* s(t - T_d + u) du \end{aligned}$$

Para $T_d = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(u) s(t + u) du$$

Que é exatamente a função de autocorrelação

E. Saída $y(t)$ aproximação de um sinal Sinc

Após o cálculo da convolução do sinal Chirp recebido com seu filtro casado, obteremos um sinal próximo a um sinal Sinc, onde o ponto de ocorrência do pico máximo, será a chave para determinar a distância do alvo. O pico máximo irá ocorrer quando $t = T_d$. Pode ser visualizado abaixo a expansão da equação (10), considerando um chirp sem "delay" ou seja para $T_d = 0$, e enfim a obtenção do sinal próximo ao Sinc. Na figura 5 é possível visualizar a aparência do sinal de saída $y(t)$

A saída $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(t - T_d - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\pi W \tau^2 / T} \cdot e^{j\pi W (t - T_d - \tau)^2 / T} d\tau \\ &= e^{j\pi W (t - T_d)^2 / T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{2\pi W}{T} (t - T_d) \tau} d\tau \end{aligned}$$

Para $T_d = 0$ e integrando de $-\frac{T}{2}$ até $\frac{T}{2}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\pi W t^2 / T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\frac{2\pi W}{T} t \tau} d\tau \\ &= e^{j\pi W t^2 / T} \cdot T \cdot \left[\frac{\sin(\pi W t)}{\pi W t} \right] \\ &= e^{j\pi W t^2 / T} \cdot T \cdot \text{sinc}(Wt) \end{aligned}$$

Cujo módulo corresponde a:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| e^{j\pi W t^2 / T} \cdot T \cdot \text{sinc}(Wt) \right| \\ &= \left| e^{j\pi W t^2 / T} \right| \cdot |T \cdot \text{sinc}(Wt)| \\ &= 1 \cdot |T \cdot \text{sinc}(Wt)| \\ &= |T \cdot \text{sinc}(Wt)| \end{aligned}$$

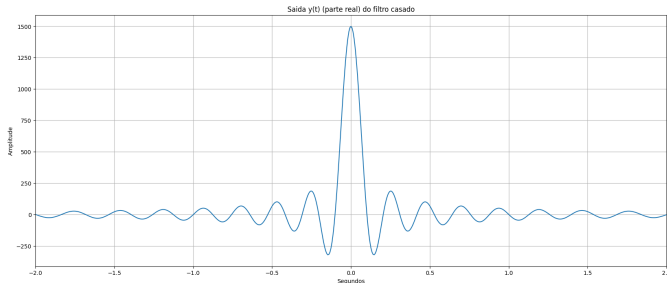


Figura 5: Representação da parte real do sinal $y(t)$

O sinal de saída $y[n]$ discretizado pode ser visualizado na Figura 6. O intervalo entre as amostras considerado é T_s , igual ao do sinal Chirp.

F. Identificação da distância de um objeto (sinal Chirp com atraso)

Enfim será simulado a saída $y[n]$ para o caso em há objetos a uma certa distância, nesse caso o sinal Chirp recebido pelo receptor chegará com um certo delay T_d . Abaixo é simulado o caso em que há um único alvo, e para tal foi gerado um sinal Chirp de retorno com um atraso de 60 amostras, sendo os Parâmetros:

$$W = 50 \text{ MHz}$$

$$T = 2 \mu\text{s}$$

$$p = 3$$

$$f_s = p \cdot W = 3 \cdot (50 \text{ MHz}) = 150 \text{ MHz}$$

Onde W é a largura de banda, T é a duração do pulso, p é o fator de sobreamostragem e f_s é a taxa de amostragem resultante. O atraso de 60 amostras corresponde a um tempo de atraso T_d , calculado pela divisão do número de amostras em atraso pela taxa de amostragem:

$$\tau_d = \frac{n_{\text{atraso}}}{f_s} = \frac{60}{150 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0.4 \mu\text{s}$$

Abaixo é mostrada uma figura do sinal Chirp com o atraso simulado, com o eixo das abscissas já convertido de amostras para segundos.

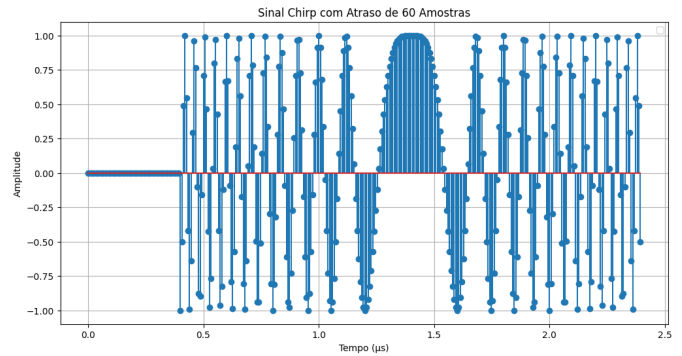


Figura 6: Sinal Chirp discreto com atraso de 60 amostras

Por fim é realizado a autocorrelação desse sinal Chirp atrasado com seu filtro casado, onde se observa em Figura 7 o deslocamento horizontal do pico da função y , para T_d .

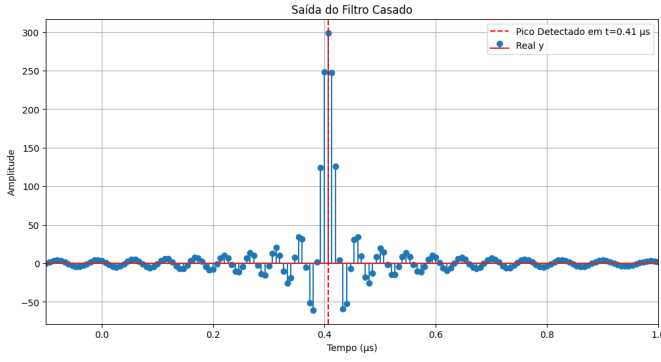


Figura 7: Saída filtro casado com sinal Chirp atrasado

Dessa forma, pode-se estimar a distância do alvo:

$$\text{Atraso medido: } \tau_d = 0.41 \mu s$$

$$\text{Velocidade da luz: } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$R = \frac{c \cdot \tau_d}{2}$$

$$R = \frac{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot (0.41 \cdot 10^{-6} \text{ s})}{2}$$

$$R = 61 \text{ m}$$

Portanto, o alvo foi detectado a uma distância de aproximadamente 61 metros.

G. Resolução

A resolução do radar está relacionada à separação mínima entre dois objetos para que esses sejam diferenciáveis. O procedimento realizado no receptor para identificar a distância do objeto é calcular a função de autocorrelação do sinal Chirp recebido e seu filtro casado. Foi visto que ocorreram picos na saída $y[n]$ relacionados à distância dos objetos. O fato é, se esses objetos estiverem muito próximos, ocorre a sobreposição dos picos, e diferentes objetos podem ser considerados como um único. Para que isso não ocorra, os picos de diferentes alvos devem estar afastados a um mínimo equivalente à largura do pico central. A largura do pico central pode ser aproximada realizando a diferença entre o primeiro zero à direita com o primeiro zero à esquerda.

Os zeros da função Sinc de saída ocorrem quando $\sin(\pi Wt) = 0$. A derivação para a posição dos zeros, t , é:

$$\sin(\pi Wt) = 0 \implies \pi Wt = k\pi \quad (\text{para } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$$

$$\implies t = \frac{k}{W}$$

A partir disso, podemos calcular a largura do lóbulo principal, Δt :

$$\text{Primeiro zero positivo (para } k = 1): t_1 = \frac{1}{W}$$

$$\text{Primeiro zero negativo (para } k = -1): t_{-1} = -\frac{1}{W}$$

$$\implies \text{Largura do lóbulo principal: } \Delta t = t_1 - t_{-1} = \frac{2}{W}$$

A equação acima evidencia que a largura de banda, W , do sinal Chirp é importante, pois com seu aumento, ocorre a compressão do pulso na saída $y(t)$, ou seja, faz com que o pico principal do sinal de saída se estreite, ocasionando em uma melhor resolução para a detecção de objetos.

Para o caso discreto $y[n]$, o número de amostras que compõem o lóbulo principal pode ser estimado realizando a diferença entre as amostras que compõem o primeiro zero da função. Pela amostragem, as amostras da função $y[n]$ serão $t_n = -T + nT_s$.

Para o primeiro zero positivo ($t_n = 1/W$):

$$\frac{1}{W} = -T + nT_s \quad (\text{Como } T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{pW})$$

$$\frac{1}{W} = -T + \frac{n}{pW}$$

$$p = -pWT + n$$

$$n = pWT + p = p(TW + 1)$$

Para o primeiro zero negativo ($t_n = -1/W$):

$$-\frac{1}{W} = -T + nT_s$$

$$-p = -pWT + n$$

$$n = pWT - p = p(TW - 1)$$

A largura em amostras, Δn , é obtida pela diferença entre os dois:

$$\Delta n = p(TW + 1) - p(TW - 1) = pTW + p - pTW + p = 2p$$

Portanto, o número de amostras no lóbulo central é:

$$N_{\text{lóbulo}} = 2p \quad (9)$$

H. relação Sinal-Ruído SNR

O sinal Chirp após recebido pelo radar, contará com um ruído devido a ação do meio, entre outras causas. Será mostrado que o filtro casado melhora a relação sinal-ruído (SNR). SNR quantifica a potência do sinal em relação à potência do ruído de fundo, e o seu cálculo é expresso na equação 10.

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}} \right) \quad (10)$$

O ganho de processamento, que identifica a melhora em SNR após a autocorrelação do sinal Chirp com o filtro casado pode ser calculado pela equação 11.

$$\text{Ganho} = \text{SNR}_{\text{saída}} - \text{SNR}_{\text{entrada}} \quad (11)$$

A SNR saída pode ser determinada pela amplitude do pico principal e a amplitude média do ruído após a passagem do sinal pelo filtro:

$$\text{SNR}_{\text{saída dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{A_{\text{pico}}^2}{A_{\text{ruído_média}}^2} \right) \quad (12)$$

Para um ruído na entrada na ordem de -10dB:

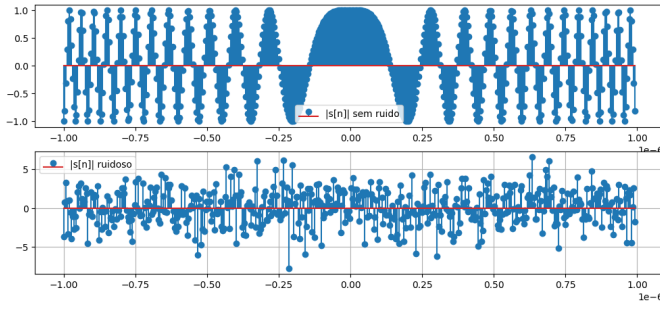


Figura 8: Sinal Chirp discreto com ruído de -10dB

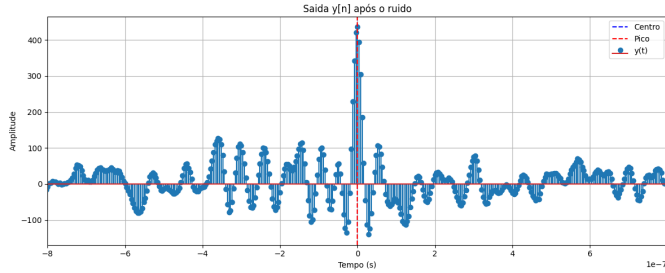


Figura 9: Saída do filtro Casado do sinal Chirp Ruidoso

Observa-se a amplificação do pico principal mesmo na presença do ruído, o que permite ainda detectar o objeto, para esse exemplo foi obtido o seguinte ganho de processamento abaixo, após o cálculo de SNR saída.

$$Ganho = SNR_{saída} - (-10dB) = 30.17dB \quad (13)$$

I. Simulação da distância

Nessa seção é mostrado um exemplo de simulação de detecção de 3 objetos, para isso será seguido os seguintes passos: Criação de 3 sinais Chirps com atraso de 30, 60 e 90 amostras; a soma desses sinais em um unico sinal; inserção de ruído gaussiano; processamento desse sinal realizando a autocorrelação com o filtro casado; identificação dos picos principais e cálculo da distancia pela equação (2). Os parâmetros de projeto estão definidos abaixo:

$$W = 50 \text{ MHz}$$

$$T = 2 \mu s$$

$$p = 3$$

$$f_s = p \cdot W = 3 \cdot (50 \text{ MHz}) = 150 \text{ MHz}$$

Novamente podemos relacionar o quanto seria o atraso temporal em relação ao atraso em amostras, seguindo a equação:

$$\tau_d = \frac{n_{atraso}}{f_s} \quad (14)$$

Tem-se então os 3 sinais Chirps simulados, com o referente atraso em amostras.

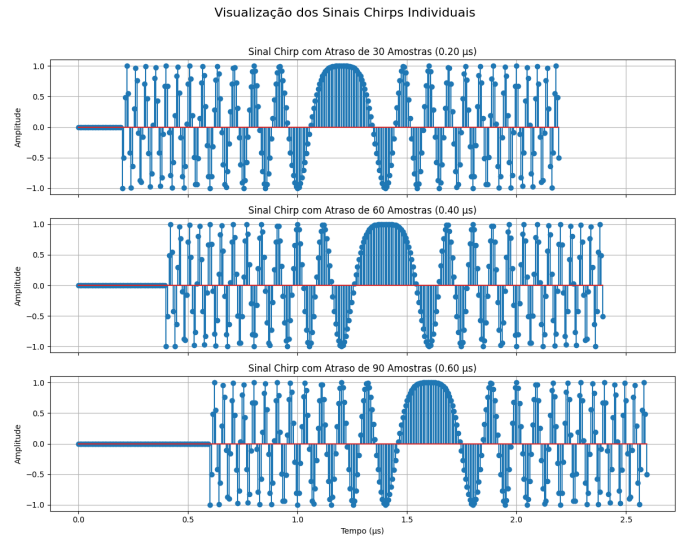


Figura 10: Sinais Chirps para 3 objetos

O próximo passo será, somar esses 3 sinais em um único sinal, evidenciado abaixo.

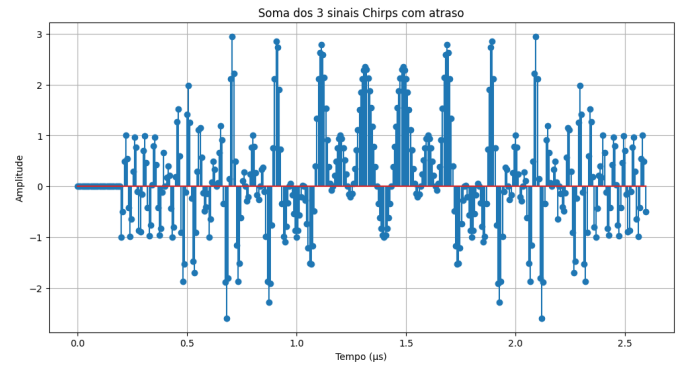


Figura 11: Sinal com 3 sinais Chirps atrasado

Para tornar a simulação mais próxima da realidade é adicionado um ruído de -10dB.

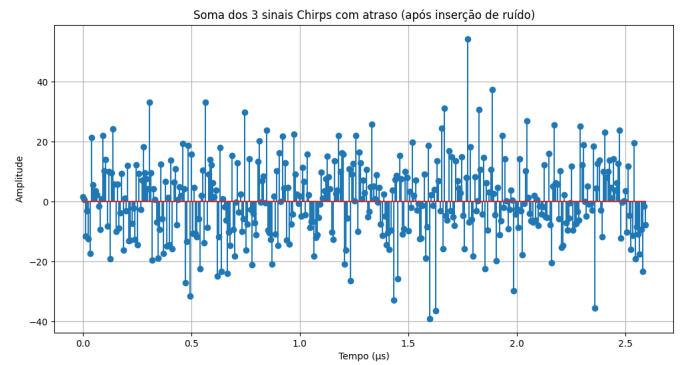


Figura 12: Sinal recebido com ruído

Esse sinal então é passado pelo filtro casado, e então é feito a autocorrelação.

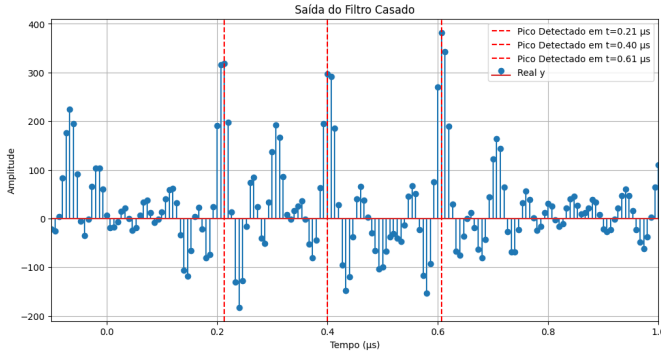


Figura 13: Sinal recebido com ruído

Por fim seguindo a equação (2), é determinada a distância desses objetos, o resultado é expresso na tabela.

Cálculo de Distância a Partir do Atraso Medido

Alvo Detectado	Atraso Medido (Td)	Distância Calculada (d)
Alvo 1	0.21 µs	31.50 m
Alvo 2	0.40 µs	60.00 m
Alvo 3	0.61 µs	91.50 m

Figura 14: Resultados da simulação de distância

III. ESTIMAR A VELOCIDADE DE UM OBJETO

O processo para estimar a velocidade de um objeto, será emitir um sinal em rajadas pelo emissor do radar, após esse sinal ser refletido por um objeto, ocorre um desvio de fase, chamado desvio de frequência Doppler, esse desvio causa uma rotação de fase contínua no sinal enviado, ou seja o sinal é multiplicado por uma exponencial complexa, um fasor girante. Essa rotação de fase no sinal causa um deslocamento horizontal no seu espectro, devido a propriedade do deslocamento temporal. Esse deslocamento é mensurável, e pode ser relacionado com a velocidade do objeto seguindo a equação 16

$$f_d = \frac{2vf_c}{c} \quad (15)$$

Onde f_c é a frequência da portadora do radar e c é a velocidade da luz. A velocidade do alvo pode ser isolada como:

$$v = \frac{f_d \cdot c}{2f_c} \quad (16)$$

No processamento de sinais digitais, trabalhamos com a frequência angular normalizada, ω . A conversão entre a frequência f (em Hz) e ω (em rad/amostra) é:

$$\omega = \frac{2\pi f}{f_s} \Leftrightarrow f = \frac{\omega \cdot f_s}{2\pi} \quad (17)$$

Onde f_s é a taxa de amostragem. Combinando as equações, a relação entre a velocidade e a frequência Doppler normalizada, ω_d , é:

$$\omega_d = \frac{4\pi v f_c}{c f_s} \quad (18)$$

A. O Sinal de Burst e seu Espectro

O sinal burst será o sinal emitido pelo radar para detectar a velocidade de objetos, esse será composto por um sinal, inicialmente uma onda quadrada (box-car), repetido a cada certo período. Pela equação 19, o Sinal Burst é definido pela repetição do pulso básico $p[n]$.

$$s[n] = \sum_{l=0}^{L-1} p[n - lM] \quad (19)$$

Onde L é o número de pulsos e M é o período interpulso em amostras.

A aparência do Sinal Burst é apresentada na Figura 15:

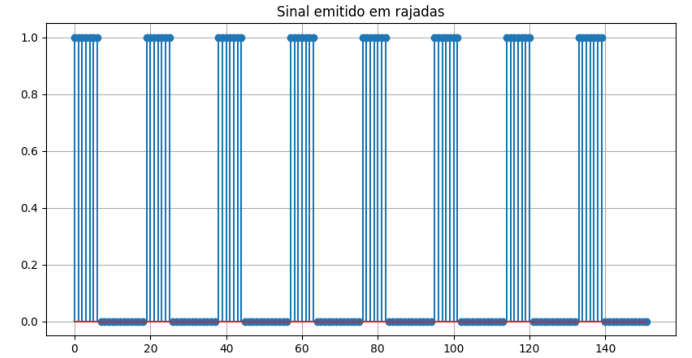


Figura 15: Sinal Burst com $L = 8$, $M = 19$

O espectro $S(\omega)$ é o produto do espectro do pulso único, $P(\omega)$, com o espectro do trem de impulsos, $G(\omega)$:

$$S(\omega) = P(\omega) \cdot G(\omega) \quad (20)$$

Para uma função de onda quadrada de comprimento N , o espectro $P(\omega)$ é escrito por:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \quad (21)$$

$$= e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (22)$$

Onde a Equação 21 representa a definição da DTFT para o pulso único, e a Equação 22 é sua forma fechada equivalente.

O espectro $G(\omega)$ é determinado aplicando a propriedade do deslocamento temporal em $s[n]$. A derivação completa para $S(\omega)$ mostra que ele é o produto de $P(\omega)$ por uma somatória:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} p[n - lM] \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \mathcal{F} \{ p[n - lM] \} \quad (\text{Pela Linearidade}) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} P(\omega) \cdot e^{-j\omega lM} \quad (\text{Pelo Deslocamento no Tempo}) \\ &= P(\omega) \cdot \left(\sum_{l=0}^{L-1} e^{-j\omega lM} \right) \quad (\text{Fatorando } P(\omega)) \end{aligned}$$

Em que o termo da somatória é a definição de $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \sum_{l=0}^{L-1} e^{-j\omega l M} \quad (23)$$

$$= e^{-j\omega M(L-1)/2} \frac{\sin(\omega M L/2)}{\sin(\omega M/2)} \quad (24)$$

A forma da magnitude do espectro do Sinal Burst é apresentado em Figura 16:

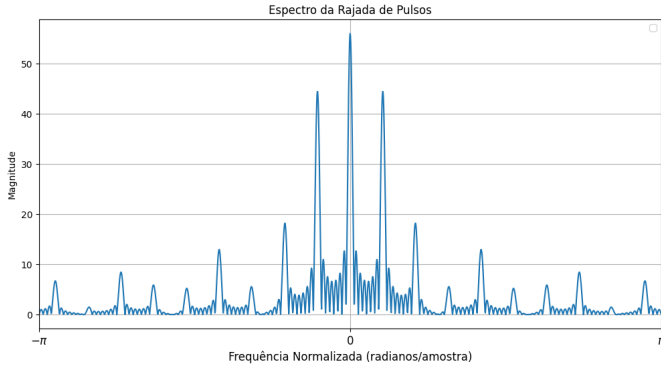


Figura 16: Espectro da Rajada de Pulsos, com frequência normalizada

B. Sinal Burst recebido para alvo em movimento

O sinal burst ao atingir um alvo com velocidade faz com que ocorra o efeito Doppler, dessa forma, o sinal burst é multiplicado por uma exponencial complexa, que representa a rotação de fase, ω_d , continua. O sinal recebido pode ser modelado matematicamente como o sinal Burst emitido multiplicado por essa exponencial complexa, denotado como $s_d[n]$.

$$s_d[n] = s[n] \cdot e^{j\omega_d n} \quad (25)$$

Pela propriedade do deslocamento temporal, o espectro do sinal $s_d[n]$, será o espectro do sinal $s[n]$, deslocado, em ω_d .

$$s[n] \cdot e^{j\omega_d n} \Leftrightarrow S(\omega - \omega_d) \quad (26)$$

Na figura 17, é mostrado a aparência do espectro de $s_d[n]$ para $\omega_d = \frac{2\pi}{60}$:

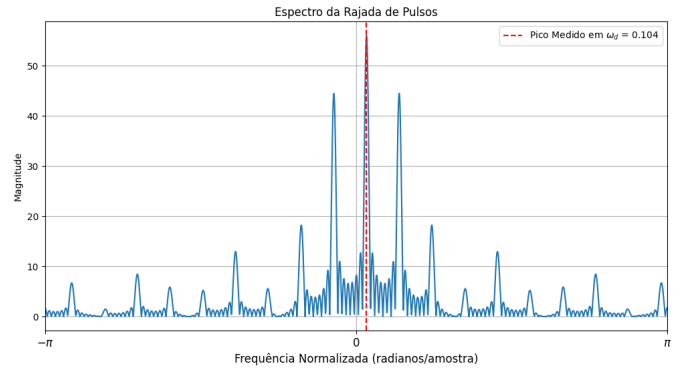


Figura 17: Espectro da Rajada de Pulsos, com deslocamento w_d

C. Velocidade mínima e máxima

A limitação da detecção do radar esta associada ao mínimo e máximo de velocidade no qual o radar pode detectar uma velocidade, o caso mínimo esta associado a velocidade mínima que o alvo deve possuir para que o deslocamento no espectro em w_d seja diferenciável de um alvo parado. Para isso a velocidade do alvo deve ser tal que provoque um deslocamento no espectro minimamente maior que a largura de um pico fino. O espectro $S(\omega) = P(\omega) \cdot G(\omega)$ é formado por picos finos (de $G(\omega)$) modulados por um envelope largo (de $P(\omega)$). Os picos finos são ditados pelo espectro $G(\omega)$, onde a magnitude de $|G(\omega)|$ é:

$$|G(\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega M L/2)}{\sin(\omega M/2)} \right|$$

A largura do pico fino pode ser determinada pela diferença entre os dois primeiros zeros de $G(\omega)$ que ocorrem quando o numerador é zero, pois $G(\omega)$ é zero, dessa forma:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega M L}{2}\right) = 0 &\implies \frac{\omega M L}{2} = k\pi, \quad (\text{para } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0) \\ &\implies \omega_{\text{zeros}} = \frac{2k\pi}{M L} \end{aligned}$$

Em que:

$$\omega_1 = +\frac{2\pi}{M L} \quad (\text{Primeiro zero positivo, para } k=1)$$

$$\omega_{-1} = -\frac{2\pi}{M L} \quad (\text{Primeiro zero negativo, para } k=-1)$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{fino}} &= \omega_1 - \omega_{-1} \\ &= \frac{2\pi}{M L} - \left(-\frac{2\pi}{M L}\right) \\ &= \frac{4\pi}{M L} \quad (\text{Largura do lóbulo principal do pico fino}) \end{aligned}$$

O que nos leva à equação final para a resolução de velocidade mínima:

$$\omega_{d,\min} = \frac{4\pi}{ML} \quad (27)$$

Para o caso da velocidade máxima detectável, sem ambiguidade, é considerado a distância entre os picos finos, uma vez que em um sistema real não se pode confiar na magnitude do pico, e caso um pico fino seja deslocado para a posição de outro pico fino, devido ao deslocamento doppler, pode-se ocorrer o confundimento entre as velocidades. Dessa forma foi considerado que a velocidade máxima detectável equivale a distância entre dois picos finos.

Analisando,

$$|G(\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega ML/2)}{\sin(\omega M/2)} \right|$$

É descoberto que a posição dos picos finos é dada quando ocorre a indeterminação $\frac{0}{0}$, que ocorre quando o denominador de $|G(\omega)|$ é zero, o numerador também será zero pois L é inteiro, então o numerador apenas multiplica o argumento do seno por um fator de L. Dessa forma

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega M}{2}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\omega M}{2} &= k\pi, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \omega_{\text{picos}} &= \frac{2k\pi}{M} \end{aligned}$$

A equação acima mostra que os picos espectrais se repetem a cada $\Delta\omega = 2\pi/M$. Para evitar ambiguidade, a frequência Doppler máxima detectável, $\omega_{d,\max}$, não pode exceder metade desse período de repetição, a metade foi considerada como um limiar de transição, pois após exceder esse limite a velocidade do alvo seria considerada a do pico sucessor.

$$\begin{aligned} \omega_{d,\max} &= \frac{1}{2} \cdot (\text{Espaçamento entre picos}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{M}\right) \\ &= \frac{\pi}{M} \end{aligned}$$

O que nos leva ao resultado final para o limite de ambiguidade de velocidade:

$$\omega_{d,\max} = \frac{\pi}{M} \quad (28)$$

D. Processamento Otimizado e sub-amostragem

É possível, tornar o processamento mais simples desse sinal, através do processo de sub-amostragem, o interesse real no processamento do radar só ocorre nos pontos em que a amostra é não nula e na rotação de fase aplicada a essa amostra, o procedimento a ser realizado seria como capturar uma amostra e seus ecos a cada um período M, o processo é equivalente a capturar uma amostra da figura 15 a cada período M. Ao

final é construído um novo sinal $y[n]$, por meio dessa sub-amostragem. Será mostrado também que a velocidade máxima do radar estará associado a essa sub-amostragem. O processo de construção do sinal $y[n]$ e seu espectro é mostrado em Figura 18.

O sinal otimizado $y[l]$ é criado amostrando o sinal com Doppler $s_d[n]$ a cada ‘M’ amostras:

$$y[l] = s_d[lM] = s[lM] \cdot e^{j(M\omega_d)l} \quad (29)$$

Assumindo $s[lM]$ constante, pois é a mesma amostra e seus ecos, $y[l]$ é uma exponencial complexa pura:

$$y[l] = A \cdot e^{j(M\omega_d)l} \quad (30)$$

Aplicando a DTFT a esse sinal:

$$Y(\Omega) = A \sum_{l=0}^{L-1} e^{j(M\omega_d - \Omega)l} \quad (31)$$

A forma fechada de $Y(\Omega)$:

$$Y(\Omega) = A \cdot e^{j(L-1)(M\omega_d - \Omega)/2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{L(M\omega_d - \Omega)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{M\omega_d - \Omega}{2}\right)} \quad (32)$$

Nota-se que a posição do pico centro no espectro dado por Ω_{pico} , pode ser relacionado com o deslocamento doppler ω_d , que ocorre quando o argumento dos senos é 0, sendo determinado quando, $M\omega_d - \Omega = 0$:

$$\Omega_{\text{pico}} = M \cdot \omega_d \Leftrightarrow \omega_d = \frac{\Omega_{\text{pico}}}{M}$$

O espectro em magnitude de $Y(\Omega)$, com um deslocamento é mostrado abaixo, para um valor $\omega_d = \frac{2\pi}{60}$:

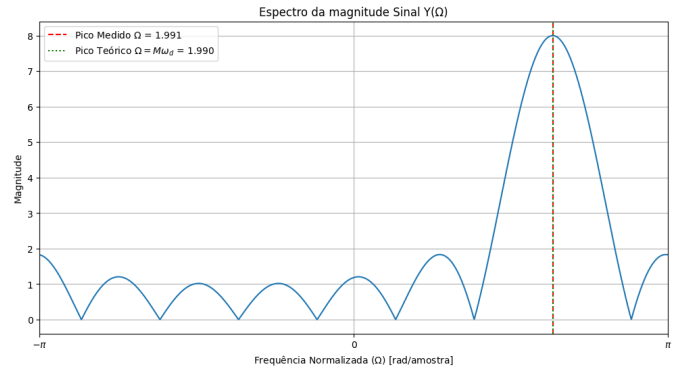


Figura 18: Espectro do sinal $Y(\Omega)$, com parâmetros do sinal Burst original iguais a: $M = 19$, $L = 8$, $N = 7$

O Ω_{pico} capturado pelo gráfico, está de acordo ao calculado pela equação $\Omega_{\text{pico}} = M \cdot \omega_d$.

É possível relacionar a velocidade máxima de detecção do radar com essa otimização de sub-amostragem, considerando que essa sub-amostragem, seria equivalente a reduzir a taxa de amostragem original f_s , que é originalmente a taxa com que

o sinal burst original foi discretizado, por M, dessa forma, é realizado a divisao $f_s = \frac{f_s}{M}$. Disso tem-se que:

A frequência máxima de um sinal amostrado a f_s , correspondente à frequência de Nyquist, é:

$$f_{\max} = \frac{f_s}{2}$$

Para o caso subamostrado, a nova frequência máxima de Nyquist, f'_{\max} , é calculada com a nova taxa de amostragem, f'_s :

$$f'_{\max} = \frac{f'_s}{2}$$

Substituindo $f'_s = \frac{f_s}{M}$, temos:

$$f'_{\max} = \frac{(f_s/M)}{2} = \frac{f_s}{2M}$$

Convertendo enfim para frequência normalizada

$$\begin{aligned} \omega_{d,\max} &= \frac{2\pi \cdot f'_{\max}}{f_s} \\ &= \frac{2\pi \cdot \left(\frac{f_s}{2M}\right)}{f_s} \\ &= \frac{\pi}{M} \end{aligned}$$

Que corresponde exatamente ao valor em desvio em frequência para a velocidade máxima!

IV. SIMULAÇÃO DE RADAR

Para detectar a distância de objetos, foi proposto como sinal emitido o sinal Chirp, e para a detecção da velocidade, o sinal em rajada (Burst). O sinal final emitido pelo radar é, portanto, uma combinação dos dois: um sinal em rajada em que o pulso a ser repetido é o próprio sinal Chirp. A equação que representa o sinal transmitido, $s(t)$, é:

$$s(t) = \text{Re} \{ s(t) \cdot e^{j2\pi f_c t} \} \quad (33)$$

Em que $s(t)$ é o envelope complexo (a rajada de chirps) e f_c representa a frequência da portadora.

Após refletir em um alvo, o envelope complexo do sinal recebido, $r(t)$, pode ser matematicamente descrito como a combinação dos dois fenômenos: atraso temporal e deslocamento de frequência (rotação de fase).

$$r(t) = G_{\text{alvo}} \cdot e^{j2\pi f_d t} \cdot s\left(t - \frac{2R}{c}\right) \quad (34)$$

Onde cada termo na Equação 34 representa:

- G_{alvo} : O ganho (ou atenuação) complexo do alvo, que modela sua refletividade e a perda de potência no percurso.
- $e^{j2\pi f_d t}$: O fator de rotação de fase contínua devido ao desvio de frequência Doppler, f_d , causado pela velocidade do alvo.
- $s\left(t - \frac{2R}{c}\right)$: O envelope da rajada original, $s(t)$, atrasado no tempo por $\tau_d = 2R/c$, que é o tempo de viagem de ida e volta até o alvo a uma distância R .

O procedimento para gerar a simulação de radar e processar os dados seguiu os seguintes passos:

- 1) Geração do sinal emitido (rajada de chirps).
- 2) Simulação de 3 alvos arbitrários com velocidades e distâncias definidas.
- 3) Geração do sinal de retorno, somando os ecos de todos os alvos.
- 4) Introdução de ruído gaussiano para simular um cenário realista.
- 5) Processamento do sinal ruidoso com o filtro casado para compressão de pulso.
- 6) Organização dos dados de saída em uma matriz Distância-Pulso, onde as linhas representam cada pulso e as colunas representam as células de distância.
- 7) Detecção da **distância**, encontrando os picos de energia no perfil de distância da matriz.
- 8) Detecção da **velocidade**, aplicando a DTFT (via FFT) na coluna correspondente a cada alvo detectado e medindo o deslocamento na frequência.

Os parâmetros utilizados nessa simulação de radar estão associados, a parâmetros vistos na prática em radares presentes em aeroportos para detecção de aeronaves, tais parâmetros são expostos no livro base “Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB 5” - James H. McClellan et al., versão de 1998”Capítulo 10.

Tabela I: Parâmetros do Sistema de Radar Simulado.

Parâmetro	Valor	Unidade
Frequência da Portadora (f_c)	7	GHz
Duração do Pulso (T)	7	μs
Largura de Banda Varrida (W)	7	MHz
Produto Tempo-Banda (TW)	49	Adimensional
Taxa de Amostragem (f_s)	8	MHz
Período Interpulso (Δ)	60	μs
Número de Pulsos na Rajada (L)	11	Adimensional
Início da Janela de Recepção	25	μs
Fim da Janela de Recepção	50	μs
Alcance Mínimo (R_{\min})	3750	m
Alcance Máximo (R_{\max})	7500	m

A. Geração do sinal emitido

O sinal emitido pelo transmissor do radar, será simplesmente uma rajada de pulsos (Sinal Burst), em que o pulso a ser repetido é o sinal Chirp.

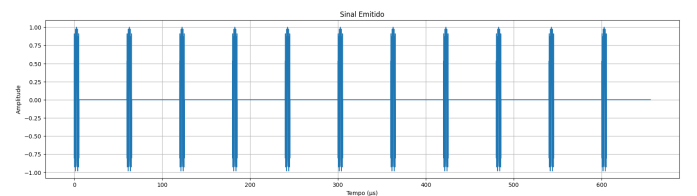


Figura 19: Sinal Emitido

B. Simulação de 3 alvos arbitrários com velocidade e distâncias definidos

Para essa simulação foram criados 3 supostos alvos determinados com parâmetros arbitrários, sendo esses: Distância (m), Velocidade (m/s) e Ganho relativo.

Tabela II: Cenário de Simulação: Parâmetros dos Alvos

Alvo	Distância (m)	Velocidade (m/s)	Ganho Relativo
Alvo 1	4000 m	50 m/s	5.0
Alvo 2	5500 m	-80 m/s	8.0
Alvo 3	6800 m	120 m/s	10.0

C. Geração do sinal de retorno

O sinal de retorno será composto por L , número de pulsos, e cada pulso contará com 3 sinais Chirps somados com o respectivo atraso T_d . Esse sinal também estará multiplicado pela exponencial complexa $e^{j\omega_d n}$ causada pela rotação de fase em cada amostra.

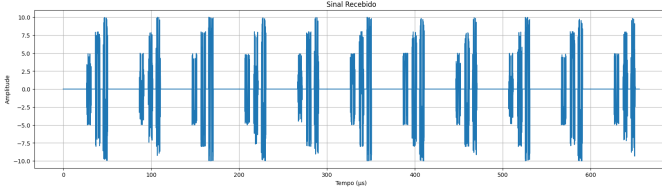


Figura 20: Sinal recebido

D. Introdução de ruído artificial

Para se aproximar da realidade, faz sentido introduzir um ruído artificial gaussiano no sinal de retorno. Esse é um passo importante, uma vez que na prática o procedimento de processamento realizado no radar começaria a partir dessa etapa.

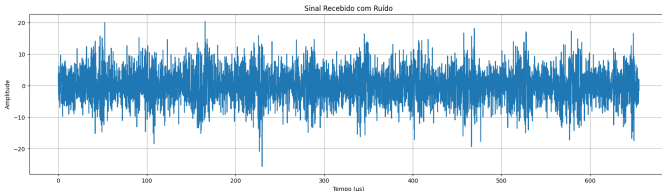


Figura 21: Sinal recebido com ruído gaussiano de -3dB

E. Processamento desse sinal pelo filtro Casado

O sinal recebido ruidoso, é enfim processado pelo filtro casado, através do cálculo da autocorrelação.

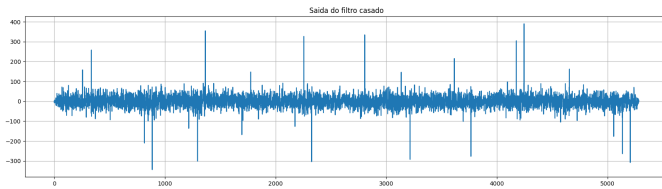


Figura 22: Sinal de saída do filtro Casado

F. Organização dos dados em uma matriz

Após a etapa de compressão de pulso, os dados de saída são organizados em uma matriz bidimensional para separar a análise de distância da análise de velocidade. Esta matriz é chamada de matriz Distância-Pulso, e será usada para o processamento da distância e velocidade.

	Amostra 1	Amostra 2	...	Amostra M
Pulso 1	$y[0]$	$y[1]$	\dots	$y[M-1]$
Pulso 2	$y[M]$	$y[M+1]$	\dots	$y[2M-1]$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
Pulso L	$y[(L-1)M]$	$y[(L-1)M+1]$	\dots	$y[LM-1]$

A matriz é organizada da seguinte forma:

- **As Linhas:** Cada uma das L linhas corresponde a um pulso transmitido. O processamento **ao longo das colunas** (verticalmente) permite analisar a mudança de fase pulso a pulso, extraindo a **velocidade** do alvo.
- **As Colunas:** Cada uma das M colunas representa uma "célula de distância" ou amostra de tempo rápido. O processamento **ao longo das linhas** (horizontalmente) permite analisar a energia em cada célula, extraindo a **distância** do alvo.

G. Detecção da distância

Para a detecção da distância o processamento a ser executado será o de somar todas as linhas da matriz em uma única linha, isso faz com que ocorra a soma da energia de todos os pulsos, em um único sinal, o resultado, é a presença de picos principais de alta magnitude, o que facilita a detecção da posição temporal de cada objeto. Para os 3 objetos simulados, é visto na figura 24 a presença de 3 picos principais e suas relativas posições em amostras.

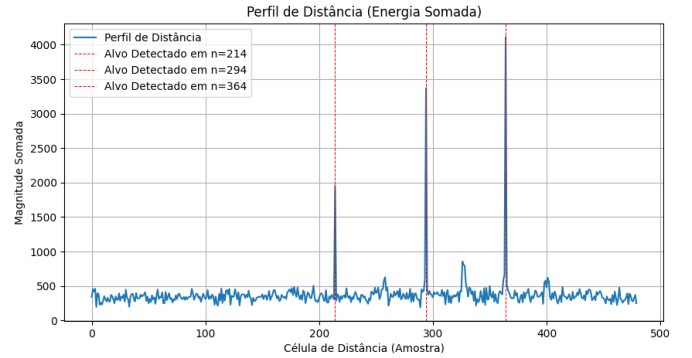


Figura 23: Sinal de distancia processado

O passo seguinte será converter essas posições em amostras para segundos, isso é feito pela equação:

$$R = \frac{n_{\text{alvo}} \cdot c}{2 \cdot f_s} \quad (35)$$

Onde c é a velocidade da luz e f_s é a taxa de amostragem do sistema.

Aplicando esta fórmula aos índices de pico medidos ($n_1 = 214, n_2 = 294, n_3 = 364$), obtemos os resultados apresentados na Tabela III.

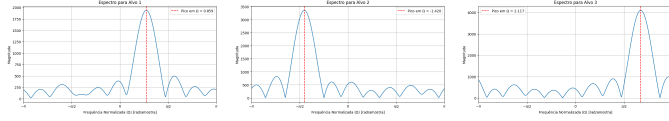
Tabela III: Resultados da Detecção de Distância.

Alvo	Índice Medido (n_{alvo})	Distância Calculada (m)
Alvo 1	214	4012.50
Alvo 2	294	5512.50
Alvo 3	364	6825.00

H. Detecção da velocidade

Para a detecção da velocidade, o método a ser utilizado no processamento é: dado o ponto em amostras que o pico ocorreu, identificado no processo de estimar a distância, cria-se um vetor utilizando a coluna da matriz equivalente a essa posição em amostra, aplica-se a DTFT nesse vetor novo. E então será possível identificar o Ω_{pico} de cada objeto, por fim, basta utilizar a equação que relaciona Ω_{pico} com ω_d , e teremos o desvio Doppler. Note que o passo de capturar a coluna da matriz referente a posição da amostra é equivalente a otimização de sub-amostragem visto na seção III.

Na figura 24 é mostrado o espectro em magnitude, de cada um dos objetos simulados:



(a) Sinal do alvo (1) (b) Sinal do alvo (2) (c) Sinal do alvo (3)

Figura 24: Sinais correspondentes à detecção de velocidade dos alvos

Após a conversão de Ω_{pico} para ω_d através de:

$$\omega_d = \frac{\Omega_{pico}}{M}$$

A velocidade é dada diretamente por:

$$v = \frac{\omega_d \cdot c \cdot f_s}{4\pi f_c}$$

A tabela IV expressa os resultados da análise de velocidade para cada um dos três alvos detectados. Para cada alvo, é mostrado o pico medido no espectro otimizado (Ω) e a velocidade final em metros por segundo.

Tabela IV: Resultados da Estimação de Velocidade.

Alvo	Ω (rad/amostra)	Velocidade (m/s)
Alvo 1	0.893	50.76
Alvo 2	-1.405	-79.86
Alvo 3	2.129	121.01

V. CONCLUSÃO

Ao se comparar os valores simulados e detectados, é visto que os resultados são bem próximos, o que afirma o sucesso da simulação. Na prática, a única informação em que se teria acesso, seria o sinal $r(t)$ de retorno em rajadas capturado pelo emissor com ruído, aplicaria-se a mesma estratégia realizada na simulação, partindo do passo em que se realiza a autocorrelação do sinal com o filtro casado. Os dados comparativos são apresentados na tabela V.

Tabela V: Comparativo: Simulados vs. Detectados.

Alvo	Velocidade (m/s)		Distância (m)	
	Simulada	Detectada	Simulada	Detectada
Alvo 1	50.00	50.76	4000.00	4012.50
Alvo 2	-80.00	-79.86	5500.00	5512.50
Alvo 3	120.00	121.01	6800.00	6825.00

REFERÊNCIAS

- [1] MCCLELLAN, J. H. *Computer-based Exercises for Signal Processing Using MATLAB 5*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- [2] ZABOT, A. *Astrofísica para Todos*. UFSC. Disponível em: <https://astrofisica.ufsc.br>. Acesso em: 26 jun. 2025.