Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Exercício para Nota 4 – EN4 – Equalização

Nome: Vinicius Bueno de Moraes NUSP: 10256432 Data: 14/07/2021

Enunciado

Considere um sistema com modulação 2-PAM, com símbolos $a \in \{+1,-1\}$, equiprováveis, pulsos de transmissão e recepção que formam um pulso de Nyquist e que possuem energia unitária. Considere o canal discreto $H(z)=0,8+1z^{-1}$ observado na saída do filtro casado. Seja um equalizador linear FIR de N=9 coeficientes, pede-se:

a) (5,0) Para o critério MMSE, obtenha uma tabela de MSE por todos os possíveis valores do atraso do sinal desejado (*d*), para as SNRs 4 dB, 15 dB e 20 dB. Comente e explique os resultados em função dos conceitos vistos em sala de aula.
b) (5,0) Obtenha a taxa de erro do sistema para uma SNR=3:2:19 dB e *d*=7 para os critérios MMSE e ZF. Obtenha também a probabilidade de erro para o MMSE com *d*=7, usando a aproximação dada nas notas de aula e a probabilidade de erro do sistema sem equalizador. Trace um gráfico com essas curvas e comente em função dos conceitos.

Resolução

**Script .m desenvolvido para obter a tabela 2 (referente ao item A) disponível aqui (foi implementado possibilitando a generalização do problema, ou seja, é possível simular para o Canal, número de coeficientes desse, e conjunto de SNRs desejadas, simplesmente alterando os dados de interesse e sendo gerado os dados comparativos ao final. Também exibe o gráfico da variação do atraso ótimo).*

***Script .m desenvolvido para gerar as comparações entre os diferentes métodos (referente ao item B) disponível aqui (foi desenvolvido de forma generalizada assim possibilitando facilmente simulações com a mudança dos parâmetros, e.g. do atraso).*

Lista de Siglas e Abreviaturas:

SNR - Signal-to-noise Ratio;

MMSE - Minimum Mean Square Error;

MSE - Mean Square Error;

ZF - Zero Forcing Equalizer;

FIR - Finite Impulse Response.

A)

Primeiramente, observa-se que a modulação estudada 2-PAM, com símbolos $a \in \{+1,-1\}$ equiprováveis, possui média nula, logo, sua variância σ_a^2 pode ser calculada como:

$$\sigma_a^2 = E\{|a|^2\} = (+1)^2 * \frac{1}{2} + (-1)^2 * \frac{1}{2} = 1$$

Partindo-se da fórmula que relaciona a SNR com σ_a^2 e σ_n^2, e admitindo que o canal discreto a ser considerado é igual a $H(Z) = 0{,}8 + 1 * Z^{-1}$, tem-se:

$$SNR = \frac{\sigma_a^2 * \left||h|\right|^2}{\sigma_n^2} = \frac{1 * \left(\sqrt{1^2 + 0{,}8^2}\right)^2}{\sigma_n^2} = \frac{1 * 1{,}64}{\sigma_n^2} \rightarrow SNR = \frac{1{,}64}{\sigma_n^2} \rightarrow \sigma_n^2 = \frac{1{,}64}{SNR}$$

De posse da relação acima, e com os valores de SNR dados para o problema (4dB, 15dB e 20dB) se calculará σ_n^2 para a posteriores utilizá-lo na composição de uma tabela de MSE utilizando o critério MMSE.

Lembrando que os cálculos devem se utilizar de grandezas em escala linear, assim, convertendo as SNRs acima, chega-se em:

$$SNR_{(W4dB)} = 10^{\frac{SNR_{4\,dB}}{10}} = 10^{\frac{4}{10}} = 2{,}511$$

$$SNR_{(W15dB)} = 10^{\frac{SNR_{15\,dB}}{10}} = 10^{\frac{15}{10}} = 31{,}622$$

$$SNR_{(W20dB)} = 10^{\frac{SNR_{20\,dB}}{10}} = 10^{\frac{20}{10}} = 100$$

Com isso, obtém-se os valores de σ_n^2 para cada uma das SNRs dadas (Obs: não se alterará o valor de σ_a^2 para os diferentes valores de SNR neste estudo, mantendo-se esse sempre igual a 1):

$$\sigma^2_{n_{(4\,dB)}} = \frac{1{,}64}{SNR} = \frac{1{,}64}{2{,}511} = 0{,}653$$

$$\sigma^2_{n_{(15\,dB)}} = \frac{1{,}64}{SNR} = \frac{1{,}64}{31{,}622} = 0{,}0518$$

$$\sigma^2_{n_{(20\,dB)}} = \frac{1{,}64}{SNR} = \frac{1{,}64}{100} = 0{,}0164$$

Chegando a um conjunto de σ_n^2 igual a:

[0.653 0.0518 0.0614]

Vetor este que será muito útil para o cálculo da tabela MSE com um *script .m**, originalmente desenvolvido em *Matlab (v. 2019a)* e disponibilizado no início deste documento. Abaixo segue uma tabela com a organização dos dados utilizados no estudo, possibilitando assim um panorama da faixa de valores/interesse desbravada aqui.

Tabela com dados de estudo – SNRs e σ_n^2 respectivas									
SNR_{dB}	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*	*15*	*17*	*19*
SNR_W	*1,995*	*3,162*	*5,011*	*7,943*	*12,589*	*19,952*	*31,622*	*50,118*	*79,432*
σ_n^2	*0,822*	*0,518*	*0,327*	*0,206*	*0,130*	*0,0821*	*0,0518*	*0,0327*	*0,0206*

Tabela 1. Grandezas estudadas

Com os devidos σ_n^2 calculados (em função das SNRs estudadas) e σ_a^2, faz-se como segue para gerar a tabela de MSE através do método MMSE. Primeiramente se define a matriz de convolução do canal, sendo:

$$H_c = h * N$$

Onde N denota o número de coeficientes do equalizador FIR e; $*$, a convolução entre ambos (utilizada a função nativa *convmtx* do *Matlab* para a realização no *script*).

Assim, de posse de H_c, se calcula a matriz p, levando em conta os 10 valores de atraso possíveis (N = 9), sendo:

**A função convmtx é uma rotina interna do Matlab. Mais detalhes clicando aqui.*

$$H_c = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 & \dots \\ 0 & 0{,}8 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$p = H_c * [*]^*$$

**Para atraso* $d = 7 \rightarrow [*] = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \sigma_a^2\ 0\ 0] \rightarrow E\{a_m * a_{m-d}\}$*; O script é generalizado, possibilitando simular um conjunto de atrasos quaisquer (em função de um N qualquer) – vide figura 4 nos apêndices.*

Em seguida, definiu-se os coeficientes w para determinar através do critério MMSE quais seriam os atrasos ótimos em função de cada valor de SNR, obtendo:

$$w = R^{-1} * P$$

Onde R é definido sendo:

$$R = \sigma_a^2 * H * H^H + \sigma_n^2 * I$$

Onde o $sobrescrito^H$ *Representa o operador hermitiano e; I a matriz identidade de ordem N.*

Por fim, obtém-se a tabela MSE, com:

$$m = \sigma_a^2 - w^H * p$$

Sendo os atrasos ótimos (como ilustrado na tabela abaixo), para cada SNR:

$$SNR = 4dB \rightarrow atraso\ ótimo = 5$$

$$SNR = 15dB \rightarrow atraso\ ótimo = 7$$

$$SNR = 20dB \rightarrow atraso\ ótimo = 9$$

Tabela MSE - Critério MMSE para diferentes atrasos - Equalizador FIR com N=9 Coef.									
SNR = 4dB									
0,6747	0,4434	0,4051	0,3988	0,3978	0,3976	0,398	0,4001	0,4131	0,4918
SNR = 15dB									
0,4297	0,2653	0,1816	0,1391	0,1176	0,1069	0,1022	0,101	0,103	0,1089
SNR = 20dB									
0,3882	0,2446	0,1599	0,1102	0,0809	0,0637	0,0537	0,0481	0,0452	0,0441
d(0)	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	d(8)	d(9)

Tabela 2. Tabele MSE por todos possíveis atrasos - Critério MMSE.

<u>Comentários acerca dos resultados</u>

Como visto na tabela anterior, por estar-se utilizando um canal de fase máxima (tem seu diagrama de pólos e zeros na figura 1), para menores valores de SNR, o que implica um maior ruído frente ao sinal de interesse, nota-se que o atraso tende para valores intermediários. Se simulou para outros valores de SNR, ainda mais baixos, e notou que para esse canal, seu atraso ótimo nunca foi menor que 5, evidenciando este fato da tendência do atraso para valores intermediários devido ao aumento do ruído frente ao sinal. Ademais, com a diminuição do ruído (aumento da SNR) o degradê da tabela explicita de forma muito clara como o atraso ótimo tende a aumentar. Por fim, simulou-se o mesmo ensaio para um equalizador com N > 9, e.g 30, e notou-se comportamento semelhante quanto a posição do atraso relacionado a SNR, porém os valores dos coeficientes diminuíram. É notável salientar a adaptabilidade positiva que o método MMSE tem, se adequando para um modelo muito próximo ao Zero Forcing Equalizer quando o ruído tende a baixíssimos valores frente ao sinal e, ainda, modelar o canal a se equivaler a um filtro casado onde o próprio tende a recuperar o sinal quando este está submetido a muito ruído.

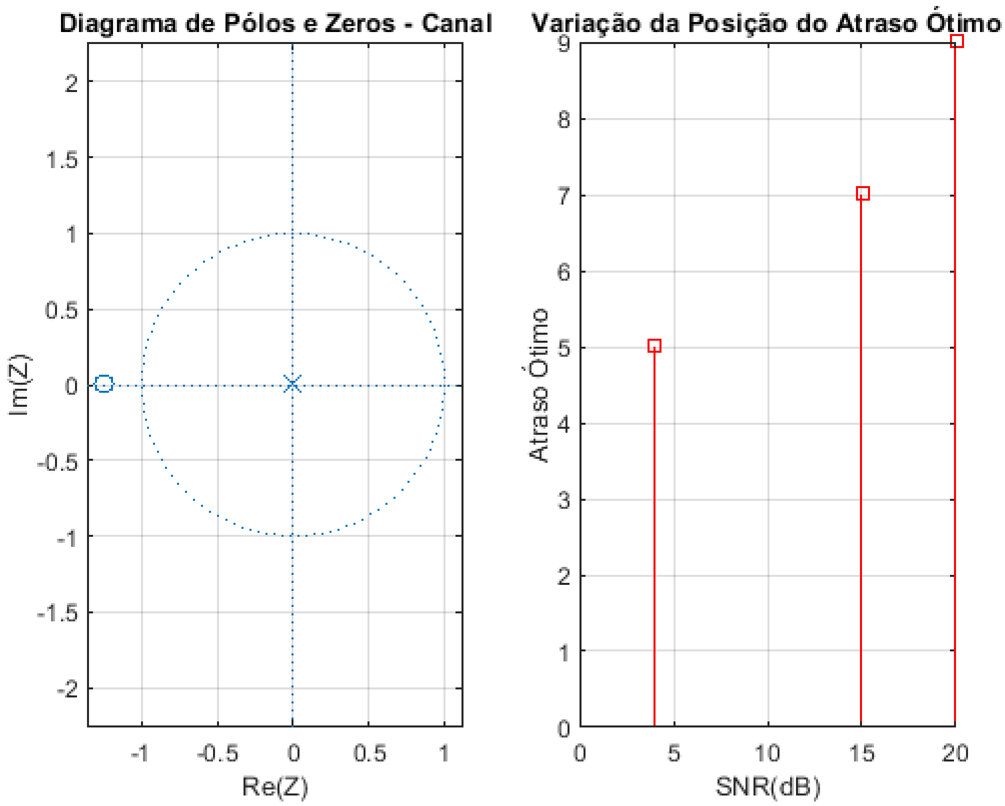


Figura 1. Diagrama de polos e zeros do canal e variação do atraso ótimo.

B)

<u>Probabilidade de erro – MMSE</u>

Primeiramente definiu-se a probabilidade de erro partido do critério MMSE com as notas disponibilizadas em aula, assim, tem-se:

$$y_k = a_k * h_{eq,d} + n'_k$$

$$h_{eq} \rightarrow convolução\ do\ canal\ com\ w^*$$

$$h_{eq,d} \rightarrow posição\ d\ do\ vetor\ h_{eq}$$

Por ter-se $a_k = \{+1, -1\}$, dois possíveis valores surgiram, cada um com probabilidade $\frac{1}{2}$, dessa forma:

$$P_e = \frac{1}{2} * Q\left(\frac{|h_{eq,d}|}{\sigma_{n'}}\right)_{a_k=1} + \frac{1}{2} * Q\left(\frac{|h_{eq,d}|}{\sigma_{n'}}\right)_{a_k=-1} \rightarrow P_e = Q\left(\frac{|h_{eq,d}|}{\sigma_{n'}}\right)$$

Após, definiu-se $\sigma_{n'}$ sendo:

$$E\{|n_k'|\} = \sigma_{n'}^2 = \left(\left||h_{eq}|\right|^2 - |h_{eq,d}|^2\right) * \sigma_a^2 + \left||w|\right|^2 * \sigma_n^2$$

Por fim, tem-se:

$$\sigma_{n'} = \sqrt{\left(\left||h_{eq}|\right|^2 - |h_{eq,d}|^2\right) * \sigma_a^2 + \left||w|\right|^2 * \sigma_n^2}$$

Alcançando finalmente a Probabilidade de erro teórica pelo critério MMSE igual a:

$$P = Q\left(\frac{|h_{eq,d}|}{\sqrt{\left(\left||h_{eq}|\right|^2 - |h_{eq,d}|^2\right) * \sigma_a^2 + \left||w|\right|^2 * \sigma_n^2}}\right)$$

Assim, para o maior valor de SNR analisado, a priori igual a 19dB, encontra-se o menor erro teórico, sendo ele:

$$P = Q\left(\frac{|h_{eq,d}|}{\sigma_{n'}}\right) = Q\left(\frac{0,944}{0,228}\right) = Q(4,14) \cong 1,838x10^{-5}$$

Dessa forma se definirá a variável $Nsimbolos$, que remete ao número de iterações para que os dados amostrais tenham alto grau de confiança em seus resultados, como sendo o inverso do menor erro teórico alcançado multiplicado por 10, uma vez que as grandezas simuladas estão relacionadas com esta probabilidade. Assim:

$$Nsimbolos = 10^6$$

Probabilidade de erro sem Equalizador

Considerando símbolos i.i.d, se formula a probabilidade de erro teórica sem equalizador (pelo limitante da união), como sendo:

Combinações Possíveis			
a_k	a_{k-1}	y_k	P_{y_k}
+1	*+1*	$0,8 * (+1) + 1 * (+1) = 1,8$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
+1	*-1*	$0,8 * (+1) + 1 * (-1) = -0,2$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
-1	*+1*	$0,8 * (-1) + 1 * (+1) = 0,2$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
-1	*-1*	$0,8 * (-1) + 1 * (-1) = -1,8$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Tabela 3. Probabilidades dos símbolos da modulação em estudo

Assim, seguindo dos valores possíveis para y_k:

$$P_e = \left(Q\left(\frac{1{,}8}{\sigma_n}\right)*\frac{1}{4}\right)_1 + \left(Q\left(\frac{0{,}2}{\sigma_n}\right)*\frac{1}{4}\right)_2 + \left(Q\left(\frac{0{,}2}{\sigma_n}\right)*\frac{1}{4}\right)_3 + \left(Q\left(\frac{1{,}8}{\sigma_n}\right)*\frac{1}{4}\right)_4$$

Considerando $\sigma_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$ *e* da equação anterior, tem-se P_e:

$$P_e = \frac{1}{4}*Q\left(1{,}8\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)+\frac{1}{4}*Q\left(0{,}2\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)+\frac{1}{4}*Q\left(0{,}2\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)+\frac{1}{4}*Q\left(1{,}8\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}*Q\left(1{,}8\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)+\frac{1}{2}*Q\left(0{,}2\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

Desta forma, agora relacionar-se P_e com a SNR, como segue:

$$SNR = \frac{P_s}{dim\,dim\ *\ P_n}$$

Sendo P_s definida como (devido a constelação de símbolos ter média nula):

$$P_s = E\{|a*h|^2\}$$

E com h determinístico:

$$P_s = E\{|a|^2\}*\left||h|\right|^2 = \left(\frac{1}{2}*(+1)^2+\frac{1}{2}*(-1)^2\right)*1{,}64 = 1{,}64$$

Por fim:

$$SNR = \frac{P_s}{dim\,dim\ *\ P_n} = \frac{1{,}64}{1*\frac{N_0}{2}} = \frac{2*1{,}64}{N_0} \rightarrow \frac{2}{N_0} = \frac{SNR}{1{,}64}$$

Assim a probabilidade de erro do sistema sem equalizador, em função da SNR é:

$$P_e = \frac{1}{2}*Q\left(1{,}8*\sqrt{\frac{SNR}{1{,}64}}\right)+\frac{1}{2}*Q\left(0{,}2*\sqrt{\frac{SNR}{1{,}64}}\right)$$

Visto a preponderância dos termos centrais (notável ao se utilizar do limitante da união para tal análise) em relação ao erro, pode citar-se a seguinte aproximação:

$$P_e \cong \frac{1}{2}*Q\left(0{,}2*\sqrt{\frac{SNR}{1{,}64}}\right)$$

Observe na figura 2 que a aproximação é muito boa e as curvas se sobrepõem.

<u>Formulações – Taxa de Erro MMSE e ZF</u>

Prosseguindo, se define as formulações para taxa de erro do sistema, sendo como no item A (MMSE), e, como o critério MMSE tende para o *Zero Forcing Equalizer* quando $\sigma_n^2 = 0$, fez-se:

$$R_{zf} = \sigma_a^2 * H * H^H$$

$$w_{zf} = R_{zf}^{-1} * P$$

$$y_{zf} = w_{zf}^H * u$$

Onde y_{zf} é a saída do equalizador para o método, u é o sinal gerado aleatoriamente e com adição de ruído e $subscritos_{zf}$ as grandezas referentes ao *Zero Forcing Equalizer*.

De posse desses, plotou-se a imagem que segue referenciando e ilustrando as diferenças de performance relacionadas com as SNRs entre os métodos bem como para um sistema com ou sem equalização:

<u>Comentários acerca dos resultados</u>

Como nota-se pelos resultados apresentados na figura 2, a probabilidade de erro sem equalizador (amarelo/azul) é consideravelmente maior frente a um sinal equalizado, o que evidencia a importância da implementação de equalizadores em sistemas de comunicação susceptíveis a ruídos. O resultado empírico obtido a partir da simulação para o caso MMSE e ZF se aproximou muito da formulação teórica apresentada em aula e detalhada nesse estudo. Também é notável (visto na figura 6, no apêndice) que as soluções tendem a se equivalerem quando o ruído é diminuído frente ao sinal (aumento da SNR), bem como proposto pela definição do método ZF.

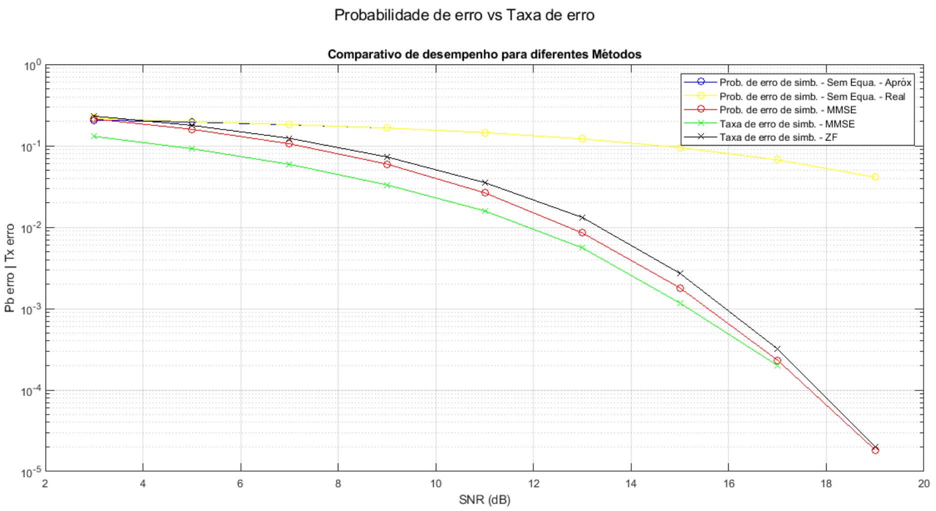


Figura 2. Gráfico comparativo entre as Taxas e Probabilidades de erros para diferentes métodos, também em anexo em paisagem nos apêndices desse.

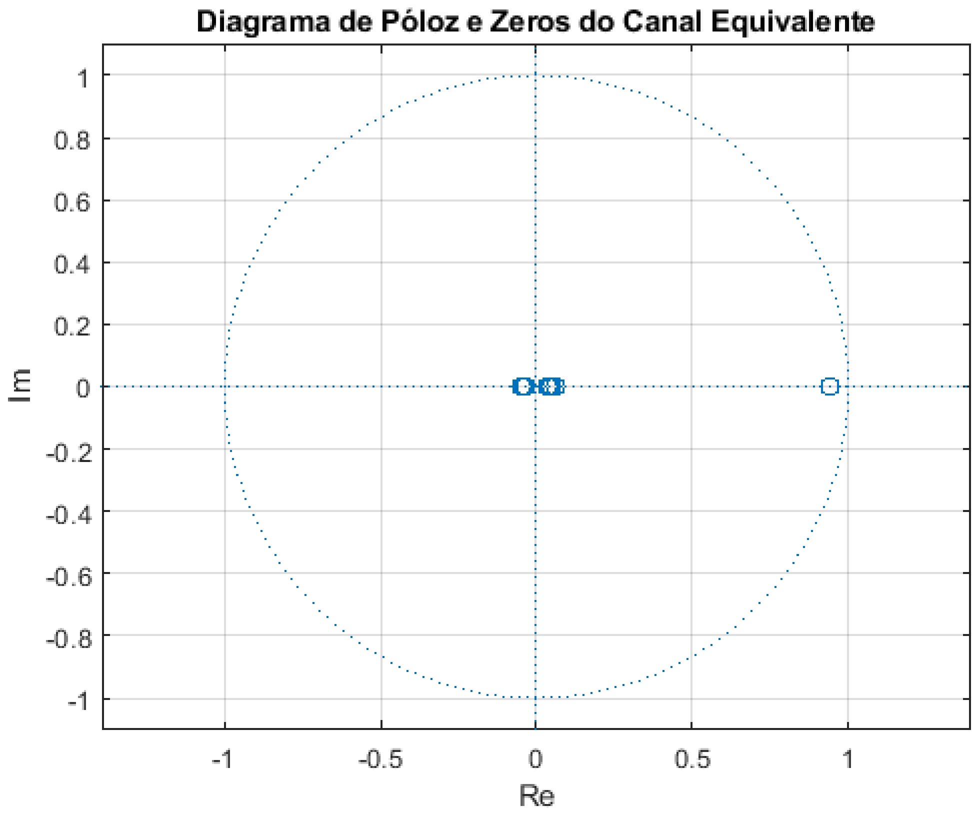
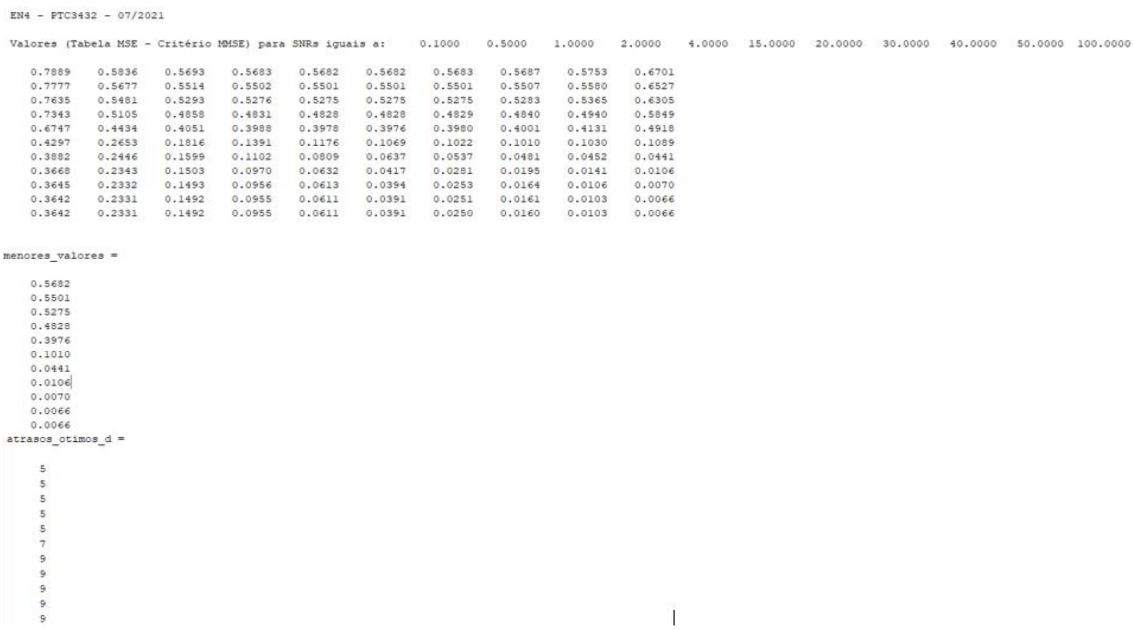


Figura 3. Diagrama de Pólos e Zeros do Canal Equivalente - Fase Mínima.

Apêndice



```
EN4 - PTC3432 - 07/2021

Valores (Tabela MSE - Critério MMSE) para SNRs iguais a:     0.1000    0.5000    1.0000    2.0000    4.0000   15.0000   20.0000   30.0000   40.0000   50.0000  100.0000

    0.7889    0.5836    0.5693    0.5683    0.5682    0.5682    0.5683    0.5687    0.5753    0.6701
    0.7777    0.5677    0.5514    0.5502    0.5501    0.5501    0.5501    0.5507    0.5580    0.6527
    0.7635    0.5481    0.5293    0.5276    0.5275    0.5275    0.5275    0.5283    0.5365    0.6305
    0.7343    0.5105    0.4858    0.4831    0.4828    0.4828    0.4829    0.4840    0.4940    0.5849
    0.6747    0.4434    0.4051    0.3988    0.3978    0.3976    0.3980    0.4001    0.4131    0.4918
    0.4297    0.2653    0.1816    0.1391    0.1176    0.1069    0.1022    0.1010    0.1030    0.1089
    0.3882    0.2446    0.1599    0.1102    0.0809    0.0637    0.0537    0.0481    0.0452    0.0441
    0.3668    0.2343    0.1503    0.0970    0.0632    0.0417    0.0281    0.0195    0.0141    0.0106
    0.3645    0.2332    0.1493    0.0956    0.0613    0.0394    0.0253    0.0164    0.0106    0.0070
    0.3642    0.2331    0.1492    0.0955    0.0611    0.0391    0.0251    0.0161    0.0103    0.0066
    0.3642    0.2331    0.1492    0.0955    0.0611    0.0391    0.0250    0.0160    0.0103    0.0066


menores_valores =

    0.5682
    0.5501
    0.5275
    0.4828
    0.3976
    0.1010
    0.0441
    0.0106
    0.0070
    0.0066
    0.0066
atrasos_otimos_d =

     5
     5
     5
     5
     5
     7
     9
     9
     9
     9
     9
```

Figura 4. Item A - Tela de exibição do código quando executado com um conjunto de 11 valores de SNRs e N = 9, mostrando sua fácil generalização e aproveitamento para outras simulações.

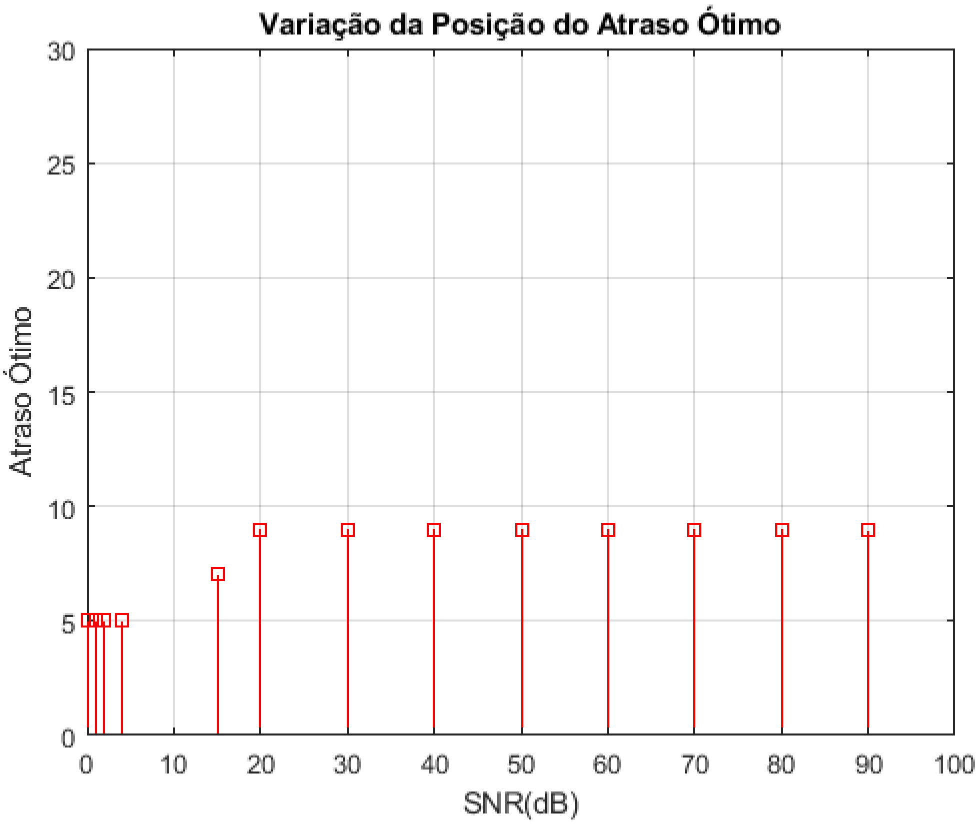


Figura 5. Posição do atraso ótimo em função da SNR – para caso adicional com mais valores de SNR.

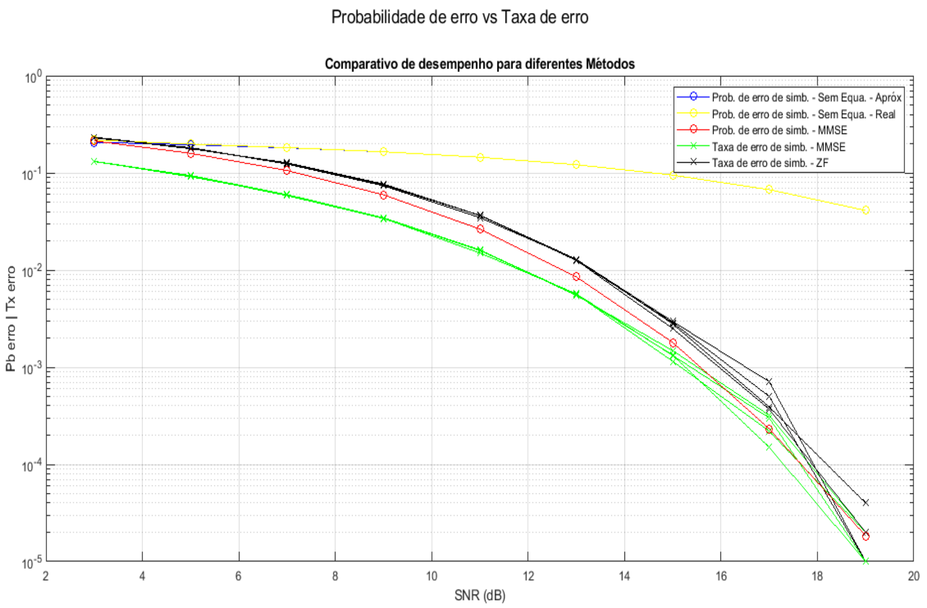
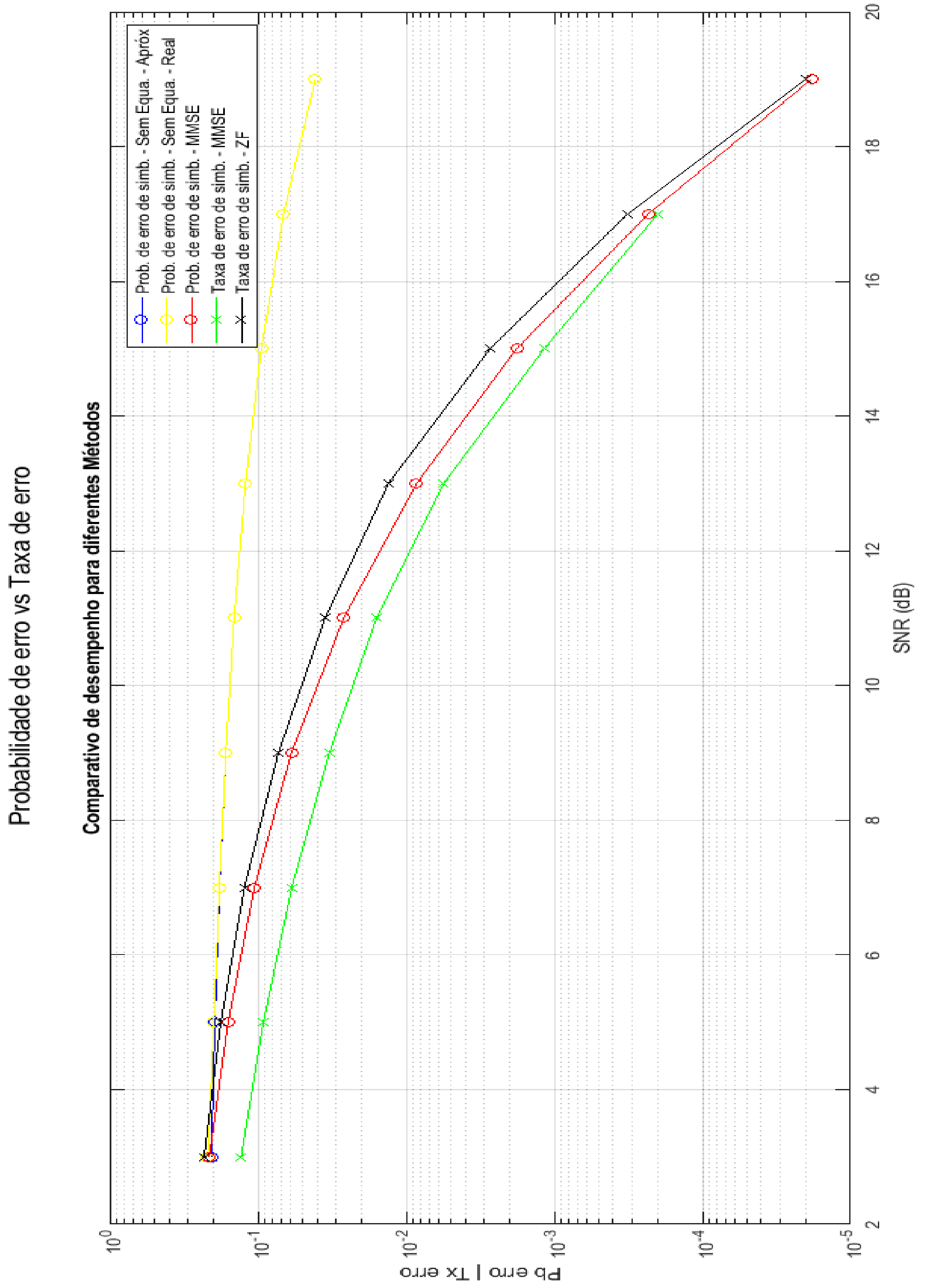


Figura 6. Item B - Exemplificação da variação amostral, com múltiplos experimentos sobre plotados. Ainda assim é notável a convergência de ambas as Taxas de erro e da Probabilidade de erro teórico (MMSE), para o mesmo ponto quando o sistema é submetido a altas SNRs.


Probabilidade de erro vs Taxa de erro
Comparativo de desempenho para diferentes Métodos
Prob. de erro de simb. - Sem Equa. - Apróx
Prob. de erro de simb. - Sem Equa. - Real
Prob. de erro de simb. - MMSE
Taxa de erro de simb. - MMSE
Taxa de erro de simb. - ZF
SNR (dB)
Pb erro | Tx erro
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}