

I. MÉTRICAS ESTATÍSTICAS

Métricas estatísticas são ferramentas matemáticas utilizadas para compreender padrões, tendências e variações dentro de um conjunto de dados, permitindo descrever e interpretar informações. Podemos classifica-las em alguns grupos, como medidas de tendência central, medidas de dispersão e medidas de posição.

Algumas das mais utilizadas em análise de dados são explicadas abaixo:

Site de referência

- Medidas de Tendência Central: São utilizadas com o objetivo de encontrar um valor representativo dentro de um conjunto de dados. As mais empregadas são a média, a mediana e a moda.

A média é calculada somando todos os valores e dividindo pelo número total de observações, enquanto a mediana é o valor que divide o conjunto em duas partes iguais e é menos sensível a valores extremos. A moda, por sua vez, é o valor que aparece com mais frequência. Um conjunto de dados pode ter uma moda (unimodal), duas modas (bimodal) ou mais (multimodal).

- Medidas de Dispersão:

Descrevem a "dispersão" ou o quão espalhados os dados estão em relação à média. As mais comuns são o desvio padrão e a variância.

A variância corresponde à média dos quadrados das distâncias de cada ponto em relação à média, expressando a intensidade da variabilidade do conjunto, ou seja, quantifica o quanto os valores de um conjunto de dados se dispersam em relação à sua média. As diferenças são elevadas ao quadrado para evitar cancelamentos entre valores acima e abaixo da média e também para dar mais peso a discrepâncias maiores.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Já o desvio padrão é dado pela raiz quadrada da variância e indica o grau de dispersão dos dados em torno da média. Sua interpretação é facilitada por estar na mesma unidade de medida dos dados. Um desvio padrão pequeno significa que os valores estão próximos da média, enquanto um desvio padrão grande indica maior espalhamento.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

- Medidas de Posição:

Aplicadas quando se quer descrever a localização relativa de um valor dentro de um conjunto de dados. Exemplos são os Percentis e Quartis.

Percentis dividem o conjunto de dados em 100 partes iguais. O percentil p corresponde ao valor abaixo do qual se encontra $p\%$ dos dados. Por exemplo, o 20° percentil é o ponto abaixo do qual estão 20% das observações.

Os Quartis são definidos a partir dos Percentis. O primeiro quartil equivale ao 25° percentil, o segundo quartil, ao 50° percentil e o terceiro quartil, ao 75° percentil. A diferença entre o terceiro e o primeiro quartil, chamada de intervalo interquartil (IQR = $Q_3 - Q_1$), é frequentemente usada como medida de dispersão, pois reduz a influência de valores extremos.

II. SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER

A. Série de Fourier

Podemos representar uma grande gama de funções periódicas por meio de uma série infinita de senos e cossenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Tal que os coeficientes a_n e b_n são dados pelas relações:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(nx) dx.$$

Pela equação de Euler, é possível escrever essa série na forma complexa:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Com coeficiente

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Com esse mecanismo matemático, conseguimos escrever, por exemplo, a função $f(x) = x$, com $-L \leq x \leq L$, em uma série de senos:

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)$$

B. Transformada de Fourier

Uma transformada, em matemática, é um procedimento que permite representar uma função definida em um dado domínio em outro domínio. Figurativamente, podemos falar em "passar" a função por uma caixa, fazendo-a mudar de "universo" e, portando, de propriedades.

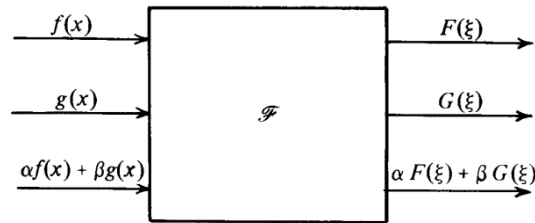


Figura 1: "Caixa" representando uma transformada.

Esse método é muito usado para facilitar a resolução de equações diferenciais, onde construímos uma caixa capaz de "destruir" derivadas.

No caso da transformada de Fourier, ela converte uma função periódica do domínio do tempo, cuja amplitude é facilmente reconhecida, em uma representação no domínio da frequência, onde a frequência pode ser medida de forma direta. Na nossa analogia da caixa,

podemos observar que a transformada de Fourier se comporta como um prisma óptico, apto a separar uma onda nas frequências que a compõem:

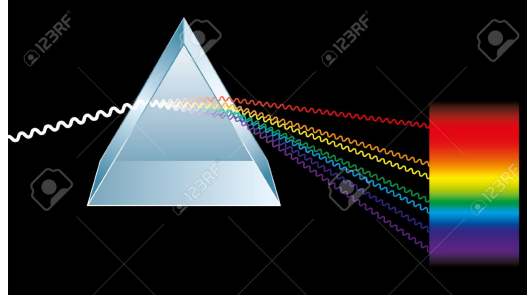


Figura 2: Transformada de Fourier como um prisma.

Matematicamente, escrevemos essa transformação como:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx$$

Após realizarmos toda a análise necessária no domínio das frequências, podemos retornar ao domínio do tempo pela transformada de Fourier inversa:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i2\pi\xi x} d\xi$$

Além disso, quando trabalhamos com processamento digital, utilizamos dados quantizados. Esse é o caso de sinais, representadas por funções discretas, definidas apenas em pontos específicos. Nessas circunstâncias, utilizamos a Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$X[\xi] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}\xi n}, \quad \xi = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^{N-1} X[\xi] e^{j\frac{2\pi}{N}\xi n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

C. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Tendo em mãos um sinal, devemos calcular sua transformada de Fourier discreta para obtermos sua representação no domínio da frequência. Porém, realizar esse cálculo diretamente pode se mostrar algo muito custoso computacionalmente. Para contornar esse problema, foram desenvolvidos algoritmos para aproximar esse resultado utilizando um número reduzido de operações aritméticas.

Um dos mais populares, e utilizado no MATLAB com a função `fft()`, é algoritmo de Cooley–Tukey. Esse método baseia-se na divisão e conquista, onde a sequência original de N termos é separada em duas sequências menores, uma com os índices pares e outra com os ímpares. Aplica-se o DFT aos elementos de cada uma que, então, são renomeados de 0 a $N/2$ e o processo se repete até que cada conjunto possua apenas dois componentes. O esquema abaixo exemplifica o método:

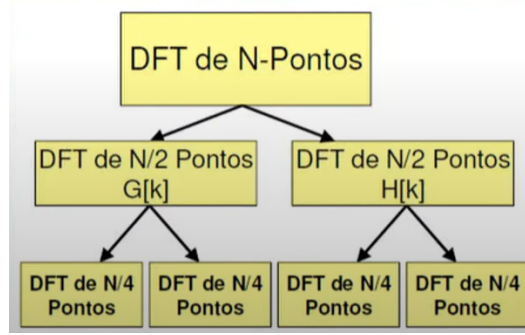


Figura 3: FFT pelo algoritmo de Cooley–Tukey

Existem também modificações em que a razão de divisão das séries é um inteiro diferente de 2.

D. Gerchberg–Saxton

Em geral, conhecemos apenas a amplitude no plano da imagem, fazendo-se necessária a recuperação de fase, e para isso é frequentemente empregado algoritmos iterativos como o de Gerchberg–Saxton (GS). O GS alterna entre os planos do holograma e da imagem por meio de transformadas de Fourier direta e inversa, aplicando restrições de amplitude e fase, funcionando em quatro etapas, conforme ilustrado no fluxograma abaixo:

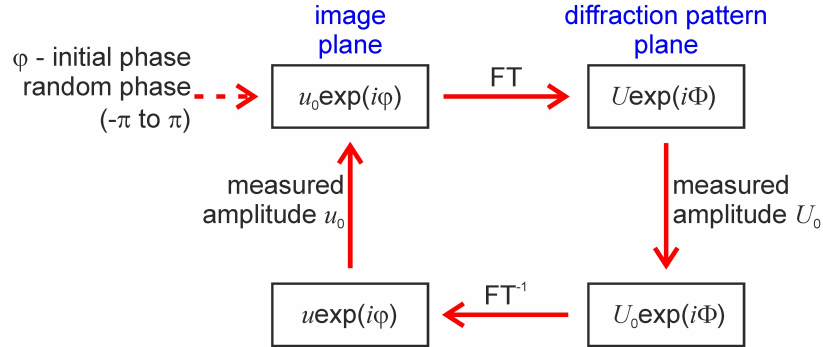


Figura 4: Algoritmo de Gerchberg-Saxton

Começa-se com uma amplitude conhecida u_0 no plano da imagem e atribui-se a ela uma fase aleatória $\phi \in [-\pi, \pi]$, formando $u_0 e^{i\phi}$. Aplica-se a transformada de Fourier, ou a transformada rápida de Fourier, para obter o campo óptico no plano de difração, resultando em $U e^{i\Phi}$. Mantendo essa nova fase, troca-se a amplitude simulada U pela amplitude real medida U_0 . Realiza-se a transformação de Fourier inversa e, por fim, substitui-se a amplitude u por u_0 . As letras u e U estão sendo usadas para indicar o plano da imagem e o plano de Fourier, respectivamente. Esse processo é repetido até que a diferença entre as amplitudes simuladas e medidas em ambos os planos seja mínima, para o qual é comumente usada a métrica do coeficiente de correlação de Pearson. Valores elevados ($\rho \geq 0,98$) indicam alta fidelidade, pois um valor de $\rho = 1$ significaria uma correspondência perfeita entre a imagem reconstruída e o alvo.

III. ONDAS

A. Equação da Onda

Uma onda é alguma perturbação de uma grandeza física no espaço e periódica no tempo. São caracterizadas pelo seu comprimento, amplitude, período, frequência e velocidade de propagação. Matematicamente, temos duas equações principais que descrevem o comportamento de uma onda. Em uma dimensão:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v = \lambda f \quad (1)$$

Sendo $u = u(x, y)$ a uma função que descreve a onda, v a sua velocidade, λ o seu comprimento de onda e f sua frequência. Para uma onda tridimensional, naturalmente utilizamos o operador laplaciano, ∇^2 , no lugar da derivada parcial segunda no espaço.

Uma frente de onda é o conjunto de pontos que são atingidos simultaneamente por pela mesma fase de uma onda. Podemos classificar o tipo da onda dependendo da forma com que a frente de onda se mostra. As duas configurações principais são ondas planas e ondas esféricas. Intuitivamente, uma onda plana é aquela em que as superfícies de fase são planos paralelos entre si e a propagação ocorre em uma direção bem definida. Já uma onda esférica é caracterizada por frentes de onda em forma de esferas concêntricas que se expandem a partir de uma fonte pontual.

De fato, as funções seno e cosseno satisfazem a equação da onda. Assim, a combinação linear dessas soluções também é solução, e sabemos que, pela relação de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Portanto, representamos uma onda como uma exponencial complexa, sendo uma maneira muito mais prática de aplicar um tratamento matemático ao problema:

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

onde A é a amplitude, k é o **número de onda**, e ω é a **frequência angular**. O número de onda é definido como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

e indica quantas oscilações espaciais a onda realiza por unidade de comprimento, estando diretamente ligado ao seu comprimento de onda λ . Já a frequência angular é dada por

$$\omega = 2\pi f,$$

e representa a taxa de variação temporal da onda, isto é, quantas oscilações ocorrem por unidade de tempo em radianos por segundo, sendo proporcional à frequência usual f . Ao final, as grandezas físicas estarão contidas apenas na parte real da expressão.

B. Princípio de Huygens-Fresnel

O princípio de Huygens-Fresnel estabelece que cada ponto de uma frente de onda pode ser considerado como uma fonte secundária de ondas esféricas elementares, e que a frente de onda em um instante posterior é dada pela superfície tangente ao conjunto dessas ondas secundárias.

A propagação de uma onda é escrita, então, como uma integração de todas as ondas esféricas secundárias que partem da abertura. Essa integral tem a forma de uma convolução entre o campo inicial e uma função de propagação. Esse tipo de integral se simplifica em muitos casos para uma Transformada de Fourier, o que significa que a propagação da luz pode ser tratada como uma mudança de domínio do espaço real para o espaço de frequências.

A aplicação desse princípio permite explicar os fenômenos de difração e interferência.

C. Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5)$$

No vácuo, não temos densidade de carga ou de corrente, nesse caso, podemos fazer:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9)$$

Utilizando a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Encontramos que:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (11)$$

Esse resultado indica que, no vácuo, as componentes \mathbf{E} e \mathbf{B} satisfazem a equação da onda tridimensional. Então podemos identificar a velocidade dessa onda como:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \text{ m/s}$$

A partir desse resultado e outras observações experimentais, foi possível definir a luz como uma onda eletromagnética.

IV. HOLOGRAFIA

A. Holografia

1. Gravação da Amplitude e da Fase

Reconstruir uma frente de uma onda eletromagnética significa registrar informações tanto de intensidade quanto de fase da luz, de modo a preservar todo o conteúdo transmitido. Esse processo é conhecido como holografia, do grego *holo* (todo) e *graphein* (escrever).

Grande parte dos equipamentos de medição óptica responde apenas a intensidade, dessa forma, o problema está em descobrir a fase. Para realizar essa tarefa, utiliza-se uma segunda frente de onda de referência, cuja amplitude e fase são conhecidas. Se $\mathbf{a}(x, y)$ representa a onda do objeto que desejamos reconstruir e $\mathbf{A}(x, y)$, a onda de referência, podemos escrevê-las como:

$$\mathbf{a}(x, y) = a(x, y)e^{-i\phi(x, y)}, \quad \mathbf{A}(x, y) = A(x, y)e^{-i\psi(x, y)} \quad (12)$$

A intensidade da interferência entre essas as duas é dada por:

$$I(x, y) = |\mathbf{A} + \mathbf{a}|^2 \quad (13)$$

$$I(x, y) = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{A}^* \mathbf{a}\} \quad (14)$$

$$I(x, y) = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2Aa \cos(\psi - \phi) \quad (15)$$

Os dois primeiros termos referem-se a amplitude das ondas, enquanto o terceiro depende da fase relativa entre elas. Como podemos medir a intensidade $I(x, y)$ utilizando algum meio fotossensível, como um filme fotográfico, conseguimos registrar a fase da onda desconhecida.

2. Reconstrução da Frente de Onda

Uma vez que a amplitude e a fase da onda do objeto foi registrada, podemos reconstruí-la. Supondo que o material empregado para gravar a interferência entre as duas ondas seja um filme fotográfico. Enquanto não exposto a luz, ele é composto por muitos grãos de haleto de prata suspensos em gelatina sobre uma base rígida. Após a exposição, os grãos absorvem energia óptica e sofrem mudanças físicas e grãos que absorveram energia suficiente contêm pequenos “centros de desenvolvimento”, que são áreas que podem se transformar em prata metálica durante o processo químico chamado desenvolvimento (tradução literal). O filme, então, é fixado para remover os halletos de prata restantes, preservando a prata metálica formada.

Isso indica que, com a relevação, o filme se transforma em uma placa cuja transmitância $t_f(x, y)$ depende da intensidade da luz a qual teve contato. Nesse momento é importante definirmos precisamente transmitância. Esse conceito se refere à quantidade de luz que consegue atravessar o objeto, sendo expressa como uma proporção, ou percentagem, da luz incidente que não é refletida nem absorvida. No regime linear do material, podemos escrever:

$$t_f = t_b + \beta' I(x, y) \quad (16)$$

Onde t_b é a transmitância média e β' é uma constante de resposta do material. Além disso, assumindo que $|\mathbf{A}|^2$ é uniforme sobre toda a superfície de gravação, temos:

$$\mathbf{t}_f(x, y) = \mathbf{t}_b + \beta'(|\mathbf{a}|^2 + \mathbf{A}^* \mathbf{a} + \mathbf{a}^* \mathbf{A}) \quad (17)$$

Então vamos iluminar esse filme com uma onda $\mathbf{B}(x, y)$. A luz transmitida é:

$$\mathbf{B}(x, y) \mathbf{t}_f(x, y) = \mathbf{t}_b \mathbf{B} + \beta' \mathbf{a} \mathbf{a}^* \mathbf{B} + \beta' \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{a} + \beta' \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{a}^* \quad (18)$$

$$= \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_4 \quad (19)$$

Os termos U_1 e U_2 correspondem ao fundo transmitido e à modulação pela intensidade do objeto. Se $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, temos $\mathbf{U}_3(x, y) = \beta' |\mathbf{A}|^2 \mathbf{a}(x, y)$, ou seja, uma duplicação da onda do objeto, multiplicada por constantes reais. Isso produz uma imagem virtual do objeto original atrás do holograma. De forma semelhante, se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$, $\mathbf{U}_4(x, y) = \beta' |\mathbf{A}|^2 \mathbf{a}^*(x, y)$, formando uma imagem real.

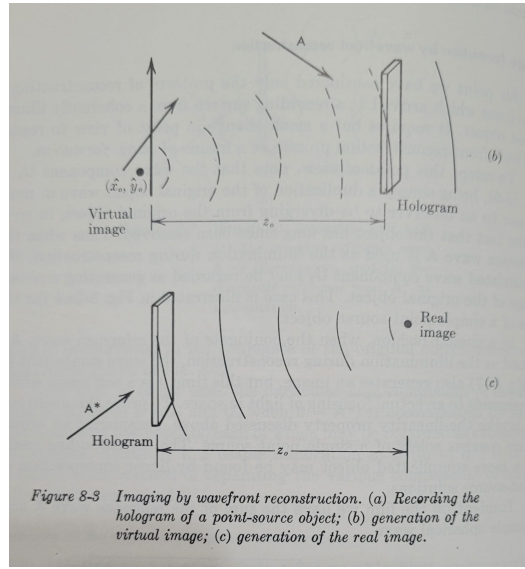


Figura 5: Formação de imagens em um holograma.

Em cada caso, ainda existem outros três termos de interferência que precisam ser tratados.

3. Holograma de Gabor

A ideia da holografia foi idealizada originalmente por Dannis Gabor em 1948. Em sua formulação, considera-se um objeto com alta transmissividade e com transmitância de amplitude dada por:

$$t(x_0, y_0) = t_0 + \Delta t(x_0, y_0) \quad (20)$$

Sendo t_0 a transmitância média e Δt o desvio da média. Vamos considerar que $|t_0| \gg |\Delta t|$. Dessa forma, quando esse objeto é iluminado por uma fonte de luz coerente, a luz transmitida consistirá de duas componentes: uma onda plana uniforme associada a t_0 e outra fraca e espalhada, ditada por Δt . Identificamos a primeira como a onda de referência e a segunda como a onda do objeto e aplicamos a discussão das seções anteriores.

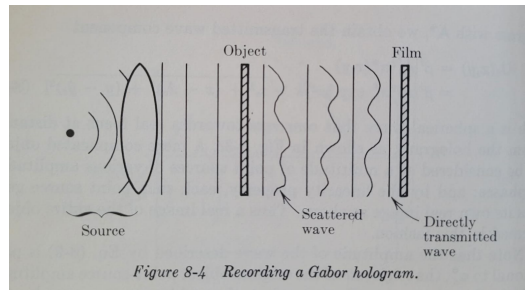


Figura 6: Holograma de Gabor

4. Imagens gêmeas

Um aspecto característico da holografia é a formação das chamadas *imagens gêmeas*. Isso ocorre porque a transmitância do holograma contém simultaneamente os termos A^*a e Aa^* ,

responsáveis pela reconstrução da frente de onda do objeto e da sua conjugada. Quando iluminado pela onda de referência A , o holograma gera tanto a imagem virtual, correspondente a $a(x, y)$, quanto uma imagem real indesejada, associada a $a^*(x, y)$. Da mesma forma, ao utilizar a onda conjugada A^* na reconstrução, a imagem real é acompanhada de uma imagem virtual, ambas simetricamente distanciadas do holograma. Assim, em qualquer caso, o holograma simples produz duas imagens do mesmo objeto, chamadas de gêmeas. Esse efeito pode causar sobreposição e perda de nitidez, sendo uma das principais limitações do holograma de Gabor.

Uma das formas de contornar esse problema é chamada holografia fora de eixo e consiste em a onda de referência incide sobre o meio de gravação em um ângulo em relação à onda espalhada pelo objeto. Essa separação espacial garante que a imagem possa ser visualizada de forma clara, sem a interferência da sua imagem gêmea.

B. Holografia Digital

A holografia digital utiliza hologramas gerados por computador (CGH), introduzidos em 1966 por Brown e Lohman, para a engenharia de frentes de onda de luz.

Simplificadamente, a holografia digital substitui a placa fotográfica por um sensor digital e o processo de reconstrução óptica pela execução de um algoritmo. Dessa forma, utilizamos os CGH para realizar cálculos numéricos para afim de determinar as informações sobre a fase da onda em uma interface de holograma. Isso facilita o processo de gravação, permitindo a criação de hologramas de objetos virtuais ou hologramas dinâmicos usando moduladores de luz espaciais (SLM) controlados por computador.

O registro da frente de onda ocorre de forma semelhante à holografia tradicional, havendo o aprimoramento de alguns componentes ópticos para digitais e o uso de lasers. Isso permite que o padrão de interferência formado seja capturado em uma matriz de intensidades capaz de codificar a informação completa da frente de onda do objeto. A etapa de reconstrução numérica ocorre inteiramente no computador. O holograma digital é processado por algoritmos, como a Transformada Rápida de Fourier (FFT), que simulam matematicamente a difração da luz. Esse procedimento isola a informação do objeto de possíveis ruídos, recuperando ao final o campo óptico complexo. O resultado é a obtenção separada tanto da imagem de amplitude quanto do mapa de fase quantitativo do objeto.

V. METASSUPERFÍCIES

A. Redes de Difração

Difração é o processo observado quando uma frente de onda encontra um obstáculo ou passa por uma abertura, fazendo com que ela se curve, resultando na redistribuição da intensidade e na formação de padrões de luz e sombra, fenômeno mais pronunciado quando esses elementos são de tamanho comparável ao comprimento de onda. Podemos descrever isso quantitativamente usando o princípio de Huygens–Fresnel, em que cada ponto de uma frente de onda atua como fonte de ondas secundárias e esféricas. Assim, quando parte dela é obstruída pelo obstáculo ou abertura, a soma dessas fontes se modifica. Já a interferência ocorre quando duas ou mais ondas se sobrepõem, combinando suas amplitudes de forma construtiva ou destrutiva, dependendo da diferença de fase entre elas. É muito comum que os dois ocorram simultaneamente, podendo existir interferência de uma onda com ela mesma.

Uma rede de difração é um elemento óptico que dispersa a luz incidente, sendo possível separar seus comprimentos de onda constituintes, cada um em ângulos ligeiramente diferentes. A dispersão surge da divisão da frente de onda e da interferência da radiação incidente na estrutura periódica da rede. As grades consistem em ranhuras paralelas, geralmente com

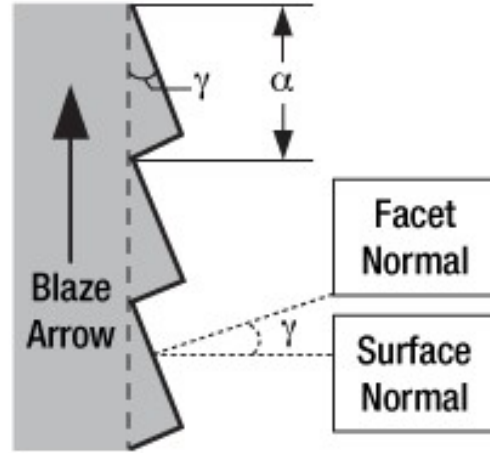


Figura 8: Esquema de rede de difração do tipo blazed.

igual espaçamento, formadas sobre um revestimento refletivo e depositadas sobre um substrato. O formato das ranhuras influencia a faixa de comprimento de onda para a qual a grade é mais bem otimizada.

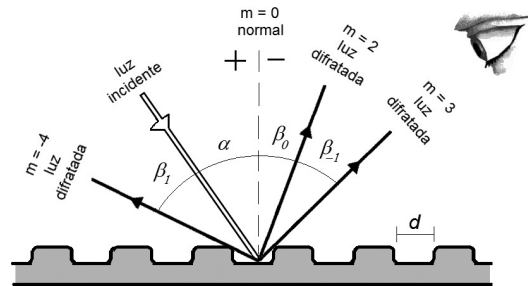


Figura 7: Exemplo de rede de difração

B. Redes Blazed

Uma classe especial de redes de difração são as rede blazed, projetadas para concentrar a maior parte da energia difratada em uma ordem específica, aumentando sua eficiência em relação às redes convencionais. Diferentemente das ranhuras retangulares tradicionais, suas ranhuras possuem um perfil em forma de rampa, no qual a face inclinada atua como um espelho microscópico.

O ângulo de blaze θ_b é definido pela relação

$$\theta_b = \frac{\theta_i + \theta_m}{2},$$

onde θ_i é o ângulo de incidência da luz e θ_m é o ângulo correspondente à ordem de difração escolhida. O formato da rede é calculado de modo que esse ângulo coincida com a direção da ordem de difração desejada, garantindo interferência construtiva máxima nessa direção. Como resultado, espera-se direcionar até 90% da energia para uma única ordem.

Site com conteúdo interessante: [Diffraction Gratings Tutorial](#)

C. Grades de Dammann

Outro tipo muito especial de rede de difração são as Grades de Dammann, projetadas para dividir um feixe de luz incidente em vários feixes de intensidade praticamente igual, geralmente dispostos em padrões regulares e tipicamente binários (a fase assume apenas dois valores, como 0 e π). Sua particularidade se pauta em concentrar a energia em um conjunto específico de ordens de difração, todas com intensidades quase iguais. Nesse sentido, são essencialmente hologramas de fase binária, capazes de projetar uma nuvem de pontos uniforme.

Vamos descrever essa grade pela função de transmissão

$$t(x) = e^{i\phi(x)}, \quad (21)$$

onde a fase $\phi(x)$ assume apenas dois valores, 0 e π , de modo que

$$t(x) = \begin{cases} +1, & \phi(x) = 0, \\ -1, & \phi(x) = \pi. \end{cases} \quad (22)$$

Sendo a grade periódica, é conveniente expandi-la em uma série de Fourier:

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{2\pi m}{L}x}, \quad (23)$$

onde L é o período da grade e os coeficientes de Fourier são dados por

$$c_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L t(x) e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} dx. \quad (24)$$

A intensidade difratada na ordem m é proporcional ao quadrado do módulo do coeficiente:

$$I_m = |c_m|^2. \quad (25)$$

Por exemplo, se a grade possui apenas duas regiões, o período L é dividido em duas regiões iguais, onde

$$t(x) = \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ -1, & \frac{L}{2} \leq x < L. \end{cases} \quad (26)$$

Assim, os coeficientes de Fourier ficam

$$c_m = \frac{1}{L} \left[\int_0^{L/2} e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} dx - \int_{L/2}^L e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} dx \right]. \quad (27)$$

Resolvendo essas integrais, encontramos que apenas as ordens ímpares apresentam intensidade não nula. Portanto, essa configuração simples já permite dividir a luz em múltiplos feixes, embora a distribuição de intensidade ainda não seja uniforme.

O projeto de uma grade de Dammann consiste em escolher a distribuição da fase $\phi(x)$ em um período L de forma que

$$I_{m_1} \approx I_{m_2} \approx \dots \approx I_{m_k}, \quad (28)$$

Isso, um conjunto específico de ordens de difração apresente intensidades aproximadamente iguais.

D. Meta Átomos

Para obtermos uma rede de difração de alto desempenho, é necessário uma estrutura geométrica bem definida, o que possivelmente confere peso e menor aplicabilidade ao material, além de encarece-lo. Isso motiva a busca de outros modelos.

Nanoressoadores surgem como estruturas artificiais em escala nanométrica projetadas para confinar e manipular ondas eletromagnéticas por meio de ressonâncias locais, funcionando como antenas para luz, assim como as antenas convencionais interagem com ondas de rádio. Nesse momento é válido revisar o funcionamento de antenas.

Uma antena é um componente desenvolvido para irradiar ou captar ondas eletromagnéticas. A antena atua como uma interface entre uma linha de transmissão e o espaço livre. Desta forma, ela pode atuar tanto como um transmissor quanto receptor de ondas eletromagnéticas. Em geral, toda antena irá seguir o princípio de que duas cargas oscilantes geram radiação, campos eletromagnéticos que se desprendem de sua fonte e se propagam no espaço livre. Como transmissor, utiliza uma fonte de alimentação alternada que alimenta a extremidade de dois fios para obter esse efeito. Atuando como um receptor, a radiação proveniente do espaço livre exerce uma força nas cargas elétricas da antena, induzindo nelas um movimento oscilatório.

Quando a luz incide sobre um nanoressoador, seus elétrons internos entram em oscilação, produzindo um acúmulo de energia em frequências específicas de ressonância, que dependem diretamente do tamanho, da forma e do material utilizado. Existem diferentes tipos de ressonâncias em nanoressoadores, como as ressonâncias plasmônicas, observadas em metais como ouro e prata e que estão associadas às oscilações coletivas dos elétrons livres na superfície, resultam em campos fortemente localizados. Outras formas são as ressonâncias dielétricas, observadas de materiais como o silício, que apresentam baixas perdas e suportam modos de Mie (descrição de ressonâncias eletromagnéticas surgem em partículas de tamanho comparável ao comprimento de onda da luz), que permitem tanto ressonâncias elétricas quanto magnéticas.

Utilizando nanoressoadores para modular a fase de um feixe de luz incidente, é possível obter os mesmos resultados que uma rede de difração, porém com elementos muito mais leves, finos e compactos. Tais elementos são chamados de meta átomos. A principal diferença entre os dois se pauta em que, no primeiro, a modulação da fase ocorre de forma contínua, enquanto no segundo, discretamente.

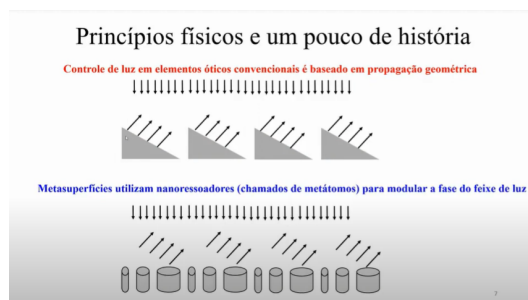


Figura 9: Comparação entre rede blazed e meta átomos. Vídeo de referência.

Um conjunto de meta átomos organizado de forma aproximadamente plana constitui uma metassuperfície. Existem diversas geometrias possíveis para produzir uma metassuperfície, como exemplificadas nos exemplos abaixo:

Cada um produz efeitos diversos. A exemplo do formato em V, essa estrutura foi desenvolvida para demonstrar experimentalmente as leis generalizadas de refração e reflexão na faixa espectral do infravermelho médio e próximo. A geometria e orientação das antenas são escolhidas para criar um gradiente constante de salto de fase ao longo da interface, resultando em feixes anômalos refratados e refletidos e também foram empregadas na realização de lentes planas.

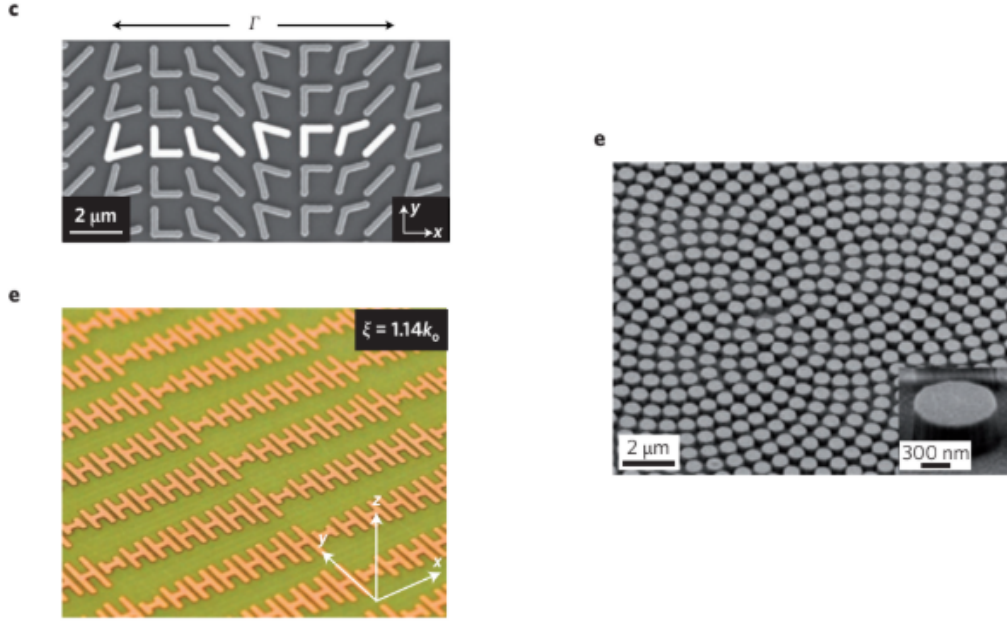


Figura 10: Exmplos de geometrias de metassuperfícies.

É possível classificar as metassuperfícies em alguns grupos sendo esses: Metassuperfícies Plasmonicas, Metassuperfícies Dielétricas, Metassuperfícies Geométricas, que utilizam dispersores idênticos, mas com variações geométricas, e Metassuperfícies de Huygens, que satisfazem condições de impedância e excitam dipolos elétricos e magnéticos simultaneamente.

E. Lei de Snell Generalizada

O Princípio de Fermat afirma que a luz, ao ir do ponto A para o ponto B, realiza esse trajeto no percurso de menor tempo possível. A partir disso, é surge a lei de Snell, que descreve o comportamento da luz ao passar de um meio para outro, relacionando os ângulos de incidência (θ_i) e de refração (θ_r) com o índices de refração em cada um, de acordo com a expressão:

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_r) \quad (29)$$

Nesse caso, a interface muda a fase da onda incidente suavemente. Quando analisamos metassuperfícies, essa mudança ocorre de forma abrupta, conferindo uma descontinuidade na frente de onda, que iremos nos referir como $\Phi(x, y)$, assumindo uma possível dependência da posição no plano do metamaterial. Essa capacidade de impor um perfil de fase local e arbitrário impossibilita a aplicação da lei de Snell.

Devemos, então revisitar a formulação do Princípio de Fermat, o que também é respaldado por experimentos com configurações ópticas específicas em que o percurso da luz ocorre em tempo máximo ou, na curva do espaço-tempo, um tempo em ponto de inflexão.

O índice de refração de um meio é definido como $n = c/v$ onde v é a velocidade da luz no meio e c é a velocidade da luz no vácuo. Sabem, também, do cálculo variacional, que o tempo t que a luz leva para percorrer uma distância infinitesimal ds é dado por

$dt = ds/v = (n/c)ds$. Dessa forma:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (30)$$

Chamamos a última integral de caminho óptico. A partir disso, podemos descrever o Princípio de Fermat na linguagem do cálculo variacional como a afirmação de que a trajetória real seguida pela luz é aquela que torna o caminho óptico estacionário. Matematicamente, isso significa que

$$\delta \int_A^B n(r) ds = 0 \quad (31)$$

Vamos, agora, olhar para a fase da onda. No vácuo, o número de onda é dado por $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, e a fase de uma onda que percorre uma distância L é $\phi = k_0 L$. Em um meio de índice de refração n , o comprimento de onda reduz-se para $\lambda = \lambda_0/n$, de modo que o número de onda local passa a ser $k = nk_0$. Assim, para um pequeno deslocamento de comprimento ds , a fase aumenta em $d\phi = k ds = nk_0 ds$. Integrando ao longo de toda a trajetória, temos a fase total acumulada como

$$\Delta\phi = k_0 \int_A^B n(\mathbf{r}) ds,$$

Expandimos ainda mais o princípio para afirmar que a trajetória real da luz é aquela que torna a fase total acumulada entre dois pontos um extremo. Além disso, é possível identificar $k(s) = k_0 n(s)$ como o número de onda, que é a magnitude do vetor de onda. Escrevemos, então:

$$\Delta\phi = \int_A^B \vec{k}(s) \cdot d\vec{s} \quad (32)$$

Para aplicar essas novas conclusões às metassuperfícies, vamos considerar dois caminhos infinitesimalmente próximos, partindo de um ponto no meio de incidência, cruzando a metassuperfície em pontos A e B, separados por um deslocamento na interface ds , e convergindo para um ponto no meio de transmissão ou reflexão. O princípio da fase estacionária exige que a diferença de fase total entre esses dois caminhos seja nula e a fase total acumulada ao longo de um caminho é a soma da contribuição do caminho óptico e da fase da metassuperfície.

$$\phi_{total} = \Delta\phi_{Incidência} + \Phi_{Metassuperfície} + \Delta\phi_{Transmissão} \quad (33)$$

$$\phi_{total} = \int_A^P \vec{k}_i(s) \cdot d\vec{s} + \Phi(s) + \int_P^B \vec{k}_t(s) \cdot d\vec{s} \quad (34)$$

$$\delta\phi_{total} = \delta \left(\int_A^P \vec{k}_i(s) \cdot d\vec{s} + \Phi(s) + \int_P^B \vec{k}_t(s) \cdot d\vec{s} \right) = 0 \quad (35)$$

Essa condição de fase estacionária pode ser traduzida para:

$$(\vec{k}_i(s) \cdot d\vec{s}) - (\vec{k}_t(s) \cdot d\vec{s}) + (\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{s}) = 0 \quad (36)$$

Onde $\vec{\nabla}\Phi$ é o gradiente da fase na superfície, medindo o quão rapidamente a fase imposta pela metassuperfície varia espacialmente. Como esta equação deve ser válida para qualquer deslocamento infinitesimal ds na interface, o termo entre parênteses deve ser nulo nas componentes tangenciais à superfície:

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t)_{||} + (\vec{\nabla}\Phi)_{||} = 0 \quad (37)$$

Analisando primeiro a reflexão, se os raios incidente e refletido estão no mesmo meio, então o módulo dos seus vetores de onda, que denominaremos k . Se o sistema de coordenadas é tal que a interface seja o plano xy e o plano de incidência seja o plano yz , identificamos $\vec{k}_i = k(0, \sin(\theta_i), \cos(\theta_i))$ e, assumindo que, nesse caso, o plano de reflexão pode ser diferente, $\vec{k}_r = k(\sin(\theta_r) \sin(\phi_r), \sin(\theta_r) \cos(\phi_r), -\cos(\theta_r))$. Aplicando a equação obtida acima, temos:

$$\begin{cases} k \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ k \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) - k \sin(\theta_i) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases}$$

Para o caso mais simples de um gradiente de fase unidimensional ao longo do eixo x e incidência no plano xz , temos $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ e o raio refletido permanece no plano xz , com $\phi_r = 0$. Sabendo que $k = n_i \frac{2\pi}{\lambda_0}$, simplificamos a equação para:

$$n_i \sin(\theta_r) - n_i \sin(\theta_i) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx} \quad (38)$$

Agora, considerando que houve refração da onda, aplicamos uma lógica idêntica, porém considerando que o módulo do vetor de onda muda com a mudança de meio, indo de $|\vec{k}_i| = k_i = n_i k_0$ para $|\vec{k}_t| = k_r = n_t k_0$. Com o mesmo sistema de coordenadas e assumindo, novamente, um gradiente unidimensional

F. Metassuperfícies Holográficas

Apesar dos avanços, a holografia tradicional enfrentou desafios devido a métodos de geração volumosos baseados em interferência, resultando em limitações fundamentais como banda estreita, pequeno campo de visão (FOV), múltiplas ordens de difração e imagens gêmeas. Metassuperfícies surgem como uma ótima alternativa para contornar esses problemas, pois conferem uma capacidade de controle da radiação eletromagnética sem precedentes, além de não depender de um processo químico de exposição e revelação (a informação holográfica é codificada diretamente na metassuperfície durante a sua fabricação).

Quando a metassuperfície é iluminada por uma onda de referência, cada nanoestrutura atua como um dispersor que modula localmente a fase da onda transmitida ou refletida, reconstruindo a frente de onda correspondente ao objeto. Como o controle de fase pode ser feito de forma precisa em cada ponto, é possível gerar hologramas ultrafinos, com alta eficiência e sem a presença de imagens gêmeas.

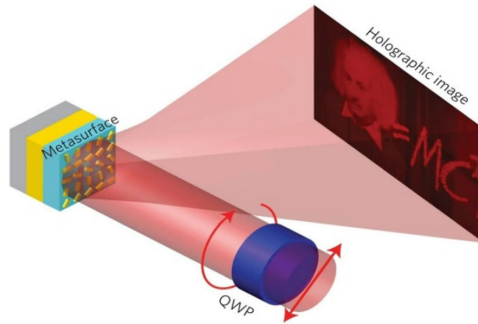


Figura 11: Esquema de holografia utilizando metassuperfícies retirado de¹.

Outro aspecto muito interessante é que essas estruturas suportam multiplexação, ou seja, um mesmo dispositivo por apresentar respostas diferentes quando modificamos as características da radiação incidente, como comprimento de onda, frequência e polarização. Uma metassuperfície multiplexada por polarização pode alternar funcionalmente entre exibição holográfica e grades de Damman.

O projeto de hologramas com metassuperfícies, geralmente se baseia na criação de Hologramas Gerados por Computador (CGH) e envolve uma sequência de etapas que transformam um modelo digital de um objeto em um holograma físico capaz de reconstruir uma imagem óptica.

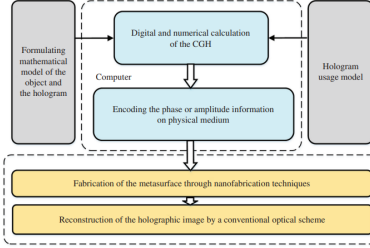


Figure 1: Typical procedures required for the design and demonstration of optical metasurface holography. One important step is the suitable selection of the phase encoding method, which influences the subsequent fabrication step.

Figura 12: Esquema para projetar uma metassuperfície holográfica, retirado de¹.

Partimos da formulação de um modelo matemático do objeto a ser holografado, que pode ser usadas em computação gráfica. A partir disso, a relação entre a onda de luz do objeto e a onda espalhada que chegará à superfície do holograma é descrita por uma integral de propagação. Essencialmente, essa integral calcula como as ondas de luz de cada ponto do objeto se somam para formar a frente de onda completa no plano da futura metassuperfície.

Uma vez definida essa relação matemática, inicia-se a fase de síntese digital, que é a etapa computacional crucial onde o perfil do holograma é determinado. Utilizando algoritmos de otimização como o de Gerchberg-Saxton (GS) ou o de espectro angular (AS), o computador calcula a matriz de números complexos que descreve a amplitude e a fase da frente de onda desejada. O próximo desafio é traduzir essa matriz digital em um padrão físico. Essa etapa, chamada de codificação, envolve o design de nanoestruturas (meta-átomos) que irão compor a metassuperfície. Dependendo da capacidade dessas estruturas, o holograma pode ser apenas de fase, onde a geometria dos meta-átomos controla o atraso da luz; apenas de amplitude, que modula a intensidade local; ou de amplitude complexa, o método mais avançado, que controla ambos os parâmetros simultaneamente para uma reconstrução de altíssima fidelidade, algo possível com designs como as metassuperfícies de Huygens.

Com o design finalizado, a metassuperfície é fabricada por meio de técnicas de nanofabricação de alta precisão, como a litografia por feixe de elétrons (EBL) ou por feixe de íons focado (FIB). Esses métodos permitem esculpir as nanoestruturas com a resolução espacial necessária para manipular a luz visível de forma eficaz. Finalmente, a imagem holográfica é reconstruída ao se iluminar a metassuperfície fabricada com um feixe de luz coerente. É importante notar que, enquanto o cálculo do CGH (a "gravação" digital) não envolve um feixe de referência físico, a reconstrução óptica da imagem a partir do dispositivo final requer este feixe de iluminação externa, que atua como o feixe de reconstrução para difratar a luz e formar a imagem projetada no espaço.

Em suma, a combinação do poder computacional do CGH com a capacidade de manipulação de luz sem precedentes das metassuperfícies oferece vantagens notáveis sobre a holografia tradicional. Essa abordagem permite a criação de hologramas com resolução espacial altíssima, baixo ruído e grande precisão, superando limitações clássicas como o tamanho de pixel grande, o pequeno campo de visão e a largura de banda restrita.

A fase para a reconstrução do meta-holograma pode ser calculada por diversas técnicas, sendo o algoritmo de Gerchberg-Saxton (GS) amplamente utilizado para gerar hologramas apenas de fase.

VI. BIBLIOGRAFIA

- ¹L. Huang, S. Zhang, and T. Zentgraf, “Metasurface holography: from fundamentals to applications,” *Nanophotonics* (2018), 10.1515/nanoph-2017-0118.