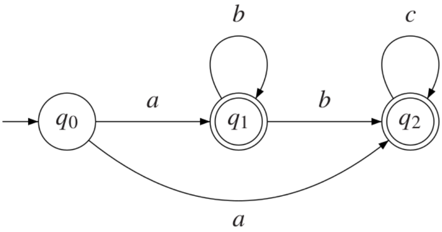
Teoria da Computação
Linguagens Regulares (Parte 1)
Equivalência entre AFND e AFD

Prof. Jefferson Magalhães de Morais

Notação tabular

- É uma notação para a representação de autômatos finitos
  - Cada linha da tabela representa um estado distinto q
  - Cada coluna é associada a um elemento distinto de σ
  - Cada célula é preenchida com o elemento de 2^Q determinado por $\delta(q, \sigma)$
  - "$\rightarrow$" é o estado inicial
  - "$\leftarrow$" indica os estados finais
  - "$\leftrightarrow$" indica um estado simultaneamente inicial e final



	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$		
$\leftarrow$	q_1		$\{q_1, q_2\}$	
$\leftarrow$	q_2			$\{q_2\}$

Algoritmo

- Considere $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{10}, F_1)$ um AFND e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{20}, F_2)$ um AFD que se deseja obter. M_2 é obtido a partir de M_1 através do algoritmo seguinte

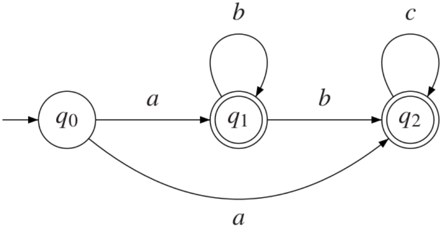
  - *Entrada:* M_1 *com* $\delta_1 : Q_1 \times \Sigma \rightarrow 2^{Q_1}$
  - *Saída:* M_2 *com* $\delta_2 : Q_2 \times \Sigma \rightarrow Q_2$ *tal que* $L(M_1) = L(M_2)$

  - *Método:*
    1. $Q_2 \leftarrow \emptyset, F_2 \leftarrow \emptyset, \delta_2 \leftarrow \emptyset$
    2. $\forall i \geq 0$, se $q_{1i} \in Q_1$ então $Q_2 \leftarrow Q_2 \cup \{q_{2i}\}$
    3. $\forall i \geq 0$, se $q_{1i} \in F_1$ então $F_2 \leftarrow F_2 \cup \{q_{2i}\}$
    4. $\forall q_{1i} \in Q_1, \sigma \in \Sigma$, se $\delta_1(q_{1i}, \sigma) = \{q_{11}, \ldots, q_{1n}\}, n \geq 1$, então $\delta_2(q_{2i}, \sigma) = \{q_{21}, \ldots, q_{2n}\}$
    5. *Substituir todos os elementos* $\{q_{2i}\}$ *de* δ_2 *por* q_{2i}

6. *Enquanto houver transições não-determinísticas em δ_2, faça:*
   a) *Selecione uma transição não-determinística qualquer* $\delta_2(q, \sigma) = \{q_{21}, \ldots, q_{2n}\}, n \geq 2$
   b) *Acrescente um novo estado* $q_{21} \ldots q_{2i} \ldots q_{2n}$ *à tabela de transição de estados (índices em ordem crescente); se* $q_{2i} = q_{2i1} \ldots q_{2im}$, *considerar a ordenação de todos os estados obtidos pela substituição de* q_{2i} *por* $q_{2i1} \ldots q_{2im}$ *em* $q_{21} \ldots q_{2i} \ldots q_{2n}$
   c) *Substitua todas as referências a* $\{q_{21}, \ldots, q_{2n}\}$ *por* $q_{21} \ldots q_{2n}$
   d) *Para cada* $\sigma \in \Sigma$, *faça:*
      i. $\delta_2(q_{21} \ldots q_{2n}, \sigma) \leftarrow \emptyset$
      ii. *Para cada estado* $q_{2j} \in \{q_{21}, \ldots, q_{2n}\}$, *faça:*
         A. $\delta_2(q_{21} \ldots q_{2n}, \sigma) \leftarrow \delta_2(q_{21} \ldots q_{2n}, \sigma) \cup \delta_2(q_{2j}, \sigma)$
         B. Se $q_{2j} \in F_2$, *então* $F_2 \leftarrow F_2 \cup \{q_{21} \ldots q_{2n}\}$

Exemplo 1

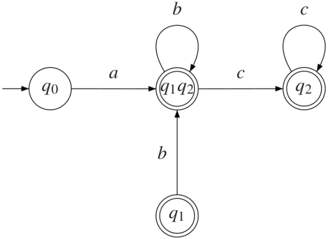
Considere o AFND apresentado anteriormente



	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$		
$\leftarrow$	q_1		$\{q_1, q_2\}$	
$\leftarrow$	q_2			$\{q_2\}$

Resultado final após a aplicação do algoritmo

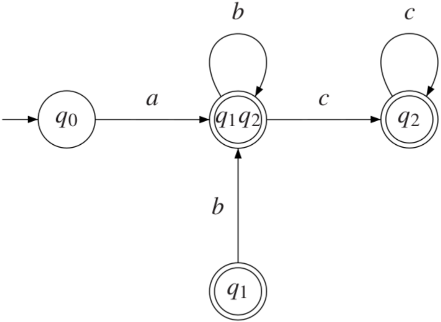
	δ'	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		
$\leftarrow$	q_1		q_1q_2	
$\leftarrow$	q_2			q_2
$\leftarrow$	q_1q_2		q_1q_2	q_2



Exemplo 1

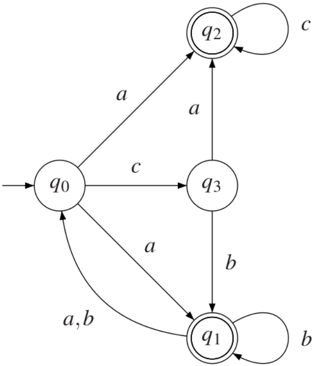
- A eliminação de não-determinismo implica
  - Criação de novos estados Q'
  - Altera a função de transição de estados δ'
  - Acrescenta estados finais ao autômato resultante F'

- O AFD resultante pode conter **estados inacessíveis**, i.e., estados que não podem ser atingidos a partir do estado inicial por nenhum caminho



Exemplo 2

Considere o AFND e a sua notação tabular



	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$		$\{q_3\}$
$\leftarrow$	q_1	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	
$\leftarrow$	q_2			$\{q_2\}$
	q_3	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	

Exemplo 2

Substituir $\{q_0\}$ por q_0, $\{q_1\}$ por q_1, $\{q_2\}$ por q_2 e $\{q_3\}$ por q_3

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$		$\{q_3\}$
$\leftarrow$	q_1	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	
$\leftarrow$	q_2			$\{q_2\}$
	q_3	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	$\{q_0, q_1\}$	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	

Exemplo 2

Criar um novo estado $q_1 q_2$, substituindo $\{q_1, q_2\}$ na tabela por $q_1 q_2$

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	$\{q_0, q_1\}$	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	$q_1 q_2$		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	$\{q_0, q_1\}$	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	$q_1 q_2$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_2

Exemplo 2

Criar um novo estado q_0q_1, substituindo $\{q_0, q_1\}$ na tabela por q_0q_1

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	$\{q_0, q_1\}$	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_2

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	q_0q_1	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	q_0q_1	q_2
$\leftarrow$	q_0q_1	$\{q_1q_2, q_0\}$	q_0q_1	q_3

Criar um novo estado $q_0 q_1 q_2$, substituindo $\{q_1 q_2, q_0\}$ na tabela por $q_0 q_1 q_2$

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	q_0q_1	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	q_0q_1	q_2
$\leftarrow$	q_0q_1	$\{q_1q_2, q_0\}$	q_0q_1	q_3

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	q_0q_1	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	q_0q_1	q_2
$\leftarrow$	q_0q_1	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	q_3
$\leftarrow$	$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	$\{q_2, q_3\}$

Exemplo 2

Criar um novo estado q_2q_3, substituindo $\{q_2, q_3\}$ na tabela por q_2q_3

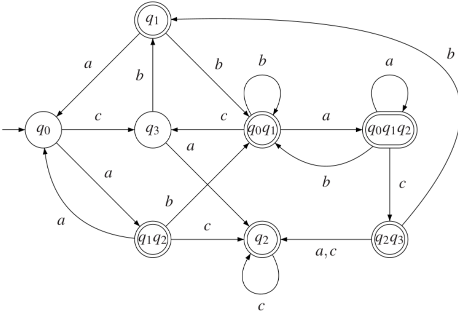
	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	q_0q_1	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	q_0q_1	q_2
$\leftarrow$	q_0q_1	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	q_3
$\leftarrow$	$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	$\{q_2, q_3\}$

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	q_0q_1	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	q_0q_1	q_2
$\leftarrow$	q_0q_1	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	q_3
$\leftarrow$	$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	q_2q_3
$\leftarrow$	q_2q_3	q_2	q_1	q_2

Exemplo 2

Resultado final

	δ	a	b	c
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2		q_3
$\leftarrow$	q_1	q_0	q_0q_1	
$\leftarrow$	q_2			q_2
	q_3	q_2	q_1	
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0	q_0q_1	q_2
$\leftarrow$	q_0q_1	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	q_3
$\leftarrow$	$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$	q_0q_1	q_2q_3
$\leftarrow$	q_2q_3	q_2	q_1	q_2



Novos estados

- O número de novos estados no AFD é limitado pela quantidade de **combinações distintas** que podem ser feitas entre os estados do AFND

- Se $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ é o AFND e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0, F_2)$ é o AFD equivalente, então $|Q_2| \leq 2^{|Q_1|} - 1$

- **Exemplo**: eliminação de não-determinismos

	δ	a	b
$\rightarrow$	q_0	$\{q_1, q_2\}$	
$\leftarrow$	q_1		
	q_2	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$

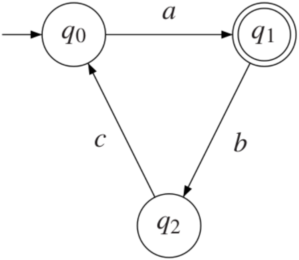
	δ	a	b
$\rightarrow$	q_0	q_1q_2	
$\leftarrow$	q_1		
	q_2	q_0q_2	q_0q_1
$\leftarrow$	q_1q_2	q_0q_2	q_0q_1
$\leftarrow$	q_0q_1	q_1q_2	
	q_0q_2	$q_0q_1q_2$	q_0q_1
$\leftarrow$	$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$	q_0q_1

- $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$ e
- $Q_2 = \{q_0, q_1, q_2, q_0q_1, q_0q_2, q_1q_2, q_0q_1q_2\}$
- $|Q_1| = 3$ e $|Q_2| = 2^3 - 1 = 7$

Considerações sobre a equivalência

- Nem sempre todas as combinações possíveis de estados surgirão
- Alguns estados antigos, eventualmente, tornam-se inacessíveis
- Conclusão sobre o teorema
  - Existe um AFD equivalente a qualquer AFND
  - O AFND **não é mais poderoso** que um AFD
- Procedimento inverso
  - É óbvio que existe um AFND que seja equivalente a AFD
  - A incorporação de não-determinismos pode ser feita trivialmente

Por exemplo, o AFD que aceita a linguagem $a(bca)^*$ é



Acrescentando um novo estado q_3 e a transição $\delta(q_2, c) = q_3$ já seria suficiente para tornar M não-determinístico, sem alterar a linguagem aceita por ele