Matemática Concreta

Somas

Dr. A. Riker
Universidade Federal do Pará (UFPA)
afr@ufpa.br

2021.PL03

Somas

- Notação usada para expressar a soma dos termos:

  $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$

  – a partir da seqüência $\{a_n\}$:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

- Note que a escolha da letra “j” como índice é arbitrária

Somas

- Exemplo: A soma dos 100 primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$, onde $a_n=1/n$, para $n=1,2,3,\ldots$. é dada por:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Somas

- Exemplo: qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

  - Solução: temos

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Deslocamento de índice

- Útil quando duas somas precisam ser adicionadas, mas os seus índices não combinam.
- Importante fazer as mudanças apropriadas no somando.
- **Exemplo**: Suponha que tenhamos a soma: $\sum_{j=1}^{5} j^2$
  - mas precisamos que o índice vá de 0 a 4, em vez de 1 a 5
  - para isto, fazemos k=j-1
  - o termo j^2 se torna $(k+1)^2$

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2 = 55$$

Somas Duplas

- Aparecem em muitos contextos.
  - Por exemplo: na análise de loops "aninhados" em programas
- Exemplo: $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$

- Para avaliar a soma dupla, expanda a soma interna e então compute a externa:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i+2i+3i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} 6i =$$

$$= 6+12+18+24 = 60$$

Somas Completas

- Pode-se usar esta notação para adicionar todos os valores de uma função ou termos de um conjunto indexado.
- Ou seja, escreve-se:

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

  - para representar a soma dos valores f(s), para todos os membros s de S.

Somas Completas

- Exemplo: qual o valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$?

  - Solução:

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Somas Conhecidas

- Certas somas aparecem repetidamente ao longo da matemática discreta.
- Útil ter uma coleção de fórmulas para estas somas.
- Há muitas maneiras de provar/obter estas somas.
  - Mas note que todas elas podem ser provadas por indução matemática.

Somas úteis

Soma	Forma fechada
$\sum_{k=0}^{n} ar^k, (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r-1}, (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \|x\| < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \|x\| < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Somas úteis

- Exemplo: Encontre $\sum_{k=50}^{100} k^2$

- Solução:
  - primeiro note que: $\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$
  - então, usando a fórmula para Σ (k^2) da tabela, obtemos:

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 297925$$

Somas úteis

- Exemplo: Seja x um nro real com |x|<1. Ache $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

- Solução: pela primeira fórmula da tabela, com a=1 e r=x, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$$

- Então, já que |x|<1, x^{k+1} se aproxima de zero quando k tende a infinito.
  – portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

Resumo das Propriedades

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i, \text{ onde k é uma constante arbitrária}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = nk, \text{ onde k é uma constante arbitrária}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{j=p}^{n}\sum_{i=q}^{m} a_{ij} = \sum_{i=q}^{m}\sum_{j=p}^{n} a_{ij}$$

Casos Especiais

1. $\sum_{i=p}^{q} 0 = 0$
2. $\sum_{i=p}^{n} i = \sum_{i=p-1}^{n-1} (i+1)$

   ex.: $\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=0}^{3-1} (i+1)$

   ex.: $1 + 2 + 3 = (0+1) + (1+1) + (2+1)$
3. $\sum_{i=p}^{n} i = \sum_{i=p+1}^{n+1} (i-1)$

   ex.: $\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=2}^{3+1} (i-1)$

   ex.: $1 + 2 + 3 = (2-1) + (3-1) + (4-1)$
4. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c = c.n.n = c.n^2$

   ex.: $\sum_{i=1}^{10} \sum_{i=1}^{10} 1 = 10.10 = 10^2$

Somatório com Predicado

- Uma variante mais geral de notação de somatório é
  $$\sum_{P(k)} a_k$$
- Onde P é algum predicado sobre o conjunto dos inteiros. Neste caso, o resultado será soma de todos os a_k tal que P(k) seja verdadeiro.
- Exempo: Seja P(k): "k é ímpar", entâo:
  $$\sum_{1 \leq P(k) \leq 10} k^2 = 1^2 + 3^2 + ... + 9^2$$

Exercício

Questão 1)

Utilizando o simbolo de somatório, represente as seguintes somas

(a) $z_1 + z_2 + \cdots + z_{27}$

(b) $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{10}y_{10}$

(c) $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_{15} - b_{15})$

(d) $3^3 + 4^3 + \cdots + 10^3$

(e) $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$

(f) $1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + 25^{25}$

Exercício

Questão 2)

Averigue o valor lógico de cada uma das proposições seguintes

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} (3+i) = 3 + \sum_{i=0}^{100} i$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{200} (3k) = 3\sum_{k=1}^{200} k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^3$

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} (3+j) = 300 + \sum_{j=1}^{100} j$

Exercício

Questão 3)

Recorrendo a propriedades de somatórios calcule:

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{50}(3+i)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(5+4k)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[(2k+1)^2-(2k)^2]$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}((5k+1)^2-(5k-1)^2)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5^k}-\frac{1}{5^{k+1}}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{2i-1}-\frac{i+2}{2i+1}\right)$.

Matemática Concreta

Somas

Dr. A. Riker
Universidade Federal do Pará (UFPA)
afr@ufpa.br

2021.PL03