

Matemática Concreta

Fuções Inteiras

Dr. A. Riker
Universidade Federal do Pará (UFPA)
afr@ufpa.br

2021.PL03

Introdução

- ▶ Imagine um número real sentado em uma reta numérica. O chão e teto do número são os inteiros imediatamente à esquerda e imediatamente à direita do número (a menos que o número é, em si, um número inteiro, caso em que seu piso e teto ambos igual ao próprio número).
- ▶ Muitas linguagens de computador têm funções integradas que calcule o piso e o teto automaticamente. Essas funções são muito conveniente de usar ao escrever certos tipos de computador programas.
- ▶ Além disso, os conceitos de piso e teto são importantes na analisar a eficiência de muitos algoritmos de computador.

Definição: Função Piso

- Dado um número real x , o **Piso** de x é definido como:

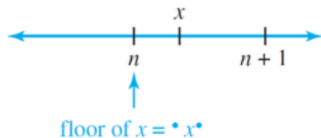
- Definition

Given any real number x , the **floor of x** , denoted $\lfloor x \rfloor$, is defined as follows:

$\lfloor x \rfloor =$ that unique integer n such that $n \leq x < n + 1$.

Symbolically, if x is a real number and n is an integer, then

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1.$$



Definição: Função Teto

- Dado um número real x , o **Teto** de x é definido como:

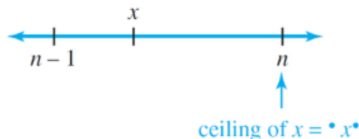
• Definition

Given any real number x , the **ceiling of x** , denoted $\lceil x \rceil$, is defined as follows:

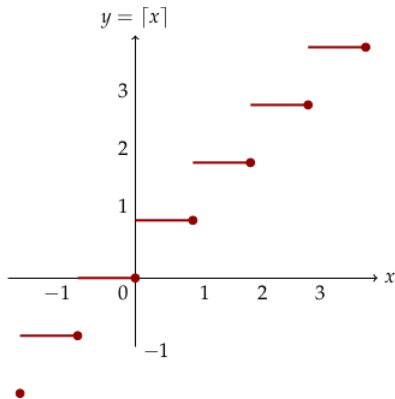
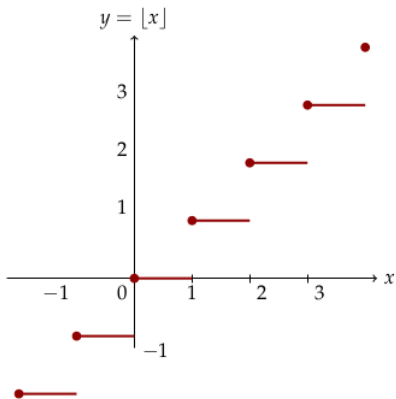
$$\lceil x \rceil = \text{that unique integer } n \text{ such that } n - 1 < x \leq n.$$

Symbolically, if x is a real number and n is an integer, then

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n.$$



Gráficos: Função Piso vs Teto



Exercícios

- Calcule $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para cada um dos seguintes valores.
- a) $\frac{25}{4}$
 - b) 0.999
 - c) -2.01

Exercícios

- Calcule $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para cada um dos seguintes valores.
- a) $\frac{25}{4}$
 - b) 0.999
 - c) -2.01

Solução

- a.** $25/4 = 6.25$ and $6 < 6.25 < 7$; hence $\lfloor 25/4 \rfloor = 6$ and $\lceil 25/4 \rceil = 7$.
- b.** $0 < 0.999 < 1$; hence $\lfloor 0.999 \rfloor = 0$ and $\lceil 0.999 \rceil = 1$.
- c.** $-3 < -2.01 < -2$; hence $\lfloor -2.01 \rfloor = -3$ and $\lceil -2.01 \rceil = -2$.

Exercícios

- Calcule $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para cada um dos seguintes valores.
- a) 2.75
 - b) -2.5
 - c) 18.5
 - d) -12.6
 - e) 5
 - f) -5
 - g) π
 - h) $-\pi$

Exercícios

► Calcule $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para cada um dos seguintes valores.

- $\lfloor 2.75 \rfloor = 2$
- $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$
- $\lfloor 18.5 \rfloor = 18$
- $\lfloor -12.6 \rfloor = -13$
- $\lfloor 5 \rfloor = 5$
- $\lfloor -5 \rfloor = -5$
- $\lceil 2.75 \rceil = 3$
- $\lceil -2.5 \rceil = -2$
- $\lceil 18.5 \rceil = 19$
- $\lceil -12.6 \rceil = -12$
- $\lceil 5 \rceil = 5$
- $\lceil -5 \rceil = -5$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$

$$\lceil \pi \rceil = 4$$

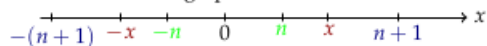
$$\lceil -\pi \rceil = -3$$

Propriedades

► $-\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$

► $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

Don't like the proof in
text? Consider the graph



Propriedades

- ▶ As expressões a seguir são verdadeiras para todo x e y reais?
- ▶ $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
- ▶ $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

Propriedades

- ▶ As expressões a seguir são verdadeiras para todo x e y reais?
- ▶ $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 = 0,$$

$$\lfloor x + y \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1.$$

Não

Propriedades

- Para todos os reais x e todos os inteiro m :

$$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$$

$$\lceil x + m \rceil = \lceil x \rceil + m$$

Exemplo:

$$\lfloor 1.1 + 2 \rfloor = 3$$

$$\lfloor 1.1 \rfloor + 2 = 3$$

Matemática Concreta

Fuções Inteiras

Dr. A. Riker

Universidade Federal do Pará (UFPA)

afr@ufpa.br

2021.PL03