

Vinício Chaves Botelho

Lista de Exercício: Problemas Recorrentes e Somas

Matemática Concreta

1) Escreva o conceito de recorrência e recursividade?

A recursividade é um procedimento que vai se definindo a partir de si próprio. A recorrência é a expressão que retorna o valor de uma função em um determinado ponto em termos dos valores da mesma função em pontos anteriores.

2) Quais classificações existem para relações de recorrência?

Uma relação pode ser homogênea (quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores) ou não homogênea; linear, quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear; por último, podemos classificar em ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele.

3) O que significa solucionar uma recorrência?

Significa encontrar uma fórmula fechada que dê o valor da função diretamente em termos de seu argumento. Entretanto, nem sempre é possível encontrar uma "fórmula fechada".

4) Toda recorrência admite uma fórmula fechada?

Não. Pode-se haver casos complexos em que é impossível encontrar uma fórmula fechada, sendo necessário calcular uma cota superior, também chamada Upper Bound. Em algoritmos pode ser útil para definir um teto de recursos gastos.

5) Cite 2 problemas que possuem recorrência linear homogênea de primeira ordem.

Torre de Hanoi e Os números de Lucas

6) Cite 2 problemas que possuem recorrência linear não-homogênea de primeira ordem.

Sequência de números ímpares e O problema de Josephus

7) Cite 2 problemas que possuem recorrência linear homogênea de segunda ordem.

Sequência de Fibonacci e o cálculo do tamanho de uma população de coelhos

8) Como o conceito de cota superior pode ser aplicado em solução de problemas recorrentes?

Como em todos os casos possuem uma relação, então utilizando o Upper Bound que seria a simplificação do problema que garante que mais do que o custo já encontrado não será superior.

9) Pesquise sobre o teorema Mestre e escreva resumidamente o que é e como ele pode ser aplicado.

O teorema Mestre é um método para resolver relações de recorrências provenientes de algoritmos do paradigma de divisão e conquista. Ele pode reduzir as recorrências que possuem a forma:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

n é o total tamanho do problema
 a e b não constantes
 $f(n)$ representa o custo no tempo de cada chamado recursivo

10) Pesquise e escreva sobre uma variação do problema da torre de Hanoi.

A história dos monges que devem se mover entre 3 torres de forma que apenas um pode se mover por vez e um monge mais pesado não pode ir a uma torre onde há um monge mais leve que chegou antes do mesmo.

11) Utilizando o símbolo de somatório, represente as seguintes somas

(a) $z_1 + z_2 + \dots + z_{27}$ $\sum_{j=1}^{27} z_j$

(b) $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{10}y_{10}$ $\sum_{j=1}^{10} x_j y_j$

(c) $(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots + (a_{15} - b_{15})$ $\sum_{j=2}^{15} (a_j - b_j)$

(d) $3^3 + 4^3 + \dots + 10^3$ $\sum_{j=3}^{10} j^3$

(e) $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$ $\rightarrow \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 b_i \cdot x^j$

(f) $1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 25^{25}$ $\sum_{i=1}^{25} \sum_{j=1}^{25} i^j$

12) Averigue o valor lógico de cada uma das proposições seguintes

(a) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$ Verdadeira

(b) $\sum_{i=0}^{100} (3+i) = 3 + \sum_{i=0}^{100} i$ Falsa

(c) $\sum_{k=1}^{200} (3k) = 3 \sum_{k=1}^{200} k$ Verdadeira

(d) $\sum_{k=0}^{12} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{12} k \right)^3$ Falsa

(e) $\sum_{j=1}^{100} (3+j) = 300 + \sum_{j=1}^{100} j$ Verdadeira

13) Recorrendo a propriedades de somatórios calcule:

(a) $\sum_{i=0}^{50} (3+i)$

(b) $\sum_{k=0}^{10} (5+4k)$

(c) $\sum_{k=1}^n [(2k+1)^2 - (2k)^2]$

(d) $\sum_{k=1}^n ((5k+1)^2 - (5k-1)^2)$

(e) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{5^{k+1}} \right)$

(f) $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i+1}{2i-1} - \frac{i+2}{2i+1} \right)$

ⓐ $\sum_{m=1}^{50} 3 + \sum_{m=1}^{50} 1^m = 3 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 50(50+1)$
 $= 150 + 1275 = 1425$

ⓑ