Relatório Massa-Mola

FISA75 - 2023.1

Kaio Carvalho; Vinícius Pinto; Matheus Rheinschmitt; Elias Neto

Entregue a Eliel Gomes da Silva Neto, professor da disciplina Elementos de Eletromagnetismo e Circuitos Elétricos

I. Introdução

Este trabalho tem como finalidade relatar e analisar os resultados de um experimento utilizando um sistema massa-mola realizado no laboratório do Instituto de Física da UFBA. Será feita uma análise para se obter a constante elástica da mola de diferentes maneiras, estabelecer a relação entre massa e período de oscilação, obter e analisar as equações de movimento associadas à oscilação da mola, além de estabelecer as forças atuantes no sistema, analisando as energias associadas.

Um sistema massa mola pode ser descrito como uma mola ideal fixada numa superfície imóvel, sendo anexado à sua outra extremidade um corpo de massa m. A mola de um sistema deste tipo obedece à **Lei de Hooke** e consequentemente, reproduz um fenômeno físico chamado de **movimento harmônico simples** (MHS). A lei de Hooke é uma lei empírica que afirma que a força de "resistência" para estender uma mola a uma certa distância x da sua posição de relaxamento (sem forças atuantes) é proporcional ao próprio x. Como esta força, por vezes chamada de força restauradora ou elástica, sempre aponta para a posição de relaxamento (tem sentido oposto à força para estender a mola), representamos seu valor com sinal trocado $F_{el} = - kx$. Neste caso, k é a *constante elástica* da mola, um coeficiente de proporção que depende da natureza da mola.

Este comportamento permite reproduzir o MHS, um movimento oscilatório (neste caso, unidimensional) causado pela atuação da força restauradora. Num sistema massa mola, perceba que se a mola é estendida por um certo deslocamento x, há uma força elástica atuando sobre este corpo e, portanto, uma aceleração associada. Pela lei de Hooke e pela segunda lei de Newton, temos $ma = - kx$, e então $a + \frac{k}{m}x = 0$. É possível obter a equação do movimento realizado considerando a como a segunda derivada do deslocamento x e resolvendo a equação diferencial. O resultado é $x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi)$, onde A é a amplitude do movimento, ω a velocidade angular (ou frequência angular), φ o ângulo de fase. Certamente também obtemos a velocidade $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = - A\,\omega\,sen(\omega t + \varphi)$ e aceleração $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = - A\omega^2 cos(\omega t + \varphi)$.

Perceba que na equação que descreve a, o próprio x aparece, nos permitindo estabelecer a relação $a = - \omega^2 x$. Substituindo a na equação diferencial, obtemos $- \omega^2 x + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x(\frac{k}{m} - \omega^2) = 0$; aqui podemos assumir sem perda de generalidade que $x \neq 0$, e concluímos $\frac{k}{m} - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Este resultado leva a uma importante conclusão sobre o período da oscilação. O período T é definido como o tempo que o movimento leva para voltar à sua posição inicial, dada uma posição inicial qualquer. Perceba que termo ωt é essencialmente um ângulo, portanto ω descreve o ângulo percorrido por unidade de tempo. Volta-se para posição inicial quando o ângulo percorrido é de 360º, ou 2π, em radianos. Portanto temos que $T = 2\pi\frac{1}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, estabelecendo uma relação direta entre o período e a massa do sistema.

Com essa discussão introdutória, podemos partir para a análise dos experimentos.

II. Experimentos

Os experimentos realizados buscam obter a constante elástica k de uma mola e simular um MHS, utilizando cilindros de massas variadas anexados à mola através de um suporte. Segue o diagrama dos materiais utilizados e a descrição dos experimentos.

Experimento 1:

Para diferentes combinações de cilindros (3), na posição de equilíbrio, medir o deslocamento x estendido da mola, com relação à posição de relaxamento, utilizando a régua milimetrada (4). Obter k com base nas medidas.

Experimento 2:

Para diferentes combinações de cilindros (3), estender a mola para um deslocamento x arbitrário e medir o período da oscilação obtida. Obter a relação entre período e massa, além da constante elástica k.

Experimento 3:

Utilizando uma combinação de cilindros arbitrária, estender a mola por uma distância arbitrária e medir, para cada instante de tempo, o deslocamento $x(t)$. Obter os gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração, comparando os parâmetros obtidos nas curvas de ajuste.

Seguem as massas do suporte (2) e de cada cilindro (3), medidas numa balança digital com precisão de **0,0001** kg.

Objeto	**Massa** (kg)		**Objeto**	**Massa** (kg)
Suporte	0,0127		Cilindro **1**	0,0101
Cilindro **I**	0,0501		Cilindro **2**	0,0102
Cilindro **II**	0,0502		Cilindro **3**	0,0102
Cilindro **III**	0,0498		Cilindro **4**	0,0100

Obs. Houve dificuldade na manipulação da ferramenta de curvas de ajuste disponibilizada. Mesmo depois das explicações, não conseguimos obter parâmetros condizentes com os dados, principalmente no **Experimento 3.** É provável que tenha havido uma confusão para estabelecer os parâmetros iniciais ou os limites dos parâmetros. A solução encontrada, levando em consideração o prazo para entrega, foi utilizar a ferramenta MyCurveFit (disponível em https://mycurvefit.com/). Infelizmente, a versão gratuita aceita um máximo de 20 pontos, o que prejudicou a análise do **Experimento 3**. Todas as análises levam em consideração as 20 primeiras medidas coletadas.

III. Resultados

III.a. Experimento 1

Foi medida a posição de equilíbrio (ausência de movimento) da extremidade livre da mola apenas com o suporte pendurado, na, obtendo **0,210** m. Para cada combinação de cilindros pendurados na mola, foi medida a nova posição de equilíbrio da extremidade livre da mola. .As posições foram medidas utilizando a régua milimetrada (4), porém pela dificuldade de visualização, consideramos precisão de **0,002** m.

O objetivo do experimento é obter a constante elástica K da mola. Perceba que na posição de equilíbrio, $a = 0$ e portanto a força resultante do sistema é nula. Na configuração estabelecida, apenas as forças peso F_p e a força elástica F_{el} atuam sobre o corpo, e portanto $F_{el} =- F_p$. Para cada medida i, é possível obter um K_i utilizando esta relação. Considere uma única medida, com m sendo a massa total anexada à mola, p a posição da extremidade livre da mola carregando a massa m e p_0 a posição de relaxamento da mola. O deslocamento x é dado por $x = p - p_0$ e a força peso $F_p = mg$, onde g é a aceleração da gravidade. E portanto:

$$F_{el} =- Kx \Rightarrow - F_p =- Kx \Rightarrow F_p = Kx \Rightarrow mg = K(p - p_0) \Rightarrow K = \frac{mg}{p - p_0}.$$

Propagando os desvios, temos:

$$\Delta K = \left|\frac{\partial K}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial K}{\partial g}\right|\Delta g + \left|\frac{\partial K}{\partial p}\right|\Delta p + \left|\frac{\partial K}{\partial p_0}\right|\Delta p_0 = \frac{g}{p-p_0}\Delta m + \frac{m}{p-p_0}\Delta g + \frac{mg}{(p-p_0)^2}\Delta p + \frac{mg}{(p-p_0)^2}\Delta p_0$$

Observe que m e x são proporcionais, já que $m = \frac{K}{g}x$. Desta forma, podemos considerar a posição de relaxamento da mola como sendo a própria medida da posição com o suporte pendurado, desconsiderando a massa do suporte. Entretanto, perceba que como cada medida de massa foi feita utilizando uma combinação de cilindros, m é a soma das massas dos cilindros envolvidos, e portanto $\Delta m = n \times 0,0001$ kg, onde n é a quantidade de cilindros utilizados na combinação.

Utilizamos $g = 9,7836$ m/s² para os cálculos, de acordo com a referência [1], com altitude 50m e latitude 15º, valores aproximados para o local do experimento com base na ferramenta Google Earth (disponível em https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/). Devido às aproximações feitas, consideramos $\Delta g = 0,003$ m/s².

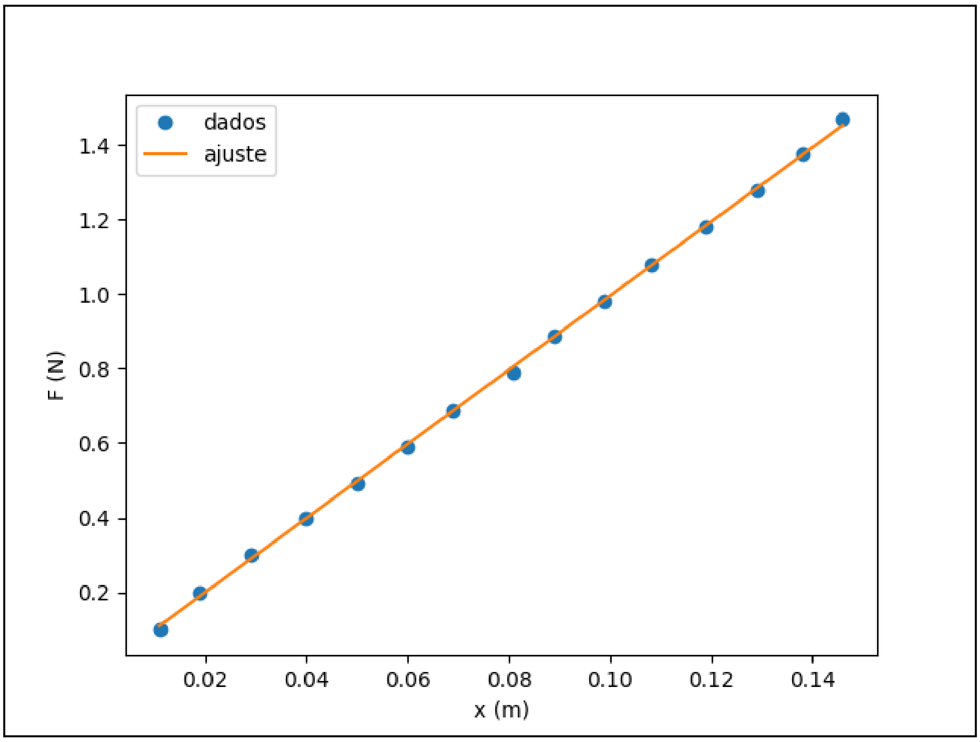
A tabela seguinte mostra os valores de F_p, x e K obtidos. São constantes $p_0 = 0,210$ m; $\Delta p_0 = \Delta p = 0,002$ m e $\Delta x = 0,004$ m.

Experimento 1 (constante elástica)							
m (kg)	Δm (kg)	p (m)	x (m)	F_p (N)	ΔF_p (N)	K (N/m)	ΔK (N/m)
0,0101	0,0001	0,221	0,011	0,099	0,002	9	4
0,0203	0,0002	0,229	0,019	0,199	0,003	10	3
0,0305	0,0003	0,239	0,029	0,298	0,004	10	2
0,0405	0,0004	0,250	0,040	0,396	0,005	10	2
0,0501	0,0001	0,260	0,050	0,490	0,002	9,8	0,9
0,0602	0,0002	0,270	0,060	0,589	0,003	9,8	0,7
0,0704	0,0003	0,279	0,069	0,689	0,004	10,0	0,7
0,0806	0,0004	0,291	0,081	0,789	0,005	9,7	0,6

Experimento 1 (constante elástica)							
m (kg)	Δm (kg)	p (m)	x (m)	F_p (N)	ΔF_p (N)	K (N/m)	ΔK (N/m)
0,0906	0,0005	0,299	0,089	0,886	0,006	10,0	0,6
0,1003	0,0002	0,309	0,099	0,981	0,003	9,9	0,5
0,1104	0,0003	0,318	0,108	1,080	0,004	10,0	0,5
0,1206	0,0004	0,329	0,119	1,180	0,005	9,9	0,4
0,1308	0,0005	0,339	0,129	1,280	0,006	9,9	0,4
0,1408	0,0006	0,348	0,138	1,378	0,007	10,0	0,4
0,1501	0,0003	0,356	0,146	1,469	0,004	10,1	0,3

Fazendo a média das constantes elásticas, obtemos $K = 9,914448412$ N/m, com desvio padrão de $0,3153015796$ N/m. Majorando o desvio, $K = 9,9 \pm 0,4$ N/m.

Outra abordagem para se encontrar K é obter a curva de ajuste *linear* do gráfico **Força** $\times$ **Deslocamento** dos pontos medidos e obter K como o coeficiente angular desta reta. Neste caso obtemos $K = 9,95333804 \pm 0,02521452$ N/m. Majorando o desvio, $K = 9,95 \pm 0,03$ N/m.



Utilizando o teste Z, vamos comparar os dois valores de K obtidos. Seja K_t e K_c as constantes encontradas na tabela e na curva, respectivamente. Obtemos

$$Z = \frac{|K_t - K_c|}{\sqrt{\Delta K_t^2 + \Delta K_c^2}} = \frac{|9,914448412 - 9,95333804|}{\sqrt{0,3153015796^2 + 0,02521452^2}} = \frac{0,038889628}{0,3163081695} = 0,1229485412$$

Como $Z < 1$, as medidas são equivalentes.

III.B. Experimento 2

Para cada valor de massa (combinação de cilindros), foi gravado um vídeo da oscilação efetuada pela mola. Posteriormente, cada vídeo foi analisado, medindo-se o frame inicial e o frame final referente ao tempo de 10 oscilações.

A identificação de cada frame tem um erro associado, devido à compressão associada ao formato, além da precisão do programa utilizado. Observando e manipulando o programa, concluímos que há uma variação de até **3** frames. A frequência de frames do vídeo foi identificada pelo programa como **30,029** fps (frames por segundo). Como se trata de uma medida digital, consideramos o desvio como **0,001** fps.

O objetivo do experimento é observar a relação da massa total m com período de oscilação T, além de calcular a constante elástica da mola K utilizando estes dados. Considere uma única medida, sendo f_0 o frame inicial, f o frame final e fq a frequência de frames (fps). Para se obter o tempo t de um grupo de oscilações em segundos, realizamos a conversão $t = \frac{f - f_0}{fq}$. E então obtemos $T = \frac{t}{n}$, onde n é a quantidade de oscilações observadas. Propagando os desvios, temos:

$$\Delta t = \left|\frac{\partial t}{\partial f}\right|\Delta f + \left|\frac{\partial t}{\partial f_0}\right|\Delta f_0 + \left|\frac{\partial t}{\partial fq}\right|\Delta fq = \frac{1}{fq}\Delta f + \frac{1}{fq}\Delta f_0 + \frac{f - f_0}{fq^2}\Delta fq$$

$$\Delta T = \frac{1}{n}\Delta t$$

De acordo com a teoria, podemos utilizar a relação $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ para obter a constante elástica, fazendo $K = 4\pi^2\frac{m}{T^2}$. Portanto, é possível obter um K_i para cada medida feita e calcular a média dos valores, como no experimento anterior. Propagando os desvios, temos:

$$\Delta K = \left|\frac{\partial K}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial K}{\partial T}\right|\Delta T = 4\pi^2\frac{1}{T^2} + 8\pi^2\frac{m}{T^3} = 12\pi^2\left(\frac{m}{T^3} + \frac{1}{T^2}\right)$$

Diferente do experimento anterior, aqui a massa do suporte deve ser considerada. Temos que m é a soma das massas dos cilindros e do suporte. Portanto $\Delta m = (k + 1) \times 0,0001$ kg, onde k é a quantidade de cilindros utilizados na combinação.

A tabela seguinte mostra os valores de T e K obtidos. São constantes $n = 10$, $\Delta f_0 = \Delta f = 3$ frames, $fq = 30,029$ fps e $\Delta fq = 0,001$ fps.

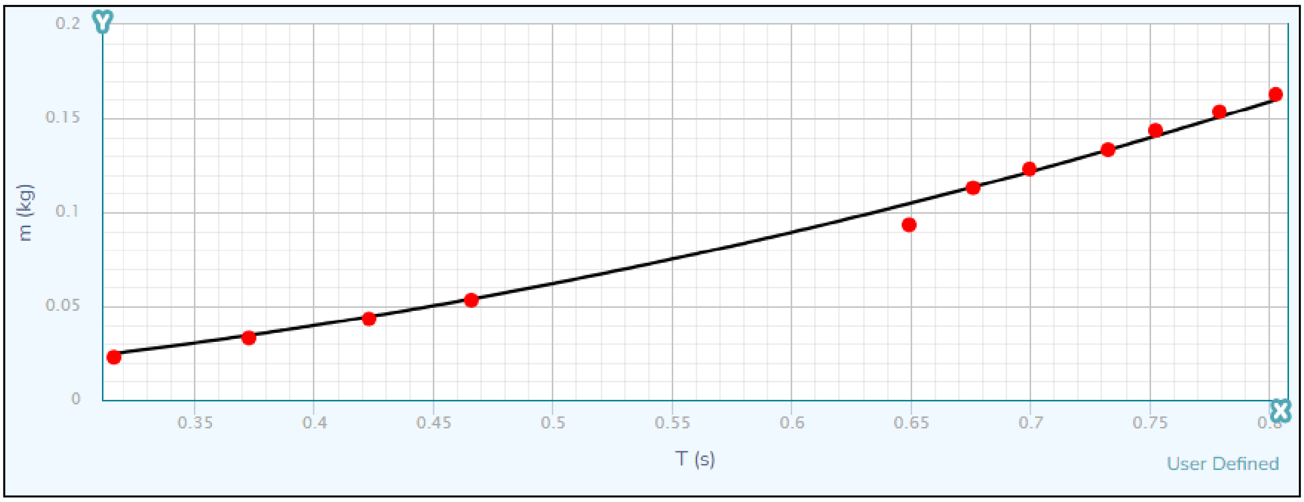
Experimento 2 (período e constante elástica)						
$f - f_0$ (frames)	m (kg)	Δm (kg)	T (s)	ΔT (s)	K (N/m)	ΔK (N/m)
95	0,0228	0,0002	0,32	0,02	9	2
112	0,0330	0,0003	0,37	0,02	9	2
127	0,0432	0,0004	0,42	0,02	10	1
140	0,0532	0,0005	0,47	0,02	10	1
195	0,0933	0,0005	0,65	0,02	8,7	0,6
203	0,1130	0,0003	0,68	0,02	9,8	0,6
210	0,1231	0,0004	0,70	0,02	9,9	0,6
220	0,1333	0,0005	0,73	0,02	9,8	0,6

Experimento 2 (período e constante elástica)						
$f - f_0$ (frames)	m (kg)	Δm (kg)	T (s)	ΔT (s)	K (N/m)	ΔK (N/m)
226	0,1435	0,0006	0,75	0,02	10,0	0,6
234	0,1535	0,0007	0,78	0,02	10,0	0,6
241	0,1628	0,0004	0,80	0,02	10,0	0,6

Fazendo a média das constantes elásticas, obtemos $K = 9,614043474$ N/m, com desvio padrão de $0,4251959772$ N/m. Majorando o desvio, $K = 9,6 \pm 0,5$.

Da relação $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$, também derivamos $m = \frac{K}{4\pi^2}T^2$. Observe que m é proporcional a T^2. Portanto há uma outra abordagem para se encontrar K, utilizando uma curva de ajuste $Y = aX^2$ no gráfico **Massa** × **Período**. Desta forma, temos que $a = \frac{K}{4\pi^2} \Rightarrow K = 4\pi^2 a$.

No seguinte gráfico, foi calculado o parâmetro de ajuste $a = 0,2483591 \pm 0,00279$. Aplicando na equação e propagando o desvio, temos $K = 4\pi^2 \times 0,2483591 \approx 9,80482426 \pm 0,11014478$ N/m. Majorando o desvio, obtemos $K = 9.8 \pm 0,2$ N/m.



Chamaremos de K_{t1} e K_{t2} os valores obtidos nas tabelas, no experimento 1 e 2 respectivamente. Analogamente, sejam K_{c1} e K_{c2} os obtidos nas curvas. Utilizando o teste Z, vamos comparar esses valores obtidos dois a dois. Segue a tabela:

Medida 1	Medida 2	Valor de Z	Equivalentes?
K_{t1}	K_{t2}	$0,5675025346$	Sim
K_{t1}	K_{c1}	$0,1229485412$	Sim
K_{t1}	K_{c2}	$0,3282293253$	Sim
K_{t2}	K_{c1}	$0,7965728069$	Sim
K_{t2}	K_{c2}	$0,4343522515$	Sim
K_{c1}	K_{c2}	$1,314350999$	Possivelmente

O resultado das comparações mostra que os valores calculados de K são consistentes entre si.

III.c. Experimento 3

Utilizando uma combinação de cilindros fixa, foi gravado um vídeo da oscilação efetuada pela mola. O vídeo foi analisado, medindo-se para cada frame, a posição da extremidade livre da mola.

Houve maior dificuldade de medição da posição em um dado frame, causada por fatores como borrão de movimento e o ângulo da câmera. Portanto, consideramos um desvio maior, de **0,01** m. E assim como no experimento anterior, a medida do frame pode variar em até **3** unidades e a frequência de frames é **30,029 ± 0,001** fps.

Vamos obter um gráfico **Deslocamento × Tempo**, para que se possa calcular a velocidade e aceleração em cada ponto, além de obter os parâmetros da oscilação **amplitude**, **velocidade angular** (ω) e a **fase** (φ).

Para uma dada medida, sejam f o frame, x a posição e fq a frequência de frames. Como o vídeo foi analisado frame a frame, os valores de f são sequenciais: $f_0 = 0, \dots , f_n = n$, portanto omitiremos seus valores na tabela. O tempo é dado por $t = \frac{f}{fq}$, e portanto $\Delta t = \frac{1}{fq}\Delta f + \frac{f}{fq^2}\Delta fq$. São constantes $fq = 30,029 \pm 0,001$ fps, $\Delta f = 3$ frames e $\Delta x = 0,02$ m. Segue a tabela com os valores obtidos, com desvios majorados:

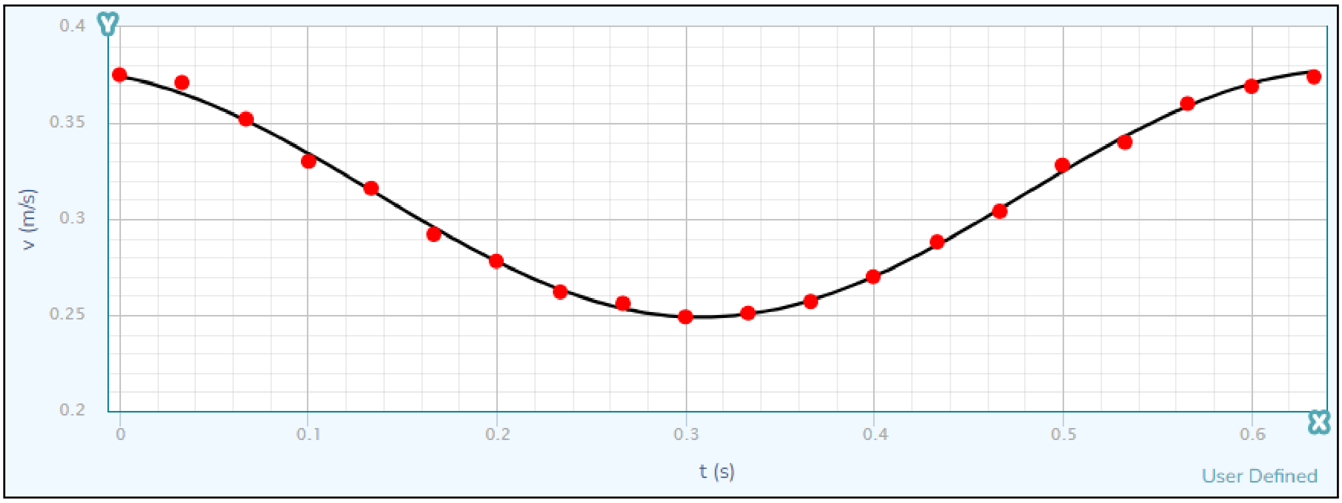
Experimento 3		
x (m)	t (s)	Δt (s)
0,38	0,0	0,1
0,37	0,0	0,1
0,35	0,1	0,1
0,33	0,1	0,1
0,32	0,1	0,1
0,29	0,2	0,1
0,28	0,2	0,1
0,26	0,2	0,1
0,26	0,3	0,1
0,25	0,3	0,1
0,25	0,3	0,1
0,26	0,4	0,1
0,27	0,4	0,1
0,29	0,4	0,1
0,30	0,5	0,1
0,33	0,5	0,1
0,34	0,5	0,1
0,36	0,6	0,1

0,37	0,6	0,1
0,37	0,6	0,1
0,37	0,7	0,1
0,36	0,7	0,1
0,35	0,7	0,1
0,33	0,8	0,1
0,32	0,8	0,1
0,30	0,8	0,1
0,28	0,9	0,1
0,26	0,9	0,1
0,25	0,9	0,1
0,25	1,0	0,1
0,25	1,0	0,1
0,25	1,0	0,1
0,27	1,1	0,1
0,28	1,1	0,1
0,30	1,1	0,1
0,31	1,2	0,1
0,34	1,2	0,1
0,35	1,2	0,1
0,37	1,3	0,1
0,37	1,3	0,1
0,38	1,3	0,1
0,37	1,4	0,1
0,36	1,4	0,1
0,34	1,4	0,1
0,32	1,5	0,1
0,30	1,5	0,1
0,28	1,5	0,1
0,27	1,6	0,1
0,26	1,6	0,1
0,25	1,6	0,1
0,25	1,7	0,1
0,26	1,7	0,1

A função que descreve o movimento da oscilação da mola ao longo do tempo é dada por $x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi)$, onde A é a amplitude, ω é a velocidade angular e φ é a fase. Adicionamos uma constante c na curva de ajuste final, que desloca o eixo por onde a oscilação ocorre, obtendo $Y = A\,cos(\omega X + \varphi) + c$ como curva de ajuste.

$A = 0,06443257 \pm 0,001138$ m

$\varphi = 0,3343957 \pm 0,05695$ rad
$\omega = 9,12335 \pm 0,181$ rad/s
$c = 0,3132908 \pm 0,001464$ m



Sejam x_i e t_i o deslocamento e o tempo no ponto i. Utilizando o método de derivação numérica, calculamos a velocidade

$$v_i = \frac{x_{i+\varepsilon} - x_{i-\varepsilon}}{t_{i+\varepsilon} - t_{i-\varepsilon}}$$

Para $i < \varepsilon$, substitui-se $i - \varepsilon$ por i e para $i > n - \varepsilon$, substitui-se $i + \varepsilon$ por i. No relatório anterior (Queda Livre) discutimos em mais detalhes o papel do parâmetro ε, que está relacionado com a precisão e acurácia dos valores finais. Basicamente, quanto maior é o valor de ε, maior é a precisão, porém menor é a acurácia.

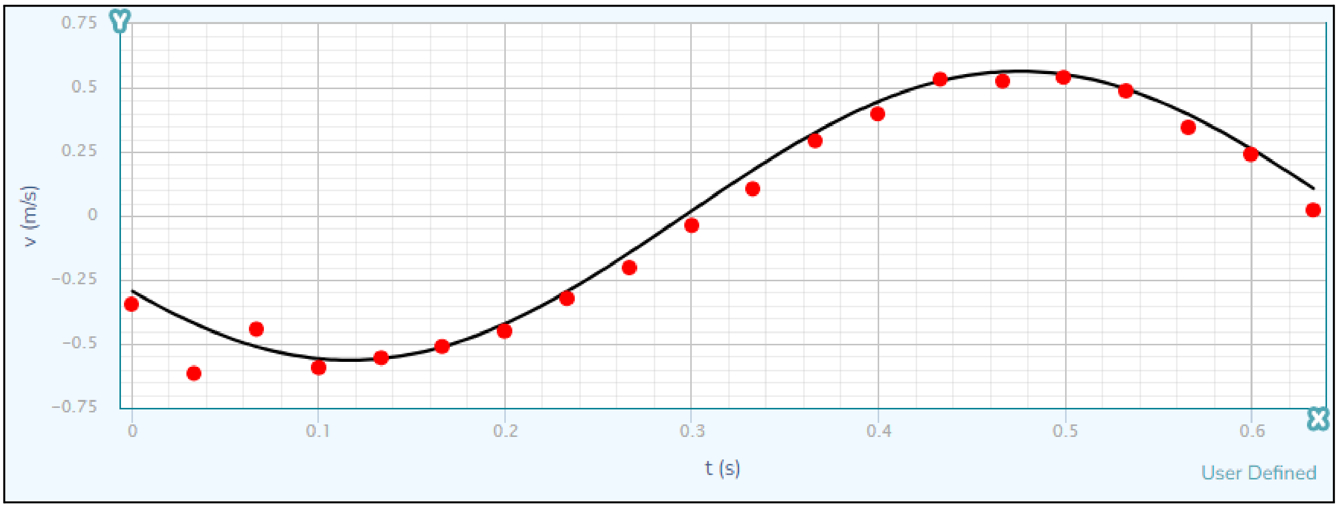
É importante comentar que os valores de tempo aqui mostrados são de acordo com o desvio majorado, e não os dados originais obtidos. Como o cálculo da velocidade usou os dados originais, podem haver valores diferentes para um mesmo instante de tempo (aproximado). Variamos o valor de ε entre 2 e 5, obtendo os seguintes valores para velocidade:

t (s)	$\varepsilon = 2$		$\varepsilon = 3$		$\varepsilon = 4$		$\varepsilon = 5$	
	v	Δv	v	Δv	v	Δv	v	Δv
0,0	0	2	0	2	-0,4	0,9	-0,5	0,8
0,0	-1	3	-1	2	-0,6	2	-0,6	0,8
0,1	-0,4	0,9	-1	2	-0,6	1	-0,5	0,8
0,1	-1	2	-0,5	0,6	-0,5	1	-0,4	0,7
0,1	-1	1	-0,5	0,7	-0,4	0,5	-0,4	0,7
0,2	-1	1	-0,5	0,6	-0,5	0,5	-0,4	0,3
0,2	-0,5	0,9	-0,4	0,6	-0,4	0,4	-0,3	0,3
0,2	-0,3	0,7	-0,3	0,5	-0,3	0,2	-0,2	0,3
0,3	-0,2	0,5	-0,2	0,3	-0,2	0,3	-0,1	0,2
0,3	0,0	0,3	0,0	0,2	0,0	0,1	-0,04	0,09
0,3	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2
0,4	0,3	0,6	0,2	0,4	0,2	0,3	0,2	0,2
0,4	0,4	0,8	0,4	0,6	0,3	0,4	0,3	0,3

0,4	1,	1	0,4	0,6	0,4	0,4	0,3	0,3
0,5	1	1	0,5	0,7	0,4	0,5	0,4	0,3
0,5	1	2	0,5	0,7	0,4	0,5	0,4	0,3
0,5	1	1	0,4	0,6	0,4	0,4	0,3	0,3
0,6	0,3	0,8	0,3	0,5	0,3	0,3	0,2	0,3
0,6	0,2	0,6	0,2	0,3	0,2	0,3	0,1	0,2
0,6	0,0	0,3	0,0	0,2	0,0	0,1	0,04	0,09
0,7	-0,2	0,5	-0,1	0,3	-0,1	0,2	-0,1	0,2
0,7	-0,3	0,7	-0,3	0,4	-0,2	0,3	-0,2	0,2
0,7	-0,4	0,9	-0,4	0,6	-0,3	0,4	-0,3	0,3
0,8	-1	1	-0,5	0,6	-0,4	0,5	-0,4	0,3
0,8	-1	1	-0,5	0,7	-0,5	0,5	-0,4	0,3
0,8	-1	1	-0,5	0,6	-0,4	0,5	-0,4	0,3
0,9	-1	1	-0,4	0,6	-0,4	0,4	-0,3	0,3
0,9	-0,4	0,8	-0,3	0,5	-0,3	0,4	-0,2	0,3
0,9	-0,2	0,6	-0,2	0,4	-0,2	0,3	-0,2	0,2
1,0	-0,1	0,3	0,0	0,2	0,0	0,2	-0,05	0,09
1,0	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1
1,0	0,3	0,5	0,2	0,4	0,2	0,3	0,2	0,2
1,1	0,4	0,8	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,3
1,1	0,4	0,9	0,5	0,6	0,4	0,4	0,3	0,3
1,1	0	1	0,5	0,7	0,4	0,5	0,4	0,3
1,2	0	1	0,5	0,7	0,5	0,5	0,4	0,3
1,2	0	1	0,5	0,6	0,4	0,4	0,3	0,3
1,2	0,5	0,9	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3	0,3
1,3	0,3	0,7	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,2
1,3	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2
1,3	-0,1	0,4	-0,1	0,2	-0,1	0,2	-0,02	0,08
1,4	-0,3	0,6	-0,2	0,4	-0,2	0,3	-0,2	0,2
1,4	-0,4	0,8	-0,4	0,5	-0,3	0,4	-0,3	0,3
1,4	-1	1	-0,5	0,6	-0,4	0,4	-0,3	0,3
1,5	-1	1	-0,5	0,7	-0,5	0,5	-0,4	0,3
1,5	-1	1	-0,5	0,7	-0,4	0,6	-0,4	0,3
1,5	-1	1	-0,4	0,6	-0,4	0,4	-0,3	0,3
1,6	-0,4	0,8	-0,4	0,5	-0,3	0,4	-0,5	0,8
1,6	-0,2	0,6	-0,2	0,4	-0,5	1	-0,5	0,8
1,6	-0,1	0,4	-0,3	0,9	-0,4	0,8	-0,4	0,7
1,7	-0,1	0,6	-0,2	0,6	-0,2	0,6	-0,3	0,6
1,7	0,0	0,5	0,0	0,1	-0,1	0,4	-0,2	0,4

Derivando $x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi) + c$, obtemos $v(t) =- A\,\omega sen(\omega t + \varphi)$. Seguem os gráficos de v, ajustados pela curva de ajuste correspondente, para cada valor de ε.

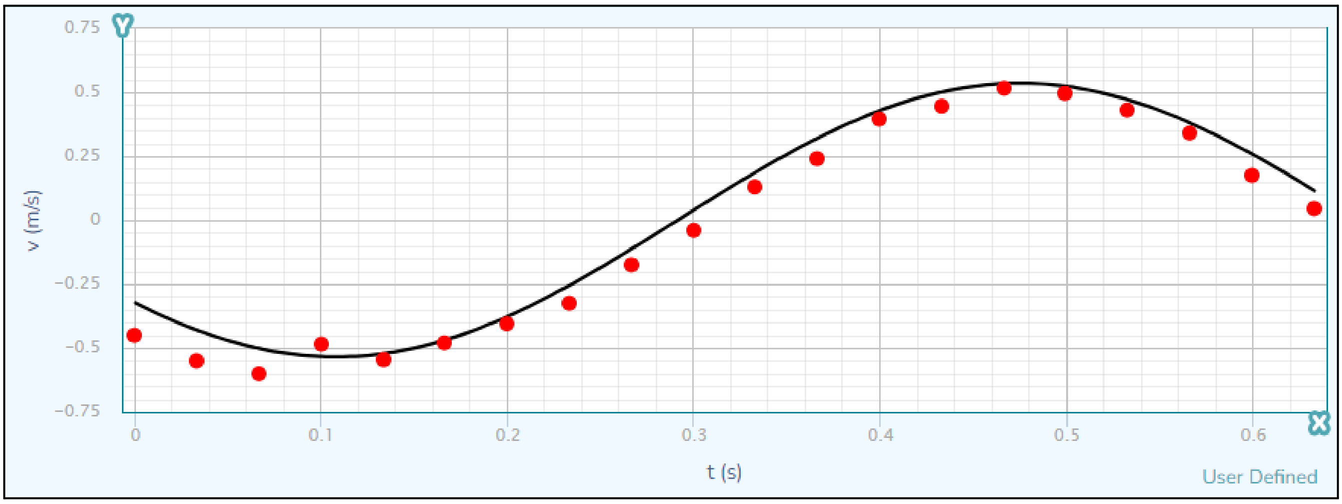
Para $\varepsilon = 2$, obtemos $A = 0,06444896 \pm 0,002484$, $\varphi = 0,5508229 \pm 0,0801$ e $\omega = 8,760964 \pm 0,2085$.



Segue a tabela comparando os valores encontrados no gráfico do deslocamento:

	Valor no deslocamento	Valor na veloc. com $\varepsilon = 2$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257 \pm 0,001138$	$0,06444896 \pm 0,002484$	$0,0059986748$	Sim
φ	$0,3343957 \pm 0,05695$	$0,5508229 \pm 0,0801$	$2,202108598$	Possivelmente
ω	$9,12335 \pm 0,181$	$8,760964 \pm 0,2085$	$1,312499642$	Possivelmente

Para $\varepsilon = 3$, obtemos $A = 0,0625272 \pm 0,002797$, $\varphi = 0,650559 \pm 0,09526$ e $\omega = 8,559148 \pm 0,2474$.

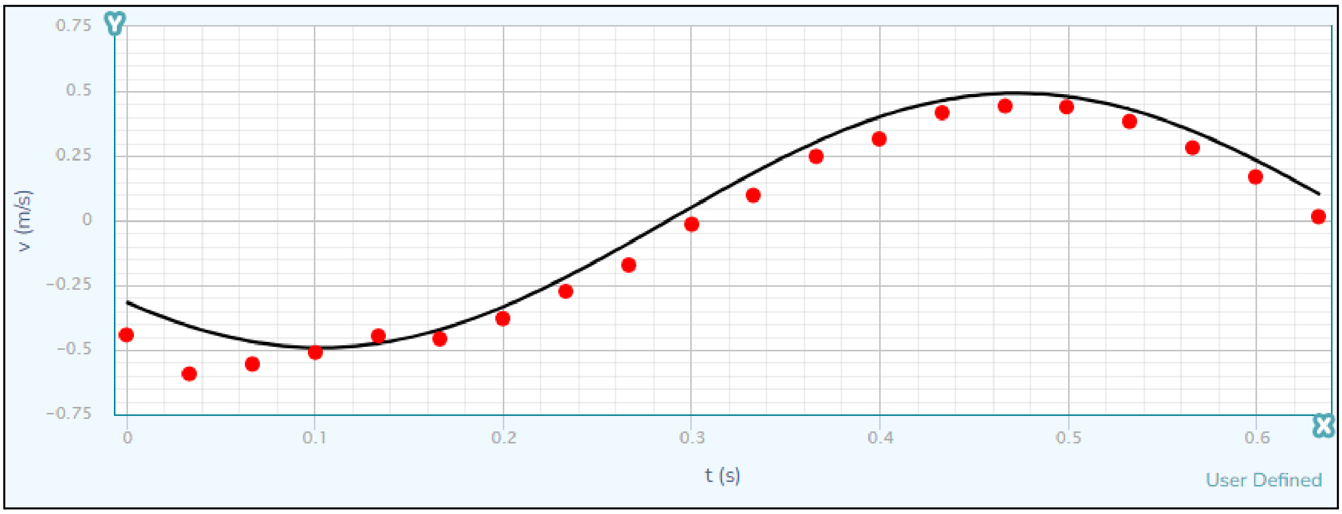


Segue a tabela comparando os valores encontrados no gráfico do deslocamento:

	Valor no deslocamento	Valor na veloc. com $\varepsilon = 3$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257 \pm 0,001138$	$0,0625272 \pm 0,002797$	$0,6309914926$	Sim

φ	$0,3343957 \pm 0,05695$	$0,650559 \pm 0,09526$	$2,848691429$	Possivelmente
ω	$9,12335 \pm 0,181$	$8,559148 \pm 0,2474$	$1,840539677$	Possivelmente

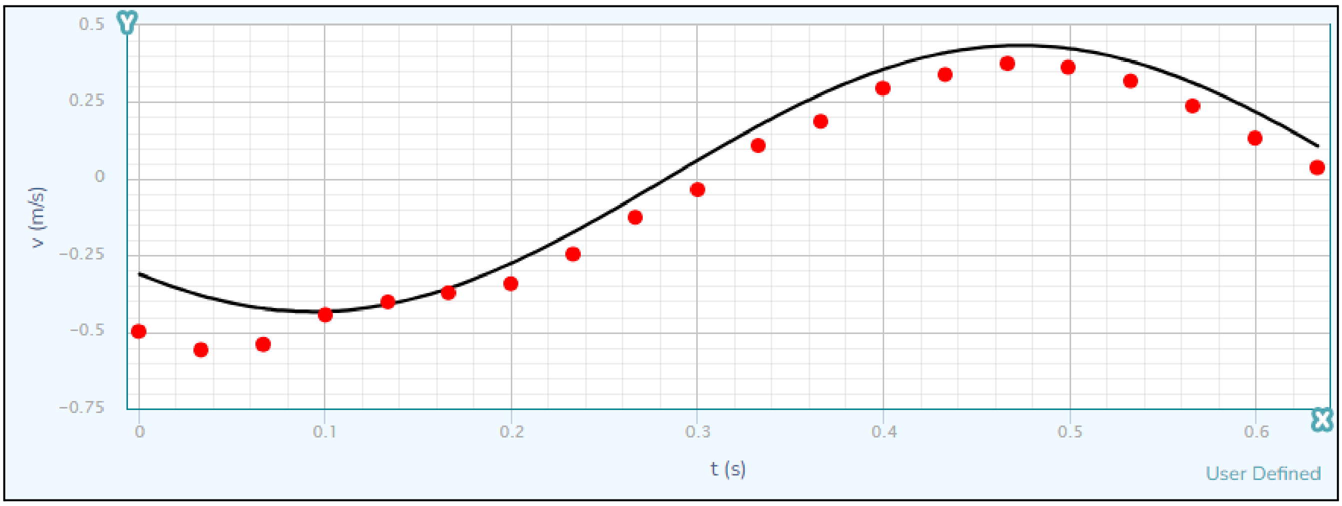
Para $\varepsilon = 4$, obtemos $A = 0,05793608 \pm 0,003277$, $\varphi = 0,7017956 \pm 0,1212$ e $\omega = 8,490238 \pm 0,3132$.



Segue a tabela comparando os valores encontrados no gráfico do deslocamento:

	Valor no deslocamento	Valor na veloc. com $\varepsilon = 4$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257 \pm 0,001138$	$0,05793608 \pm 0,003277$	$1,872741639$	Possivelmente
φ	$0,3343957 \pm 0,05695$	$0,7017956 \pm 0,1212$	$2,743567677$	Possivelmente
ω	$9,12335 \pm 0,181$	$8,490238 \pm 0,3132$	$1,750189145$	Possivelmente

Para $\varepsilon = 5$, obtemos $A = 0,05246612 \pm 0,00391$, $\varphi = 0,800575 \pm 0,1613$ e $\omega = 8,271158 \pm 0,4176$.



Segue a tabela comparando os valores encontrados no gráfico do deslocamento:

	Valor no deslocamento	Valor na veloc. com $\varepsilon = 5$	Z	Equivalentes?

A	$0,06443257\,\pm\,0,001138$	$0,05246612\,\pm\,0,00391$	$0,123480152$	Sim
φ	$0,3343957\,\pm\,0,05695$	$0,800575\,\pm\,0,1613$	$2,725263245$	Possivelmente
ω	$9,12335\,\pm\,0,181$	$8,271158\,\pm\,0,4176$	$1,872380836$	Possivelmente

Com os valores de velocidade, vamos calcular a aceleração usando o mesmo método de derivação numérica:

$$a_i = \frac{v_{i+\varepsilon} - v_{i-\varepsilon}}{t_{i+\varepsilon} - t_{i-\varepsilon}}$$

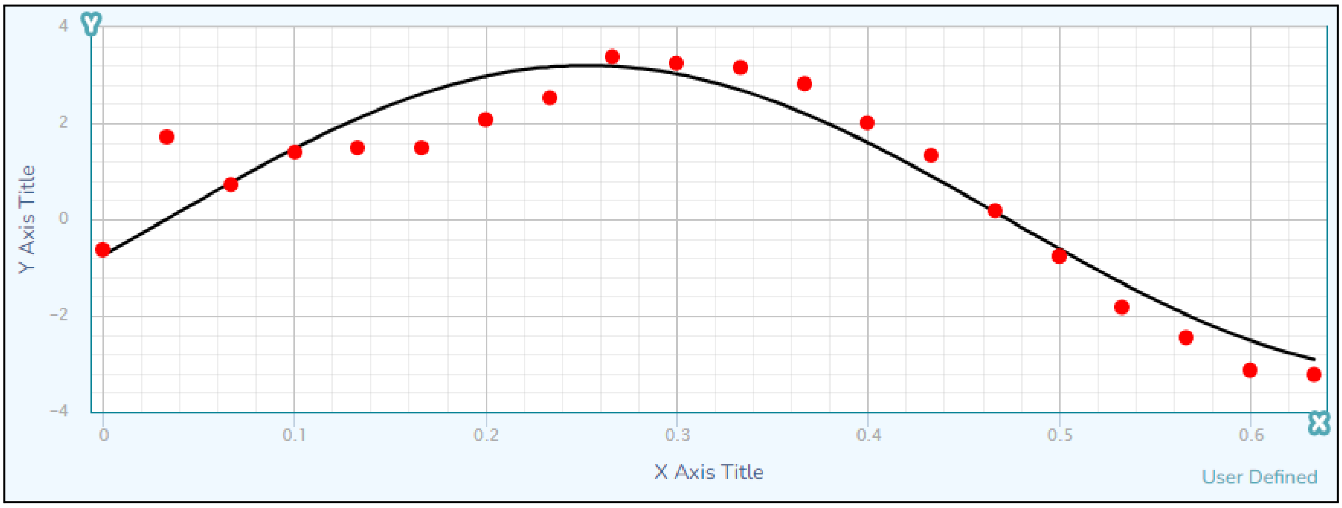
Como os resultados de equivalência não variaram muito com os diferentes valores de ε, vamos utilizar as velocidades obtidas com $\varepsilon = 5$ para calcular as acelerações, com o objetivo de manter a melhor precisão. Para a aceleração, mantemos variando ε entre 2 e 5.

t (s)	$\varepsilon = 2$		$\varepsilon = 3$		$\varepsilon = 4$		$\varepsilon = 5$	
	a	Δa	a	Δa	a	Δa	a	Δa
0,0	0	30	0	20	0	20	1	7
0,0	0	30	0	20	0	20	1	8
0,1	0	20	0	20	0	20	2	9
0,1	0	20	1	6	1	9	2	8
0,1	0	10	2	7	1	5	2	7
0,2	1	9	2	7	2	5	2	4
0,2	2	9	2	6	2	6	2	5
0,2	3	7	3	7	2	5	3	5
0,3	3	9	3	6	3	6	2	5
0,3	3	8	3	6	3	5	2	5
0,3	3	8	3	6	3	5	2	4
0,4	3	7	3	5	2	4	2	3
0,4	2	7	2	4	2	3	1	3
0,4	1	6	1	5	1	2	1	2
0,5	0	4	0	5	0	2	0,2	0,7
0,5	-1	5	-1	5	-1	2	-1	2
0,5	-2	6	-2	4	-1	3	-1	2
0,6	-2	7	-2	5	-2	4	-2	3
0,6	-3	8	-3	6	-3	4	-2	3
0,6	-3	8	-3	6	-3	5	-2	4
0,7	-3	8	-3	6	-3	5	-2	4
0,7	-3	8	-3	5	-2	4	-2	3
0,7	-2	7	-2	4	-2	3	-1	3
0,8	-1	6	-1	4	-1	2	-1	2
0,8	0	5	0	3	0	2	-0,3	0,7
0,8	1	5	1	3	1	2	0,5	1
0,9	2	6	2	4	1	3	1	2

0,9	2	7	2	5	2	4	2	3
0,9	3	7	3	6	2	4	2	3
1,0	3	8	3	6	3	5	2	4
1,0	3	8	3	6	3	5	2	4
1,0	3	8	3	5	2	3	2	3
1,1	2	7	2	5	2	3	2	3
1,1	2	6	1	4	1	3	1	2
1,1	1	5	0	3	0	2	0,4	0,8
1,2	-1	5	-1	3	0	2	-0,2	0,7
1,2	-2	6	-1	4	-1	3	-1	2
1,2	-2	7	-2	4	-2	4	-2	3
1,3	-3	7	-3	6	-2	4	-2	3
1,3	-3	8	-3	6	-3	5	-2	4
1,3	-3	8	-3	6	-3	5	-2	4
1,4	-3	8	-3	5	-2	4	-2	3
1,4	-3	7	-2	5	-2	4	-2	5
1,4	-2	6	-2	4	-2	5	-2	4
1,5	-1	5	-2	7	-2	5	-1	4
1,5	0	10	-1	6	-1	4	-1	3
1,5	-1	9	0	5	0	3	0	2
1,6	0	8	0	5	1	3	-2	8
1,6	0	7	1	5	0	10	-1	8
1,6	0	20	0	20	0	8	0	6
1,7	0	30	0	20	0	7	0	6
1,7	0	30	0	20	0	20	1	4,8

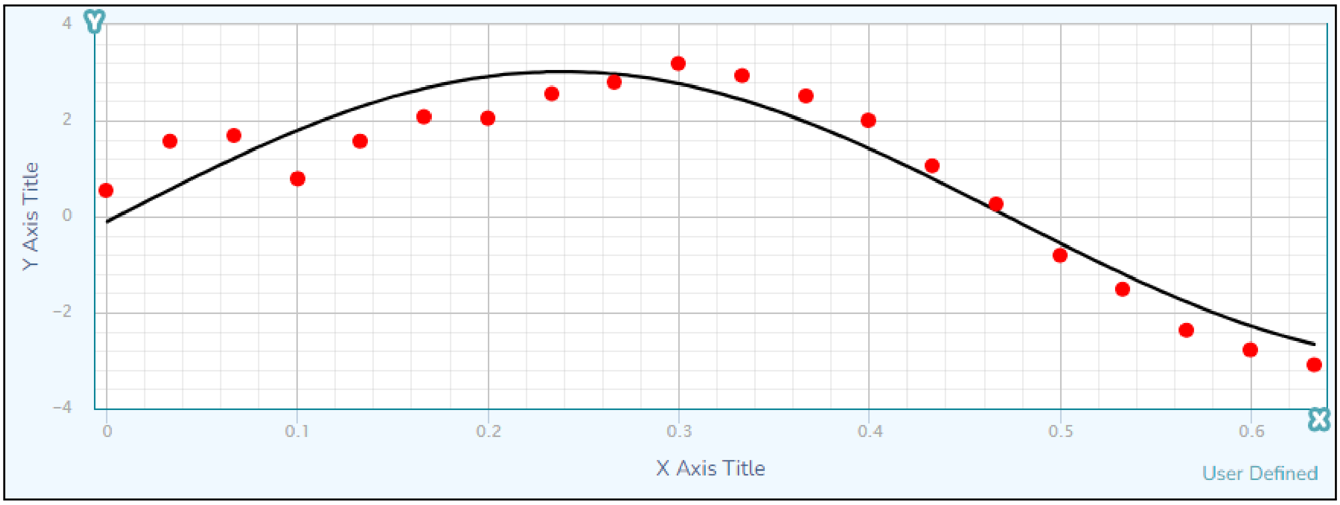
Derivando $v(t) =- A\,\omega sen(\omega t + \varphi)$, obtemos $a(t) =- A\,\omega^2 cos(\omega t + \varphi)$. Seguem os gráficos de a, ajustados pela curva de ajuste correspondente, para cada valor de ε.

Para $\varepsilon = 2$, obtemos $A = 0,06271644 \pm 0,007214$, $\varphi = 1,338544 \pm 0,1112$ e $\omega = 7,140653 \pm 0,3014$.



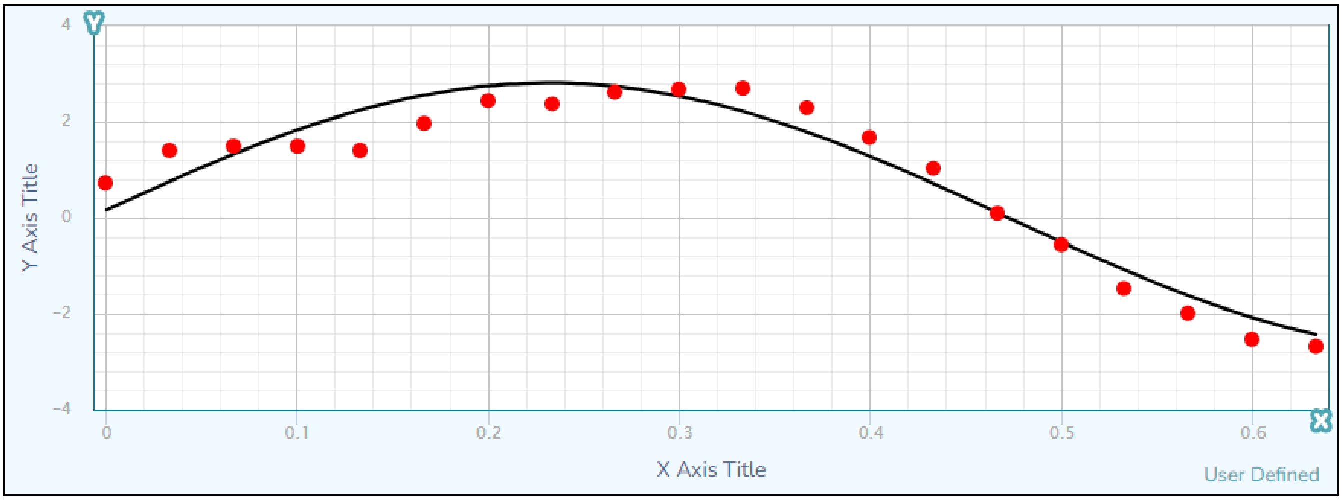
	Valor no deslocamento	Valor na aceleração com $\varepsilon = 2$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257 \pm 0,001138$	$0,06271644 \pm 0,007214$	$0,03240441789$	Sim
φ	$0,3343957 \pm 0,05695$	$1,338544 \pm 0,1112$	$8,037368849$	Não
ω	$9,12335 \pm 0,181$	$7,140653 \pm 0,3014$	$5,639517048$	Não

Para $\varepsilon = 3$, obtemos $A = 0,066643681 \pm 0,007493$, $\varphi = 1,535245 \pm 0,1134$ e $\omega = 6,735473 \pm 0,2963$.



	Valor no deslocamento	Valor na aceleração com $\varepsilon = 3$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257 \pm 0,001138$	$0,066643681 \pm 0,007493$	$0,04172027261$	Sim
φ	$0,3343957 \pm 0,05695$	$1,535245 \pm 0,1134$	$9,463177081$	Não
ω	$9,12335 \pm 0,181$	$6,735473 \pm 0,2963$	$6,877330526$	Não

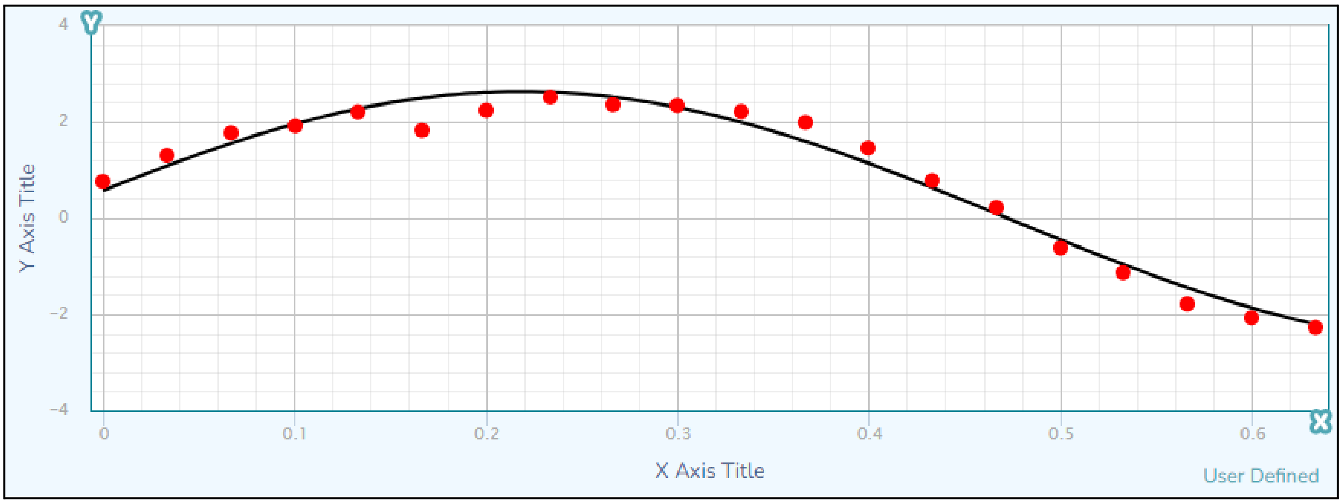
Para $\varepsilon = 4$, obtemos $A = 0,06551669 \pm 0,005859$, $\varphi = 1,626894 \pm 0,09175$ e $\omega = 6,542962 \pm 0,2353$.



	Valor no deslocamento	Valor na aceleração com $\varepsilon = 4$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257 \pm 0,001138$	$0,06551669 \pm 0,005859$	$0,02053559009$	Sim

φ	$0,3343957\ \pm\ 0,05695$	$1,626894\ \pm\ 0,09175$	11,96892887	Não
ω	$9,12335\ \pm\ 0,181$	$6,542962\ \pm\ 0,2353$	8,692211772	Não

Para $\varepsilon\ =\ 4$, obtemos $A\ =\ 0,06843269\ \pm\ 0,0041$, $\varphi\ =\ 1,792738\ \pm\ 0,0636$ e $\omega\ =\ 6,192545\ \pm\ 0,1577$.



	Valor no deslocamento	Valor na aceleração com $\varepsilon\ =\ 5$	Z	Equivalentes?
A	$0,06443257\ \pm\ 0,001138$	$0,06843269\ \pm\ 0,0041$	$0,07601022907$	Sim
φ	$0,3343957\ \pm\ 0,05695$	$1,792738\ \pm\ 0,0636$	11,96892887	Não
ω	$9,12335\ \pm\ 0,181$	$6,192545\ \pm\ 0,1577$	12,2084779	Não

IV. Conclusão

V. Referências

[1] LOPES, Wilson. **Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude.** Universidade de Guarulhos - SP. 2008. 8 páginas. Disponível em: https://physika.info/site/documents/9106-27243-1-PB.pdf

[2] Aula gravada da disciplina 8.01 - Mechanics: Kinematics and Dynamics do MIT, lecionada pelo professor Walter Lewin. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=tNpuTx7UQbw&t=755s