Teoria da Computação
Autômatos com Pilha

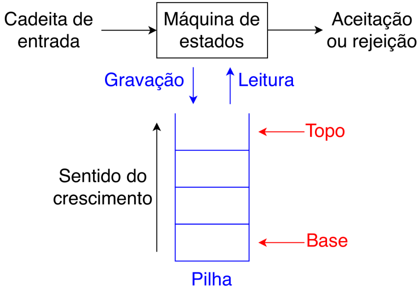
Prof. Jefferson Magalhães de Morais

Autômato com pilha

- É um dispositivo utilizado para reconhecer sentenças que fazem parte de linguagens livres de contexto
- Os autômatos com pilha têm o seu **poder de reconhecimento estendido**, quando comparados aos autômatos finitos
- A memória auxiliar é organizada na forma de uma **pilha**

Pilha

- É uma estrutura de dados do tipo **LIFO** (*Last-In First-Out*)
- Tem capacidade **ilimitada**
- A máquina de estados pode **gravar**, **ler** e **remover** símbolos
- Tem alfabeto próprio denominado de **alfabeto da pilha**



Pilha: *stack* $\times$ *pushdown*

- Os dispositivos costumam definir a forma de operação, podendo ser
  - **Pilha stack**: além das operações no topo da pilha (*push* e *pop*), permite que os demais elementos sejam acessados diretamente, somente para consulta
  - **Pilha pushdown**: permite o acesso apenas ao elemento armazenado no topo da pilha. **Não** permite o endereçamento dos demais elementos da pilha
- Os autômatos com pilha neste curso são do tipo *pushdown*

Autômato com pilha

- Formalmente, um autômato de pilha pode ser definido como uma sétupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

onde:

Q é um conjunto finito de estados

Σ é um alfabeto (finito e não-vazio) de entrada

Γ é um alfabeto (finito e não-vazio) de pilha

δ é uma função de transição $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

q_0 é o estado inicial de M, $q_0 \in Q$

Z_0 é o símbolo inicial da pilha, $Z_0 \in \Gamma$

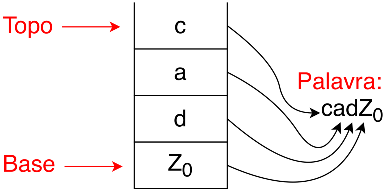
F é o conjunto de estados finais de M, $F \subseteq Q$

Símbolo inicial da pilha

- Z_0, **por convenção**, representa o conteúdo inicial da pilha **toda vez** que o autômato com pilha começa o reconhecimento de uma nova cadeia

- Ao longo de sua operação, elementos de Γ são acrescentados e/ou removidos da pilha

- Em um instante de operação, uma cadeia de Γ^* pode ser interpretado considerando os símbolos mais à esquerda da cadeia no topo da pilha, e os símbolos mais à direita da cadeia no fundo da pilha



Função de transição

- Casos particulares da função de transição δ em autômatos com pilha
  - Autômato com pilha determinístico sem transições em vazio
$$\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$$
  - Autômato com pilha determinístico com transições em vazio
$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$$
  - Autômato com pilha não-determinístico sem transições em vazio
$$\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$$
  - Autômato com pilha não-determinístico com transições em vazio
$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$$

Configuração

- A **configuração inicial** de um AP é definida pelo
  - Estado inicial q_0
  - Cursor posicionado sob a célula mais a esquerda na fita de entrada
  - Conteúdo inicial da pilha: Z_0
- Algebricamente

$$(q_0, w, Z_0)$$

onde w é a cadeia que se quer reconhecer

- A **configuração** de um AP é definida pelo
  - Estado corrente
  - Parte da cadeia de entrada ainda não analisada
  - Conteúdo da pilha
- Algebricamente

$$(q, \alpha, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

Movimentação

- As possibilidades são determinadas a partir de três informações
    1. O seu estado corrente
    2. O próximo símbolo presente na cadeia de entrada
    3. O símbolo armazenado no topo da pilha

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ possibilita movimentações
    - Em vazio (sem consumo de símbolos da fita de entrada)
    - Não-determinísticas

- De acordo com a definição, é **obrigatório** consultar o símbolo presente no topo da pilha em toda e qualquer transição efetuada pelo autômato

Movimentação

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$$

- Após a aplicação de uma transição
  - O cursor de leitura sofre um deslocamento de uma posição para a direita
  - O símbolo presente no topo da pilha é **removido**, sendo substituído pela cadeia de símbolos especificada no lado direito da transição
- No caso de transições em vazio, em que não há consulta de símbolo na fita de entrada, a posição do cursor permanece inalterada
- Efetuar transições de forma independente do conteúdo do topo da pilha
  - Deve-se especificar para cada elemento do alfabeto de pilha uma transição que efetue o mesmo tratamento do símbolo de entrada, **removendo** e **reinserindo** o mesmo símbolo da pilha

Tipos de autômato com pilha

- **Determinístico**: todas as transições possuem apenas uma possibilidade de movimentação

$$\forall(q,\sigma,\gamma),\ \text{com } \sigma \neq \varepsilon,\ |\delta(q,\sigma,\gamma)| \leq 1$$

- **Não-determinístico**: há, pelo menos, uma transição com mais de uma possibilidade de movimentação

$$\exists(q,\sigma,\gamma),\ \text{onde } |\delta(q,\sigma,\gamma)| > 1$$

- APNDs-ε podem apresentar um comportamento determinístico. As condições seguintes devem ser simultaneamente verificadas
  - $\forall q \in Q, \gamma \in \Gamma$, se $|\delta(q,\varepsilon,\gamma)| \geq 1$, então $|\delta(q,\sigma,\gamma)| = 0, \forall \sigma \in \Sigma$
  - $\forall q \in Q, \gamma \in \Gamma, \sigma \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), |\delta(q,\sigma,\gamma)| \leq 1$

- APDs reconhecem apenas um subconjunto das LLCs. Doravante, usaremos os APNDs, exceto por ressalvas em sentido contrário

Movimentação

- A movimentação de uma configuração para a configuração seguinte é denotado pelo símbolo "$\vdash$", que representa a relação

$$\vdash: Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \to Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

- Estando o autômato de pilha em uma configuração $(q_i, \sigma\alpha, \phi\gamma)$, com $q_i \in Q, \sigma \in \Sigma, \alpha \in \Sigma^*, \phi \in \Gamma$ e $\gamma \in \Gamma^*$, sua transição e movimentação são representados, respectivamente, como

$$\delta(q_i, \sigma, \phi) = (q_j, \eta) \text{ com } \eta \in \Gamma^*$$

e

$$(q_i, \sigma\alpha, \phi\gamma) \vdash (q_j, \alpha, \eta\gamma)$$

- A transição em vazio é da forma

$$(q_i, \alpha, \phi\gamma) \vdash (q_j, \alpha, \eta\gamma)$$

Configuração final

- Caracterizado de duas maneiras distintas, porém equivalentes
  1. Exige-se o esgotamento da cadeia de entrada e também que o autômato atinja um estado final (o conteúdo final da pilha é irrelevante)
  2. Exige-se o esgotamento da cadeia de entrada e também que a pilha tenha sido completamente esvaziada, não importando que o estado atingido seja final ou não

- Deve ser sempre especificado o tipo de definição adotada para que seja possível caracterizar a configuração final de um autômato de pilha e, consequentemente, definir a linguagem aceita pelo dispositivo

Critério de aceitação

- **Estado final**: a linguagem aceita por esse critério é denotada por $L(M)$

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma), q \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$$

- **Pilha vazia**: a linguagem aceita por esse critério é denotada por $V(M)$

$$V(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon), q \in Q\}$$

Exemplo

- Seja M_1 um APD com critério de aceitação de sentenças baseado em **pilha vazia** e $V(M_1) = \{a^i bc^{2i} \mid i \geq 0\}$. Observe os exemplos de movimentações

$$
\begin{aligned}
Q =& \{q_0, q_1\} \\
\Sigma =& \{a, b, c\} \\
\Gamma =& \{Z_0, C\} \\
\delta =& \{(q_0, a, Z_0) \to \{(q_0, CCZ_0)\}, \\
& (q_0, a, C) \to \{(q_0, CCC)\}, \\
& (q_0, b, Z_0) \to \{(q_1, Z_0)\}, \\
& (q_0, b, C) \to \{(q_1, C)\}, \\
& (q_1, c, C) \to \{(q_1, \varepsilon)\}, \\
& (q_1, \varepsilon, Z_0) \to \{(q_1, \varepsilon)\}\} \\
F =& \emptyset
\end{aligned}
$$

Sentença $b \in V(M_1)$:

$$(q_0, b, Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$$

Sentença $aabcccc \in V(M_1)$:

$$
\begin{aligned}
&(q_0, aabcccc, Z_0) \vdash \\
&(q_0, abcccc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_0, bcccc, CCCCZ_0) \vdash \\
&(q_1, cccc, CCCCZ_0) \vdash \\
&(q_1, ccc, CCCZ_0) \vdash (q_1, cc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_1, c, CZ_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Seja M_1 um APD com critério de aceitação de sentenças baseado em **pilha vazia** e $V(M_1) = \{a^i bc^{2i} \mid i \geq 0\}$. Observe os exemplos de movimentações

$$
\begin{aligned}
Q =& \{q_0, q_1\} \\
\Sigma =& \{a, b, c\} \\
\Gamma =& \{Z_0, C\} \\
\delta =& \{(q_0, a, Z_0) \rightarrow \{(q_0, CCZ_0)\}, \\
& (q_0, a, C) \rightarrow \{(q_0, CCC)\}, \\
& (q_0, b, Z_0) \rightarrow \{(q_1, Z_0)\}, \\
& (q_0, b, C) \rightarrow \{(q_1, C)\}, \\
& (q_1, c, C) \rightarrow \{(q_1, \varepsilon)\}, \\
& (q_1, \varepsilon, Z_0) \rightarrow \{(q_1, \varepsilon)\}\} \\
F =& \emptyset
\end{aligned}
$$

Sentença $abccc \notin V(M_1)$:

$$
\begin{aligned}
&(q_0, abccc, Z_0) \vdash (q_0, bccc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_1, ccc, CCZ_0) \vdash (q_1, cc, CZ_0) \vdash \\
&(q_1, c, Z_0)
\end{aligned}
$$

Sentença $aabccc \notin V(M_1)$:

$$
\begin{aligned}
&(q_0, aabccc, Z_0) \vdash \\
&(q_0, abccc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_1, bccc, CCCCZ_0) \vdash \\
&(q_1, ccc, CCCCZ_0) \vdash \\
&(q_1, cc, CCCZ_0) \vdash (q_1, c, CCZ_0) \vdash \\
&(q_1, \varepsilon, CZ_0)
\end{aligned}
$$

- É necessário estender a notação dos diagramas de estado estudados em autômatos finitos
- Para permitir a representação gráfica também dos autômatos de pilha, os arcos entre dois estados p e q são rotulados com cadeias da forma

  $$(\sigma, Z)/\gamma \text{ com } \sigma \in \Sigma, Z \in \Gamma \text{ e } \gamma \in \Gamma^*$$

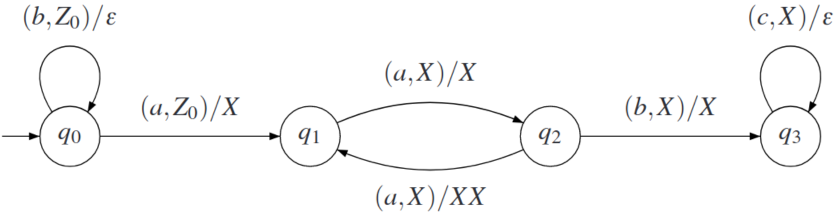
  para cada produção $\delta(p, \sigma, Z) = (q, \gamma)$

Exemplo 1

- O APD M_2, com critério de aceitação baseado em **pilha vazia**, e que reconhece a linguagem

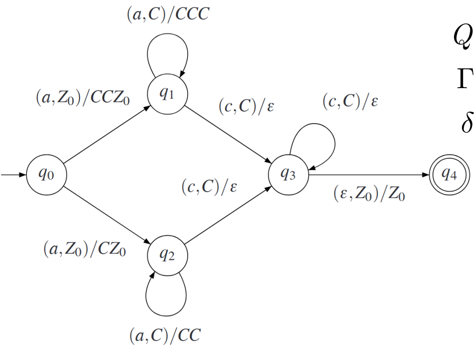
$$V(M_2) = \{a^{2i}bc^i \mid i \geq 0\}$$

é ilustrado como



Exemplo 2

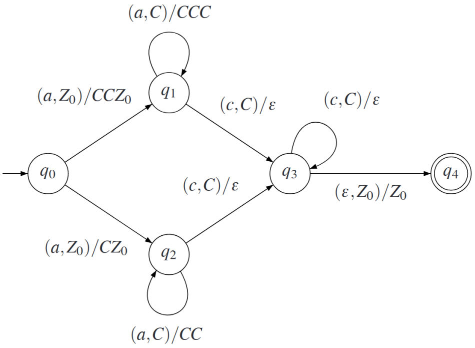
- Considere o APND M_3, com critério de aceitação baseado em **estado final** e $L(M_3) = \{a^i c^j \mid i \geq 1$ e $(j = i$ ou $j = 2i)\}$. Exemplos de movimentações



$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = \{a, c\},\\
\Gamma &= \{Z_0, C\}\\
\delta &= \{(q_0, a, Z_0) \to \{(q_1, CCZ_0), (q_2, CZ_0)\}\\
&\quad (q_1, a, C) \to \{(q_1, CCC)\},\\
&\quad (q_1, c, C) \to \{(q_3, \varepsilon)\},\\
&\quad (q_2, a, C) \to \{(q_2, CC)\},\\
&\quad (q_2, c, C) \to \{(q_3, \varepsilon)\},\\
&\quad (q_3, c, C) \to \{(q_3, \varepsilon)\}\\
&\quad (q_3, \varepsilon, Z_0) \to \{(q_4, \varepsilon)\}\}\\
F &= \{q_4\}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

- Considere o APND M_3, com critério de aceitação baseado em **estado final** e $L(M_3) = \{a^i c^j \mid i \geq 1$ e $(j = i$ ou $j = 2i)\}$. Exemplos de movimentações



Sentença $aacc \in L(M_3)$:

$$
\begin{aligned}
&(q_0, aacc, Z_0) \vdash \\
&(q_2, acc, CZ_0) \vdash \\
&(q_2, cc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_3, c, CZ_0) \vdash \\
&(q_3, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_4, \varepsilon, Z_0)
\end{aligned}
$$

Sentença $aacccc \in L(M_3)$:

$$
\begin{aligned}
&(q_0, aacccc, Z_0) \vdash \\
&(q_1, acccc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_1, cccc, CCCCZ_0) \vdash \\
&(q_3, ccc, CCCZ_0) \vdash \\
&(q_3, cc, CCZ_0) \vdash \\
&(q_3, c, CZ_0) \vdash \\
&(q_3, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_4, \varepsilon, Z_0)
\end{aligned}
$$

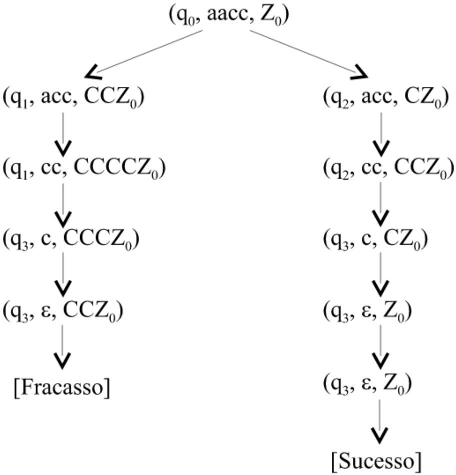
Exemplo 2

- O reconhecimento, em ambos os casos, foi bem-sucedido já na primeira sequência de movimentos, uma vez que a escolha da transição a ser aplicada na configuração inicial foi corretamente "adivinhada" nas duas situações
- No entanto, a escolha da transição a ser aplicada na configuração inicial do primeiro caso poderia ter sido diferente da apresentada
- Exemplo:

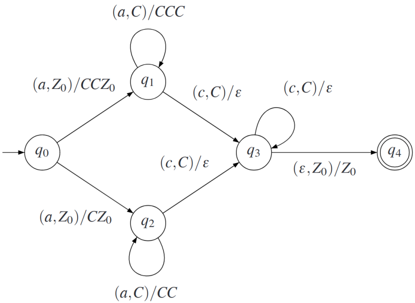
$$(q_0, aacc, Z_0) \vdash (q_1, acc, CCZ_0) \vdash (q_1, cc, CCCCZ_0) \vdash$$
$$(q_3, c, CCCZ_0) \vdash (q_3, \varepsilon, CCZ_0)$$

- Observe a árvore de derivação a seguir

Exemplo 2

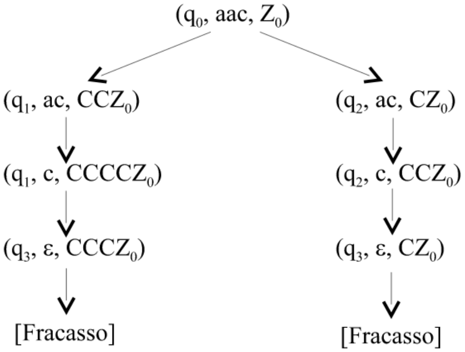


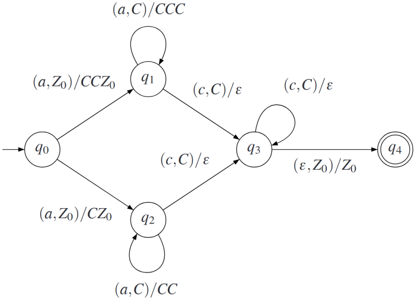
$(q_0, aacc, Z_0)$
(q_1, acc, CCZ_0)
$(q_1, cc, CCCCZ_0)$
$(q_3, c, CCCZ_0)$
$(q_3, \varepsilon, CCZ_0)$
[Fracasso]
(q_2, acc, CZ_0)
(q_2, cc, CCZ_0)
(q_3, c, CZ_0)
(q_3, ε, Z_0)
(q_3, ε, Z_0)
[Sucesso]



$(a,C)/CCC$
$(a,Z_0)/CCZ_0$
q_1
$(c,C)/\varepsilon$
$(c,C)/\varepsilon$
q_0
$(c,C)/\varepsilon$
q_3
q_4
$(\varepsilon,Z_0)/Z_0$
$(a,Z_0)/CZ_0$
q_2
$(a,C)/CC$

- Já a rejeição da cadeia $aac \notin V(M_3)$ ocorre apenas após o fracasso do reconhecimento em todas as sequências possíveis de movimentação





Observações

- **Transições em vazio**
  - Os autômatos com pilha são capazes de **efetuar movimentos independentemente da existência** de símbolos na fita de entrada
  - O esvaziamento da pilha necessariamente **impede** qualquer possibilidade de movimentação futura

- **Equivalência dos critérios de aceitação**
  - A classe de linguagens aceita por APND com critério de aceitação baseado em estado final é idêntica à classe de linguagens aceita por APND com critério de aceitação baseado em pilha vazia
  - Essa equivalência oferece <u>liberdade de escolha do critério</u> quando se pretende demonstrar algum teorema