

Eixo Medial e Curvas

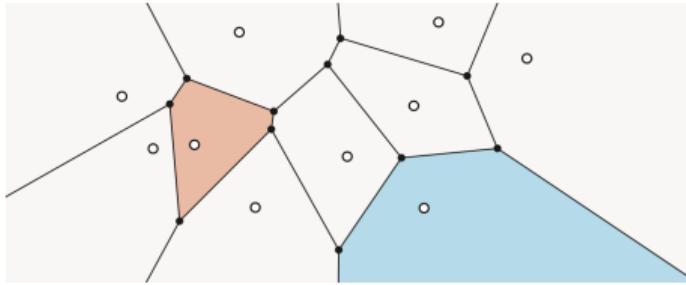
INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio



Diagrama de Voronoi

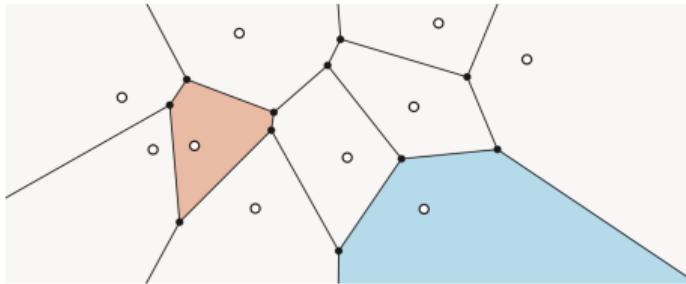


Propriedades:

- ▶ $\text{Vor}(S)$ é o *locus* dos centros de círculos máximos vazios
 - ▶ Círculos que não contém pontos de S



Diagrama de Voronoi

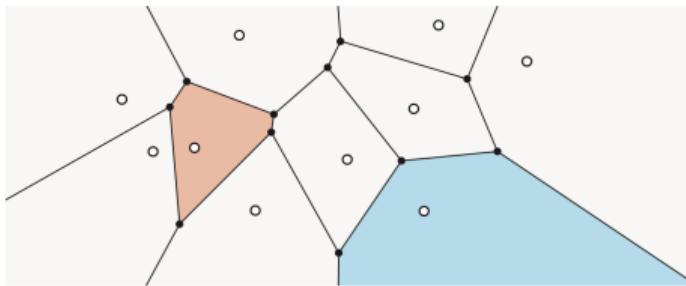


Propriedades:

- ▶ $\text{Vor}(S)$ é o *locus* dos centros de círculos máximos vazios
 - ▶ Círculos que não contém pontos de S
- ▶ $\text{Vor}(S)$ é o *locus* equidistante a 2 ou mais geradores



Diagrama de Voronoi



Propriedades:

- ▶ $Vor(S)$ é o *locus* dos centros de círculos máximos vazios
 - ▶ Círculos que não contém pontos de S
- ▶ $Vor(S)$ é o *locus* equidistante a 2 ou mais geradores
- ▶ $Vor(S)$ é o *locus* de encontro de frentes de propagação
 - ▶ Difusão uniforme a partir dos pontos geradores



Eixo medial

Considere um polígono convexo P

- ▶ ∂P como fonte da difusão
- ▶ Eixo medial é o *locus* de encontro das frentes

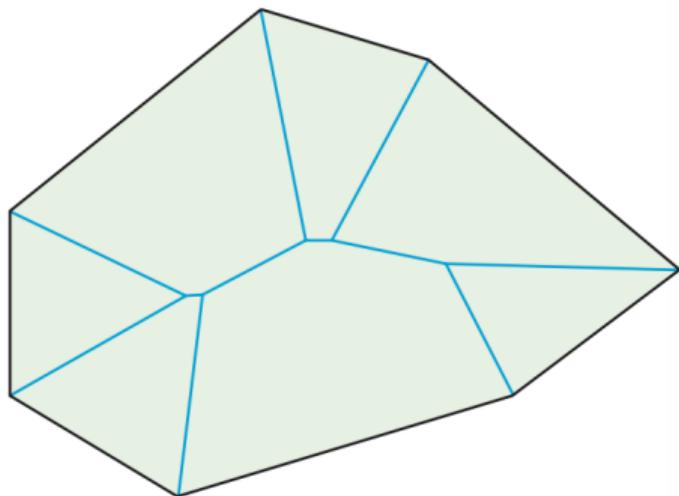
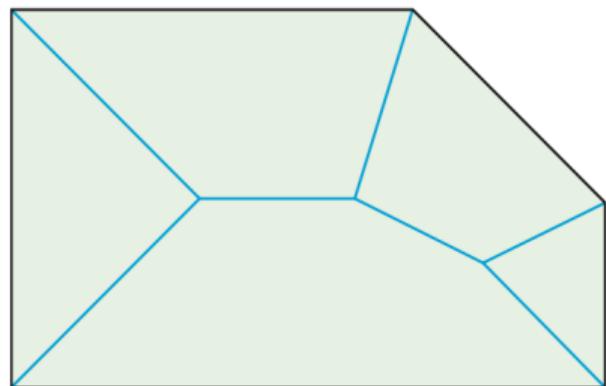
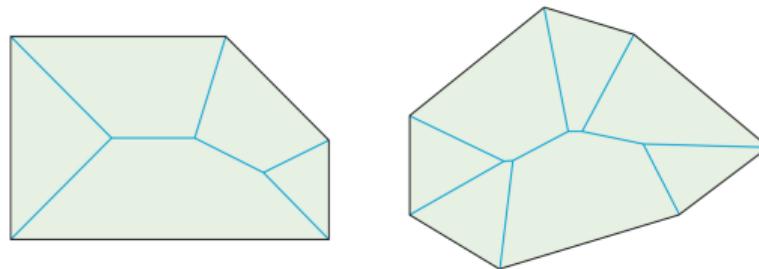


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Eixo medial

Definição

- Eixo medial $M(P)$ de um polígono P é o fecho do conjunto de pontos em P que têm 2 ou mais pontos em ∂P que são mais próximos.



Eixo medial

Definição

- Eixo medial $M(P)$ de um polígono P é o fecho do conjunto de pontos em P que têm 2 ou mais pontos em ∂P que são mais próximos.
 - O *fecho* garante que os vértices de ∂P são incluídos em $M(P)$
 - Definição mais genérica do que para polígonos convexos

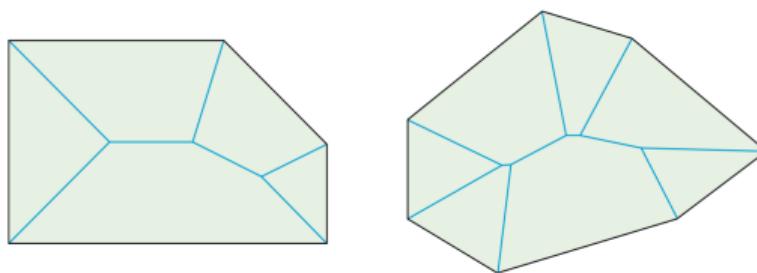
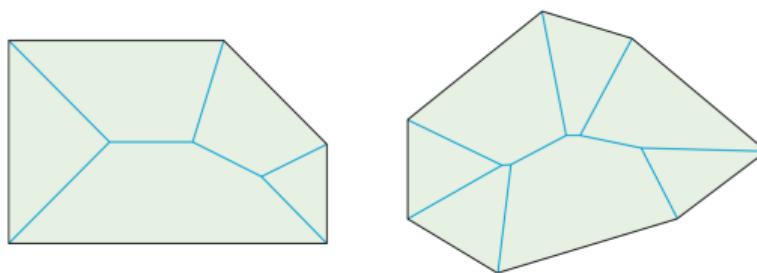


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Eixo medial

Definição

- ▶ Eixo medial $M(P)$ de um polígono P é o fecho do conjunto de pontos em P que têm 2 ou mais pontos em ∂P que são mais próximos.
 - ▶ O *fecho* garante que os vértices de ∂P são incluídos em $M(P)$
 - ▶ Definição mais genérica do que para polígonos convexos



- ▶ Eixo medial de um polígono convexo forma uma árvore de segmentos com folhas nos vértices de P



Eixo medial

Propriedades

- ▶ Centros de círculos maximais que não interceptam ∂P
- ▶ Pontos equidistantes de dois ou mais pontos de ∂P
- ▶ Encontro de frentes de propagação da difusão

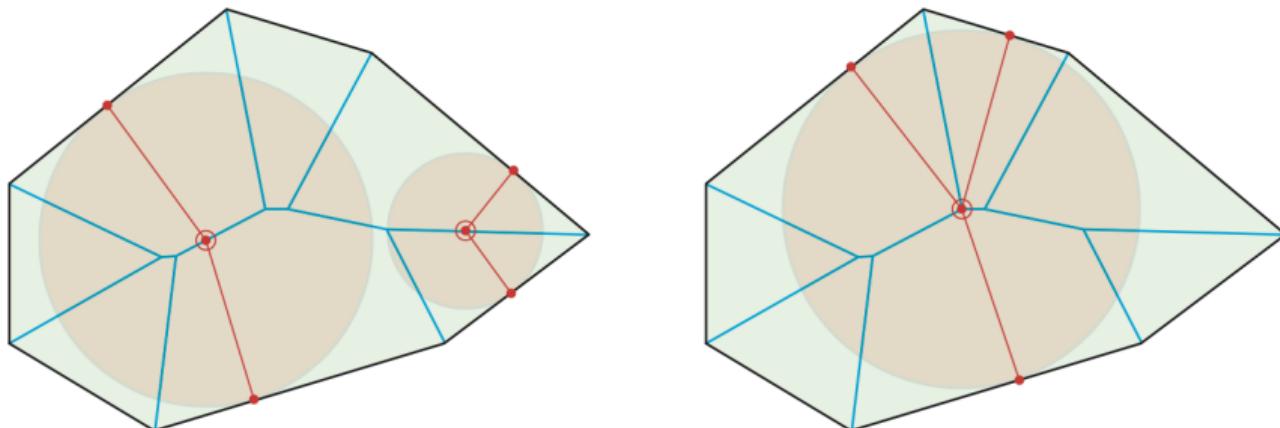


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Eixo medial

Aplicações

- ▶ Reconhecimento de formas
 - ▶ Em especial, formas biológicas
- ▶ Reconhecimento de caracteres
- ▶ Projeto de fontes
- ▶ Geração de malhas
- ▶ GIS
- ▶ ...



Poliedro do eixo medial

Construção

- ▶ Eleva cada ponto \mathbf{m} de $M(P)$ a uma altura dado pelo raio maximal do círculo centrado em \mathbf{m}
- ▶ O poliedro do eixo medial é o fecho convexo desses pontos deslocados

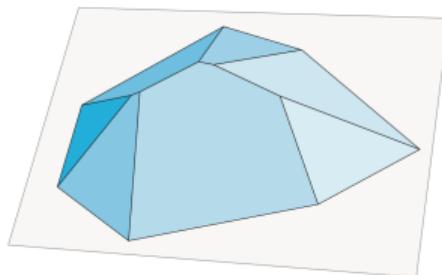
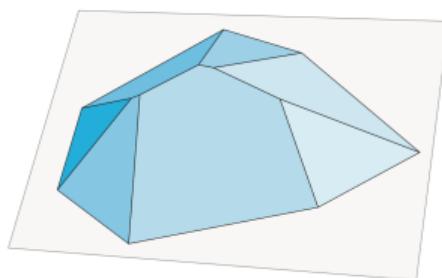


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Poliedro do eixo medial

Construção

- ▶ Eleva cada ponto \mathbf{m} de $M(P)$ a uma altura dado pelo raio maximal do círculo centrado em \mathbf{m}
- ▶ O poliedro do eixo medial é o fecho convexo desses pontos deslocados



- ▶ Todas as rampas têm inclinação de 45°



Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011



Poliedro do eixo medial

Construção

- Analogia com deposição de areia numa base poligonal



Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011



Eixo medial de polígono convexo

Procedimento para construção



Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011



Eixo medial de polígono convexo

Procedimento para construção

- ▶ A partir dos vértices, traça bissetrizes
- ▶ Determina a primeira interseção (bissetrizes adjacentes)
- ▶ Elimina aresta entre bissetrizes: constrói $M(P_{n-1})$

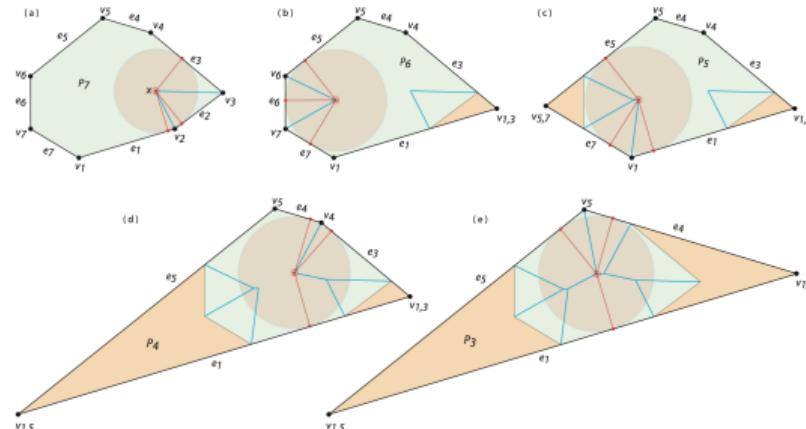


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Eixo medial de polígono convexo

Algoritmo: Construção de eixo medial $M(P_n)$

- ▶ Acha par adjacente de bissetrizes que se interceptam primeiro
 - ▶ Bissetrizes dos vértices \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_{i+1}
 - ▶ Ponto de interseção como \mathbf{x}
- ▶ Elimina aresta $e_i = \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}}$
 - ▶ Estende e_{i-1} e e_{i+1}
 - ▶ Cria vértice virtual \mathbf{v}
- ▶ Constrói, recursivamente, $M(P_{n-1})$
 - ▶ $M(P_3)$ trivial: encontro das bissetrizes
- ▶ Altera $M(P_{n-1})$ para ser $M(P_n)$
 - ▶ Elimina $\overline{\mathbf{xv}}$
 - ▶ Acrescenta $\overline{\mathbf{xv}_i}$ e $\overline{\mathbf{xv}_{i+1}}$



Eixo medial de polígono convexo

Detalhes do algoritmo

- ▶ Redução de polígono para P_{n-1} :
 - ▶ Determina o primeiro par de bissetrizes



Eixo medial de polígono convexo

Detalhes do algoritmo

- ▶ Redução de polígono para P_{n-1} :
 - ▶ Determina o primeiro par de bissetrizes
 - ▶ Tem que ser de vértices adjacentes (n candidatos)
 - ▶ Escolhe a de menor “tempo de interseção”: distância do círculo maximal
 - ▶ Constrói polígono P_{n-1}



Eixo medial de polígono convexo

Detalhes do algoritmo

- ▶ Redução de polígono para P_{n-1} :
 - ▶ Determina o primeiro par de bissetrizes
 - ▶ Tem que ser de vértices adjacentes (n candidatos)
 - ▶ Escolhe a de menor “tempo de interseção”: distância do círculo maximal
 - ▶ Constrói polígono P_{n-1}
- ▶ Construção de $M(P_{n-1})$



Eixo medial de polígono convexo

Detalhes do algoritmo

- ▶ Redução de polígono para P_{n-1} :
 - ▶ Determina o primeiro par de bissetrizes
 - ▶ Tem que ser de vértices adjacentes (n candidatos)
 - ▶ Escolhe a de menor “tempo de interseção”: distância do círculo maximal
 - ▶ Constrói polígono P_{n-1}
- ▶ Construção de $M(P_{n-1})$

Ordem de complexidade

- ▶ Etapas
 - ▶ Redução do polígono: $O(n)$
 - ▶ Construção de $M(P_{n-1})$: $O(n)$
- ▶ Total: $O(n^2)$



Eixo medial de polígono convexo

Detalhes do algoritmo

- ▶ Redução de polígono para P_{n-1} :
 - ▶ Determina o primeiro par de bissetrizes
 - ▶ Tem que ser de vértices adjacentes (n candidatos)
 - ▶ Escolhe a de menor “tempo de interseção”: distância do círculo maximal
 - ▶ Constrói polígono P_{n-1}
- ▶ Construção de $M(P_{n-1})$

Ordem de complexidade

- ▶ Etapas
 - ▶ Redução do polígono: $O(n)$
 - ▶ Construção de $M(P_{n-1})$: $O(n)$
- ▶ Total: $O(n^2)$
- ▶ Uso de lista de prioridade reduz para $O(n \log n)$



Eixo medial de polígono convexo

Detalhes do algoritmo

- ▶ Redução de polígono para P_{n-1} :
 - ▶ Determina o primeiro par de bissetrizes
 - ▶ Tem que ser de vértices adjacentes (n candidatos)
 - ▶ Escolhe a de menor “tempo de interseção”: distância do círculo maximal
 - ▶ Constrói polígono P_{n-1}
- ▶ Construção de $M(P_{n-1})$

Ordem de complexidade

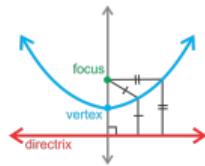
- ▶ Etapas
 - ▶ Redução do polígono: $O(n)$
 - ▶ Construção de $M(P_{n-1})$: $O(n)$
- ▶ Total: $O(n^2)$
- ▶ Uso de lista de prioridade reduz para $O(n \log n)$
- ▶ É possível construir em $O(n)$, inclusive para polígonos côncavos



Polígono côncavos

Eixo medial

- ▶ Vértices continuam como folhas da árvore
- ▶ Areias de vértices côncavos são arcos de parábola



Polígono côncavos

Eixo medial

- ▶ Vértices continuam como folhas da árvore
- ▶ Areias de vértices côncavos são arcos de parábola

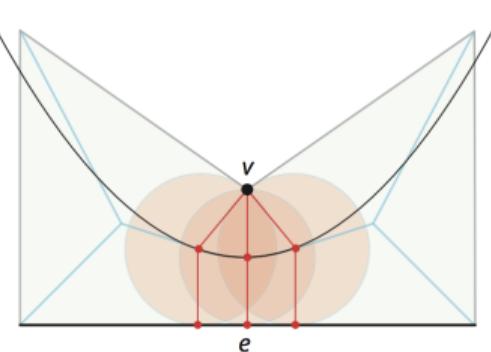
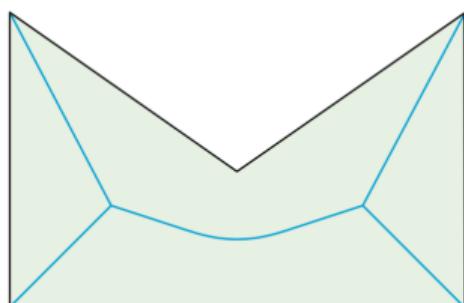
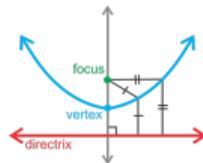
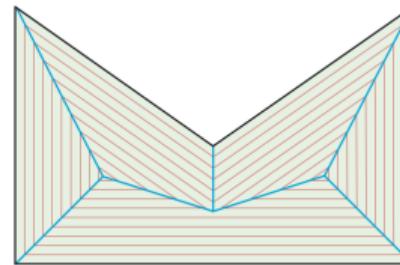
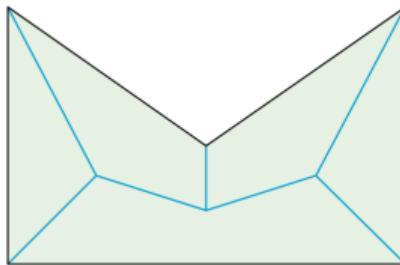


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Esqueleto reto

Forma simplificada de um eixo medial

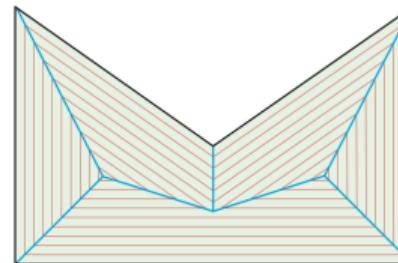
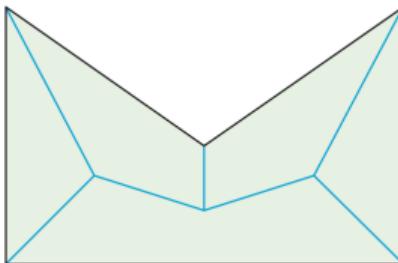
- ▶ Elimina arcos em polígonos côncavos
- ▶ Equivalente a eixo medial em polígonos convexos



Esqueleto reto

Forma simplificada de um eixo medial

- ▶ Elimina arcos em polígonos côncavos
- ▶ Equivalente a eixo medial em polígonos convexos



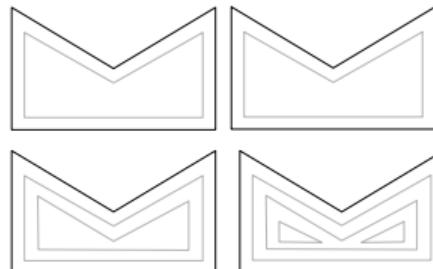
Propriedade

- ▶ Subdivide polígono em n regiões
 - ▶ Cada uma associada a cada aresta

Esqueleto reto

Construção geométrica

- ▶ Continuamente, encolhe o polígono
 - ▶ Areias se reduzem a tamanho zero
 - ▶ Vértice côncavo colide com aresta
 - ▶ Subdivide polígono e continua encolhimento
- ▶ Vértices são traqueados durante encolhimento
 - ▶ Formam as arestas do esqueleto



Poliedro do esqueleto reto

Propriedades

- ▶ Todas as faces são planares
- ▶ Todas as faces têm a mesma inclinação
 - ▶ Como no poliedro de eixo medial

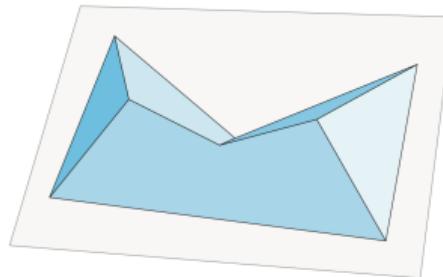
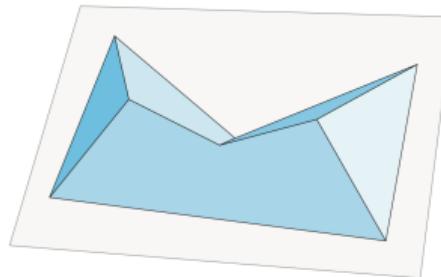


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Poliedro do esqueleto reto

Propriedades

- ▶ Todas as faces são planares
- ▶ Todas as faces têm a mesma inclinação
 - ▶ Como no poliedro de eixo medial



- ▶ Aplicação prática
 - ▶ Projeto de telhados com mesma inclinação



Esqueleto reto

Observações finais

- ▶ Melhor algoritmo conhecido para construção é $O(n^{\frac{17}{11}})$



Esqueleto reto

Observações finais

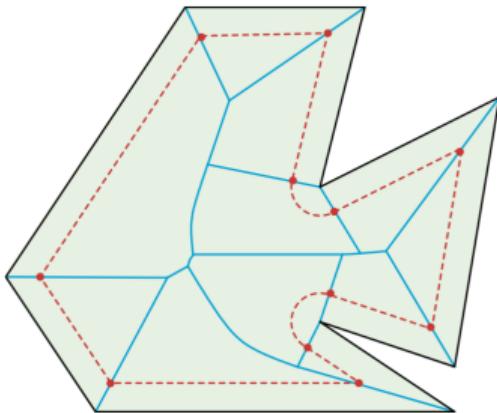
- ▶ Melhor algoritmo conhecido para construção é $O(n^{\frac{17}{11}})$
- ▶ Extensão para poliedros 3D improvável
 - ▶ Definido apenas para poliedros ortogonais
 - ▶ Faces formam ângulos retos
 - ▶ Arestas paralelas aos eixos cartesianos



Offset curve

Curva de offset de um polígono

- ▶ Segmentos de reta paralelos a arestas
- ▶ Arcos circulares centrados em vértices côncavos



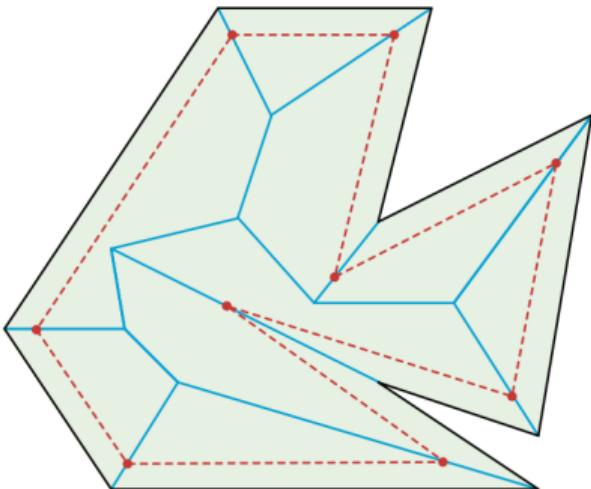
- ▶ Note relação com eixo medial



Offset curve

Curva de offset de um polígono baseada no esqueleto reto

- ▶ Arcos dão lugar às interseções dos segmentos



- ▶ Note relação com esqueleto reto

Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Soma de Minkowski

Definição

$$A \oplus B = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad | \quad \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{y} \in B$$

- ▶ onde $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é a soma vetorial dos dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y}



Soma de Minkowski

Definição

$$A \oplus B = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad | \quad \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{y} \in B$$

- ▶ onde $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é a soma vetorial dos dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y}

Exemplo: disco e polígono

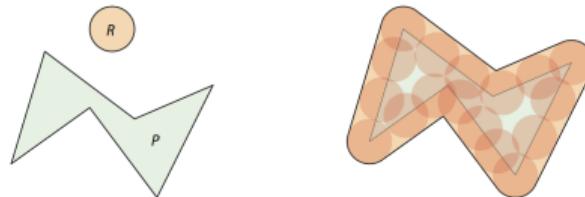


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

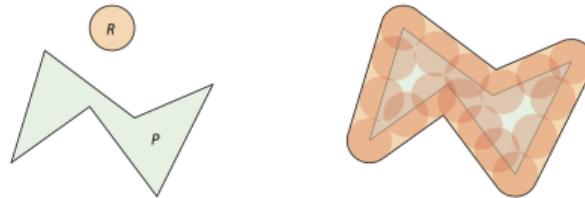
Soma de Minkowski

Definição

$$A \oplus B = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad | \quad \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{y} \in B$$

- ▶ onde $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é a soma vetorial dos dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y}

Exemplo: disco e polígono



- ▶ A soma de Minkowski é toda a região
- ▶ Resulta numa versão expandida de P : $P^+ = P \oplus R$

Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Soma de Minkowski

Aplicação

- ▶ Planejamento de movimento em robótica

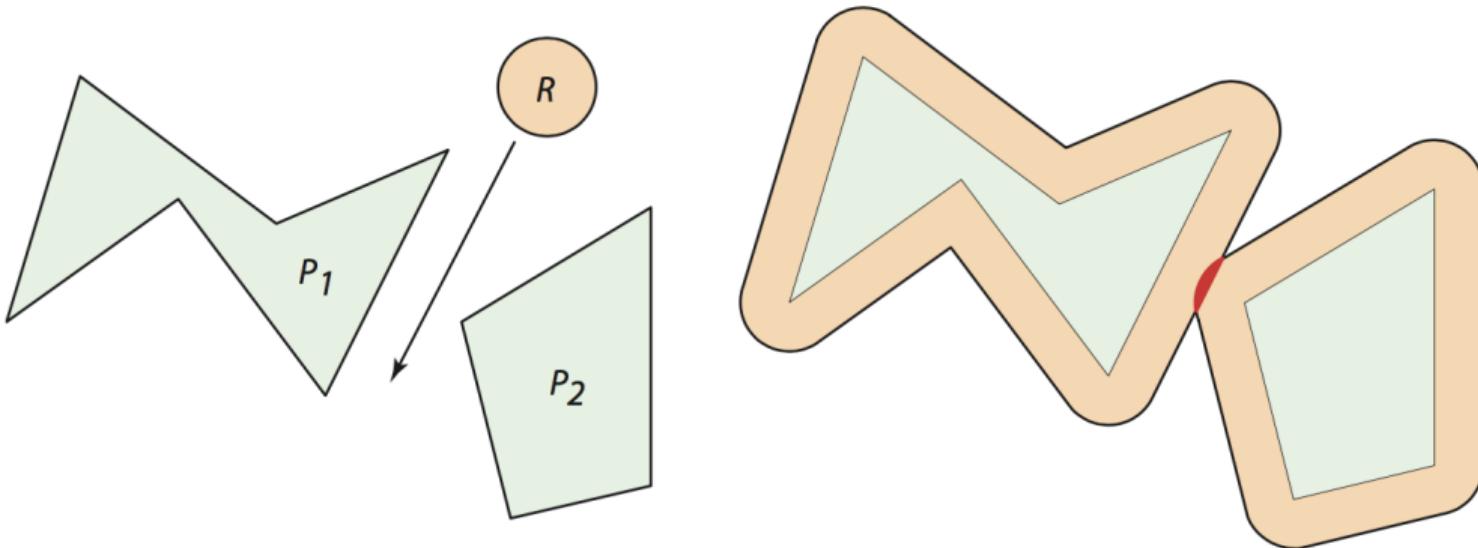


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011



Planejamento de movimento

Robô com forma de poliedro convexo

- ▶ Planejamento de movimento de translação
- ▶ Soma de Minkowski com reflexão do robô: $P \oplus -R$

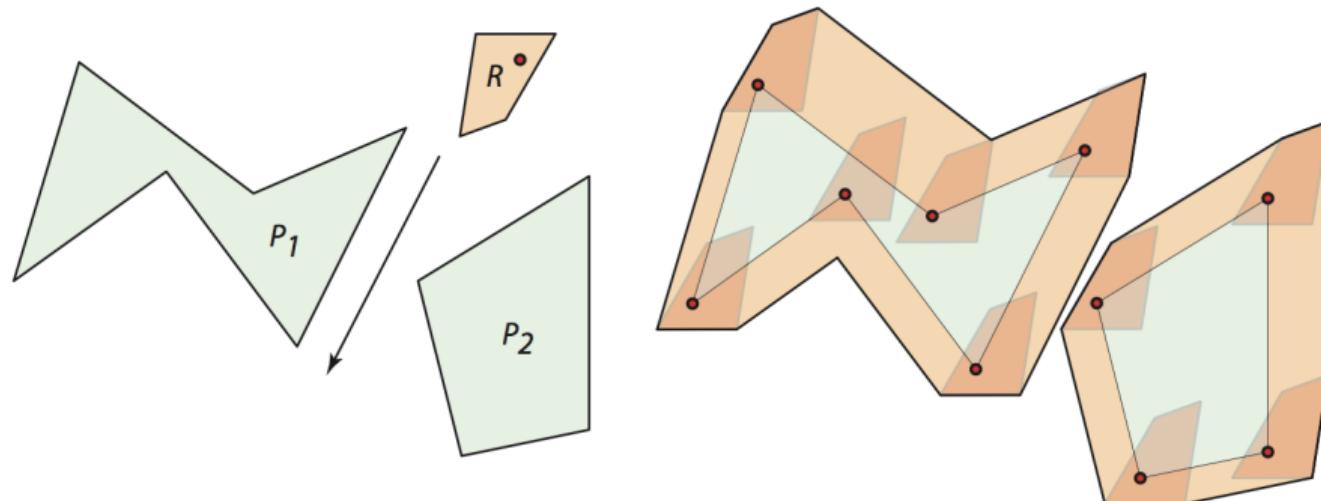


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Convolução de curvas

Definição

- Dadas duas curvas fechadas α e β , suaves e planares (orientadas no sentido antihorário), a convolução das curvas é dada por:

$$\alpha * \beta = \{ \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \alpha, \mathbf{y} \in \beta, \vec{t}_{\mathbf{x}} = \vec{t}_{\mathbf{y}} \}$$

onde: $\vec{t}_{\mathbf{p}}$ é o vetor tangente em \mathbf{p}

Temos:

$$\vec{t}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = \vec{t}_{\mathbf{x}} = \vec{t}_{\mathbf{y}}$$



Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Convolução de curvas

$$\partial P * \partial(-R)$$

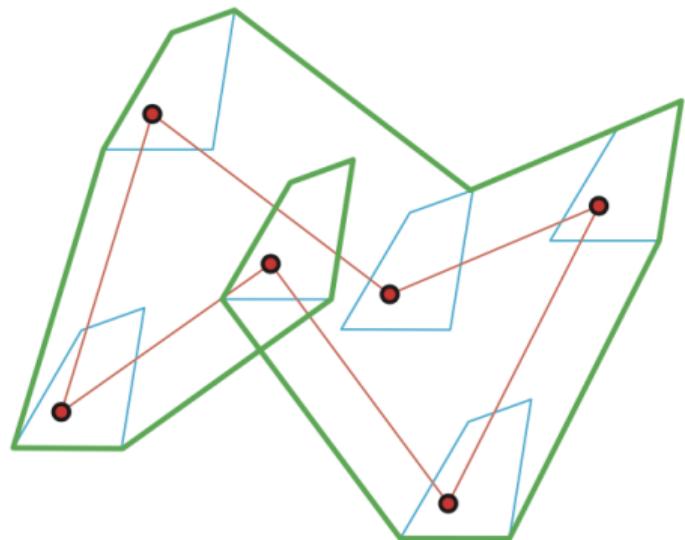
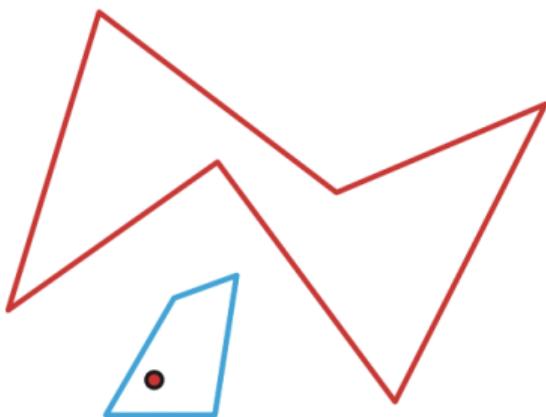
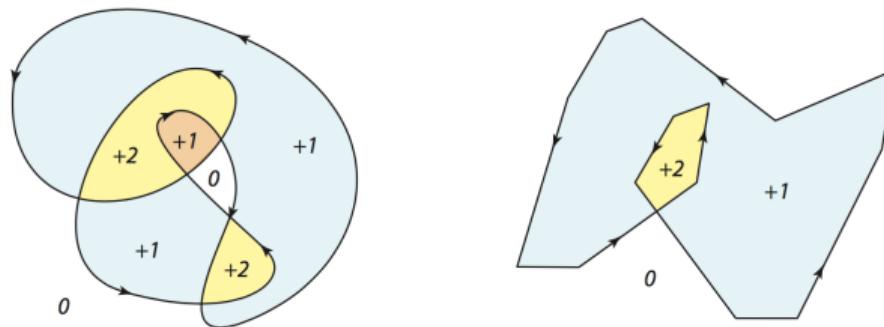


Figura extraída de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Índice de uma curva plana

Dada uma curva qualquer planar e um ponto p fora da curva, o índice da curva é o número inteiro de voltas completas que a curva descreve ao redor de p

- ▶ Sentido antihorário incrementa contador
- ▶ Sentido horário decrementa contador



- ▶ Note que as regiões com índice positivo correspondem à soma de Minkowski.

Planejamento de movimento

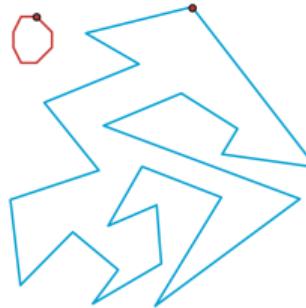
Determinação de $\partial(A \oplus B)$

- ▶ Computa $\partial A * \partial B$
- ▶ Identifica ciclos da convolução
- ▶ Matém ciclos com índices positivos
- ▶ Combina ciclos e constrói $\partial(A \oplus B)$



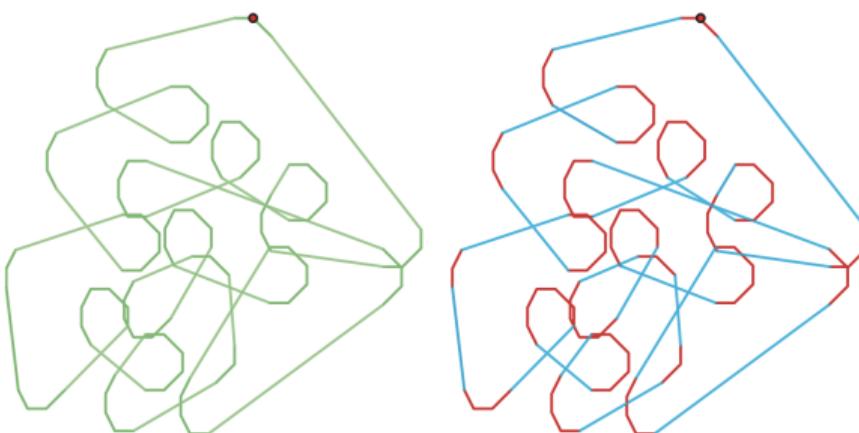
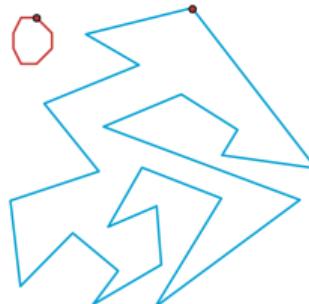
Planejamento de movimento

Computação de $\partial A * \partial B$



Planejamento de movimento

Computação de $\partial A * \partial B$



Figuras extraídas de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011

Suavização e encurtamento de curvas

Transformação de ponto médio

- ▶ Substitui vértices v_i e v_{i+1} pelo ponto médio $v_{i+\frac{1}{2}}$
 - ▶ Curva aberta: curva é suavizada e diminui de um vértice



Suavização e encurtamento de curvas

Transformação de ponto médio

- ▶ Substitui vértices v_i e v_{i+1} pelo ponto médio $v_{i+\frac{1}{2}}$
 - ▶ Curva aberta: curva é suavizada e diminui de um vértice



- ▶ Curva fechada: curva é suavizada e mantém n° de vértices



Suavização e encurtamento de curvas

Transformação de ponto médio

- ▶ Substitui vértices v_i e v_{i+1} pelo ponto médio $v_{i+\frac{1}{2}}$
 - ▶ Curva aberta: curva é suavizada e diminui de um vértice



- ▶ Curva fechada: curva é suavizada e mantém n° de vértices



- ▶ Desvantagem

- ▶ Curvas originalmente simples podem se tornar não simples



Suavização e encurtamento de curvas

Pela equação da difusão do calor

- ▶ Considere a curva suave parametrizada pelo comprimento de arco

$$C(s) = (x(s), y(s))$$

- ▶ dC/ds é a “velocidade” de um carro ao longo da curva
- ▶ d^2C/ds^2 é a “aceleração”
- ▶ Curvatura: $\kappa \hat{n} = d^2C/ds^2$, onde \hat{n} é a normal unitária



Suavização e encurtamento de curvas

Adicionando o tempo t

- ▶ $C(s, t)$ descreve como a curva evolui com o tempo
- ▶ Equação de evolução da curva no tempo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} = \kappa \hat{n}$$

- ▶ Estipula que o ponto **p** da curva move-se na direção da normal com velocidade proporcional à curvatura



Suavização e encurtamento de curvas

Teorema

- ▶ Toda curva suave e simples permanece simples quando suavizada pela equação da difusão do calor



Suavização e encurtamento de curvas

Teorema

- ▶ Toda curva suave e simples permanece simples quando suavizada pela equação da difusão do calor

Curva discretizada

- ▶ Normal: soma das arestas

$$\vec{n}_i = (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i)$$

- ▶ Deslocamento do vértice

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + \delta \vec{n}_i$$



Suavização e encurtamento de curvas

Teorema

- ▶ Toda curva suave e simples permanece simples quando suavizada pela equação da difusão do calor

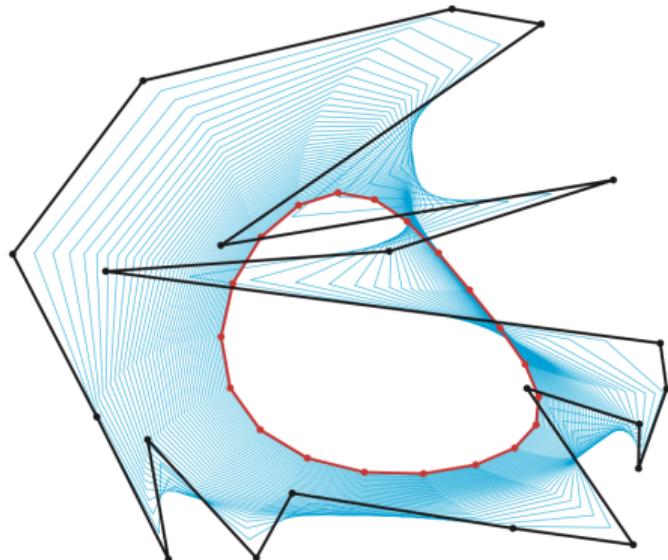
Curva discretizada

- ▶ Normal: soma das arestas

$$\vec{n}_i = (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i)$$

- ▶ Deslocamento do vértice

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + \delta \vec{n}_i$$



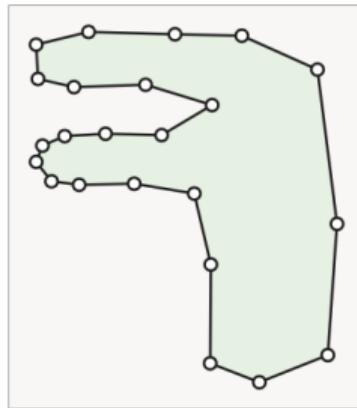
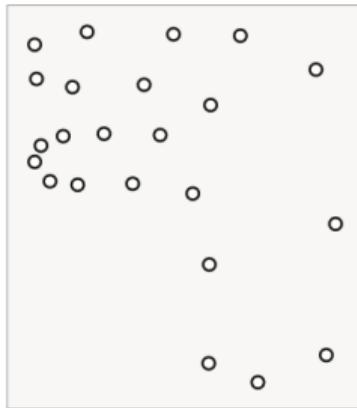
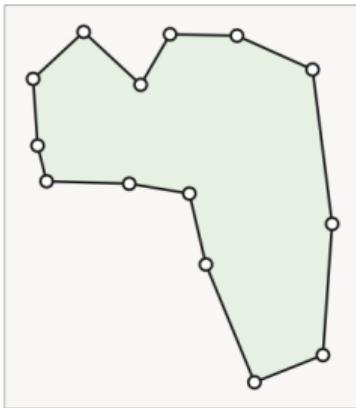
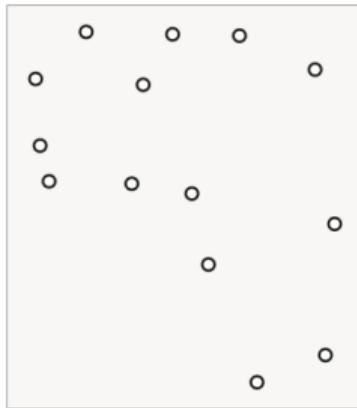
Figuras extraídas de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011



Reconstrução de curvas

Dado um conjunto de pontos densos

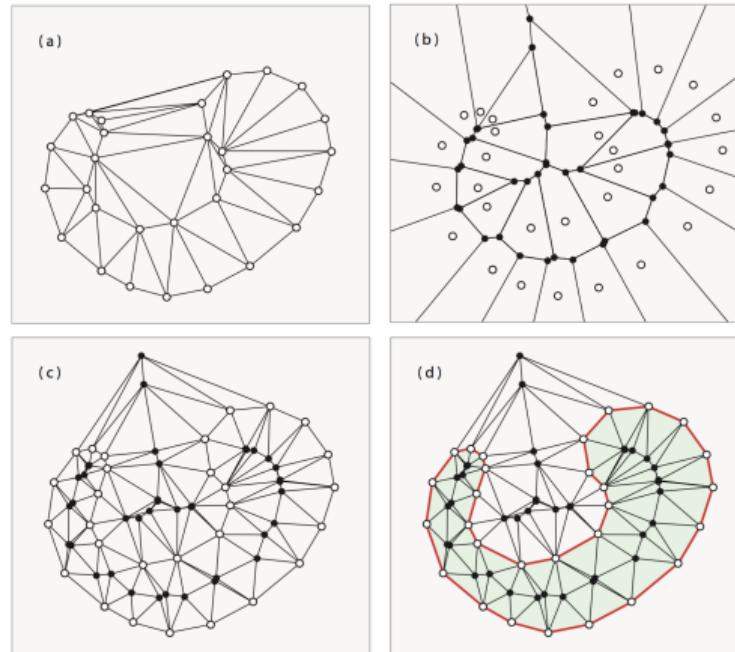
- Densidade baixa *versus* densidade adequada



Reconstrução de curvas

Algoritmo CRUST

- ▶ $\text{Del}(S)$
- ▶ $\text{Vor}(S)$
- ▶ $\text{Del}(S \cup V)$
- ▶ Curva



Figuras extraídas de *Discrete and Computational Geometry*, Devadoss and Rourke, 2011



Reconstrução de curvas

Algoritmo CRUST: dado o conjunto de pontos S

- ▶ Constrói o diagrama de Voronoi $Vor(S)$
 - ▶ V é o conjunto de vértices de $Vor(S)$
- ▶ Constrói a triangulação de Delaunay $Del(S \cup V)$
- ▶ Curva é composta por arestas de $Del(S \cup V)$ cujos vértices pertencem a S

