Teoria da Computação
Linguagens Regulares (Parte 1)
Atômatos Finitos

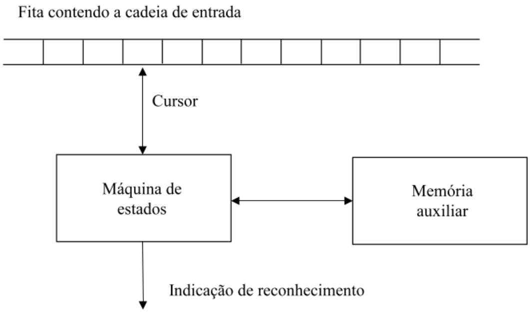
Prof. Jefferson Magalhães de Morais

Autômatos Finitos

- **Autômatos finitos** possibilitam a formalização das linguagens regulares
- São **dispositivos de aceitação** de sentenças
- Podem ser **determinísticos** ou **não-determinísticos**, com ou sem transição em vazio
- A presença de não-determinismo e/ou de transições em vazio **não** altera a classe de linguagens aceita pelos autômatos finitos
- Representações
  - **Forma algébrica**
  - **Diagrama de transição de estados**

Autômatos Finitos

- Lembrando da forma geral de um reconhecedor...



- Características de autômatos finitos
  1. Inexistência de memória auxiliar
  2. Cursor da fita de entrada apenas para a leitura de símbolos
  3. Movimentação do cursor apenas da esquerda para a direita
  4. A fita de entrada possui comprimento limitado

- Um AFD M é definido **algebricamente** por uma quíntupla

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

  - Q é um conjunto finito de estados
  - Σ é um alfabeto (finito e não-vazio) de entrada
  - δ é uma função de transição, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
  - q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$
  - F é um conjunto de estados finais, $F \subseteq Q$

- A máquina de estados de um autômato finito é definida pelo
  - Conjunto de estados Q
  - Função de transição δ que pode ser
    - **Total** ($\forall \sigma \in \Sigma$ com cada $q \in Q$, totalizando $|\Sigma| \times |Q|$ transições)
    - **Parcial**

Função de transição

- A função de transição é da forma

$$(p, \sigma) \rightarrow q$$

  ou

$$\delta(p, \sigma) = q$$

  com $p, q \in Q, \sigma \in \Sigma$

- **AF determinístico** refere-se ao fato de que o estado seguinte, resultado da aplicação de δ, será **único** em todas as situações

- Algumas considerações
  - $\delta(q, \varepsilon) = q$
  - $\delta(q, \sigma x) = \delta(\delta(q, \sigma), x), x \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

Configuração

- É definida pelo seu estado corrente e pela parte da cadeia de entrada ainda não analisada (incluindo o símbolo apontado pelo cursor)
  - **Configuração inicial**
    - Estado corrente é q_0
    - Cursor posicionado sobre o símbolo mais à esquerda da cadeia de entrada
    - Notação: $(q_0, x), x \in \Sigma^*$ sendo a cadeia a ser analisada
  - **Configuração final**
    - Estado corrente pertence ao conjunto F
    - Curso aponta para a posição imediatamente além do último símbolo da cadeia
    - Notação: (q_i, ε), $q_i \in F$

Funcionamento

- O AF opera efetuando movimentos que o conduzem através dos seus estados a partir da configuração inicial
- O AF aplica o seguinte procedimento repetidas vezes até que na fita de entrada não haja mais símbolos a serem lidos
  - Inspeciona o estado corrente e o símbolo apontado pelo cursor
  - Define o próximo estado e avança o cursor de leitura para a direita
- Com o **esgotamento da cadeia de entrada**, deve-se analisar o estado corrente q do autômato
  - Se $q \in F$: o autômato **reconheceu** a cadeia de entrada
  - Se $q \in Q - F$: o autômato **rejeitou** a cadeia de entrada

Movimentação

- Usa-se "$\vdash$" para representar configurações sucessivas do autômato

$$\vdash Q \times \Sigma^* \to Q \times \Sigma^*$$

- Movimentação de um autômato de uma configuração para a seguinte

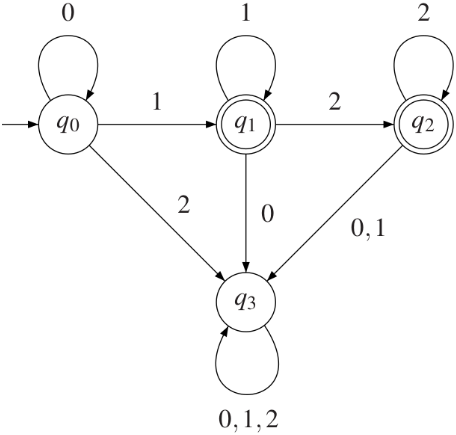
$$(q_i, \sigma\beta) \vdash (q_j, \beta), \text{ com } q_i, q_j \in Q, \sigma \in \Sigma, \beta \in \Sigma^*, \delta(q_i, \sigma) = q_j$$

- Portanto, a linguagem L definida por um autômato M é o conjunto de todas as cadeias w sobre o alfabeto Σ que levam M da sua configuração inicial para alguma configuração final através da aplicação sucessiva de transições definidas pela função δ

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash^* (q_F, \varepsilon), q_F \in F\} = \{w \in \Sigma^* \mid \boldsymbol{\delta}(q_0, w)$$

Diagrama de transição de estados

- São grafos orientados, rotulados nos vértices com os nomes dos estados e nos arcos com símbolos do alfabeto de entrada do autômato finito
- Os círculos representam os estados, e arcos as transições
- O estado inicial é um arco cuja extremidade inicial não é ligada a nenhum outro estado
- Os estados finais são representados por círculos duplos concêntricos

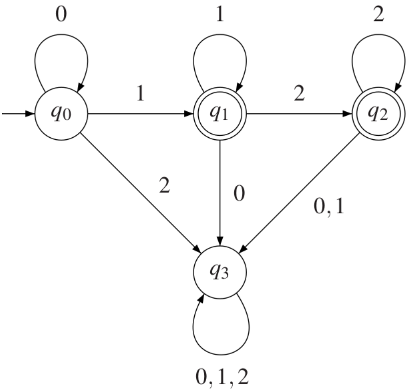


Representação algébrica

$M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

$$
\begin{aligned}
Q =& \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
\Sigma =& \{0, 1, 2\} \\
\delta =& \{(q_0, 0) \to q_0, (q_0, 1) \to q_1, (q_0, 2) \to q_3, \\
& (q_1, 0) \to q_3, (q_1, 1) \to q_1, (q_1, 2) \to q_2, \\
& (q_2, 0) \to q_3, (q_2, 1) \to q_3, (q_2, 2) \to q_2, \\
& (q_3, 0) \to q_3, (q_3, 1) \to q_3, (q_3, 2) \to q_3\} \\
F =& \{q_1, q_2\}
\end{aligned}
$$

Diagrama de transição de estados

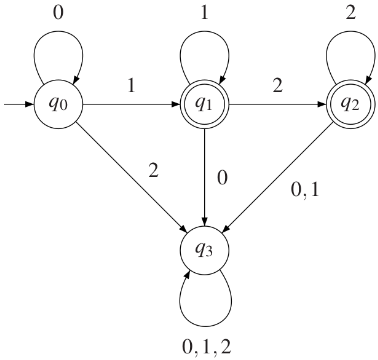


Exemplo

- A linguagem aceita por M é formada pelas sentenças x que levam da configuração inicial (q_0, x) até a configuração final (q_1, ε) ou (q_2, ε)

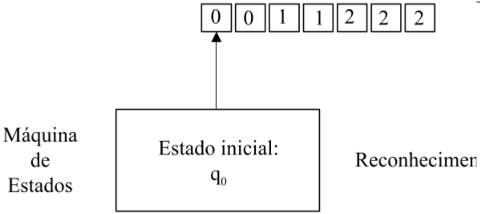
- A inspeção do autômato permite concluir que as sentenças aceitas por ele são da forma $L(M) = 0^*1^+2^*$

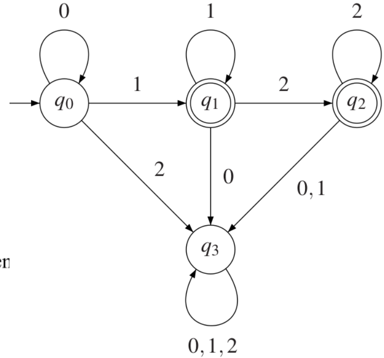
- São verdadeiras as identidades
    - $\delta(q_0, 00001) = q_1$
    - $\delta(q_0, 0122) = q_2$
    - $\delta(q_0, 12) = q_2$
    - $\delta(q_0, 222) = q_3$



Esquematicamente

Reconhecer a cadeia 0011222



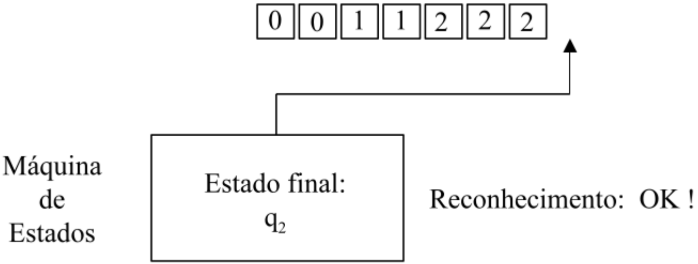


Sucessão de movimentos: $(q_0, 0011222) \vdash (q_0, 011222) \vdash (q_0, 11222) \vdash (q_1, 1222) \vdash (q_1, 222) \vdash (q_2, 22) \vdash (q_2, 2) \vdash (q_2, \varepsilon)$, e $q_2 \in F, \therefore 0011222 \in L(M)$

Já a cadeia de entrada 0022 tem movimentos:
$(q_0, 0022) \vdash (q_0, 022) \vdash (q_0, 22) \vdash (q_3, 2) \vdash (q_3, \varepsilon)$, e $q_3 \notin F, \therefore 0022 \notin L(M)$

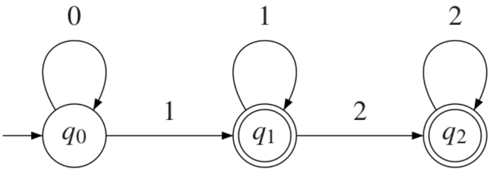
Esquematicamente

- Portanto $(q_0, 0011222) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$ e $0011222 \in L(M)$
- Esquematicamente após o reconhecimento da cadeia de entrada



Exemplo

- O AF a seguir possui função de transição parcial, pois não está definida para $Q \times \Sigma : (q_0, 2), (q_1, 0), (q_2, 1)$ e $(q_2, 0)$ e define a mesma linguagem anterior



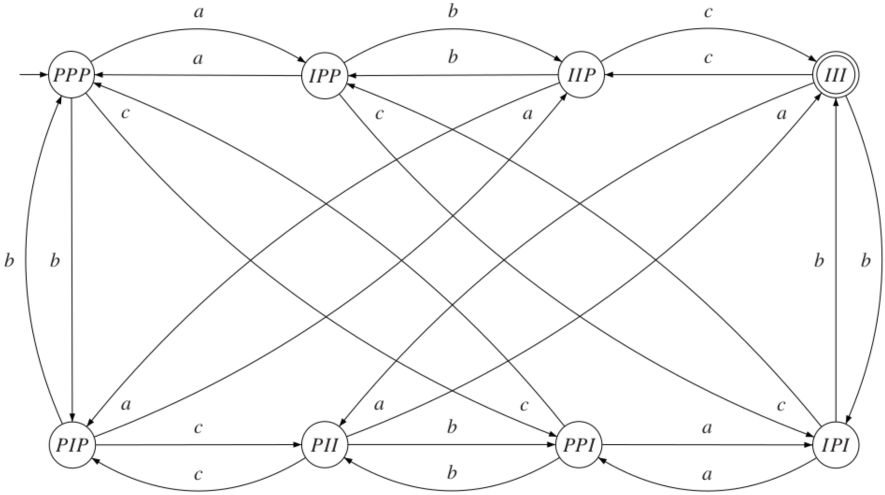
- Os movimentos para as cadeias 0011222 e 0022 são
    - $(q_0, 0011222) \vdash (q_0, 011222) \vdash (q_0), 11222 \vdash (q_1, 1222) \vdash (q_1, 222) \vdash (q_2, 22) \vdash (q_2, 2) \vdash (q_2, \varepsilon)$
    - $(q_0, 0022) \vdash (q_0, 022) \vdash (q_0, 22)$

- 0011222 é aceita (cadeia completamente esgotada e $q_2 \in F$)
- 0022 é rejeitada (cadeia parcialmente consumida e $q_0 \notin F$)

Memória de informação

- Os estados de um AF podem ser entendidos como memórias de informações
- Levam em consideração trechos relevantes da cadeia de entrada já analisada
- O AF seguinte aceita a linguagem formada por cadeias sobre o alfabeto a, b, c em que as quantidades de símbolos a, b e c, consideradas isoladamente, são ímpares
- Exemplos de sentenças dessa linguagem: abc, cba, $aaabc$, $ccabaac$, $abbbc$ e $bcccbbabb$

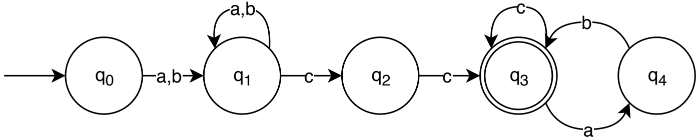
Exemplo 1



Exemplo 1

- Uma análise cuidadosa dos estados PPP, IPP, IIP, III, PIP, PII, PPI e IPI revela que cada um deles mantém uma memória distinta sobre a quantidade de símbolos a, b e c consumidos até cada configuração
- Para entendimento de alguns estados
  - PPP: quantidade par de símbolos a, b e c
  - PIP: quantidade par de símbolos a, ímpar de b e par de c
  - III: quantidade ímpar de símbolos a, ímpar de b e ímpar de c
- O entendimento dos outros estados são análogos a esses

Reconhecedor de sentenças na forma $(a \mid b)^+ cc(ab \mid c)^*$

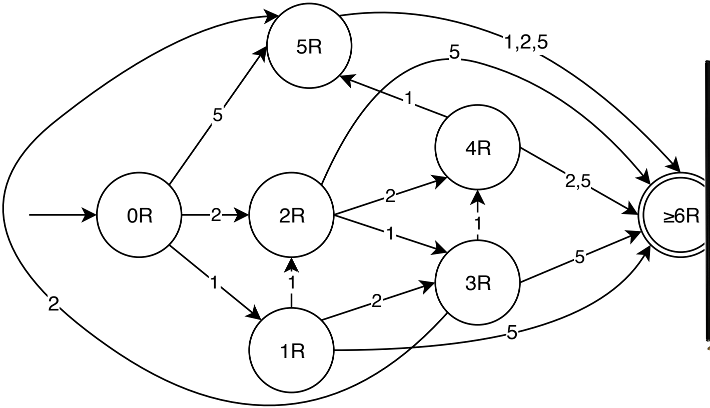


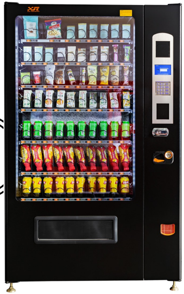
Exemplo 3

Máquina de chocolates

Valor do chocolate: R$ 6

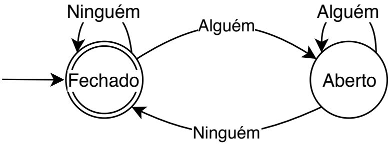
A máquina aceita cédulas de R$ 5, R$ 2 e R$ 1





Exemplo 4

Porta automática abre-fecha



Exercícios

- Obter autômatos finitos que reconhecem as linguagens cujas sentenças estão descritas a seguir. Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$
  - Começam com aa
  - Não começam com aa
  - Contém a subcadeia $aabbb$
  - Possuem comprimento maior ou igual a 3
  - Possuem comprimento múltiplo de 4
  - Possuem quantidade par de símbolos a
  - Possuem quantidade ímpar de símbolos b