

# Estruturas de Dados Topológicas

## INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes  
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio



# Agenda

Estrutura topológica

Representação de manifold

Representação de malhas



# Estrutura topológica



# Estrutura de dados topológica

## Exemplos de aplicações

- ▶ Modelagem geométrica
- ▶ Análises adaptativas
- ▶ Simplificação de malhas
- ▶ Suavização de malhas
- ▶ Extração da “casca” (*hull*)
- ▶ Detecção de silhueta



# Quando uma estrutura é dita “topológica”?

Quando provê acesso a relações de adjacências entre as entidades topológicas definidas

- ▶ Quais faces usam este vértice?
- ▶ Quais arestas usam este vértice?
- ▶ Quais faces são adjacentes a esta face?
- ▶ Etc.



# Quando uma estrutura é dita “topológica”?

Quando provê acesso a relações de adjacências entre as entidades topológicas definidas

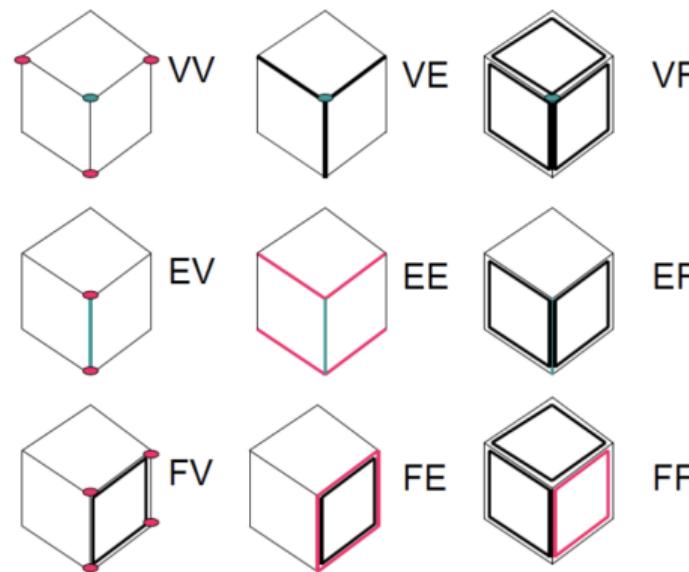
- ▶ Quais faces usam este vértice?
- ▶ Quais arestas usam este vértice?
- ▶ Quais faces são adjacentes a esta face?
- ▶ Etc.

*Uma estrutura de dados topológica é dita **completa** se ela é capaz de prover as relações de adjacências entre todas as entidades topológicas definidas em tempo ótimo, i.e., em tempo linearmente proporcional ao número de entidades retornadas.*

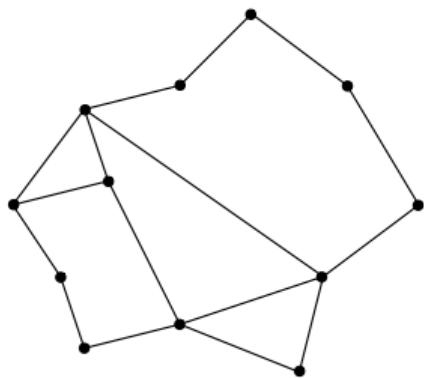


# Estrutura topológica

Exemplos de consultas topológicas



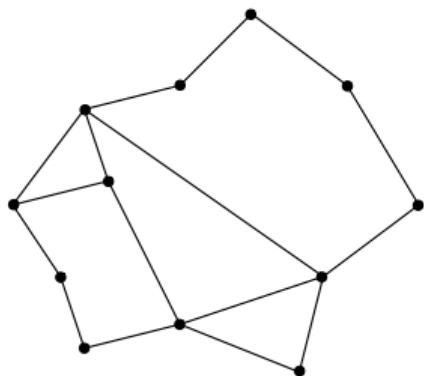
# Subdivisão planar simples



Define 3 entidades topológicas:

- ▶ **Vértice**: Dim 0
- ▶ **Aresta**: Dim 1
- ▶ **Face**: Dim 2

# Subdivisão planar simples



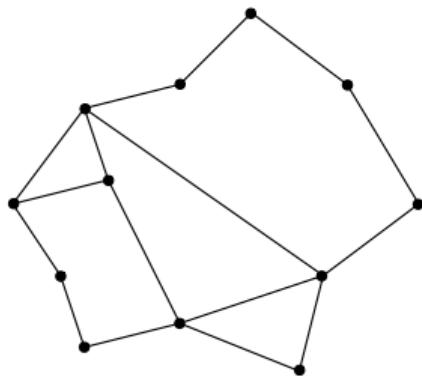
Define 3 entidades topológicas:

- ▶ **Vértice**: Dim 0
- ▶ **Aresta**: Dim 1
- ▶ **Face**: Dim 2

*A subdivisão cobre todo o plano;  
existe a face externa, infinita.*



# Subdivisão planar simples



Define 3 entidades topológicas:

- ▶ **Vértice**: Dim 0
- ▶ **Aresta**: Dim 1
- ▶ **Face**: Dim 2

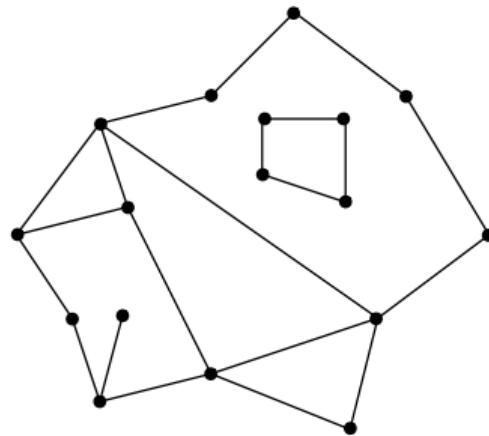
*A subdivisão cobre todo o plano;  
existe a face externa, infinita.*

Propriedades:

$$\begin{aligned}V_i \cap V_j &= \emptyset \\E_i \cap E_j &= \emptyset \cup V_i \\F_i \cap F_j &= \emptyset \cup E_i \cup V_i\end{aligned}$$



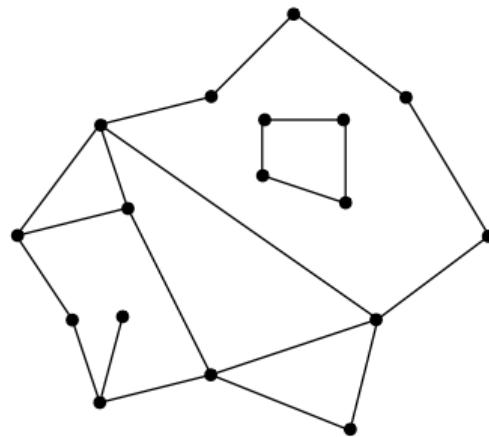
# Subdivisão planar com laços



Define 4 entidades topológicas:

- ▶ **Vértices**
- ▶ **Aresta**
- ▶ **Laço**: formada por uma sequência de arestas
- ▶ **Face**: delimitada por um laço externo e zero ou mais laços internos.

# Subdivisão planar com laços



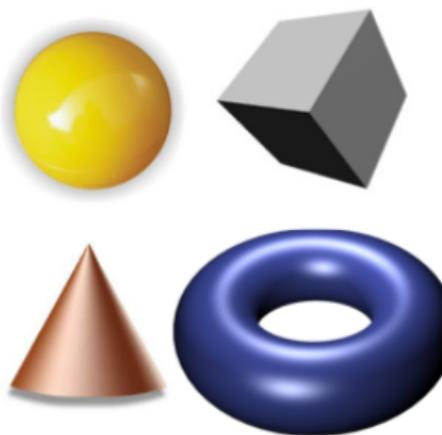
Define 4 entidades topológicas:

- ▶ **Vértices**
- ▶ **Aresta**
- ▶ **Laço**: formada por uma sequência de arestas
- ▶ **Face**: delimitada por um laço externo e zero ou mais laços internos.
  - ▶ Numa subdivisão planar, a face externa não tem laço externo, apenas internos

# Sólidos *manifold*

## 2-manifold

Uma superfície é dita *2-manifold* se a vizinhança de qualquer ponto na superfície é homeomorfa a um disco 2D.

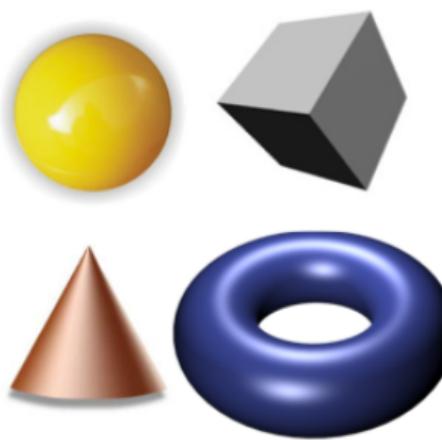


Sólidos *manifold*

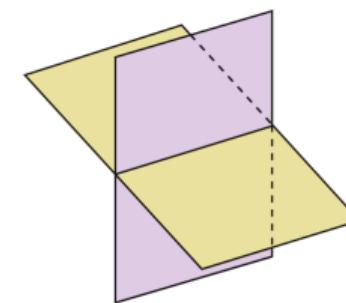
# Sólidos *manifold*

## 2-manifold

Uma superfície é dita *2-manifold* se a vizinhança de qualquer ponto na superfície é homeomorfa a um disco 2D.



Sólidos *manifold*

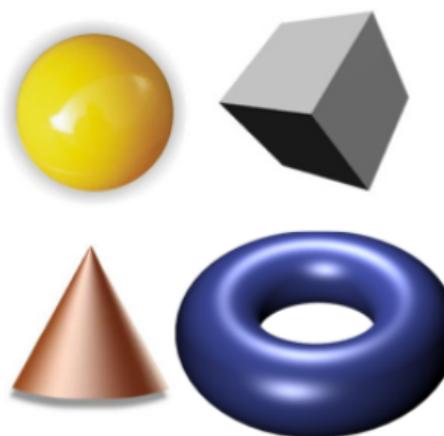


Superfície *non-manifold*

# Sólidos *manifold*

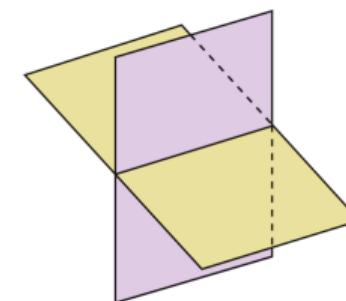
## 2-manifold

Uma superfície é dita *2-manifold* se a vizinhança de qualquer ponto na superfície é homeomorfa a um disco 2D.



Sólidos *manifold*

$\beta$ -Rep: representação do contorno



Superfície *non-manifold*

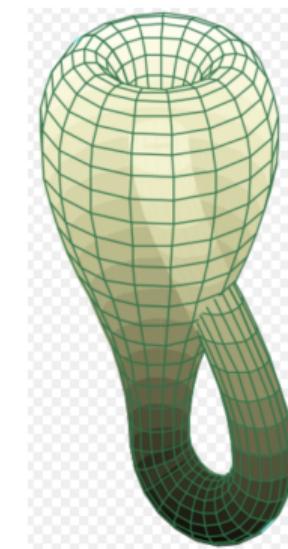
# Sólidos manifold

Manifolds não orientados

Möbius strip



Klein bottle



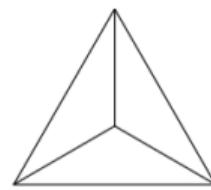
# Representação de manifold



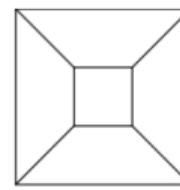
# Subdivisão planar

## Subdivisão planar

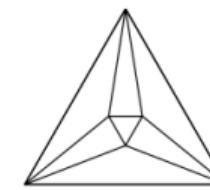
- Manifold homeomorfo a esferas



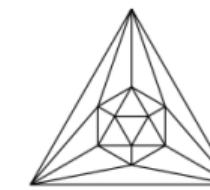
Tetrahedron



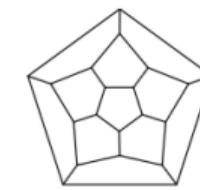
Cube



Octahedron



Icosahedron



Dodecahedron

- A face “externa” representa uma das faces do sólido

# Subdivisão planar

- ▶ Fórmula de Euler
  - ▶ Relação linear entre número de vértices, arestas e faces

$$V - E + F = 2$$



$V$	0	1	2	3	3
$E$	0	0	1	2	3
$F$	0	1	1	1	2



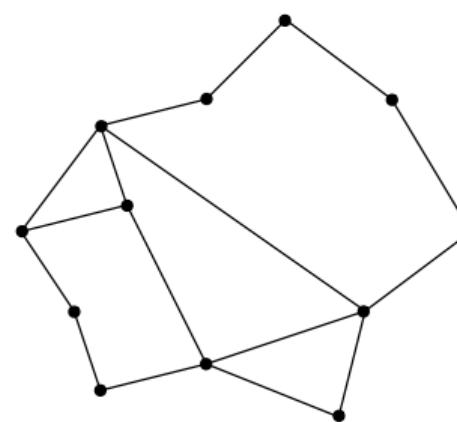
# Subdivisão planar

- ▶ Fórmula de Euler
- ▶ Relação linear entre número de vértices, arestas e faces

$$V - E + F = 2$$



$V$	0	1	2	3	3
$E$	0	0	1	2	3
$F$	0	1	1	1	2



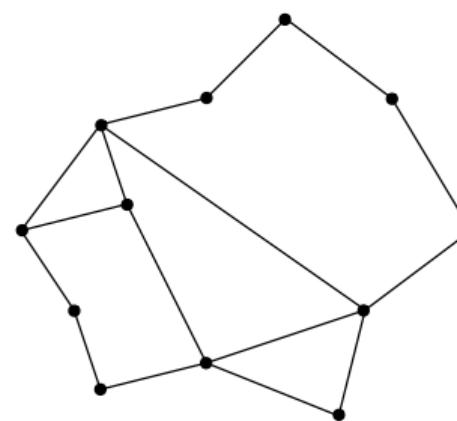
# Subdivisão planar

- ▶ Fórmula de Euler
- ▶ Relação linear entre número de vértices, arestas e faces

$$V - E + F = 2$$



	$V$	$E$	$F$
	0	0	0
	1	1	1
	2	2	1
	3	3	1
	3	3	2



$$V = 12$$

$$E = 16$$

$$F = 6$$

# Winged-Edge<sup>1</sup>

Estrutura de dados para representação de superfícies *manifold*  
(e subdivisões planares)

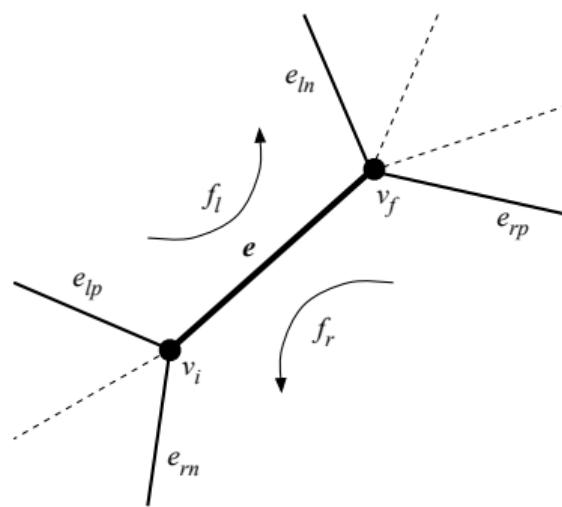


Tabela de vértices

v	x	y	z	e <sub>i</sub>

Tabela de faces

f	e <sub>i</sub>

Tabela de arestas

e	v <sub>i</sub>	v <sub>f</sub>	f <sub>l</sub>	f <sub>r</sub>	e <sub>lp</sub>	e <sub>ln</sub>	e <sub>rp</sub>	e <sub>rn</sub>



<sup>1</sup> Bruce G. Baumgart. Winged edge polyhedron representation. Rel. t c. Stanford, CA, USA, 1972.



# Winged-Edge<sup>1</sup>

Estrutura de dados para representação de superfícies *manifold*  
(e subdivisões planares)

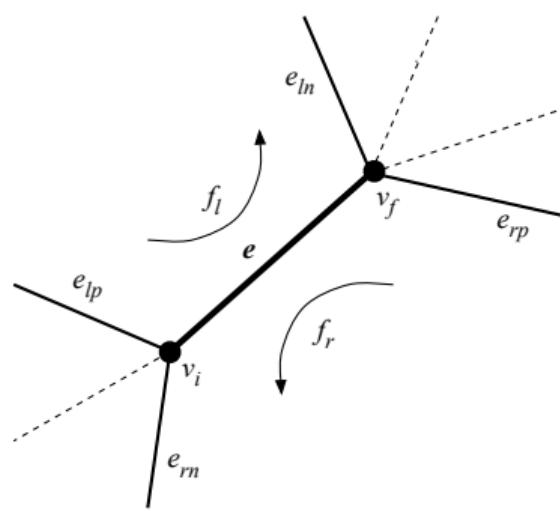


Tabela de vértices

v	x	y	z	e <sub>i</sub>

Tabela de faces

f	e <sub>i</sub>

Tabela de arestas

e	v <sub>i</sub>	v <sub>f</sub>	f <sub>l</sub>	f <sub>r</sub>	e <sub>lp</sub>	e <sub>ln</sub>	e <sub>rp</sub>	e <sub>rn</sub>

- ▶ Vetores de tamanhos fixos
- ▶ Estrutura completa
- ▶ Não representa laços

<sup>1</sup> Bruce G. Baumgart. Winged edge polyhedron representation. Rel. téc. Stanford, CA, USA, 1972.

# Winged-Edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶  $FF$ : faces adjacentes a uma dada face
- ▶  $VE$ : arestas adjacentes a um dado vértice



# Winged-Edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ **FF:** faces adjacentes a uma dada face
  - ▶ Dada  $f_i$ , acessa  $e$
  - ▶ Para a aresta corrente (até que se alcance novamente  $e$ ):
    - ▶ Acessa  $f_l$  e  $f_r$ , reportando a face diferente de  $f_i$
    - ▶ Acessa  $e_{lp}$  ou  $e_{rp}$ , conforme face reportada
- ▶ **VE:** arestas adjacentes a um dado vértice
  - ▶ Dado  $v_i$ , acessa  $e$
  - ▶ Para a aresta corrente (até que se alcance novamente  $e$ ):
    - ▶ Reporta  $e$
    - ▶ Acessa  $e_{lp}$  ou  $e_{rp}$ , conforme vértice inicial ou final



# Half-edge<sup>2</sup>

Com suporte a representação de laços

- Semi-aresta corresponde ao “uso” da aresta por uma face.

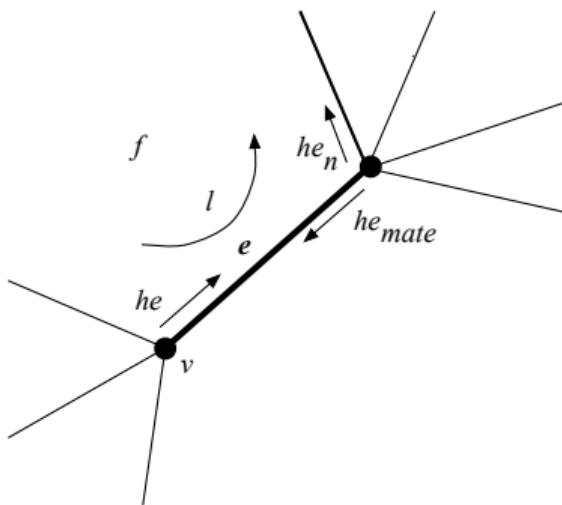


Tabela de vértices

v	x	y	z	he

Tabela de arestas

e	he <sub>1</sub>	he <sub>2</sub>

Tabela de semi-arestas

he	e	v	l	he <sub>n</sub>

Tabela de laços

l	he	f	l <sub>next</sub>

Tabela de faces

f	l <sub>out</sub>	l <sub>infirst</sub>

<sup>2</sup> M. Mäntylä. *An Introduction to Solid Modeling*. Rockville, MD: Computer Science Press, 1988.

# Half-edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶  $FF$ : faces adjacentes (externas) a uma dada face
  
- ▶  $VE$ : arestas adjacentes a um dado vértice



# Half-edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ **FF:** faces adjacentes (externas) a uma dada face
  - ▶ Dada  $f_i$ , acessa  $l_{out}$
  - ▶ Dado  $l_{out}$ , acessa  $he$
  - ▶ Para cada semi-aresta do laço (até alcançar novamente  $he$ ):
    - ▶ Acessa  $e$  e então acessa a aresta conjugada ( $he_1$  ou  $he_2$ )
    - ▶ Acessa  $f$  associada à semi-aresta conjugada
    - ▶ Reporta  $f$
    - ▶ Acessa próxima semi-aresta  $he_n$
- ▶ **VE:** arestas adjacentes a um dado vértice
  - ▶ Dado  $v_i$ , acessa  $he$
  - ▶ Para cada semi-aresta do laço (até alcançar novamente  $he$ ):
    - ▶ Acessa  $e$  e então acessa a aresta conjugada ( $he_1$  ou  $he_2$ )
    - ▶ Acessa  $v$  associada à semi-aresta conjugada
    - ▶ Reporta  $v$
    - ▶ Acessa próxima semi-aresta de semi-aresta conjugada  $he_n$



# Half-edge

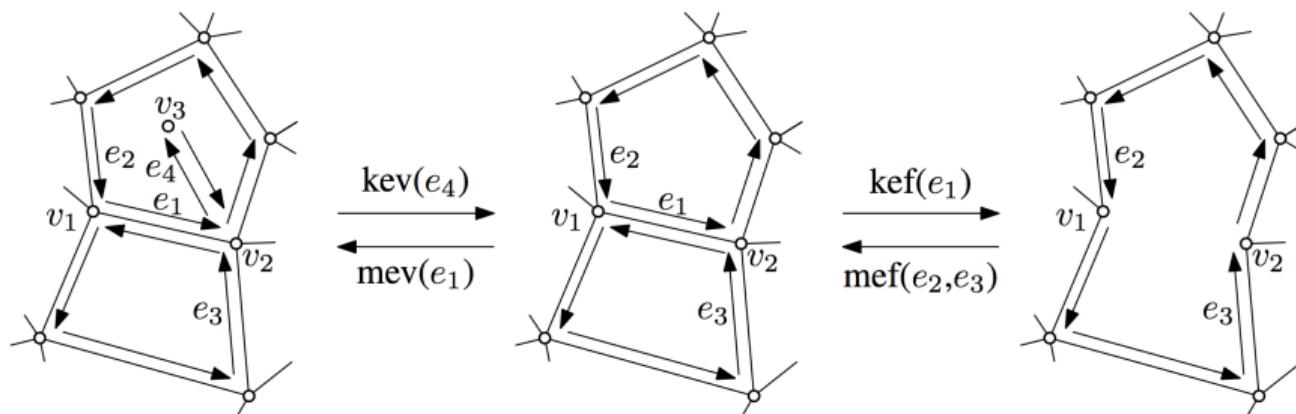
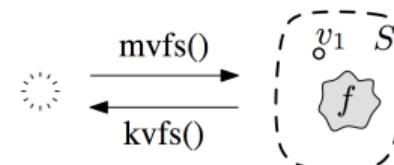
## Operadores de Euler

- ▶ **mvfs, kvfs**: *make/kill vertex, face, and solid*
- ▶ **mev, kev**: *make/kell edge and vertex*
- ▶ **semv, jekv**: *split/join edge, make/kill vertex*
- ▶ **mef, kef**: *make/kill edge and face*
- ▶ **kemr, mekr**: *kill/make edge, make/kill ring*
- ▶ **kfmrh, mfkrh**: *kill/make face, make/kill ring and hole*
- ▶ **mvr, kvr**: *make/kill vertex and ring*



# Operadores de Euler

Exemplo de alguns operadores em ação



# Operadores de Euler

Construindo um cubo

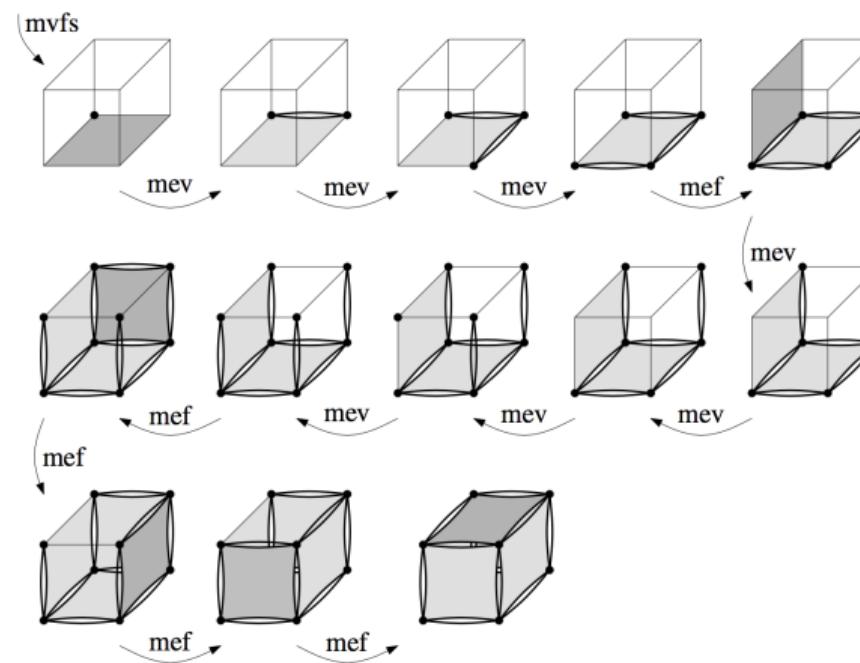
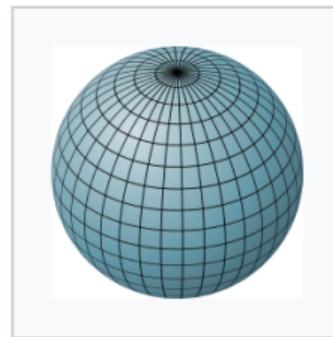


Imagen retirada de "Introduction to Geometric Computing", S. Ghali, 2008

# Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços



genus 0



genus 1



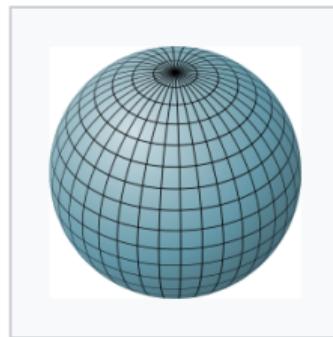
genus 2



genus 3

# Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços



genus 0



genus 1



genus 2



genus 3

## Fórmula de Euler

► onde:

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$

► S = sólidos; H = buracos (gênero); L = ciclos



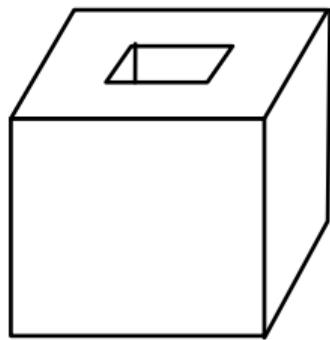
Imagen retirada da Wikipedia



# Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

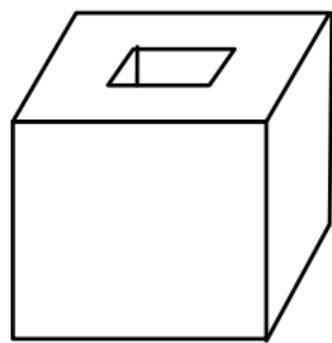
$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



# Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



$$V = 8 + 8 = 16$$

$$E = 8 + 8 + 4 = 20$$

$$F = 1 + 1 + 4 = 6$$

$$L = 1 + 1 = 2$$

$$G = 1$$

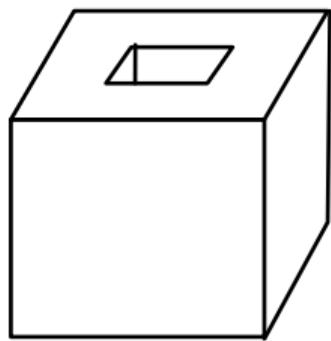
$$S = 1$$



# Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



$$V = 8 + 8 = 16$$

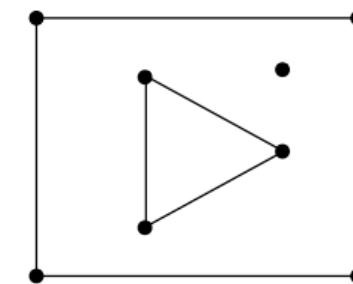
$$E = 8 + 8 + 4 = 20$$

$$F = 1 + 1 + 4 = 6$$

$$L = 1 + 1 = 2$$

$$G = 1$$

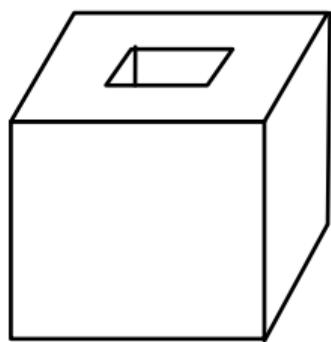
$$S = 1$$



# Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



$$V = 8 + 8 = 16$$

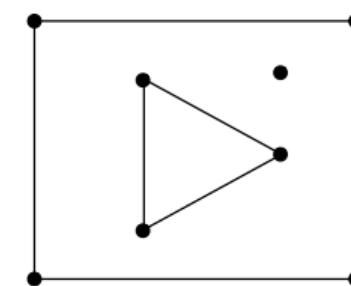
$$E = 8 + 8 + 4 = 20$$

$$F = 1 + 1 + 4 = 6$$

$$L = 1 + 1 = 2$$

$$G = 1$$

$$S = 1$$



$$V = 4 + 3 + 1 = 8$$

$$E = 4 + 3 = 7$$

$$F = 3$$

$$L = 2$$

$$G = 0$$

$$S = 1$$



# Operadores de Euler

Construindo um cubo com buraco (gênero 1)

- Dado um cubo já formado

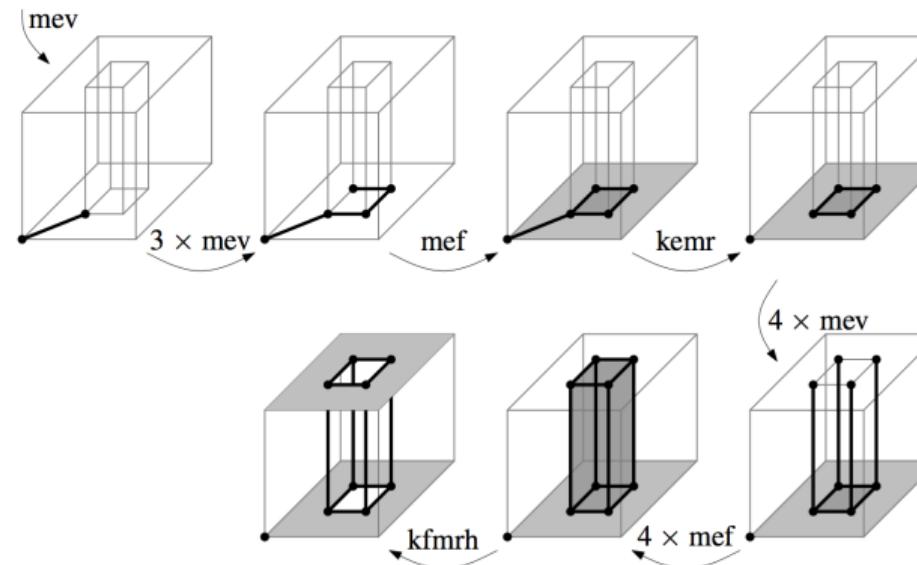


Imagen retirada de "Introduction to Geometric Computing", S. Ghali, 2008

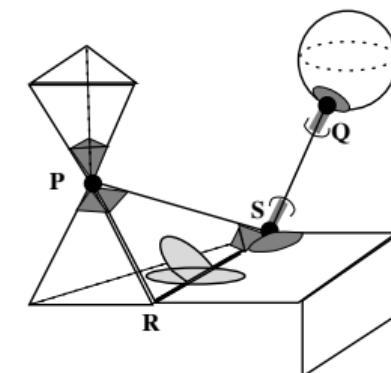


# Radial-edge<sup>3</sup>

Representação de superfícies *non-manifold*

## Entidades topológicas

- ▶ Solid, Region, Shell, Face, Loop, Edge, Vertex



<sup>3</sup> K. Weiler. "The radial edge structure: a topological representation for non-manifold geometric boundary modeling". Em: Geometric Modeling for CAD Applications. Ed. por Encarnacao J Wozney M McLaughlin H. 1988, pp. 3-36.

# Radial-edge<sup>3</sup>

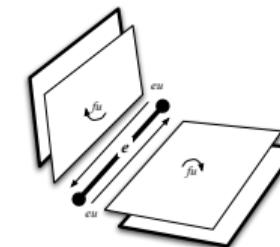
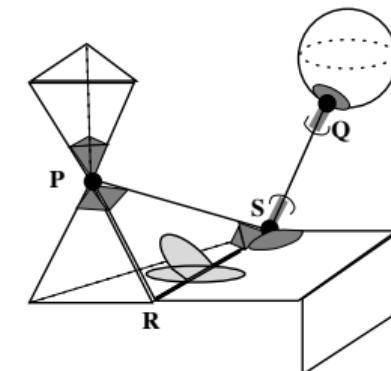
Representação de superfícies *non-manifold*

## Entidades topológicas

- ▶ Solid, Region, Shell, Face, Loop, Edge, Vertex

## Entidades topológicas orientadas

- ▶ Face-use, Edge-use, Vertex-use
  - ▶ Cada face tem dois usos associados
  - ▶ Cada aresta tem um conjunto cíclico de usos associados (um uso por laço)
  - ▶ Cada vértices tem um conjunto não ordenado de usos



<sup>3</sup> K. Weiler. "The radial edge structure: a topological representation for non-manifold geometric boundary modeling". Em: Geometric Modeling for CAD Applications. Ed. por Encarnacao J Wozney M McLaughlin H. 1988, pp. 3-36.



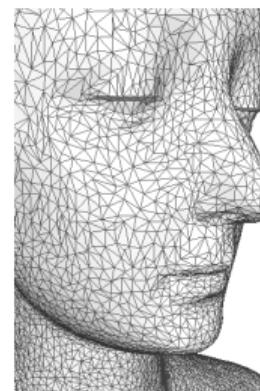
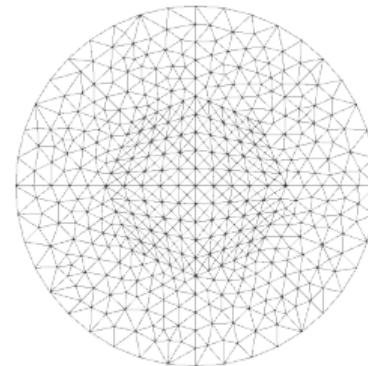
# Representação de malhas



# Representação de malhas

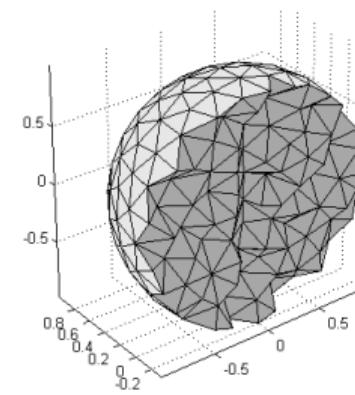
2D

- ▶ Triângulos,  
quadriláteros,  
polígonos



3D

- ▶ Tetraedros,  
hexaedros,  
poliedros



# Malhas de triângulos

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de faces (triângulos)

t	v <sub>0</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>



# Malhas de triângulos

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de faces (triângulos)

t	v <sub>0</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>

- ▶ Suficiente para análises numéricas convencionais
- ▶ Suficiente e adequada para renderização
  - ▶ Tabela de vértices acrescida com outras informações
    - ▶ Normais, coordenadas de textura, etc.



# Malhas de tetraedros

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de elementos (tetraedros)

t	v <sub>0</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>



# Malhas de tetraedros

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de elementos (tetraedros)

t	v <sub>0</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>

- ▶ Suficiente para análises numéricas convencionais



# Tabela de incidência

## Procedimentos topológicos

### Malha de triângulos

- ▶ Determinação das normais médias associadas aos vértices



# Tabela de incidência

## Procedimentos topológicos

### Malha de triângulos

- ▶ Determinação das normais médias associadas aos vértices

### Malha de tetraedros

- ▶ Determinação das faces externas (*hull extraction*)
  - ▶ Determinação das normais médias associadas aos vértices das faces externas



# Representação de grafos duais

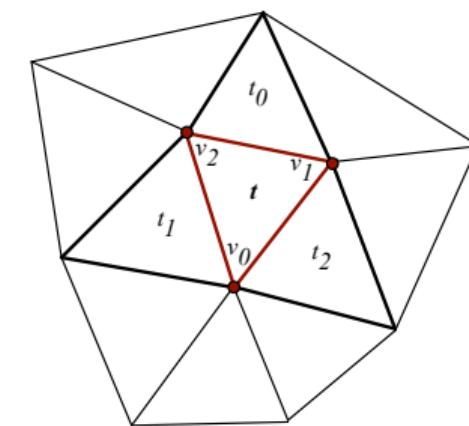
Malhas de triângulos com adjacências

Tabela de vértices

v	x	y	z	t

Tabela de triângulos

t	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$t_0$	$t_1$	$t_2$



# Representação de grafos duais

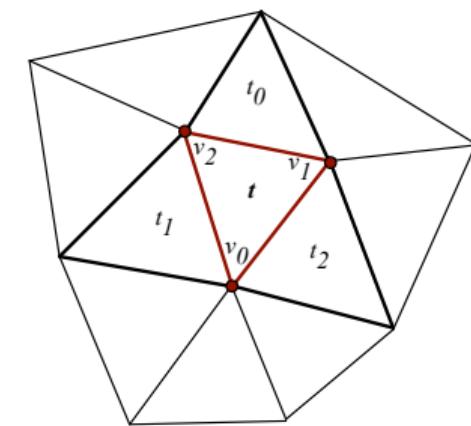
Malhas de triângulos com adjacências

Tabela de vértices

v	x	y	z	t

Tabela de triângulos

t	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$t_0$	$t_1$	$t_2$



- ▶ Pode-se usar vértice oposto, em vez de triângulo adjacente
- ▶ Estrutura similar para malhas de tetraedros

# Representação por grafos duais

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶  $VT$ : triângulos adjacentes a um dado vértice



# Representação por grafos duais

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶  $VT$ : triângulos adjacentes a um dado vértice
  - ▶ Dada  $v_i$ , acessa  $t$
  - ▶ Para cada triângulo (até que se alcance novamente  $t$ ):
    - ▶ Reporta  $t$
    - ▶ Busca local de  $v_i$  em  $t$ : acessa índice do próximo vértice
    - ▶ Acessa triângulo oposto correspondente ao índice:  $t$

