

UM NOVO MODELO DE FLUXOS PARA O PROBLEMA DA MÍNIMA LATÊNCIA

João Fernando Machry Sarubbi¹

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627 – Pampulha CEP 31270-901 Belo Horizonte MG - ITEX - Departamento de
Ciência da Computação, Sala 4010, email: jsarubbi@dcc.ufmg.br

Henrique Pacca Loureiro Luna¹

Universidade Federal de Alagoas

Campus A.C. Simões - BR 104 - Km 14 - Tabuleiro dos Martins - Maceió-AL - CEP: 57.072-970
Departamento de Tecnologia da Informação, email: pacca@tci.ufal.br

Resumo: O Problema da Mínima Latência, do inglês Minimum Latency Problem, também conhecido como Traveling Repairman Problem e Deliveryman Problem é uma variante do Problema do Caixeiro Viajante. Neste problema um nó origem é dado e a meta é minimizar a soma dos tempos de chegada em todos os outros nós. Neste artigo nós apresentamos uma revisão bibliográfica do problema, e introduzimos uma formulação de programação linear inteira mista que permite o cálculo de resultados exatos para problemas com mais 65 nós.

Palavras chaves: Problema do Caixeiro Viajante, Problema de Mínima Latência, Traveling Repairman Problem, Deliveryman Problem.

Abstract: The Minimum Latency Problem, also known as the Traveling Repairman Problem or the Deliveryman Problem, is a variant of the Traveling Salesman Problem in which the starting node of the tour is given and the goal is to minimize the sum of the arrival times at all the other nodes. We present a new mixed-integer linear programming model for the problem. As a multicommodity flow formulation the model is suitable for decomposition strategies or for direct use of linear programming packages. The paper reports exact results for instances with up to 65 nodes.

Keywords: Traveling Salesman Problem, Minimum Latency Problem

1. INTRODUÇÃO

O Problema de Mínima Latência (PML), do inglês Minimum Latency Problem, também conhecido como Traveling Repairman Problem ou Deliveryman Problem é uma variante do Problema do Caixeiro Viajante (PCV) [DANT54][GOL00]. Neste problema o objetivo é encontrar um circuito iniciando de um único depósito que minimize a soma dos tempos de espera dos consumidores. Neste trabalho nós apresentamos um exemplo didático do PML e o comparamos com o PCV. Além disto, implementamos uma nova formulação de fluxo linear inteira mista com resultados exatos para instâncias com mais de 65 nós.

2. PROBLEMA DE MÍNIMA LATÊNCIA

O problema de Mínima Latência é uma variante do PCV no qual o nó origem é dado e a meta é minimizar a soma dos tempos de chegada em todos os nós. O problema foi introduzido em 1967 por Conway, Maxwell e Miller[CON67] como um tipo de problema de sequenciamento. Conway et al. também apresentaram o problema como uma variante do PCV. O problema também pode ser interpretado como um problema de sequenciamento com uma única máquina e com o tempo de

¹ Este Trabalho tem sido financiado por CAPES, CNPQ, FINEP/MCT (GRANT PRONEX/2003.002)

processamento dependendo da sequência e onde o tempo total das tarefas deve ser minimizado[EIJL95].

O PML também pode ser interpretado como o problema de minimizar o custo de um caminhão que, saindo carregado, tenha que entregar uma unidade de um produto em cada local e que exista um custo que é proporcional ao número de produtos transportados em cada trecho. Outra interpretação cabível é um trabalhador que recebe n tarefas de diferentes dificuldades no mesmo instante de tempo t e que precisa decidir qual a ordem das tarefas, sabendo que tarefas mais simples terminarão primeiro e o cliente receberá o produto mais cedo, maximizando sua satisfação.

De acordo com Goemans e Kleinberg [GK98], apesar da óbvia similaridade com o PCV clássico o PML é bem menos comportado de um ponto de vista computacional.

Algoritmos de otimização para o PML[BYE00][JR04] são providos por Lucena[LUC90], Simchi-Levi e Berman[SIM91], Fischetti, Laporte e Martelo[FIS93]. O primeiro propôs um algoritmo enumerativo baseado em uma formulação não-linear inteira onde os limites inferiores foram obtidos por relaxação Lagrangeana. Ele relata resultados ótimos para problemas de até 30 nós. Simchi-Levi e Berman descrevem um método Branch-and-Bound baseado na relaxação da árvore geradora mínima. Fischetti et al. propuseram um algoritmo Branch-and-Bound baseado numa formulação de programação inteira. O artigo utilizou matrôides acumulativos para gerar o limite inferior. Problemas com mais de 60 nós são resolvidos na otimalidade[BLUM94][EIJL95].

Tanto o PML como o PCV são casos especiais de um problema mais geral chamado de Problema do Caixeiro Viajante com Dependência de Tempo (PCVDT) [FOX73][PIC78][FOX79][FOX80]. No PCVDT a função de custo é uma métrica que contabiliza a distância da aresta e a ordem de visita dos nós, gerando uma função de custo $c(e,i)$. O custo do PCV é um caso especial onde a função de custo depende somente do custo da aresta, $c(e,i) = e$. Já o PML é um caso onde o custo é dado por $c(e,i) = (n-i)*e$ [BLUM94].

Bianco, Ricciardelli, Mingozzi e Spadoni [BRS89] desenvolveram uma modelagem para o Problema de um Veículo de Entrega (PUVE), do inglês, *Single Vehicle Delivery Problem*. Este problema se refere a um único veículo, saindo de uma origem 1, que percorrendo um circuito Hamiltoniano necessita entregar q_i passageiros em cada nó i do grafo $G=(V,A)$. Além disto, o motorista necessita, após percorrer todos os nós, entregar q_1 passageiros no nó origem (nó 1).

Este problema está extremamente relacionado ao PML. A diferença está na quantidade heterogênea q_i de passageiros entregues em cada nó i . Fazendo $q_i = 1 \forall i \in V$ o problema se transforma no PML. Desta forma podemos classificar o problema (PUVE) como uma variação mais abrangente e complexa do PML. Isto é observado pois o custo não está só relacionado ao tempo e a ordem de visita dos nós, mas também à quantidade de passageiros entregues em cada nó, priorizando assim os nós que possuem uma demanda maior.

Bianco, Ricciardelli, Mingozzi e Spadoni[BRS89] resolveram o problema (PUVE) de forma exata através de um algoritmo que utilizou relaxação Lagrangeana e programação dinâmica. Este algoritmo conseguiu resolver instâncias de tamanho até 30. Entretanto em todas as instâncias estudadas por Bianco, Ricciardelli, Mingozzi e Spadoni as demandas em cada nó eram unitárias caracterizando o PML e não o PUVE. Sarubbi e Luna desenvolveram um modelo matemático de fluxos para instâncias de mais de 15 nós para o PUVE [SL05].

3. FORMULAÇÃO DE EIIL

Um modelo para o PML foi formulado por Eijl [EIJL95] em 1995. Eijl considera um grafo $G = (V \cup \{0\}, A)$, onde $V = \{1, \dots, n\}$. Cada arco (i,j) está associado a um tempo de viagem $p_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+$. Eijl assume que o tempo de visita está incluído no tempo de viagem, desta forma o tempo de chegada no nó i é igual ao tempo de partida do nó i . O nó 0 é o nó de partida, isto é, cada caminho começa e termina no nó 0. Ele assume que cada caminho inicia no tempo 0. Então o tempo de espera do consumidor localizado no nó i é igual ao tempo de partida do nó i . Desta forma o problema é determinar um caminho que minimize a soma dos tempos de partida nos nós.

O PML foi formulado usando os três seguintes tipos de variáveis. Para cada arco (i,j) existe uma variável binária x_{ij} que indica se o arco (i,j) está incluído ou não no caminho.

A variável t_{ij} é definida como:

$$t_{ij} = \begin{cases} \text{tempo de chegada no nó } i, & \text{se } x_{ij} = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

p_{ij} = tempo para percorrer o arco (i,j) .

Desde que seja assumido que cada circuito comece no nó 0, a variável t_{0j} pode ser omitida do modelo. Além disto, temos a constante C que é assumida ser muito grande.

O modelo matemático de EIJL é:

$$(1) \text{ Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=0, j \neq i}^n t_{ij}$$

sujeito a:

$$(2) \sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij} = 1, \quad i = 0, \dots, n$$

$$(3) \sum_{i=0, i \neq j}^n x_{ij} = 1, \quad j = 0, \dots, n$$

$$(4) \sum_{i=1, i \neq j}^n t_{ij} + \sum_{i=0, i \neq j}^n p_{ij} x_{ij} = \sum_{k=0, k \neq j}^n t_{jk}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(5) 0 \leq t_{ij} \leq C x_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, n, i \neq j, i \neq 0$$

$$(6) x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in E$$

As restrições (2) e (3) asseguram que cada nó, inclusive a origem, é visitado exatamente uma vez. As restrições (3) garantem que se $x_{ij} = 1$, então o tempo de saída do nó j é igual ao tempo de partida do nó i mais o tempo de viagem p_{ij} . Estas são as restrições que inibem ciclos neste modelo. Se C é um limite superior do tempo de partida do nó i , isto é, $C = n * \max(i,j) p(i,j)$ então (4) é válido quando $x_{ij} = 1$. Além disto estas restrições forçam que $t_{ij} = 0$ se $x_{ij} = 0$ [EIJL95]. É conveniente salientar que, em alguns casos, como no modelo de Eijl, o custo do último arco não é contabilizado.

4. DIFERENÇA ENTRE OS PROBLEMAS

Para entender a diferença entre o Problema do Caixeiro Viajante e o Problema de Mínima Latência mostraremos um exemplo numérico. Para um grafo $G = (V,E)$ com seis nodos e cada aresta com um custo c_{ij} resolveremos o PCV e o PML. A figura (1) mostra o grafo G .

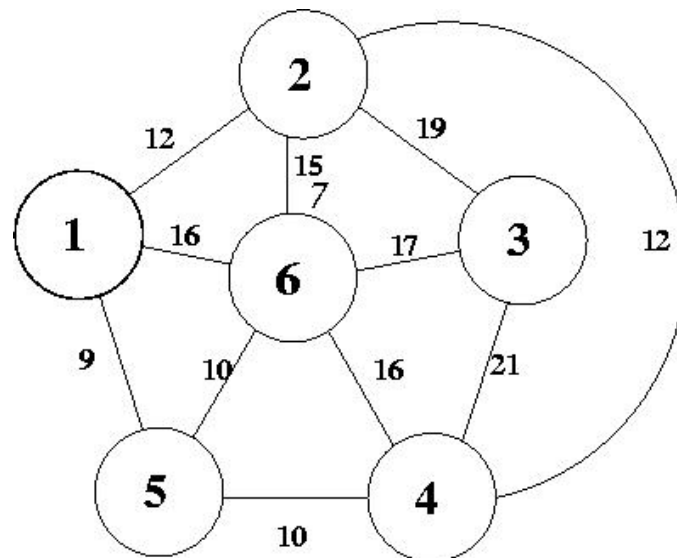


Figura 1

A figura (2) mostra a solução do PCV para o grafo G . A solução ótima inteira para o PCV no grafo G é 81($9+10+17+21+12+12$).

A figura (3) mostra a solução ótima para o PML para o grafo G . A solução ótima inteira para o PML no grafo G é 259 ($9 + (9+10) + (9+10+12) + (9+10+12+19) + (9+10+12+19+17) + (9+10+12+19+17+16)$). Neste caso podemos fazer uma interpretação de tempo, onde a cada nó visitado o tempo de espera, em relação a origem, vai aumentando à medida que os nós são visitados.

Outra forma de se calcular o valor da função objetiva é $259(9*6 + 10*5 + 12*4 + 19*3 + 17*2 + 16)$. Neste outro caso podemos fazer uma interpretação de fluxo onde um fluxo unitário deve ser entregue em cada nó do grafo G . É importante lembrar que o fluxo global que sai da origem é igual ao número de nós e que este fluxo vai diminuindo em uma unidade a cada nó visitado. Neste exemplo, no primeiro arco escolhido para a solução o fluxo é 6, no segundo 5, e assim por diante. Este valores de fluxos são multiplicados pelo custo do arco correspondente gerando assim o custo total. Podemos então fazer uma relação entre o tempo de espera e o fluxo total que passa pelo arco.

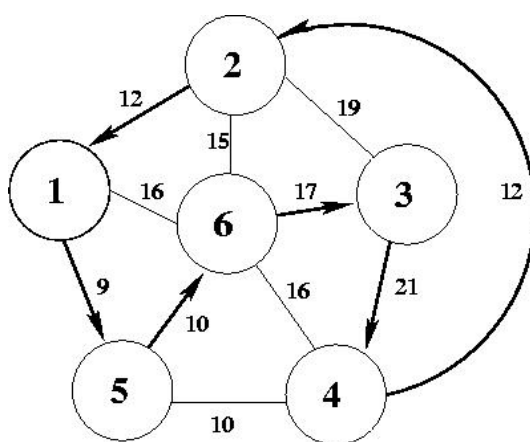


Figura 2

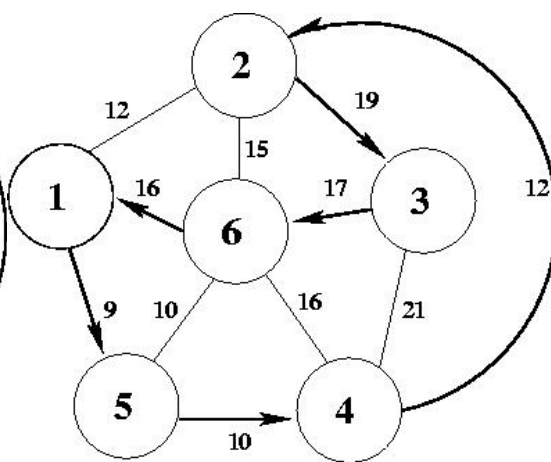


Figura 3

5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o grafo $G=(V,E)$, onde V é um conjunto de nós e E é um conjunto de arcos. Suponha que tenhamos um nó de origem o e um conjunto de nós K , onde $V = K \cup \{o\}$, e, para cada nó k uma demanda unitária da mercadoria k deve ser entregue por um circuito que minimize a soma dos tempos de espera em cada nó. Para simplificar a apresentação nós usaremos a interpretação do “*deliveryman problem*” (problema do entregador) para o PML.

Para este problema um modelo de programação linear inteira mista foi desenvolvido. Nós definimos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o entregador atravessa o arco } (i,j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

c_{ij} = tempo gasto para percorrer o arco (i,j) .

g_{ij} = fluxo total de mercadorias que passa pelo arco (i,j) .

O modelo matemático é:

$$(7) \text{ Min } \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} g_{ij}$$

$$(8) \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V$$

$$(9) \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V$$

$$(10) \sum_{(o,j) \in E} g_{oj} = |K|, \quad \forall k \in K$$

$$(11) \sum_{(i,k) \in E} g_{ik} - \sum_{(k,j) \in E} g_{kj} = 1, \quad \forall k \in K$$

$$(12) g_{ij} \leq \sum_{k \in K} x_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E$$

$$(13) g_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E$$

$$(14) x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in E$$

A função objetivo (7) leva em conta o custo total nos fluxos nos arcos, o que corresponde no PML ao tempo total de espera dos clientes. As restrições (8) e (9) garantem que só chega um e só sai um arco de cada nó na solução final. O conjunto de restrições (10) assegura que o fluxo que saíra do nó origem é igual ao somatório das demandas em todos os nós, que é igual a $|K|$. No PML original a demanda em cada nó é unitária. As restrições (11) forçam que em cada nó seja entregue sua respectiva

demanda unitária. As restrições (12) e (13) garantem que não pode ter fluxo nos nós que não foram escolhidos na solução ótima e que este fluxo não é negativo. E, finalmente, as restrições (14) asseguram a integralidade da solução.

É conveniente salientar que são as variáveis g_{ij} que asseguram a eliminação de sub-ciclos inválidos. Um artifício similar a este foi utilizado por Miller, Tucker e Zemlin [MTZ60] em 1960 no Problema do Caixeiro Viajante. Em [MTZ60] as variáveis que eliminam ciclos contabilizam o tempo. Segundo Laporte [LN87], em 1979, Gavish e Graves [GG79] também utilizaram variáveis que contabilizavam o fluxo global na eliminação de ciclos em um modelo para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado. A particularidade do nosso modelo é que as variáveis de fluxo, além de eliminarem ciclos, aparecem na função objetivo, servindo também para contabilizar o tempo total de espera dos clientes.

6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os testes foram realizados em uma máquina com um processador Pentium IV de 2.4Ghz com 1Gbyte de memória RAM. O sistema operacional é o Linux. Nós utilizamos o resolvidor Cplex 9.0 da Ilog com valores padrões para os parâmetros, exceto o limite total de tempo que foi alterado para 7200 segundos.

Dividimos os resultados computacionais em duas baterias de testes. Em todas as instâncias os valores de c_{ij} são aleatórios dentro do intervalo especificado. De cada instância mostramos o número de nós, de variáveis binárias, contínuas, o número de restrições, o número de nós “Branch-and-Bound”, o número de iterações, o tempo de solução ótima pelo Cplex e o gap de relaxação linear. Este gap é calculado pela fórmula $gap = (SO - SR) / SO$, onde SO é a solução ótima da instância e SR é a solução relaxada. Na primeira bateria colocamos um parâmetro para especificar o valor máximo dos custos c_{ij} . A segunda bateria de c_{ij} tem valor máximo 3200.

Para validar nosso modelo resolvemos todas as instâncias duas vezes. A primeira com o nosso modelo (7)-(14) e a segunda com o modelo de Eijl (1)-(6). Nas tabelas (1) e (3) são mostradas as informações das instâncias e nas Tabelas (2) e (4) comparamos os resultados do nosso modelo com os resultados do modelo de Eijl apresentado anteriormente. Fizemos isto para comparar as instâncias, gap de relaxação linear, número de variáveis, restrições. Os campos *Rest* e *Iteraç* nas tabelas (2) e (4) dizem respeito ao número de restrições do modelo e o número de iterações realizadas pelo Cplex.

6.1 Bateria de Dados 1

Na Bateria de Dados 1 (Tabelas (1) e (2)) as instâncias foram criadas aleatoriamente. Nas duas primeiras instâncias, C1 e C2, o grafo é completo. Pelos dados apresentados podemos concluir que nos dois modelos o número de variáveis binárias é igual ao número de variáveis contínuas. Além disto, o número de restrições sempre é menor no modelo de Eijl. Outro dado observado é que em seis das nove instâncias o nosso modelo foi mais rápido que o modelo de Eijl, apesar de que em uma delas o nosso modelo foi mais rápido mas o Cplex fez mais iterações que o modelo de Eijl. Outra constatação que fizemos é que nessas 9 instâncias em 7 delas o gap de relaxação linear no nosso modelo foi pior que o modelo de Eijl. Salvo as comparações entre os dois modelos podemos observar a importância dos limites dos fluxos. Em instâncias de tamanhos parecidos como a C1 e C2, C4 e C6, C7 e C9 quanto maior era o custo máximo mais fácil o problema foi resolvido. Podemos concluir então que no PML, para estes dois modelos, quanto maior for a variação dos custos mais fácil se torna o problema.

Prob	Nós	Variáveis Binárias	Variáveis Contínuas	Valor máximo c_{ij}
C1	10	90	90	1500
C2	10	90	90	15000
C3	10	36	36	1500
C4	15	106	106	15000
C5	15	70	70	15000
C6	15	104	104	1500
C7	20	106	106	15000
C8	20	94	94	15000
C9	20	100	100	8000

Tabela 1

Prob	Nosso Modelo (7) – (14)					Eijl Modelo (1) – (6)				
	Rest	Nós BB	Iteraç	Tempo Cplex (s)	RL (%)	Rest	Nós BB	Iteraç	Tempo Cplex (s)	RL (%)
C1	210	51368	487063	31.93	69.07	192	24677	288615	18.83	60.87
C2	210	3954	34188	1.91	76.16	192	3622	49183	3.28	66.63
C3	102	50	609	0.07	59.16	92	41	525	0.08	52.60
C4	257	196125	2020586	109.43	65.42	243	91931	1281668	85.39	74.04
C5	185	881	11799	0.76	73.07	173	1476	21176	1.39	77.17
C6	253	310939	3992122	264.18	64.30	243	429312	5015333	315.56	72.70
C7	272	83591	1818814	107.47	86.25	258	43931	878787	90.18	81.47
C8	248	1884	35657	2.07	81.09	242	2533	54168	5.42	71.17
C9	260	58716	964515	55.73	80.94	250	52023	1121651	73.94	74.04

Tabela 2

6.2 Bateria de Dados 2

Na Bateria de Dados 2 (Tabelas (3) e (4)) fixamos o valor máximo de c_{ij} para 3200 e tentamos resolver instâncias cada vez maiores. Apesar dos grafos representativos destas instâncias não serem completos conseguimos resolver instâncias de 70 nós somente com o nosso modelo matemático. Além disto, das 23 instâncias testadas o nosso modelo foi mais rápido em 18 delas e, em duas, as de 70 nós (P22 e P23) o modelo de Eijl não conseguiu resolvê-las no tempo de 7200 segundos por nós estipulado. Apesar dos modelos serem eficientes, todos os dois apresentaram um *gap* de relaxação linear muito alto. Mesmo com a evidente superioridade do nosso modelo o *gap* de relaxação linear do modelo de Eijl foi melhor em 19 dos 23 casos. Outra constatação que fizemos é que a solução da relaxação linear do nosso modelo foi sempre inteira. Apesar de não podermos provar é possível que nosso modelo apresente uma propriedade chamada integralidade.

Prob	Nós	Variáveis Binárias	Variáveis Contínuas
P1	10	32	32
P2	10	32	32
P3	10	38	38
P4	15	72	72
P5	15	68	68
P6	20	78	78

P7	20	74	74
P8	20	102	102
P9	30	118	118
P10	30	112	112
P11	30	108	108
P12	30	90	90
P13	40	140	140
P14	40	152	152
P15	45	158	158
P16	45	160	160
P17	47	160	160
P18	50	188	188
P19	55	210	210
P20	60	238	238
P21	65	262	262
P22	70	266	266
P23	70	266	266

Tabela 3

Prob	Nosso Modelo (7)-(14)					Eijl Modelo (1) – (6)					
	Rest	Nós BB	Iteraç	Tempo Cplex (s)	RL (%)	Rest	Nós BB	Iteraç	Tempo Cplex (s)	RL (%)	Gap Cplex
P1	94	26	406	0.05	78.79	86	19	407	0.07	52.47	0
P2	94	2	128	0.03	73.15	84	4	231	0.05	65.53	0
P3	106	42	572	0.08	75.49	96	60	757	0.12	60.83	0
P4	189	47	877	0.16	84.43	181	61	1071	0.21	65.53	0
P5	181	359	3677	0.29	84.84	173	210	3525	0.43	74.25	0
P6	216	283	4041	0.39	81.93	206	215	5096	0.67	75.69	0
P7	208	487	8432	0.53	78.79	198	643	15783	1.56	76.98	0
P8	264	12926	203500	12.24	79.95	254	8740	178664	12.17	79.31	0
P9	326	3396	117439	13.62	90.77	316	4205	147624	17.40	80.51	0
P10	314	841	39766	4.81	83.89	310	1047	36589	3.23	80.49	0
P11	306	56	1278	0.37	83.47	300	105	3718	1.01	80.88	0
P12	270	55	2917	0.58	85.30	260	109	3779	0.52	82.53	0
P13	400	543	29388	4.42	85.05	390	1314	40329	5.20	87.97	0
P14	424	2181	116199	17.51	87.26	412	7718	334227	44.86	85.45	0
P15	541	370	26470	4.43	88.83	443	471	25230	3.95	84.00	0
P16	455	3084	167082	25.91	84.65	449	24726	840466	106.72	86.46	0
P17	461	2295	145397	22.22	88.73	451	4355	202493	28.18	87.83	0
P18	526	330	33927	6.64	89.04	522	1542	147183	28.16	88.40	0
P19	585	35327	2444155	443.50	89.02	575	44663	2371555	387.94	90.23	0
P20	656	26321	2377416	473.54	89.84	648	169329	14893669	3048.80	90.15	0
P21	719	292	40242	10.57	93.08	711	2655	435167	121.70	91.58	0
P22	742	76227	9042964	2312.23	93.39	730	192442	25003518	7200.01	90.88	75.63
P23	730	92658	9880143	2661.61	91.86	826	164966	23810749	7200.01	90.10	75.14

Tabela 4

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos uma revisão bibliográfica do Problema de Mínima Latência, definimos o problema, mostramos um exemplo didático e comparamos com a solução do Problema do Caixeiro Viajante.

Além disto, neste artigo fizemos um modelo de formulação linear de fluxos (7)-(14) para o PML e utilizamos o *software* Cplex9.0 para realizar os experimentos. No modelo introduzimos as variáveis g_{ij} , também citadas em[RAN01][SL03], relativas ao fluxo global no arco (i,j) e que inibem sub-ciclos.

Comparamos os resultados no nosso modelo com o modelo de Eijl [EIJL95] e concluímos que nosso modelo costuma ser mais rápido, mas tem um *gap* de relaxação linear pior que do modelo de Eijl. A literatura só mostra resultados para instâncias de tamanho 60 para o problema. Nós mostramos instâncias de tamanho 70, apesar de serem com grafos não completos.

A inclusão de um novo modelo para o PML, totalmente diferente dos existentes, gera inúmeras possibilidades de estudo e abre caminho para novas decomposições. Estas decomposições tendem a gerar melhores resultados para este problema pouco estudado mas de difícil solução e grande beleza prática e teórica.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BLUM94] A. Blum and P. Chalasani and D. Coppersmith and B. Pulleyblank and P. Raguavan and M. Sudan. *The minimum latency problem*, Proc 26th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1994.
- [BRS89] L. Bianco and A. Mingozzi and S. Ricciardelli and M. Spadoni. *A new algorithm for the single vehicle delivery problem*, Conference on the Practice and Theory of Operations Management et 4^{es} Journées Francophones sur la Logistique et le Transports ,pages 313-320, 1989.
- [BYE00] Bang Ye Wu. *Polynomial time algorithms for some minimum latency problems*. Information Processing Letters 75, 225–229,2000
- [CON67] R. Conway and W. Maxwell and L. Miller. *Theory of scheduling*, Addison-Wesley, 1967.
- [DANT54] R. Dantzig and R. Fulkerson and S. Johnson. *Solution of a large-scale traveling-salesman problem*, Operations Research, vol 2, pages 393-410, 1954.
- [EIJL95] C. Eijl. *A polyhedral approach to the delivery man problem* Eindhoven University of Technology Memorandum COSOT 95, 1995.
- [FIS93] M. Fischetti and G. Laporte and S. Martelo. *The delivery man problem and cumulative methods*, Operations Research, vol 6, pages 1055-1064, 1993
- [FOX73] K. Fox. *Production scheduling on parallel lines with dependencies*. Johns Hopkins University, 1973.
- [FOX79] K.R. Fox and B. Gavish and S. C. Graves. *The time dependent traveling salesman problem and extensions*, Boeing Commercial Airplane Company, University of Rochester e Massachusetts Institute of Technology, 1979
- [FOX80] K. Fox and B. Gavish and S. Graves. *An n-constraint formulation of the (time-dependent) traveling salesman problem*, Operations Research vol 28, pages 1018-1021, 1980.
- [GG79] B. Gavish and S.Graves. *The travelling salesman problem and related problems*. University of Rochester and Massachusetts Institute of Technology.1979.
- [GK98] M. Goemans and J. Kleinberg. *An improved approximation ratio for the minimum latency problem*. Mathematical Programming 82 pages 111-124, 1998.
- [GOL00] M. Goldbarg and H. P. L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear*, Campus, 2000.
- [JR04] R.Jothi and B. Raghavachari. *Minimum Latency Tours and the k-Traveling Repairman Problem*. Relatório Técnico. Departamento de Computer Science,University of Texas at Dallas,2004.
- [LN87] G. Laporte and Y. Nobert. *Exact Algorithms for the vehicle routing problem*. Ann. Discrete

- Math. Vol 31, pages 147-184. 1987.
- [LUC90] A. Lucena. *Time-dependent traveling salesman problem - the deliveryman case*. Networks 20, pages 753-763, 1990.
- [MTZ60] C.E. Miller and A.W. Tucker and R.A. Zemlin. *Integer programming formulation of traveling salesman problems*, ACM, vol 7, number 4, pages 326-329, 1960.
- [PIC78] J. C. Picard and M. Queyranne. *The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling*, Operations Research, vol 26, pages 86-110, 1978.
- [SIM91] D. Simchi-Levi and O. Berman. *Minimize the total flow time of n jobs on a network*, IIE Trans, vol 23, pages 236-244, 1991.
- [SL03] J.F.M Sarubbi and H.P.L.Luna. *Um modelo linear para o problema do caixeiro viajante com demandas heterogêneas*. XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Natal-RN, Novembro de 2003.
- [SL05] J.F.M Sarubbi and H.P.L.Luna. *A New Asymmetrical Flow Formulation for the Single Vehicle Delivery Problem*. Operations Research 2005 conference. Bremen-Alemanha. Aceito para apresentação oral, setembro, 2005.
- [RAN01] C. D. Randazzo. *Algoritmos para problemas de planejamento de redes multi-níveis*, tese de Doutorado em Ciência da Computação, Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.