

PTC3451 – Processamento Estatístico e Adaptativo de Sinais | EPUSP  
 Teste 3 – 03/10/2021

Nome: Vinicius Bueno de Moraes

NUSP: 10256432

*Scripts .m utilizados para as resoluções constam disponibilizados [aqui](#) – recomenda-se que para melhor visualização e manipulação da imagens eles sejam executados.*

Considerando o diagrama abaixo, e de posse das afirmações que o seguem a posteriores:

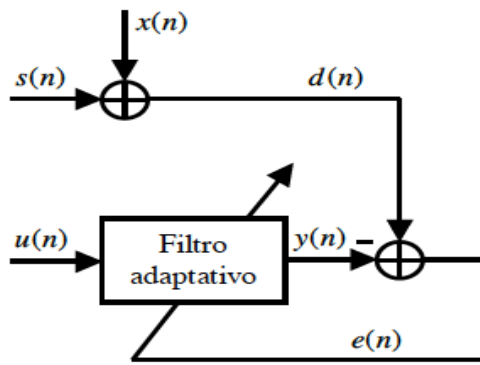


Figura 1. Esquema de Filtro adaptativo para eliminação de interferências.

$$x(n) = \text{sen} \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_v \right);$$

$$u(n) = 5 * \text{sen} \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \phi_u \right);$$

$d(n) = s(n) + x(n) \rightarrow$  resposta desejada para o Filtro Adaptativo;

$e(n) = d(n) - y(n) \rightarrow$  erro de estimação;

$\phi_u = \phi_v \rightarrow$  variáveis aleatórias distribuídas uniformemente entre 0 e  $2 * \pi$ ;

$s(n) \rightarrow$  sinal que se deseja medir após interferência, sendo ele um ruído branco gaussiano com média nula e variância  $\sigma_s^2 = 0,25$ .

**a.1)**

Definiu-se  $\mathbf{R} = E\{u(n) * u^T(n)\}$ , para  $M = 2$ , primeiramente calculando-se  $r_u(k)$ :

$$r_u(k) = E \left\{ 5 * \text{sen} \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \phi_u \right) * 5 * \text{sen} \left( \frac{2 * \pi * (n - k)}{40} + \phi_u \right) \right\}$$

$$r_u(k) = \frac{25}{2} * E \left\{ \cos \left( \frac{2 * \pi * k}{40} \right) - \cos \left( \frac{2 * \pi * (2 * n - k)}{40} + 2 * \phi_u \right) \right\}$$

$$r_u(k) = \frac{25}{2} * \cos \left( \frac{2 * \pi * k}{40} \right)$$

Chegando em:

$$R = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) \\ r_u(1) & r_u(0) \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 12,500 & 12,346 \\ 12,346 & 12,500 \end{bmatrix}$$

Para  $\sigma_d^2 = E\{d^2(n)\}$ , onde  $d(n) = s(n) + x(n)$ , tem-se:

$$\sigma_d^2 = E\{s(n) * s(n)\} + E\{2 * s(n) * x(n)\} + E\{x(n) * x(n)\}$$

A partir da descorrelação entre  $s(n)$  e  $x(n)$ , resta-se:

$$\sigma_d^2 = \sigma_s^2 + E\{x(n) * x(n)\}$$

$$\sigma_d^2 = \sigma_s^2 + E \left\{ \sin \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_v \right) * \sin \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_v \right) \right\}$$

$$\sigma_d^2 = \sigma_s^2 + \frac{1}{2} * E\{\cos(0)\}$$

$$\sigma_d^2 = \sigma_s^2 + \frac{1}{2} * \cos(0)$$

$$\sigma_d^2 = 0,25 + \frac{1}{2} * 1 \rightarrow \sigma_d^2 = 0,750$$

Ademais, para  $p$ , tem-se:

$$p = \begin{bmatrix} E\{u(n) * d(n)\} \\ E\{u(n-1) * d(n)\} \end{bmatrix}$$

Observando a descorrelação entre  $s(n)$  e  $u(n)$ , resta-se:

$$E\{u(n) * d(n)\} = E\{u(n) * x(n)\}$$

$$E\{u(n) * d(n)\} = E \left\{ 5 * \sin \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \phi_v \right) * \sin \left( \frac{2 * \pi * n}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_u \right) \right\}$$

$$E\{u(n) * d(n)\} = \frac{5}{2} * E \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left( \frac{2 * \pi * (2 * n)}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_u + \phi_v \right) \right\}$$

$$E\{u(n) * d(n)\} = \frac{5}{2} * \cos \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

$$E\{u(n) * d(n)\} = \frac{5}{2} * 0,866 \rightarrow E\{u(n) * d(n)\} = 2,165$$

E  $E\{u(n-1) * d(n)\}$  sendo:

$$E\{u(n-1) * d(n)\} = E\{u(n-1) * x(n)\}$$

$$E\{u(n-1) * d(n)\} = E\left\{5 * \sin\left(\frac{2 * \pi * n}{40} + \phi_v\right) * \sin\left(\frac{2 * \pi * (n-1)}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_u\right)\right\}$$

$$E\{u(n-1) * d(n)\} = \frac{5}{2} * E\left\{\cos\left(\frac{2 * \pi}{40} + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2 * \pi * (2 * n - 1)}{40} + \frac{\pi}{6} + \phi_u + \phi_v\right)\right\}$$

$$\{u(n-1) * d(n)\} = \frac{5}{2} * \cos\left(\frac{2 * \pi}{40} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$E\{u(n-1) * d(n)\} = \frac{5}{2} * 0,777 \rightarrow E\{u(n) * d(n)\} = 1,942$$

Comparando os resultados alcançados com o *script.m*, com número de pontos  $N = 4500$ , se verificou:

$$R_{Teórico} = \begin{bmatrix} 12,500 & 12,346 \\ 12,346 & 12,500 \end{bmatrix} \Leftrightarrow R_{Experimental} = \begin{bmatrix} 12,500 & 12,348 \\ 12,348 & 12,500 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{d-Teórico}^2 = 0,750 \Leftrightarrow \sigma_{d-Experimental}^2 = 0,774$$

$$p_{Teórico} = \begin{bmatrix} 2,165 \\ 1,942 \end{bmatrix} \Leftrightarrow p_{Experimental} = \begin{bmatrix} 2,143 \\ 1,920 \end{bmatrix}$$

Assim, é perceptível como os resultados se equivalem, comprovando a exatidão dos conceitos teóricos aplicados aos cálculos. *Resultados experimentais se baseiam em estimação – função xcorr do Matlab (obtida por média de conjunto e média temporal, supondo ergodicidade).*

## **a.2)**

Em seguida, fez-se:

$$w_{o-Teórico} = R^{-1} * p = \begin{bmatrix} 12,500 & 12,346 \\ 12,346 & 12,500 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 2,165 \\ 1,942 \end{bmatrix} \rightarrow w_{o-Teórico} = \begin{bmatrix} 0,806 \\ -0,641 \end{bmatrix}$$

$$w_{o-Experimental} = R^{-1} * p \rightarrow w_{o-Experimental} = \begin{bmatrix} 0,818 \\ -0,655 \end{bmatrix}$$

$$J_{min-Teórico} = \sigma_d^2 - p^T * w_o = 0,750 - [2,165 \quad 1,942] * \begin{bmatrix} 0,806 \\ -0,641 \end{bmatrix} \rightarrow J_{min-Teórico} = 0,249$$

$$J_{min-Experimental} = \sigma_d^2 - p^T * w_o \rightarrow J_{min-Experimental} = 0,259$$

Assim, pode-se comentar que a relação entre o  $J_{min}$  e  $\sigma_s^2$  é que o primeiro tende ao valor do segundo quando aplicada a solução ótima, o que se percebe nos resultados, a menos de erros de aproximação/experimentais.

### a.3)

Por fim, para este item, gerou-se a representação gráfica dos sinais, como segue abaixo:

#### Resultado da Filtragem Adaptativa para os sinais propostos - item a.

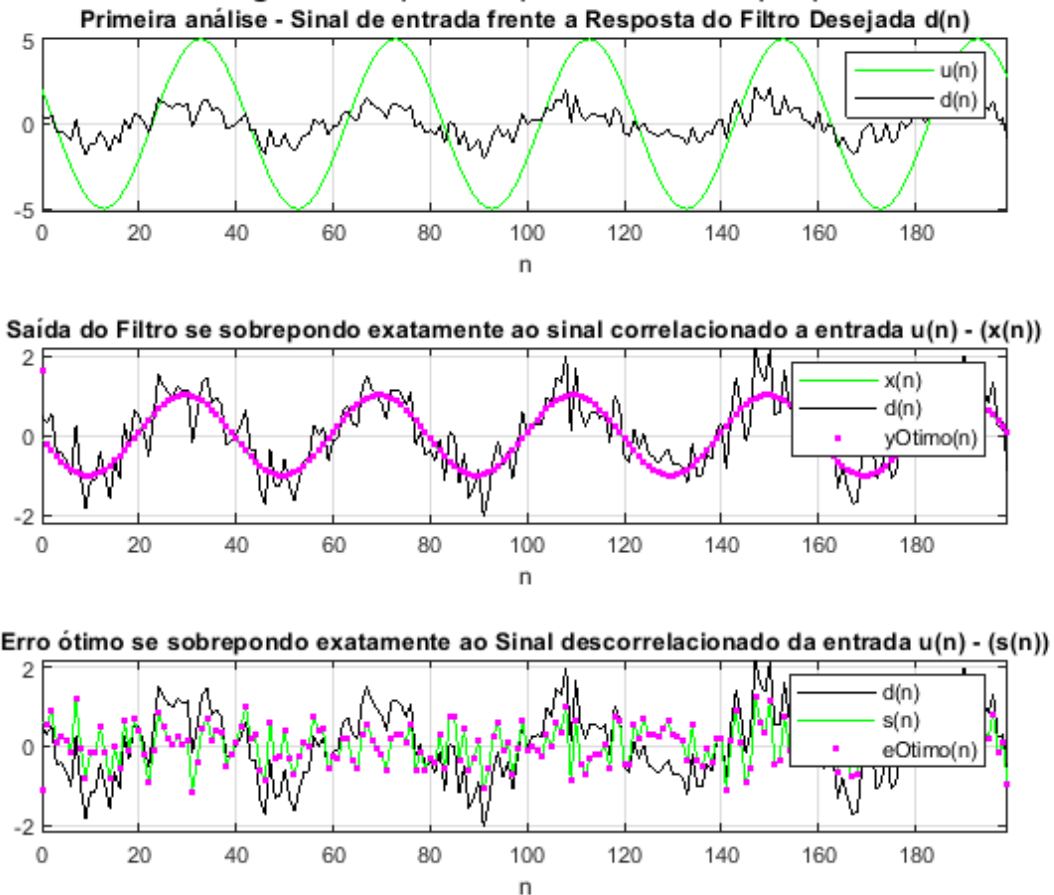


Figura 2. Análise da Filtragem Adaptativa para os sinais propostos.

Os títulos das imagens já são bem ilustrativos quanto aos resultados alcançados. Pode notar-se que o Erro ótimo calculado é exatamente igual ao sinal descorrelacionado da entrada  $u(n)$ , sendo esse  $s(n)$ . Ademais, a estimação encontrada também leva ao mesmo acontecimento (sobreposição de sinais), mas agora, nota-se que a saída  $y_{Otimo}(n)$  é exatamente igual ao sinal  $x(n)$ , visto que esse possui correlação com a entrada. Em ambos os casos se notam resoluções que tendem a perfeição, isso se deve principalmente a fatores que tornam o problema simples, como, discrepância total entre os tipos e sinais que se buscou analisar (descorrelação quase perfeita). Para sinais de interesse e interferências reais, que podem ter correlações entre si, as estimções de saída e logo o Erro encontrado, poderiam não ser tão fiéis ao esperado.

### b.1)

De posse da Matriz  $R$  e da função *eig.m* do *Matlab*, se encontrou o maior Auto Valor de  $R$ , com o comando:

$$\text{maxAutoValor} = \max(\text{eig}(\text{Ru}))$$

Encontrando assim o intervalo do Passo de Adaptação do método, para que haja convergência:

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{maxAutoValor}} \rightarrow 0 < \mu < \frac{2}{24,858}$$

$$0 < \mu < 0,0804$$

## **b.2)**

Implementação do Algoritmo de *Steepest Descent*. A seguir as figuras solicitadas, devidamente tituladas para facilidade da análise.

Comparações - Solução Ótima X Algoritmo de Steepest Descent com  $N = 1500$  e Passo de Adapt. ( $\mu$ ) de 0,01 - item b.

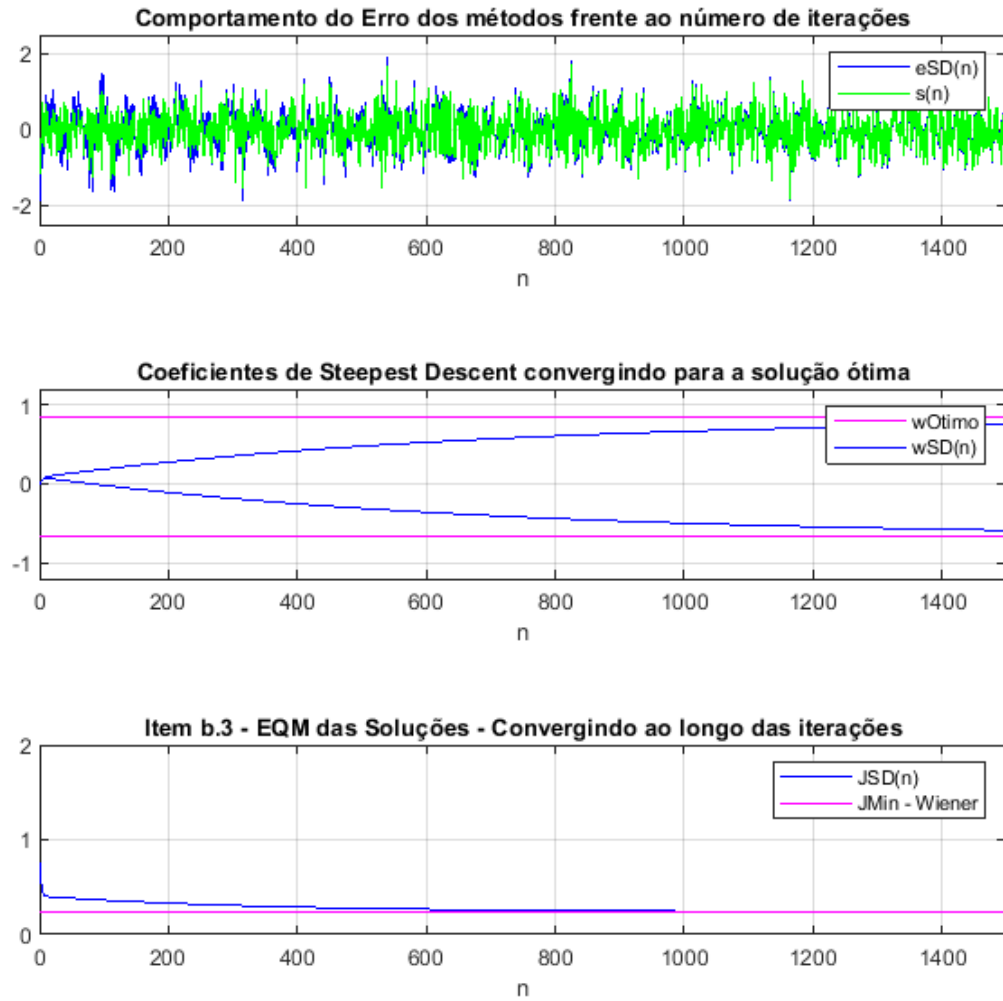


Figura 3. Análises pertinentes a execução do Algoritmo de Steepest Descent.

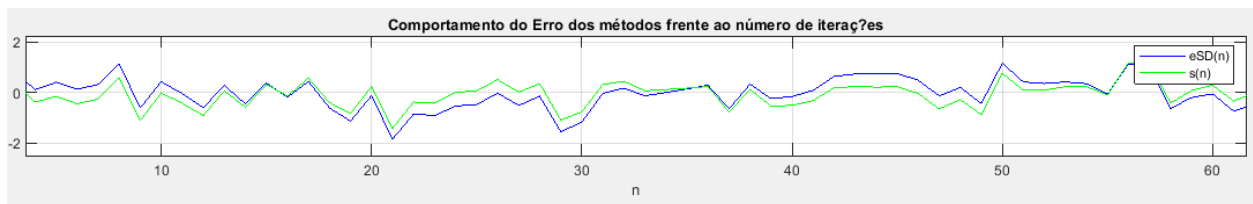


Figura 4. Algoritmo SD - Maior divergência nas primeiras iterações.

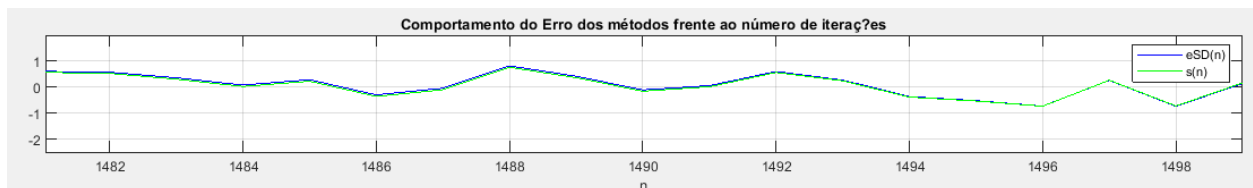


Figura 5. Algoritmo SD - Sobreposição de resultados ao final das iterações.

### **b.3)**

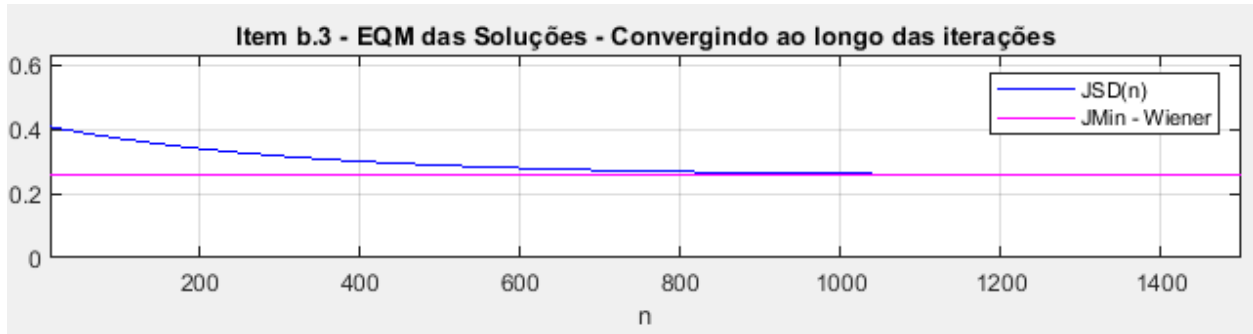


Figura 6. Comparação - EQM Steepest Descent X Solução ótima.

Comparando o valor obtido nessa simulação, com  $J_{min-Experimental} = 0,259$  - item a.2), observa-se que após em torno de 1000 iterações, eles passam a se equivaler. Assim, fica claro que o EQM *Steepest Descent* contempla o resultado da solução ótima após certo tempo (visto que Passo de Adaptação foi escolhido no intervalo adequado).

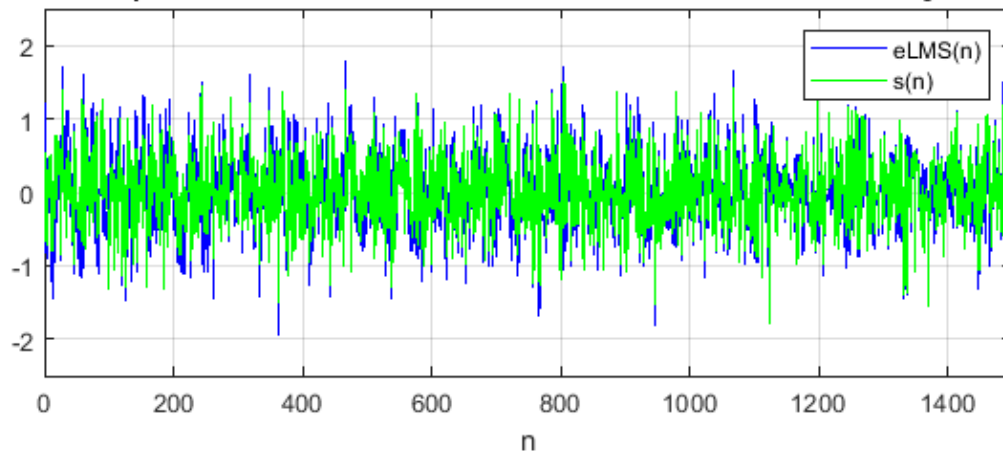
#### **b.4)**

Comentários/comparativo acerca dos resultados observados através dos gráficos:

Após as execuções de ambos os métodos para a obtenção dos coeficientes, pode notar-se que a solução ótima tem resultado inicial já fidelizado ao que se espera. Em contrapartida, no Algoritmo de Steepest Descent, é necessário um tempo até que seus coeficientes passem a se equivalerem aos de Wiener, e então, a partir deste momento, a solução ter eficácia igual ao caso ótimo. Em suma, um Trade-off entre custo computacional/processamento e tempo para obtenção do resultado ideal. Comentário similar se aplica quanto ao comportamento do EQM do método do Algoritmo de Steepest Descent frente ao caso ótimo, como ilustrado na figura 6.

#### **c.1)**

Comparações - Solução Ótima X Algoritmo LMS com  $N = 1500$   
e Passo de Adapt. ( $\mu$ ) de 0,01 - item c.  
Comportamento do Erro dos métodos frente ao número de iterações



Coeficientes - Algoritmo LMS convergindo para a solução ótima

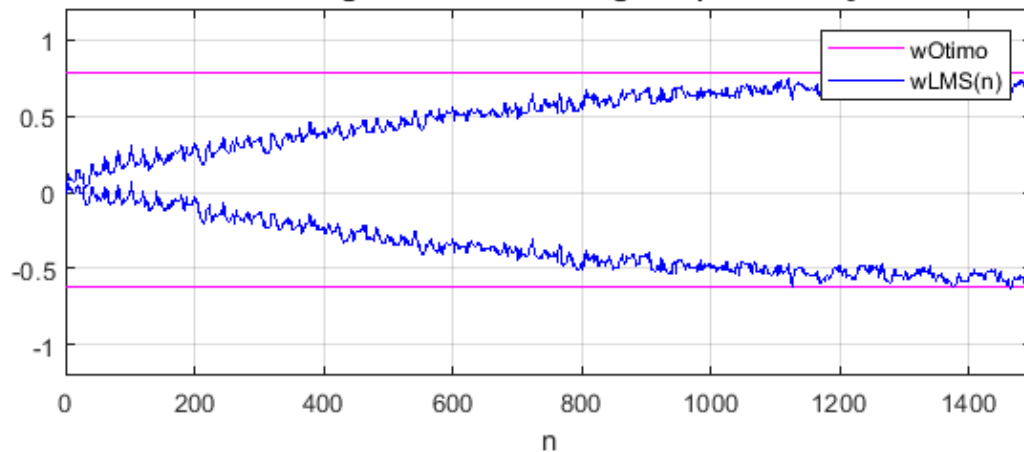


Figura 7. Algoritmo LMS - Comportamento do Erro e Convergência para em torno da solução ótima.

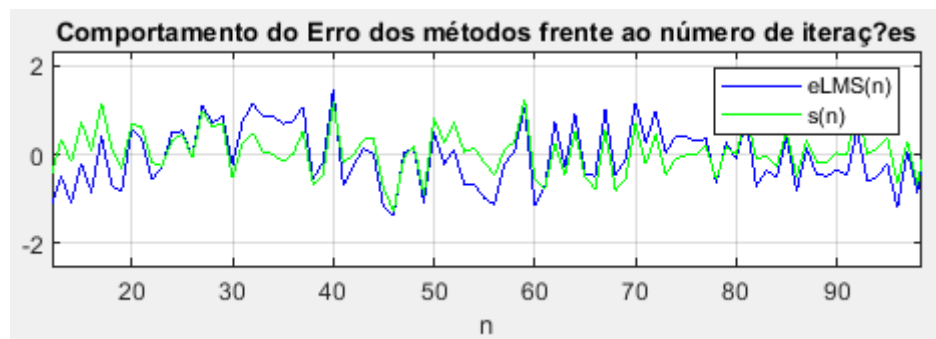


Figura 8. Algoritmo LMS - Discrepância do Erro nas iterações iniciais.





Figura 9. Algoritmo LMS - Convergência do método nas iterações finais.

Resultado um pouco menos preciso que o Algoritmo de Steepest Descent, visto que esse usa uma estimativa de gradiente instantânea, frente a estimativa exata do gradiente no método anterior.

**c.2)**

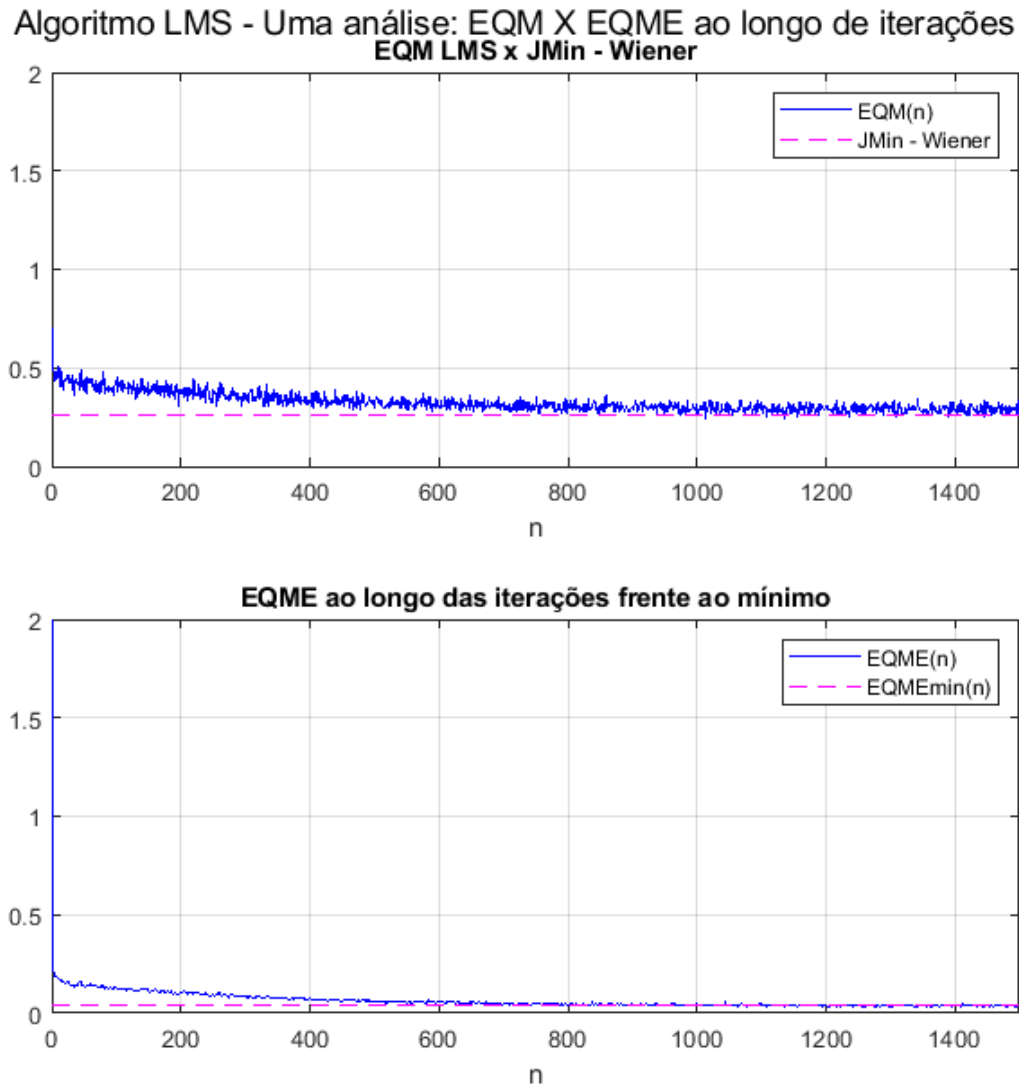


Figura 10. Algoritmo LMS - Curvas EQM e EQME ao longo das iterações.

Ademais, além das curvas geradas e plotadas anteriormente, de EQM e EQME, Calculou-se EQME teórico para  $\mu = 0,01$ , para comparação com o resultado experimental, obtendo:

$$EQME_{Teórico} = J_{min-Teórico} * \left( \frac{\mu * traço(R)}{2 - \mu * traço(R)} \right) = 0,249 * \left( \frac{0,01 * 25}{2 - 0,01 * 25} \right)$$

$$EQME_{Teórico} = 0,0355$$

$$EQME_{Experimental} = 0,0327$$

Com isso, pode notar-se que os valores se equivalem perfeitamente.

### c.3)

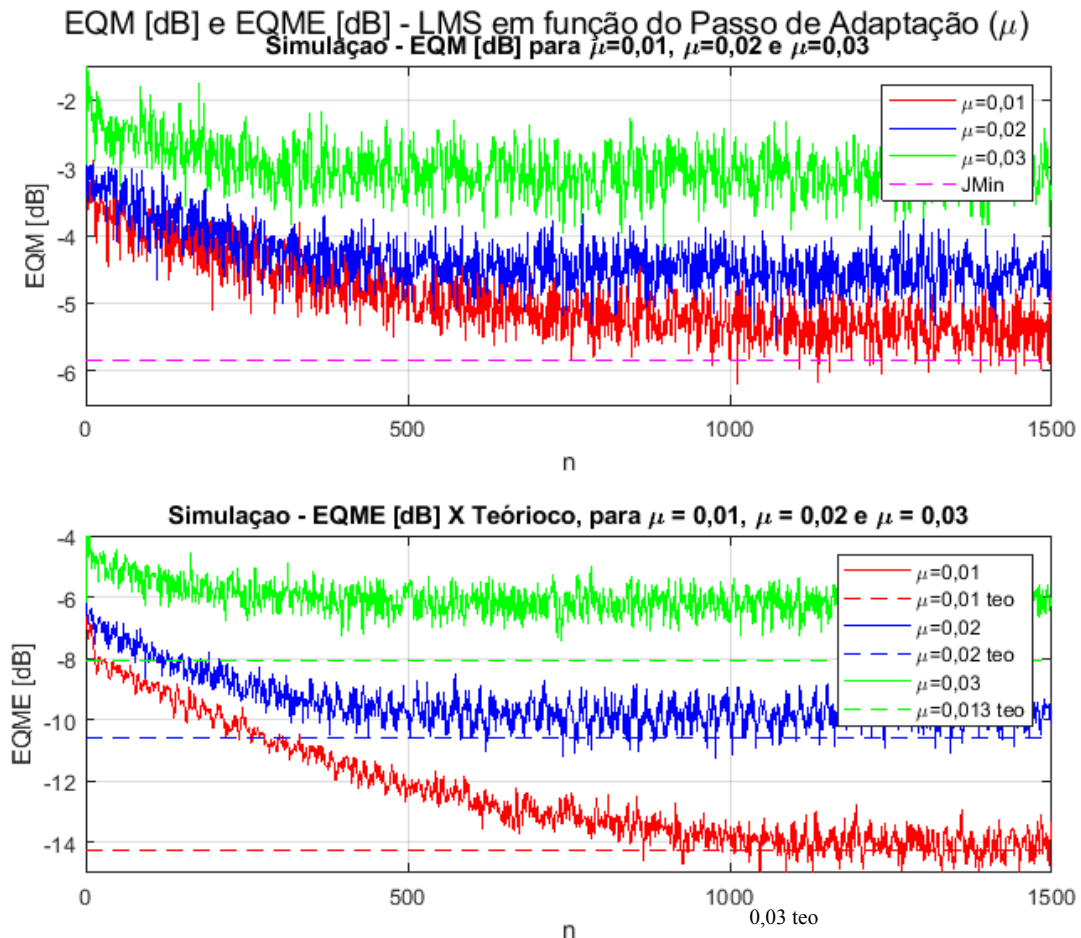


Figura 11. Algoritmo LMS - EQM [dB] e EQME [dB] em função do Passo de Adaptação ( $\mu$ ).

Comentários:

- i) De posse da fórmula do *EQME*, pode-se citar como tal erro em excesso frente a solução ótima **aumenta** com aumento do Passo de Adaptação - fato este que fica extremamente evidenciado também no gráfico;
- ii) Percebe-se que a velocidade de convergência também **aumenta** com o aumento do Passo de Adaptação ( $\mu$ ).

De posse dos fatos anteriores, que se tornam preponderantes na análise, chegamos em outro Trade-off: velocidade de convergência do método frente ao seu erro em excesso. Claramente devendo-se optar pela configuração que for mais conveniente a aplicação no momento de interesse, além de observar como outros parâmetros, como, o número de coeficientes do filtro, interferem no resultado final.