(Universidade de São Paulo)
Lista 1

Cálculo II
Docente: Zani
Vinícius de Sá Ferreira – 15491650

12 ago. 2024

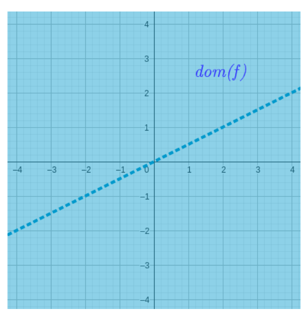
1. Determine o domínio de f e faça seu esboço nos seguintes casos:

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-2y}$

$$x - 2y \neq 0$$

$$x \neq 2y$$

$$\therefore dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 2y\}$$



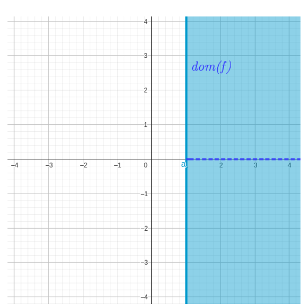
b) $f(u,v) = \sqrt{1-u} - e^{\frac{u}{v}}$

$$v \neq 0$$

$$1 - u \geq 0$$

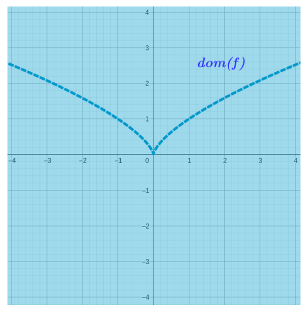
$$u \geq 1$$

$$\therefore dom(f) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 1 \text{ e } v \neq 0\}$$



c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^3}$

$$x^2 - y^3 \neq 0$$
$$x^2 \neq y^3$$
$$y \neq \sqrt[3]{x^2}$$
$$\therefore dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq \sqrt[3]{x^2}\}$$



2. Descreva o domínio máximo possível da função $z = f(x,y)$ dada por:

(a) $x + y - 1 + z^2 = 0, \quad z \geq 0$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{1 - x - y}$$
$$1 - x - y \geq 0$$
$$x + y \leq 1(*)$$
$$y \leq -x + 1$$

$$\boxed{\therefore dom(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leq 1\}}$$

$(*)$ Reta $y = -x + 1$ e o semiplano determinado inferiormente por ela.

(b) $z = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0$$
$$x^2 + y^2 < 1(*)$$

$$\boxed{\therefore dom(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}}$$

$(*)$ Bola aberta centrada em (0,0) de raio 1.

(c) $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

$$2x^2 + y^2 - 1 > 0$$
$$2x^2 + y^2 > 1$$
$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} > 1(*)$$

$$\boxed{\therefore dom(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + y^2 > 1\}}$$

$(*)$ Complementar da elipse centrada em (0,0) de semieixos $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 1.

(d) $z^2 + 4 = x^2 + y^2, \quad z \geq 0$

$$\begin{gathered} z^2 = x^2 + y^2 - 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 (*) \end{gathered}$$

$$\boxed{\therefore dom(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4\}}$$

$(*)$ Complementar da bola aberta centrada em (0,0) de raio 2.

(e) $z = \sqrt{|x| - |y|}$

$$\begin{gathered} |x| - |y| \geq 0 \\ |x| \geq |y| (*) \end{gathered}$$

$$\boxed{\therefore dom(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \geq |y|\}}$$

$(*)$ 1º e 3º quadrantes determinado pelo sistema de coordenadas (u, v) com $u : y = -x$ e $v : y = x$.

(f) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \leq 0$

$$\begin{gathered} z^2 = 1 - 4x^2 - y^2 \\ z = -\sqrt{1 - 4x^2 - y^2} \\ 1 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \\ 4x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} \leq 1 (*) \end{gathered}$$

$$\boxed{\therefore dom(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 \leq 1\}}$$

$(*)$ Elipse centrada em (0,0) de semieixos $\frac{1}{2}$ e 1 e seu interior.

3. Seja $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

(a) Encontre as curvas de nível c da função f, para $c = 0$ e $c \neq 0$.
Suponha que $x = 0$, então f é função constante igual a 0. Caso contrário, suponha $x \neq 0$, então

$$\begin{gathered} x^2 + 2xy = c \\ x(x + 2y) = c \\ x + 2y = \frac{c}{x} \\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x} - x\right) \\ y = \frac{c - x^2}{2x} \end{gathered}$$

Para $c = 0$:

$$y = -\frac{x^2}{2x} = -\frac{x}{2}$$

(b) Encontre a interseção do gráfico de f com o plano $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Esboce essas curvas.
(c) Faça um esboço do gráfico de f.

4. Determine o domínio máximo de definição e faça um esboço das curvas de nível das funções abaixo.

a) $f(x, y) = x - y$
b) $f(x, y) = e^{x^2 y}$
c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$
d) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
e) $f(x, y) = x^2 + y^2$
f) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
g) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
h) $f(x, y) = x + y + 1$
i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
j) $f(x, y) = x^2$, $-1 \leq x \leq 0$ e $y \geq 0$
k) $f(x, y) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$
l) $f(x, y) = xy$

5. Faça um esboço das superfícies de nível das funções abaixo nos níveis indicados.

a) $f(x, y, z) = x$, $c = 1$
b) $f(x, y, z) = y$, $c = 1$
c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $c = 1$
d) $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$, $c = 1$
e) $f(x, y, z) = x - y$, $c = 0, 1, 2$
f) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}}$, $c = 0, 1, 2$
g) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $c = -1, 0, 2$
h) $f(x, y, z) = xy$, $c = 0, 1, 2$

6. Desenhe o traço de cada curva abaixo.

(a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$
(b) $\gamma(t) = (1, 1, t)$, $t \geq 0$
(c) $\gamma(t) = (t, t, 1)$, $t \geq 0$
(d) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$
(e) $\gamma(t) = (t, t, 1 + \sin t)$, $t \geq 0$
(f) $\gamma(t) = \left(1, 1, \frac{1}{t}\right)$, $t > 0$
(g) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t})$, $t \geq 0$
(h) $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
(i) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \geq 0$

7. Mostre que a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto. Mostre também que a reunião de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

8. Mostre que o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} < 1\}$ **é aberto.**

9. Mostre que a fronteira da bola aberta $B(x_0, r)$ **é a esfera** $S(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = r\}$**.**

10. O conjunto dos pontos de aderência de um conjunto também é chamado de fecho deste conjunto. Qual é o fecho de Q_n**, isto é, qual é o conjunto** Q_n**?**

11. Quais são os pontos interiores a Q_n**, isto é, qual é o conjunto** Q_n'**?**

12. Determinar o valor dos seguintes limites, caso existam:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$
b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$
c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$
e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$
f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$
g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x-y}{x^2+y^2}$
h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x}$
i) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$
j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$
k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2)$
l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x+e^y}{\cos x+\sin y}$
m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$
o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|+|y|}$
p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2y^2}{x^2+y^2}$
q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

13. Calcule

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - 2xh - k}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \text{ sendo } f(x, y) = x^2 + y.$$

14. Calcule, caso exista

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|}, \text{ sendo f dada por } f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ e } \|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}.$$