

# Teoria da Computação

## Formas Normais

Prof. Jefferson Magalhães de Moraes

# Formas normais

- Estabelecem restrições rígidas na definição das produções, sem reduzir o poder de geração das GLC.
- Usadas no desenvolvimento de algoritmos(reconhecedores de linguagem) e na prova de teoremas.
  - FN de Chomsky, onde as produções são da forma:  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$
  - FN de Greibach, onde as produções são da forma:  $A \rightarrow a\alpha$  (onde  $\alpha$  é uma palavra de variáveis)

# Formais normais de Chomsky

- Qualquer LLC é gerada por uma GLC na forma normal de Chomsky.
- A conversão segue 3 etapas
  1. Simplificação da gramática;
  2. Transformação do lado direito das produções de comprimento maior ou igual a dois;
  3. Transformação do lado direito das produções de comprimento maior ou igual a três, em produções com exatamente duas variáveis.

# Formais normais de Chomsky

- Etapa 1
  - Excluir produções vazias
  - Exclui produções do tipo  $A \rightarrow B$  (se o lado direito da produção tiver só um símbolo, ele deve ser terminal); e
  - Exclui opcionalmente símbolos inúteis
  - Use os algoritmos de simplificação mostrados anteriormente!

# Formais normais de Chomsky

- Etapa 2
  - Garante que o lado direito das produções de comprimento maior ou igual a 2 seja composto exclusivamente por variáveis.
  - Exclui um terminal substituindo-o por uma variável intermediária:
    - $A \rightarrow aB$ , torna-se:
    - $A \rightarrow TB, T \rightarrow a$

# Formais normais de Chomsky

- Etapa 3
  - Garante que o lado direito das produções de comprimento maior do que 1 seja composto exclusivamente por duas variáveis.
    - $A \rightarrow BCD$
    - $A \rightarrow BF$
    - $F \rightarrow CD$

# Forma normal de Chomsky

- Exemplo: Transformação GLC para FNC.  $G = (\{E\}, \{+, *, [, ], x\}, P = \{E \rightarrow E+E \mid E * E \mid [E] \mid x\}, E)$
- E1: tem algo para excluir (vazias, inúteis ou  $A \rightarrow B$ )?

# Forma normal de Chomsky

- Exemplo: Transformação GLC para FNC.  $G = (\{E\}, \{+, *, [, ], x\}, P = \{E \rightarrow E+E \mid E*E \mid [E] \mid x\}, E)$
- E1: tem algo para excluir (vazias, inúteis ou  $A \rightarrow B$ )?  
Não
- E2:
  - $E \rightarrow E+E$  torna-se  $E \rightarrow EME$ , onde  $M \rightarrow +$
  - $E \rightarrow E*E$  torna-se  $E \rightarrow EVE$ , onde  $V \rightarrow *$
  - $E \rightarrow [E]$  torna-se  $E \rightarrow C^1EC^2$ , onde  $C^1 \rightarrow [$  e  $C^2 \rightarrow ]$ .
  - $E \rightarrow x$  (não mexe).



# Forma normal de Chomsky

- Exemplo: Transformação GLC para FNC.  $G = (\{E\}, \{+, *, [, ], x\}, P = \{E \rightarrow E+E \mid E*E \mid [E] \mid x\}, E)$
- E3:  $E \rightarrow EME \mid EVE \mid C^1EC^2$  torna-se:
  - $E \rightarrow ED^1 \mid ED^2 \mid C^1D^3$
  - $D^1 \rightarrow ME$
  - $D^2 \rightarrow VE$
  - $D^3 \rightarrow EC^2$

# Forma normal de Chomsky

- Exemplo: Transformação GLC para FNC.  $G = (\{E\}, \{+, *, [, ], x\}, P = \{E \rightarrow E+E \mid E*E \mid [E] \mid x\}, E)$
- A gramática resultante é:
  - $G = (\{E, M, V, C^1, C^2, D^1, D^2, D^3\}, \{+, *, [, ], x\}, P, E)$ 
    - $P = \{ E \rightarrow ED^1 \mid ED^2 \mid C^1D^3 \mid x, \\ D^1 \rightarrow ME, D^2 \rightarrow VE, D^3 \rightarrow EC^2, \\ M \rightarrow +, V \rightarrow *, C^1 \rightarrow [, C^2 \rightarrow ] \}$

# Forma normal de Chomsky

- Colocar a GLC na FN de Chomsky
- $G = ( \{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S )$
- $P: S \rightarrow A \mid A B A$   
 $A \rightarrow a A \mid a$   
 $B \rightarrow b B \mid b$

Solução

a)  $P': S \rightarrow a A \mid a \mid A B A$   
 $A \rightarrow a A \mid a$   
 $B \rightarrow b B \mid b$

b)  $P'': S \rightarrow A_a A \mid a \mid A B A$   
 $A \rightarrow A_a A \mid a$   
 $B \rightarrow A_b B \mid b$   
 $A_a \rightarrow a$   
 $A_b \rightarrow b$

c)  $P''': S \rightarrow A_a A \mid a \mid A B'$   
 $B' \rightarrow B A$   
 $A \rightarrow A_a A \mid a$   
 $B \rightarrow A_b B \mid b$   
 $A_a \rightarrow a$   
 $A_b \rightarrow b$

# Forma normal Greibach

- Uma GLC está na Forma Normal de Greibach se ela é  $\epsilon$ -livre e apresenta todas as produções na forma:
  - $A \rightarrow a \alpha$
  - onde  $A \in N$ ,  $a \in T$  e  $\alpha \in N^*$ .

# Forma normal Greibach

- Para achar a gramática equivalente a  $G = (N, T, P, S)$ , na GNF, deve-se seguir os seguintes passos:
  1. achar  $G' = (N', T, P', S)$  tal que  $L(G') = L(G)$  e que  $G'$  esteja na CNF (opcional)
  2. ordenar os não-terminais de  $G'$  em uma ordem quaisquer – por exemplo:  $N' = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$
  3. modificar as regras de  $P'$  de modo a que, se  $A_i \rightarrow A_j \gamma$  é uma regra de  $P'$ , então  $j > i$
  4. a gramática obtida do passo anterior,  $G''$ , apresentará todas as regras de  $A_m$  com o lado direito iniciando por um terminal; através de substituições sucessivas dos primeiros termos das regras  $A_i$  anteriores, coloca-se estas também nessa forma
  5. se no item 3 tiverem sido incluídos novos não-terminais  $B_i$  (para retirar recursões à esquerda), fazer também para as regras correspondentes a estes, as devidas substituições dos primeiros termos (que serão sempre terminais ou  $A_i$ )
  6. a gramática final,  $G'''$ , está na GNF

Exemplo: Obtenha a FNG.

$$P : S \rightarrow AS|a$$

$$A \rightarrow SA|b$$

Solução:

1.  $G$  já está na FNC;
2. Renomear os não-terminais:  $S = A_1$  e  $A = A_2$ ;

$$P : A_1 \rightarrow A_2A_1|a$$

$$A_2 \rightarrow A_1A_2|b$$

# Formal normal de Greibach

3. se  $A_i \rightarrow A_j \gamma \in P'$ , então  $j > i$ . A única regra a modificar é:

$$A_2 \rightarrow A_1 A_2 .$$

Substituindo  $A_1$  nesta regra:

$$A_2 \rightarrow A_2 A_1 A_2 | a A_2 | b .$$

Retirando a recursão à esquerda de

$$\overbrace{A_2}^A \rightarrow \overbrace{A_2}^A \overbrace{A_1 A_2}^{\alpha_1} \mid \overbrace{a A_2}^{\beta_1} \mid \overbrace{b}^{\beta_2},$$

obteremos:

$$P'' : A_1 \rightarrow A_2 A_1 \mid a$$

$$\overbrace{A_2}^A \rightarrow \overbrace{a A_2}^{\beta_1} \overbrace{B_2}^{A'} \mid \overbrace{b}^{\beta_2} \overbrace{B_2}^{A'}$$

$$\overbrace{B_2}^{A'} \rightarrow \overbrace{A_1 A_2}^{\alpha_1} \overbrace{B_2}^{A'} \mid \varepsilon$$



# Formal normal de Greibach

Retirando o  $\varepsilon$  por substituições:

$$P'' : A_1 \rightarrow A_2 A_1 | a$$

$$A_2 \rightarrow a A_2 B_2 | b B_2 | a A_2 | b$$

$$B_2 \rightarrow A_1 A_2 B_2 | A_1 A_2$$

4. Fazendo as substituições finais para tornar todos os lados direitos na forma  $A \rightarrow a\alpha$ ,  $A \in N$ ,  $a \in T$  e  $\alpha \in N^*$ :

$$P''' : A_1 \rightarrow aA_2B_2A_1|bB_2A_1|aA_2A_1|bA_1|a$$

$$A_2 \rightarrow aA_2B_2|bB_2|aA_2|b$$

$$B_2 \rightarrow aA_2B_2A_1A_2B_2|bB_2A_1A_2B_2| \\ aA_2A_1A_2B_2|bA_1A_2B_2|aA_2B_2| \\ aA_2B_2A_1A_2|bB_2A_1A_2|aA_2A_1A_2| \\ bA_1A_2|aA_2$$