Teoria da Computação
Elementos de Matemática Discreta
Relações

Prof. Jefferson Magalhães de Morais

2 de março de 2021

Relações

Definição

- Uma **relação** R sobre dois conjuntos A e B é definida como um subconjunto de $A \times B$

$$\therefore R \subseteq A \times B$$

- O conjunto de todas as relações definíveis sobre $A \times B$ é dado por $2^{A \times B}$
- Uma relação de um conjunto A sobre o mesmo conjunto A, portanto A^2, é uma endorrelação ou autorrelação
- **Exemplo**
  - $R_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a > b\}$, sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, contém, entre infinitos outros, os elementos $(2, 1), (7, 4)$ e $(9, 3)$
  - $R_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 = y^2 + z^2\}$, sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, contém os elementos $(0, 0, 0), (5, 4, 3), (-10, 8, -6)$, etc

Relações

- **Notação infixa**: aRb é uma relação de um elemento $a \in A$ e $b \in B$
- Os conjuntos A e B recebem, respectivamente, os nomes **domínio** e **co-domínio** (ou **contradomínio**) da relação R
- **Relação binária**: seus elementos levam o nome de **pares ordenados**
- **Relação n-ária**: seus elementos são chamados de **ênuplas ordenadas**
- Observe os casos
  - Dado os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, elementos de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ têm a forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$
  - Em casos particulares, as ênuplas recebem nomes especiais: $n = 2$: pares; $n = 3$: triplas; $n = 4$: quádruplas; $n = 5$: quíntuplas; $n = 10$: décuplas; etc

Relações

- O conjunto é **fechado em relação a uma operação** se da aplicação dessa operação a quaisquer membros desse conjunto resultarem sempre elementos que também são membros do mesmo conjunto
- **Exemplo**
  - Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e naturais $\mathbb{N}$ e as operações binárias
    - $\mathbb{Z}$ é fechado em relação as operações soma e subtração
    - $\mathbb{N}$ não é fechado em relação a operação subtração
    - $\mathbb{N}$ é fechado em relação a operação soma

Relações

- O **fecho transitivo** de R, que é uma endorrelação em A, é denotado por R^+ e obedece
  1. Se $(a, b) \in R$, então $(a, b) \in R^+$
  2. Se $(a, b) \in R^+$ e $(b, c) \in R^+$, então $(a, c) \in R^+$
- O **fecho transitivo e reflexivo** denotado por R^*, é tal que

$$R^* = R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

- **Exemplo**: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5)\}$
  - $R^* =$ $\{(1, 1), \underline{(1, 2)}, (1, 3), (1, 4), \underline{(1, 5)}, (2, 2), \underline{(2, 3)}, (2, 4), (3, 3), \underline{(3, 4)}, (4, 4$