

Exercício para Nota 3 – EN3

Nome: Vinicius Bueno de Moraes

NUSP:10256432

Data: 04/07/2021

Enunciado

Considere uma transmissão em fase e quadratura, com representação em banda-base $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k q(t - kT)$, $\langle q(t), q(t) \rangle = E_q = 1$, $q(t)$ é um pulso raiz de Nyquist para essa taxa $1/T$, e $a_k \in \{-3, -1, +1, j\sqrt{3}\}$, $j = \sqrt{-1}$, com símbolos equiprováveis. Esse sinal é modulado, e na recepção, é adicionado ruído branco gaussiano com densidade espectral de potência $N_0/2$, seguido de demodulação e amostragem por filtro casado $q(-t)$ e amostragem ideal no instante $t = kT$, resultando em $y_k = a_k + n_{I,k} + jn_{Q,k}$, em que $E\{|n_{I,k}|^2\} = E\{|n_{Q,k}|^2\} = N_0/2$ e $E\{n_{I,k}n_{Q,k}\} = 0$. Pede-se:

- a) (1,0) Esboce a constelação deste sinal, colocando os devidos valores no seu gráfico e obtenha as regiões de decisão.
- b) (7,5) A partir do limitante da união, qual é a probabilidade de erro de símbolo em função da SNR e da E_b/N_0 ? Em seguida, obtenha por simulação a taxa de erro de símbolos para SNR e E_b/N_0 variando de 3 a 14 dB e 1 a 11 dB, respectivamente, compare e comente com os valores obtidos teóricos do limitante da união.
- c) (1,5) Qual é a versão de mínima energia desta constelação e qual é o ganho em dB, para uma mesma probabilidade de erro de símbolo para uma dada E_b/N_0 , ao se utilizar tal versão?

Resolução

**Script .m* modificado disponível [aqui](#).

A)

Esboço da constelação, com devidas amplitudes e regiões de decisão explícitas:

$$a_k \in \{-3, -1, +1, j\sqrt{3}\}$$

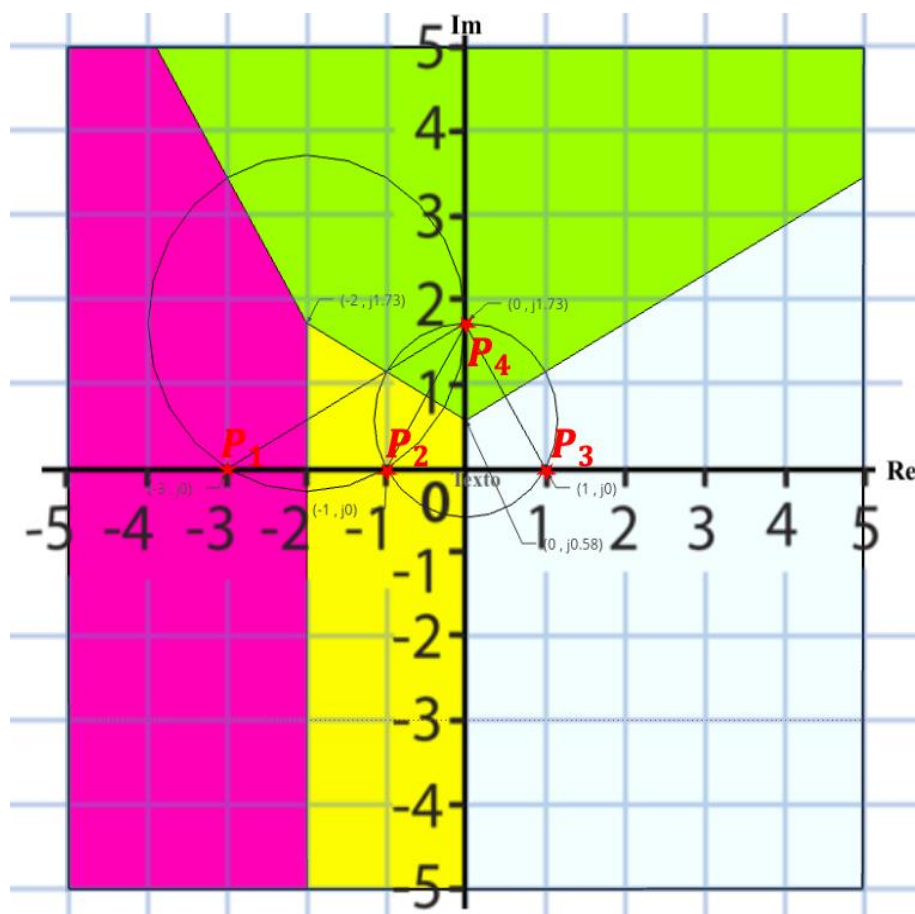


Figura 1. Esboço da Constelação com regiões de decisão.

Sendo os símbolos definidos precisamente nas seguintes coordenadas:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-3, j0) \\ P_2 &= (-1, j0) \\ P_3 &= (1, j0) \\ P_4 &= (0, j\sqrt{3}) \end{aligned}$$

B)

Neste item, primeiramente se formulará as relações entre a probabilidade de erro (P_e) definida pelo limitante da união, com os importantes parâmetros da área de telecomunicações, SNR e $\frac{E_B}{N_0}$. A posteriores, desmobilizará-se uma análise comparativa entre os resultados teóricos obtidos aqui com uma simulação feita no *Matlab*, partindo-se da mesma formulação.

Obs.: Tal *script .m* está anexado [aqui](#) bem como disponível no início desse documento.

A probabilidade de erro, considerando o limitante da união é formulada a seguir, para os 4 símbolos da modulação. Sabe-se, como segue:

$$P_e = \sum_{i=1}^{\text{total de símbolos possíveis}} \sum_{j=1}^{\text{limitares para o } i\text{-ésimo símbolo}} Q\left(\frac{\text{distância do } i\text{-ésimo símbolo para o } j\text{-ésimo limiar}}{\sigma_n}\right) * P(i\text{-ésimo símbolo})$$

Definindo-se P_e para cada símbolo, tem-se:

$$\begin{aligned} P_{e(-3, j0)} &= \left(Q_{(-1, j0)}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + Q_{(0, j\sqrt{3})}\left(\frac{\frac{\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}}{2}}{\sigma_n}\right) \right) * \frac{1}{4} = \frac{1}{4} * Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{4} * Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma_n}\right) \\ P_{e(-1, j0)} &= \left(Q_{(1, j0)}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + Q_{(-3, j0)}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + Q_{(0, j\sqrt{3})}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \right) * \frac{1}{4} = \frac{3}{4} * Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \\ P_{e(1, j0)} &= \left(Q_{(-1, j0)}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + Q_{(0, j\sqrt{3})}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \right) * \frac{1}{4} = \frac{1}{2} * Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \\ P_{e(0, j\sqrt{3})} &= \left(Q_{(1, j0)}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + Q_{(-1, j0)}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + Q_{(-3, j0)}\left(\frac{\frac{\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}}{2}}{\sigma_n}\right) \right) * \frac{1}{4} = \frac{1}{2} * Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{4} * Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

Assim, somando os termos e admitindo $\sigma_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$ chega-se à probabilidade de erro pelo limitante da união:

$$P_e = P_{e(-3, j0)} + P_{e(-1, j0)} + P_{e(1, j0)} + P_{e(0, j\sqrt{3})} = 2 * Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sigma_n}\right) = 2 * Q\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)$$

$$P_e = 2 * Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Ademais, partindo-se dos resultados de erro encontrados pelo limitante da união, relacionou-os com a SNR e com $\frac{E_B}{N_0}$ para encontrar a probabilidade de erro em função desses importantes parâmetros. Primeiro deve se encontrar P_S , como segue:

$$P_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |a_k|^2$$

Adotando-se que o processo é estacionário e ergódico, sabe-se que:

$$P_S = E\{|a_k|^2\}$$

Assim, tem-se:

$$P_S = E\{|a_k|^2\} = \frac{1}{4} * |-3 + j0|^2 + \frac{1}{4} * |-1 + j0|^2 + \frac{1}{4} * |1 + j0|^2 + \frac{1}{4} * |0 + j\sqrt{3}|^2 = \frac{7}{2}$$

De posse desse, pode-se então encontrar a SNR, como segue formulação abaixo:

$$SNR = \frac{P_S}{\dim * P_n} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2 * N_0}{2}} = \frac{7}{2 * N_0} \rightarrow \frac{N_0}{2} = \frac{7}{4 * SNR} \rightarrow N_0 = \frac{7}{2 * SNR}$$

Com o valor da SNR, encontra-se a probabilidade de erro em função dessa, apenas por substituição, sendo:

$$P_e = 2 * Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{N_0}}\right) \rightarrow P_e = 2 * Q\left(\sqrt{\frac{4 * SNR}{7}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\sqrt{\frac{12 * SNR}{7}}\right)$$

Por ultimo, se relaciona a SNR com $\frac{E_B}{N_0}$ obtendo:

$$SNR = \frac{2 * E_S}{\dim * P_n} = \frac{2 * \log_2 4}{2} * \frac{E_B}{N_0} = \frac{2 * E_B}{N_0}$$

Assim, $\frac{E_B}{N_0}$ se relacionara com P_e da seguinte maneira:

$$P_e = 2 * Q\left(\sqrt{\frac{8 * E_B}{7 * N_0}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\sqrt{\frac{24 * E_B}{7 * N_0}}\right)$$

No script

Após a análise e modificações adequadas e necessárias ao *script* fornecido, chegou-se ao código final, onde foram feitas as simulações que proveem os resultados experimentais ao estudo.

O primeiro parâmetro a ser definido foi N (número de amostras para a simulação). Aqui se adota que ele se dará pela menor probabilidade de erro calculada entre os valores de SNR e $\frac{E_B}{N_0}$, invertida e multiplicada por 10, aproximadamente. Como sabe-se que a probabilidade de erro diminui com o aumento da SNR (idem para quando o referencial é $\frac{E_B}{N_0}$), se calculou a probabilidade de erro para essas em seus maiores valores aplicados ao estudo, chegando em:

$$P_{SNR(14dB)} = P_{SNR(25,118W)} = 2 * Q\left(\sqrt{\frac{4 * 25,118}{7}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\sqrt{\frac{12 * 25,118}{7}}\right) = 1,515 * 10^{-4}$$

$$P_{\frac{E_B}{N_0}(11dB)} = P_{\frac{E_B}{N_0}(12,589W)} = 2 * Q\left(\sqrt{\frac{8 * 12,589}{7}}\right) + \frac{1}{2} * Q\left(\sqrt{\frac{24 * 12,589}{7}}\right) = 1,487 * 10^{-4}$$

Ao se considerar os valores de erro esperados, e partindo do critério especificado anteriormente, se adotou $N = 10^5$.

Ademais, foram inseridas as expressões que definem os valores de P_S e N_0 já definidas anteriormente nesse documento, tanto em função da SNR como de $\frac{E_B}{N_0}$.

Por fim, modelou-se/adicionou-se ruído a uma um sinal, sendo esse igual a:

$$y(k) = x(t) + \sqrt{O} * (randn(1, 10^5) + jrandn(1, 10^5))$$

Esse, foi utilizado para a realização empírica, a posteriores comparou-se com $x(k)$ (sinal original transmitido, sem ruído e gerado aleatoriamente (*randi*) entre 1 e 4) transmitido e aferiu-se a existência de erro na interpretação do símbolo recebido face ao transmitido.

Levando em consideração as especificidades da função *randn* do *Matlab* e do tipo de ruído que se deseja adicionar ao sinal transmitido para a realização empírica, definiu-se **O** seguindo:

$E\{\sqrt{O} * |randn|^2\} = \frac{N_0}{2}$ (para cada uma das dimensões) $\leftrightarrow E\{|randn|^2\} = 1$

Chega-se em **O**:

$O = \frac{N_0}{2}$

Por fim, seguem os gráficos com o comparativo entre os resultados teóricos e simulados, sendo:

- Para a probabilidade de erro relacionada com a SNR:

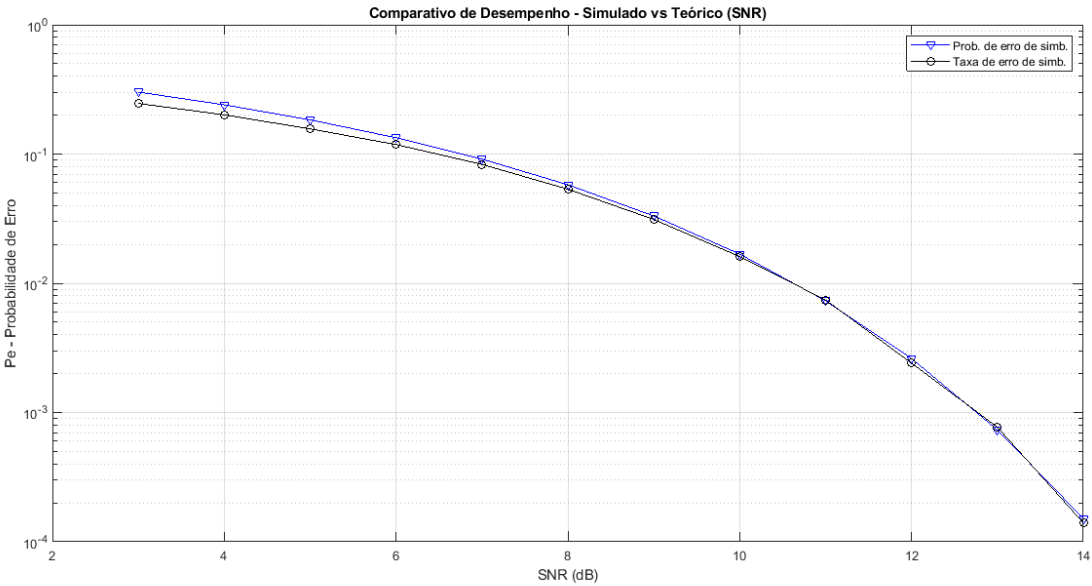


Figura 2. Comparativo de Desempenho entre a Realização Teórica e Simulada - SNR.

- Para a probabilidade de erro relacionada com $\frac{E_B}{N_0}$:

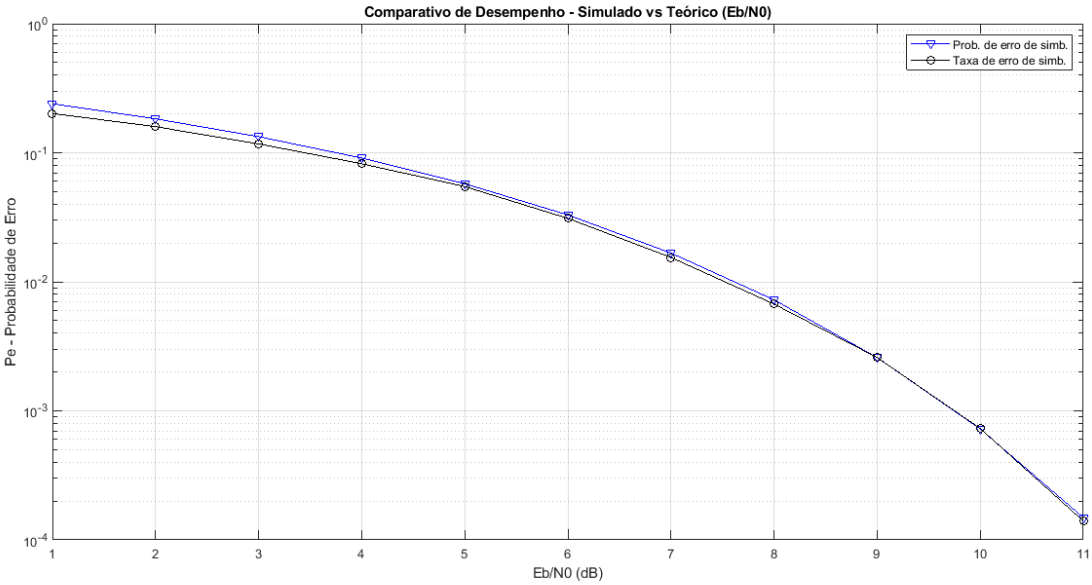
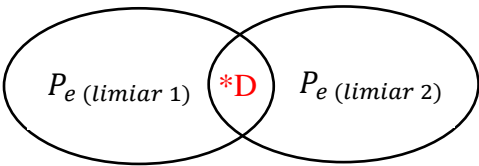


Figura 3. Comparativo de Desempenho entre a Realização Teórica e Simulada - Eb/N0.

Comentários acerca dos resultados obtidos:

Primeiramente, é notável como visto na teoria, que o limitante da união é uma forma de se estimar a probabilidade de erro que leva a valores um pouco superiores aos amostrais, principalmente para valores mais baixos de SNR, uma vez que ele é definido da seguinte forma:



Sendo as probabilidades de erro $P_{e(limiar\ 1)}$ e $P_{e(limiar\ 2)}$ em direção aos limiares, mais a composição do erro em ambas as componentes ($P_{e(D)}$). Visto que a probabilidade de erro amostral se daria por:

$$P_{e(lim. união)} = P_{e(limiar\ 1)} + P_{e(limiar\ 2)} - P_{e(D)}$$

E, como o método do limitante da união não subtrai o termo misto, sua formulação fica da forma que segue, fazendo surgir essa diferença de $P_{e(D)}$:

$$P_{e(lim. união)} = P_{e(limiar\ 1)} + P_{e(limiar\ 2)}$$

Para o cálculo da probabilidade de erro, se usa a função Q , que tem seu valor diminuído com o aumento do argumento. Para o modelo por limitante da união, não se subtrai $P_{e(D)}$, assim sempre será superestimando o valor do erro. Ademais, visto que os ruídos em ambas direções (algo improvável de acontecer) são ortogonais e portanto independentes, $P_{e(D)}$ é a probabilidades marginal entre $P_{e(limiar\ 1)}$ e $P_{e(limiar\ 2)}$, definindo a como:

$$P_{e(D)} = P_{e(limiar\ 1)} * P_{e(limiar\ 2)}$$

Por fim, uma vez que com o aumento da SNR, $P_{e(limiar\ 1)}$ e $P_{e(limiar\ 2)}$ tendem a diminuir, pela característica do nosso problema e de como a função Q é definida, $P_{e(D)}$ se diminuirá com maior escala de grandeza, evidenciando claramente dessa forma que a indiferença em relação a subtração do último termo aumenta com o aumento da SNR, levando o modelo do limitante da união para uma estimativa muito próxima da amostral.

Portanto, por se operar com SNR média para alta na maioria dos sistemas de comunicação, principalmente no caso de modulações de alta cardinalidade (maior número de pontos), o modelo do limitante da união é uma estimativa válida e eficiente.

Assim, os resultados obtidos e evidenciados nos gráficos, são plenamente compatíveis com as considerações explanadas anteriormente, cancelando o sucesso da implementação.

C)

Como sabe-se, a versão de mínima energia da constelação é aquela onde seus níveis de tensão DC são nulos nas duas dimensões. Para saber-se o atual nível de energia média na constelação inicial (Item A), fez-se:

$$DC_x = \frac{(-3) + (-1) + 0 + 1}{4} = \frac{-3}{4} = -0,75$$

$$DC_y = \frac{0 + 0 + 0 + j\sqrt{3}}{4} = \frac{j\sqrt{3}}{4} \approx j0,433$$

Desta forma, os novos símbolos devem ser subtraídos de -0,75 na direção Re e de $\frac{j\sqrt{3}}{4} \approx j0,433$ na direção Im. Chegando-se aos novos valores das coordenadas para os pontos:

$$P_1 = \left(-2,25, -j\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$P_2 = \left(-0,25, -j\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$P_3 = \left(1,75, -j\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$P_4 = \left(0,75, j\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

Ficando os níveis de energia, nas respectivas dimensões iguais a:

$$\text{Mínima Energia} \rightarrow DC_x = -2,25 * \frac{1}{4} + (-0,25) * \frac{1}{4} + 0,75 * \frac{1}{4} + 1,75 * \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{Mínima Energia} \rightarrow DC_y = -j\frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{1}{4} + \left(-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right) * \frac{1}{4} + \left(-j\frac{\sqrt{3}}{4}\right) * \frac{1}{4} + j\frac{3\sqrt{3}}{4} * \frac{1}{4} = 0$$

Esboçando a constelação de mínima energia, tem-se:

$$a_k \in \left\{-2,25 - j\frac{\sqrt{3}}{4}, -0,25 - j\frac{\sqrt{3}}{4}, 1,75 - j\frac{\sqrt{3}}{4}, 0,75 + j\frac{3\sqrt{3}}{4}\right\}$$

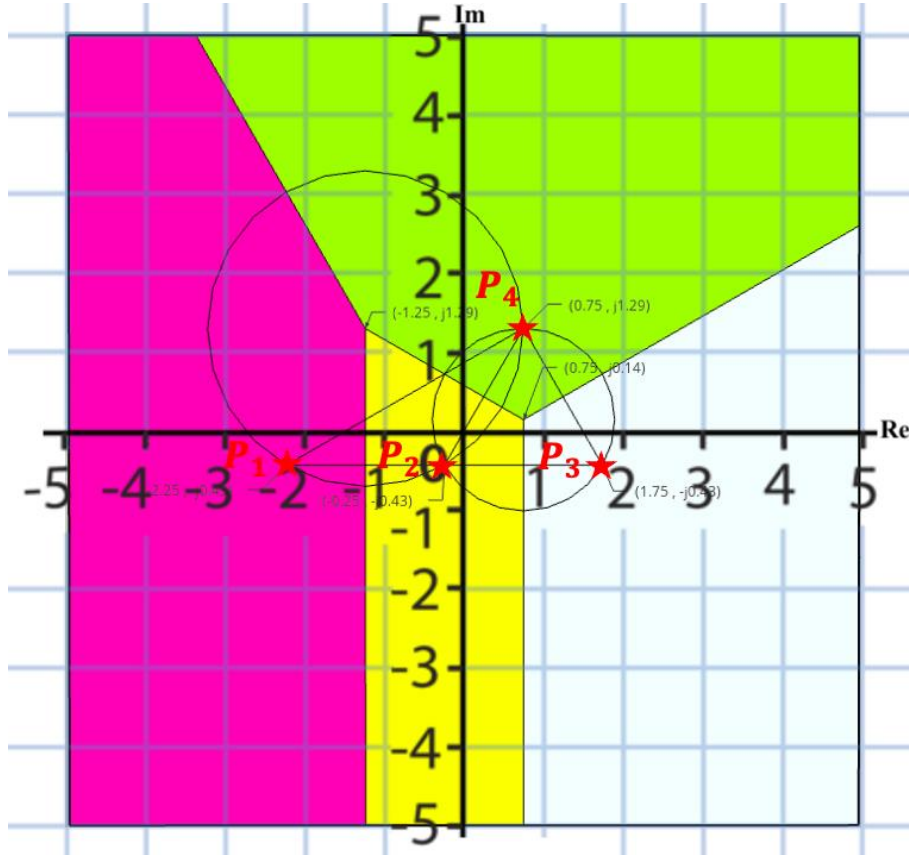


Figura 4. Esboço da constelação de mínima energia – partido da fornecida no enunciado.

Para definir o ganho dessa em relação a constelação anterior de nível DC não nulo, precisa-se primeiro definir seus valores de $P_{S(m)}$ e de $SNR_{(m)}$ (notação para constelação de mínima energia) para relacioná-los com $\frac{E_B}{N_0}$, como segue abaixo:

$$P_{S(m)} = E\{|a_k|^2\} = \frac{1}{4} * \left|-2,25 - j\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2 + \frac{1}{4} * \left|-0,25 - j\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2 + \frac{1}{4} * \left|1,75 - j\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2 + \frac{1}{4} * \left|0,75 + j\frac{3\sqrt{3}}{4}\right|^2 = 2,75$$

$$SNR_{(m)} = \frac{P_S}{\dim * P_n} = \frac{2,75}{\frac{2 * N_0}{2}} = \frac{5,5}{2 * N_0}$$

$$SNR_{(m)} = \frac{2 * E_S}{\dim * P_n} = \frac{2 * \log_2 4}{2} * \frac{E_B}{N_0} = \frac{2 * E_B}{N_0}$$

De posse desses resultados, comparando-os com os da constelação original fornecida e esboçada no item A, chega-se em:

$$SNR = \frac{7}{2 * N_0} = \frac{2 * E_B}{N_0}; SNR_{(m)} = \frac{5,5}{2 * N_0} = \frac{2 * E_B}{N_0}$$

$$SNR = \frac{7}{2 * N_0} = \frac{2 * E_B}{N_0}; SNR_{(m)} = \frac{5,5 * \frac{7}{5,5}}{2 * N_0} = \frac{\frac{7}{5,5} * 2 * E_B}{N_0} = \frac{7}{2 * N_0} = \frac{2,54 * E_B}{N_0}$$

Assim, visto que a probabilidade de erro de símbolo se mantêm, deve-se igualar a SNR anterior com a nova $SNR_{(m)}$, obtendo:

$$Ganho = \frac{2,54}{2} = 1,27 \cong 1,038 \text{ dB}$$

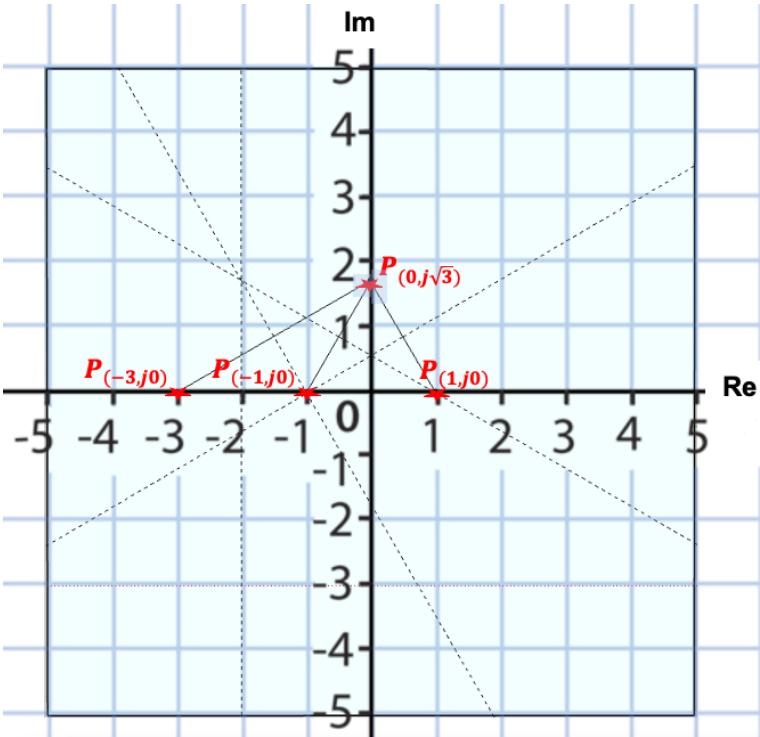


Figura 5. Esboço da Constelação original explicitando limiares e retas entre os símbolos - utilizado para os cálculos relacionados ao limitante da união.

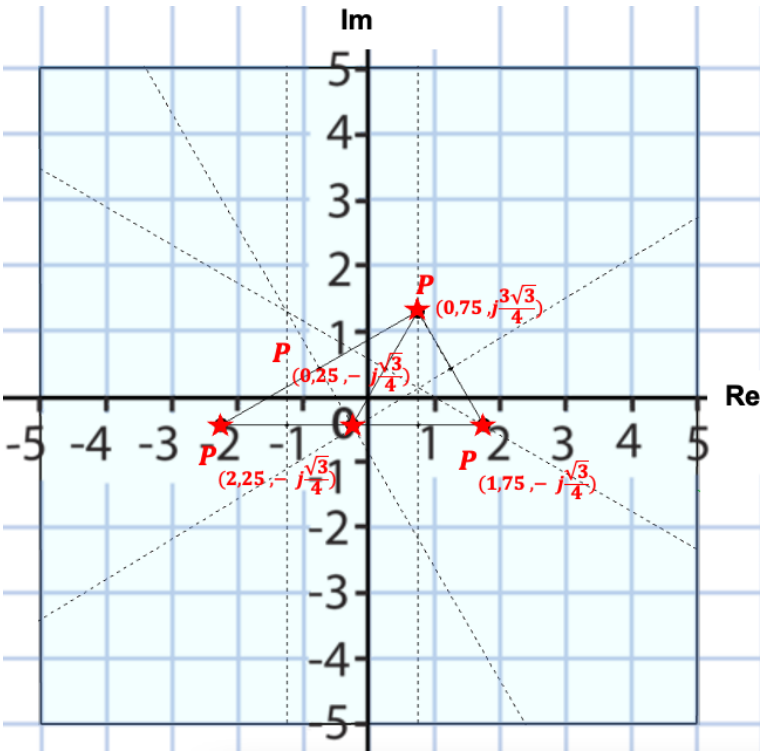


Figura 6. Esboço da Constelação de mínima energia explicitando limiares e retas entre os símbolos.