Polígonos

INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Polígonos

Polígonos são empregados para representação de objetos reais

- Boa aproximação
- Fácil manipulação computacional

Polígonos

Polígonos são empregados para representação de objetos reais

- Boa aproximação
- Fácil manipulação computacional

Definição:

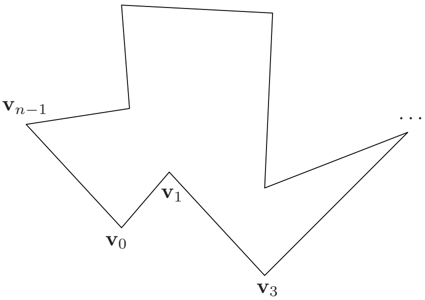
- Polígono é uma região do plano delimitada por uma sequência de segmentos de reta formando uma *curva simples fechada*
  - Curva simples fechada é homeomorfa a um círculo

Polígonos

Representação:

$$P = \{e_0 = \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1, e_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \ldots, e_{n-1} = \mathbf{v}_{n-1}\mathbf{v}_0\}$$

$$\text{com} \begin{cases} e_i \cap e_{i+1} = \mathbf{v}_{i+1} \\ e_i \cap e_j = \emptyset, \quad \text{se} \quad j \neq i+1 \end{cases}$$



Polígonos

Teorema de Jordan

- A fronteira ∂P de um polígono P particiona o plano em duas partes: o interior limitado e o exterior ilimitado

Polígonos

Teorema de Jordan

- A fronteira ∂P de um polígono P particiona o plano em duas partes: o interior limitado e o exterior ilimitado

Classificação de ponto: interior ou exterior

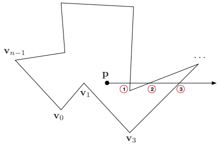
Polígonos

Teorema de Jordan

- A fronteira ∂P de um polígono P particiona o plano em duas partes: o interior limitado e o exterior ilimitado

Classificação de ponto: interior ou exterior

- A partir de um ponto **p**, traça-se um raio não paralelo às arestas e conta-se o número n de interseções com ∂P
  - Se n for par, ponto é exterior ao polígono
  - Se n for ímpar, ponto é interior ao polígono



Visibilidade

Problema de Klee

- Considerando que um polígono representa a planta baixa de um museu, quantos guardas são necessários para vigiar o museu, para que qualquer área do museu seja visível a pelo menos um guarda?
  - Considerando:
    - Guardas estacionários
    - Guardas com visão 2π

Visibilidade

Problema de Klee

- Considerando que um polígono representa a planta baixa de um museu, quantos guardas são necessários para vigiar o museu, para que qualquer área do museu seja visível a pelo menos um guarda?
  - Considerando:
    - Guardas estacionários
    - Guardas com visão 2π

Visibilidade

- O ponto $\mathbf{y}$ é **visível** a $\mathbf{x}$ se:
  - $\overline{\mathbf{xy}} \subseteq P$
- O ponto $\mathbf{y}$ é **claramente visível** a $\mathbf{x}$ se:
  - $\overline{\mathbf{xy}} \subseteq P$
  - $\overline{\mathbf{xy}} \cap \partial P \subseteq \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\, \theta > \pi$):

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\, \theta > \pi$): $g(n) = 1$

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\ \theta > \pi$): $g(n) = 1$
  - Para $n = 5$:

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\ \theta > \pi$): $g(n) = 1$
  - Para $n = 5$:
    - Convexo ou com 1 vértice côncavo: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices consecutivos côncavos:

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\, \theta > \pi$): $g(n) = 1$
  - Para $n = 5$:
    - Convexo ou com 1 vértice côncavo: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices consecutivos côncavos: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices não consecutivos côncavos:

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\, \theta > \pi$): $g(n) = 1$
  - Para $n = 5$:
    - Convexo ou com 1 vértice côncavo: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices consecutivos côncavos: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices não consecutivos côncavos: $g(n) = 1$

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo $(\exists\, \theta > \pi)$: $g(n) = 1$
  - Para $n = 5$:
    - Convexo ou com 1 vértice côncavo: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices consecutivos côncavos: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices não consecutivos côncavos: $g(n) = 1$
  - Para $n = 6$:

Problema de Klee

Achar uma função $g(n)$ que expressa a quantidade de guardas necessária em função do número de vértices do polígono

- Em 2D, claramente $1 \leq g(n) \leq n$
  - Basta posicionar um guarda em cada vértice
- Por indução:
  - Para $n = 3$, $g(n) = 1$ (óbvio!)
  - Para $n = 4$:
    - Quadrilátero convexo: $g(n) = 1$
    - Quadrilátero côncavo ($\exists\, \theta > \pi$): $g(n) = 1$
  - Para $n = 5$:
    - Convexo ou com 1 vértice côncavo: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices consecutivos côncavos: $g(n) = 1$
    - Com 2 vértices não consecutivos côncavos: $g(n) = 1$
  - Para $n = 6$:
    - Com formação de 2 aletas: requer $g(n) = 2$

Problema de Klee

Número de guardas $g(n)$

- Para $n \geq 6$:
  - Forma-se, no máximo, k aletas com $3k$ vértices
    - Logo, pode requerer: $g(n) = k$;
      ainda, como para $n = 3, 4, 5$ tem-se $g(n) = 1$;
      então, intuitivamente tem-se $g(n) = \lfloor n/3 \rfloor$

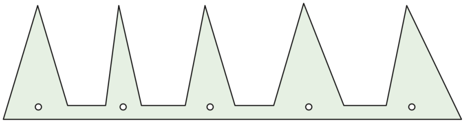
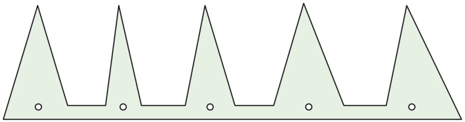


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Problema de Klee

Número de guardas $g(n)$

- Para $n \geq 6$:
  - Forma-se, no máximo, k aletas com $3k$ vértices
    - Logo, pode requerer: $g(n) = k$;
      ainda, como para $n = 3, 4, 5$ tem-se $g(n) = 1$;
      então, intuitivamente tem-se $g(n) = \lfloor n/3 \rfloor$



Pergunta: $\lfloor n/3 \rfloor$ é suficiente?

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Diagonal

Diagonal de P

- Segmento de reta que conecta 2 vértices de P, $\overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j}$, tal que:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j} \subseteq P \\ \overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j} \cap \partial P = \{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} \end{cases}$$

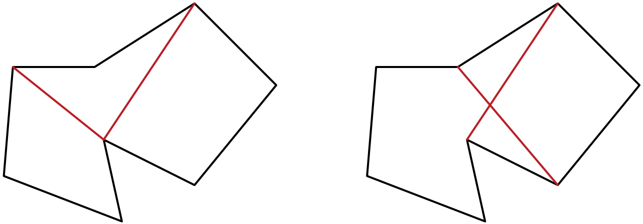
Diagonal

Diagonal de P

- Segmento de reta que conecta 2 vértices de P, $\overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j}$, tal que:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j} \subseteq P \\ \overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j} \cap \partial P = \{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\} \end{cases}$$

  - Diagonais que não se cruzam
  - Diagonais que se cruzam



Triangulação

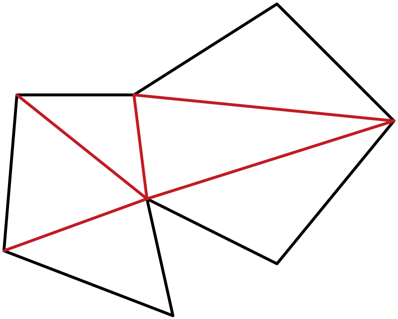
Triangulação de P

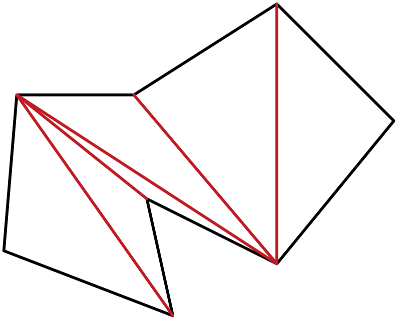
- Decomposição de P em triângulos através de um conjunto máximo de diagonais que não se cruzam

Triangulação

Triangulação de P

- Decomposição de P em triângulos através de um conjunto máximo de diagonais que não se cruzam
  - P pode ter diferentes triangulações

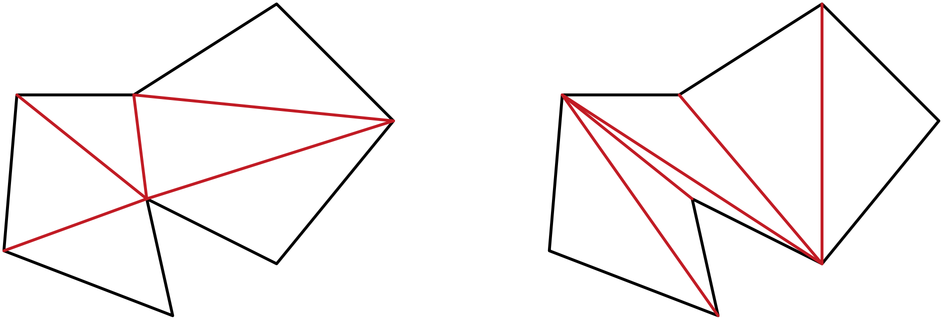




Triangulação

Triangulação de P

- Decomposição de P em triângulos através de um conjunto máximo de diagonais que não se cruzam
  - P pode ter diferentes triangulações



Pergunta: É sempre possível triangular um polígono?

Triangulação

Todo polígono P com $n > 3$ tem uma diagonal?

Triangulação

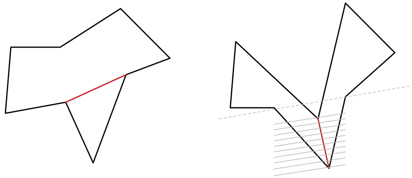
Todo polígono P com $n > 3$ tem uma diagonal?

- Sim!

Triangulação

Todo polígono P com $n > 3$ tem uma diagonal?

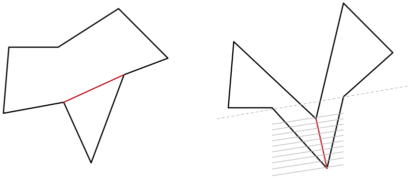
- Sim!
  - Considere o vértice mais abaixo: $\mathbf{v}_i$ tal que $\mathbf{v}_{i_y} = y_{min}$
    - Vértices vizinhos formam uma diagonal: $\overline{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_{i+1}}$
    - Existe um vértice $\mathbf{v}_k$ interior ao triângulo $\mathbf{v}_{i-1}\widehat{\mathbf{v}_i\mathbf{v}}_{i+1}$; nesse caso, $\overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_k}$ é diagonal



Triangulação

Todo polígono P com $n > 3$ tem uma diagonal?

- Sim!
  - Considere o vértice mais abaixo: $\mathbf{v}_i$ tal que $\mathbf{v}_{i_y} = y_{min}$
    - Vértices vizinhos formam uma diagonal: $\overline{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_{i+1}}$
    - Existe um vértice $\mathbf{v}_k$ interior ao triângulo $\widehat{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{i+1}}$; nesse caso, $\overline{\mathbf{v}_i\mathbf{v}_k}$ é diagonal



Por indução, **todo polígono tem uma triangulação**

Propriedades da triangulação

Toda triangulação de P tem:

- $n - 3$ diagonais
- $n - 2$ triângulos

Propriedades da triangulação

Toda triangulação de P tem:

- $n-3$ diagonais
- $n-2$ triângulos

Prova por indução:

- Para $n=3$, a dedução é trivial

Propriedades da triangulação

Toda triangulação de P tem:

- $n - 3$ diagonais
- $n - 2$ triângulos

Prova por indução:

- Para $n = 3$, a dedução é trivial
- Para $n > 3$, sabendo que se tem a prova para $n - 1$ vértices:
  - Uma diagonal qualquer particiona o polígono em dois subpolígonos P_1 e P_2
    - $n_1 + n_2 = n + 2$, já que dois vértices são compartilhados
    - Como por indução P_1 e P_2 têm $n_1 - 2$ e $n_2 - 2$ triângulos, respectivamente:

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$$

Propriedades da triangulação

Toda triangulação de P tem:

- $n-3$ diagonais
- $n-2$ triângulos

Prova por indução:

- Para $n=3$, a dedução é trivial
- Para $n>3$, sabendo que se tem a prova para $n-1$ vértices:
  - Uma diagonal qualquer particiona o polígono em dois subpolígonos P_1 e P_2
    - $n_1+n_2=n+2$, já que dois vértices são compartilhados
    - Como por indução P_1 e P_2 têm n_1-2 e n_2-2 triângulos, respectivamente:

$$(n_1-2)+(n_2-2)=(n_1+n_2)-4=(n+2)-4=n-2$$

    - Similarmente, o número de diagonais é:

$$(n_1-3)+(n_2-3)+1=n-3$$

onde $+1$ é devido à diagonal que particiona P

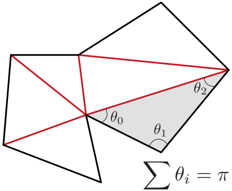
Propriedades da triangulação

A soma dos ângulos internos de um polígono P vale $(n-2)\pi$

Propriedades da triangulação

A soma dos ângulos internos de um polígono P vale $(n-2)\pi$

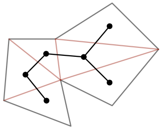
- Prova
  - Cada triângulo contribui com π; como existe $n-2$ triângulos, tem-se o total de $(n-2)\pi$



Grafo dual da triangulação

Dada uma triangulação, o grafo dual é construído fazendo:

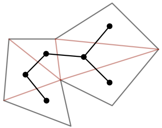
- Cada triângulo é um nó do grafo
- Cada diagonal compartilhada por dois triângulos é uma aresta ligando os dois nós correspondentes



Grafo dual da triangulação

Dada uma triangulação, o grafo dual é construído fazendo:

- Cada triângulo é um nó do grafo
- Cada diagonal compartilhada por dois triângulos é uma aresta ligando os dois nós correspondentes

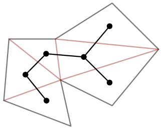


- Grafo dual é uma árvore com grau máximo igual a 3
  - Cada triângulo tem no máximo 3 diagonais compartilhadas
  - Se tivesse um ciclo, o ciclo envolveria parte externa de P

Grafo dual da triangulação

Dada uma triangulação, o grafo dual é construído fazendo:

- Cada triângulo é um nó do grafo
- Cada diagonal compartilhada por dois triângulos é uma aresta ligando os dois nós correspondentes

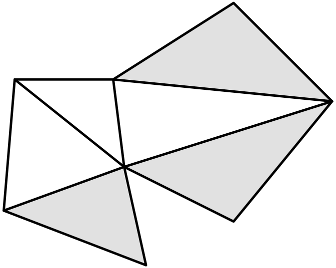


- Grafo dual é uma árvore com grau máximo igual a 3
  - Cada triângulo tem no máximo 3 diagonais compartilhadas
  - Se tivesse um ciclo, o ciclo envolveria parte externa de P
- Se raiz tiver grau 1 ou 2, tem-se árvore binária

“Orelhas” de polígonos

Orelha

- Uma sequência de vértices consecutivos **abc** de P forma uma **orelha** se $\overline{\mathbf{ac}}$ é uma diagonal



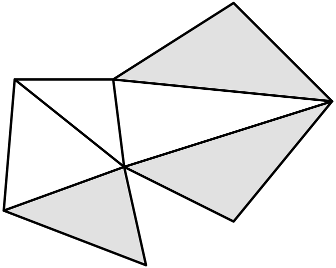
"Orelhas" de polígonos

Orelha

- Uma sequência de vértices consecutivos **abc** de P forma uma **orelha** se $\overline{\mathbf{ac}}$ é uma diagonal

Tem-se:

- Todo polígono P com $n > 3$ tem pelo menos duas orelhas



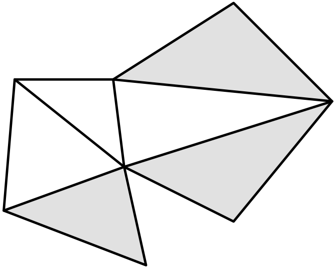
“Orelhas” de polígonos

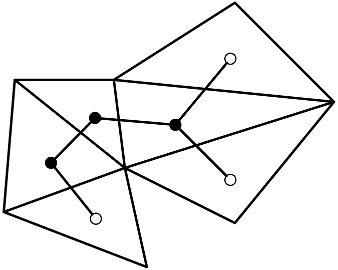
Orelha

- Uma sequência de vértices consecutivos **abc** de P forma uma **orelha** se $\overline{\mathbf{ac}}$ é uma diagonal

Tem-se:

- Todo polígono P com $n > 3$ tem pelo menos duas orelhas
  - Orelhas são folhas na árvore formada pelo grafo dual





Coloração de grafo

Considere o grafo da triangulação

- Vértices da triangulação são nós do grafo
- Arestas da triangulação são arestas do grafo

Coloração de grafo

Considere o grafo da triangulação

- Vértices da triangulação são nós do grafo
- Arestas da triangulação são arestas do grafo

Tem-se:

- 3 cores são suficientes para colorir o grafo
  - Cada vértice recebe uma cor,
    e nenhum vizinho direto tem a mesma cor

Coloração de grafo

Considere o grafo da triangulação

- Vértices da triangulação são nós do grafo
- Arestas da triangulação são arestas do grafo

Tem-se:

- 3 cores são suficientes para colorir o grafo
  - Cada vértice recebe uma cor,
    e nenhum vizinho direto tem a mesma cor
- Prova por indução:
  - Para $n = 3$: óbvio

Coloração de grafo

Considere o grafo da triangulação

- Vértices da triangulação são nós do grafo
- Arestas da triangulação são arestas do grafo

Tem-se:

- 3 cores são suficientes para colorir o grafo
  - Cada vértice recebe uma cor,
    e nenhum vizinho direto tem a mesma cor
- Prova por indução:
  - Para $n = 3$: óbvio
  - Por indução: retire uma orelha, até $n = 3$, acrescente uma orelha por vez, atribuindo ao vértice uma cor diferente dos vértices da diagonal da orelha.

Coloração de grafo

Considere o grafo da triangulação

- Vértices da triangulação são nós do grafo
- Arestas da triangulação são arestas do grafo

Tem-se:

- 3 cores são suficientes para colorir o grafo
  - Cada vértice recebe uma cor,
    e nenhum vizinho direto tem a mesma cor
- Prova por indução:
  - Para $n = 3$: óbvio
  - Por indução: retire uma orelha, até $n = 3$, acrescente uma orelha por vez, atribuindo ao vértice uma cor diferente dos vértices da diagonal da orelha.

Número de guardas:

- Um guarda em cada vértice de uma determinada cor
  - A cor menos frequente ocorre, no máximo, $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes

Algoritmos de triangulação

Por inserção de diagonais

Algoritmos de triangulação

Por inserção de diagonais

- Ache uma diagonal de P
  - Diagonal não intercepta ∂P
  - Diagonal deve ser interna
- Divide P em P_1 e P_2
- Processe P_1 e P_2 recursivamente até $n = 3$

Algoritmos de triangulação

Por inserção de diagonais

- Ache uma diagonal de P
  - Diagonal não intercepta ∂P
  - Diagonal deve ser interna
- Divide P em P_1 e P_2
- Processe P_1 e P_2 recursivamente até $n = 3$

Complexidade

- Número de diagonais candidatas: $O(n^2)$
- Determinação se diagonal: $\times O(n)$
- Repetição da computação para cada $n - 3$ diagonais: $\times O(n)$
- **Algoritmo completo:** $O(n^4)$

Algoritmos de triangulação

Por remoção de orelha

Algoritmos de triangulação

Por remoção de orelha

- Determine se cada vértice é uma orelha potencial
  - Verifique se $\overline{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_{i+1}}$ é diagonal
- Remova uma orelha
  - Atualize o estado dos vértices $\mathbf{v}_{i-1}$ e $\mathbf{v}_{i+1}$, apenas
  - A orelha é um dos triângulos resultantes
  - Repita até $n = 3$

Algoritmos de triangulação

Por remoção de orelha

- Determine se cada vértice é uma orelha potencial
  - Verifique se $\overline{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_{i+1}}$ é diagonal
- Remova uma orelha
  - Atualize o estado dos vértices $\mathbf{v}_{i-1}$ e $\mathbf{v}_{i+1}$, apenas
  - A orelha é um dos triângulos resultantes
  - Repita até $n = 3$

Complexidade

- Computação de orelhas potenciais: $O(n^2)$
  - n vértices
  - $O(n)$ para testar cada diagonal

Algoritmos de triangulação

Por remoção de orelha

- Determine se cada vértice é uma orelha potencial
  - Verifique se $\overline{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_{i+1}}$ é diagonal
- Remova uma orelha
  - Atualize o estado dos vértices $\mathbf{v}_{i-1}$ e $\mathbf{v}_{i+1}$, apenas
  - A orelha é um dos triângulos resultantes
  - Repita até $n = 3$

Complexidade

- Computação de orelhas potenciais: $O(n^2)$
  - n vértices
  - $O(n)$ para testar cada diagonal
- Repetição: $O(n^2)$
  - $n - 3$ iterações
  - Em cada iteração, apenas dois vértices são atualizados: $O(n)$

Algoritmos de triangulação

Por remoção de orelha

- Determine se cada vértice é uma orelha potencial
  - Verifique se $\overline{\mathbf{v}_{i-1}\mathbf{v}_{i+1}}$ é diagonal
- Remova uma orelha
  - Atualize o estado dos vértices $\mathbf{v}_{i-1}$ e $\mathbf{v}_{i+1}$, apenas
  - A orelha é um dos triângulos resultantes
  - Repita até $n = 3$

Complexidade

- Computação de orelhas potenciais: $O(n^2)$
  - n vértices
  - $O(n)$ para testar cada diagonal
- Repetição: $O(n^2)$
  - $n - 3$ iterações
  - Em cada iteração, apenas dois vértices são atualizados: $O(n)$
- **Algoritmo completo:** $O(n^2)$

Triangulação 3D

(como visto, todo polígono tem uma triangulação)

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Triangulação 3D

(como visto, todo polígono tem uma triangulação)

Isso se estende para 3D?

- Todo poliedro tem uma tetraetrização?

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Triangulação 3D

(como visto, todo polígono tem uma triangulação)

Isso se estende para 3D?

- Todo poliedro tem uma tetraetrização?
  - Não!

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Triangulação 3D

(como visto, todo polígono tem uma triangulação)

Isso se estende para 3D?

- Todo poliedro tem uma tetraetrização?
  - Não!
  - Menor exemplo: Poliedro de Schönhardt
    - Prisma triangular torcido de 30 graus

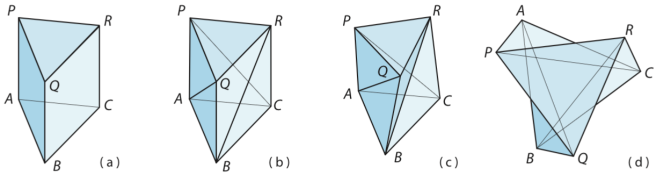


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Particionamento de polígonos

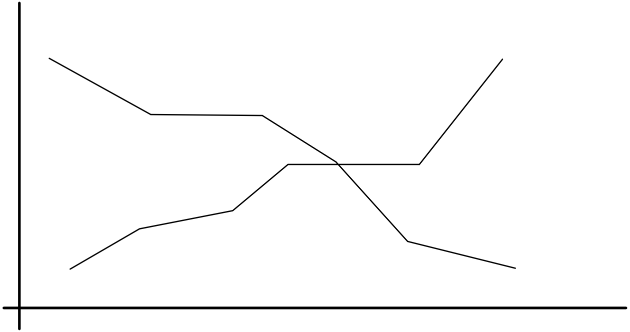
Propriedades e outros particionamentos

- Polígono monótono
- Triangulação de polígonos monótonos
- Particionamento em trapézios

Monoticidade

Função monótona

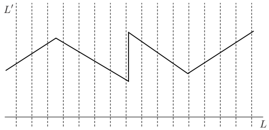
- Nunca decrescente ou nunca crescente



Polígono monótono (ou monotônico)

Uma poligonal P é monótona em relação a linha L se:

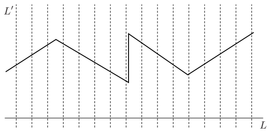
$$P \cap L' = \begin{cases} \emptyset \\ \{\mathbf{p}\} \\ \{l\} \end{cases}, \quad \text{onde} \quad L' \perp L$$



Polígono monótono (ou monotônico)

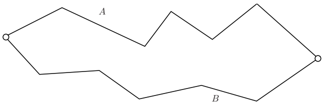
Uma poligonal P é monótona em relação a linha L se:

$$P \cap L' = \begin{cases} \emptyset \\ \{\mathbf{p}\} \\ \{l\} \end{cases}, \quad \text{onde} \quad L' \perp L$$



Um polígono P é dito monótono se:

- ∂P pode ser dividido em duas poligonais monótonas



Monoticidade

Propriedades

- Monoticidade pode ser observada localmente em cada vértice
  - Detecção de estrutura local de monoticidade
- Vértices podem ser ordenados em relação à linha de monoticidade
  - Ordenação $O(n)$, basta seguir a cadeia de monoticidade

Triangulação

Triangulação de polígonos monótonos ($O(n \log n)$)

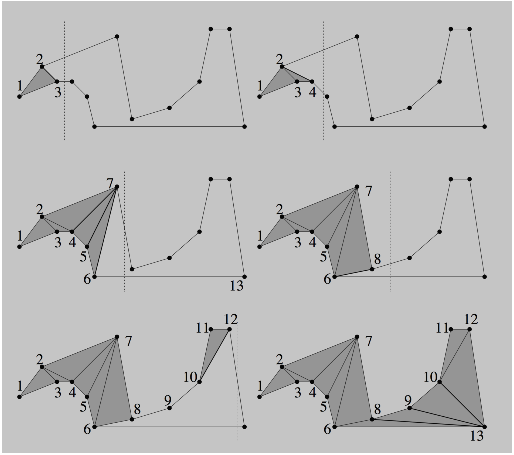
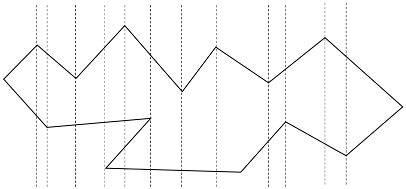


Figura extraída de notas de aula de Subhash Suri

Particionamento em trapézios

Varredura de linha/plano

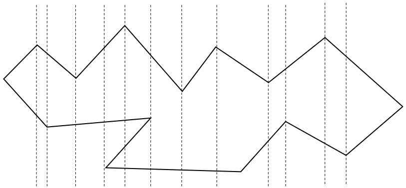
- Tratar eventos discretos; no caso, ocorrência de vértice



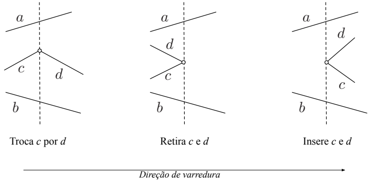
Particionamento em trapézios

Varredura de linha/plano

- Tratar eventos discretos; no caso, ocorrência de vértice



- Para ser eficiente, mantém-se uma lista de arestas "ativas"



Triangulação de polígonos

Observações finais:

- A partir do particionamento em trapézios, pode-se decompor um polígno qualquer em polígonos monótonos

Triangulação de polígonos

Observações finais:

- A partir do particionamento em trapézios, pode-se decompor um polígno qualquer em polígonos monótonos
- Chazelle (1991) apresentou um algoritmo $O(n)$ para triangulação de polígonos