

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

VINICIUS BUENO DE MORAES

**UM PROBLEMA INVERSO PARA OBTENÇÃO DE
DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA**

Exercício Programa – Parte I

SÃO PAULO
2020

VINICIUS BUENO DE MORAES

**UM PROBLEMA INVERSO PARA OBTENÇÃO DE
DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA**

Exercício Programa – Parte I

Relatório apresentado ao Instituto de
Matemática e Estatística da Universidade
de São Paulo como parte do processo
avaliativo para a disciplina MAP3121 –
Cálculo Numérico e Aplicações, oferecida
a Escola Politécnica.

SÃO PAULO
2020

SUMÁRIO

1. Introdução	3
2. Análise do Problema e condições	4
3. Primeira Tarefa (aproximando as derivadas parciais por diferenças finitas – Euler explícito)	5
a. Item 1.a)	6
b. Item 1.b)	8
c. Item 1.c)	10
4. Segunda Tarefa (Um método implícito)	11
a. Item 1.a) Fatorização LDL^t	12
b. Item 2.b) Resolução pelo método Euler Implícito	14
c. Item 2.c) Resolução pelo método Crank-Nicolson	14
5. Conclusão	15
6. Referências bibliográficas	16
7. Apêndice (todos gráficos criados - que o código pode gerar)	17

1. Introdução

Neste relatório se apresentaram análises referentes a alguns métodos numéricos para resolução de problemas de ordem analógica, prioritariamente um de ordem direta, a equação do calor. Em suma, fenômenos físicos, químicos e/ou biológicos precisam de matemática refinada e continua para que sejam modelados e solucionados, o que na maiorias das vezes levam a equações muitos grandes e sofisticadas, que sem a ajuda da máquina, e de alguns métodos matemáticos, teriam solução inviável. Buscando potencializar e tornar útil esses mecanismos existentes nos dias atuais, por meio da implementação de rotinas criadas por importantes matemáticos dos séculos passados, os métodos numéricos, acabam se tornando uma ferramenta fundamental. Aqui se buscara analisar e solucionar um mesmo problema por diferentes caminhos, para que desta forma tente se explicitar as vantagens e desvantagens de cada um, seja em questão de tempo, se é ou não convergente e de que ordem, uso de processamento etc.

Importantes métodos de análise numérica fazem parte do escopo deste relatório, dentre eles, o de Euler Implícito e de Crank-Nicolson. Detalhes e considerações adicionais se encontraram a seguir.

Tem parte fundamental no trabalho detalhado por este relatório um código em Python 3.8.3 por onde se fez todas análises que serão citadas a seguir. Sua forma de uso encontra-se muito bem detalhada em um terceiro documento nomeado LEIAME, logo não serão detalhadas novamente aqui, bem como grande parte dos gráficos que ele pode gerar (estarão no Apêndice) e trechos das rotinas em si, buscando a preservação da objetividade e pragmatismo deste.

2. Análise do Problema e condições

Tendo o estudo em vista, a análise do comportamento da temperatura de uma barra quando submetida a uma fonte de calor, alguns parâmetros são importantes de se mencionar e estarão presentes em muitas partes deste documento. São eles, o tamanho do intervalo a se analisar e o instante de tempo em ele se dará. Eles serão ponto de partida para todas aplicações, como seleciona-los no código é mostrado no arquivo LEIAME, e não se repetira aqui. Mas para não se citar o que seus símbolos representam na modelagem, em todas passagens, listara-se abaixo os principais e seus significados.

T – Tempo de simulação (entrada via teclado pelo usuário, embora em todos casos aqui, se aplique o valor “1”);

N – Número de cortes na barra e por conseguinte o de partes a analisar (tendendo a melhorar a fidelidade com N maior), (entrada via teclado pelo usuário);

λ – Relação entre tamanho dos intervalos de análise e tempo, note que é um parâmetro muito importante (entrada via teclado pelo usuário);

Δx – Tamanho do intervalo espacial da análise, dado por:

$$\frac{1}{N}$$

Δt – Tamanho do intervalo de tempo, dado por:

$$\lambda \Delta x^2$$

M – Parâmetro importante para determinar o número de passos do sistema com a variação de N, aspecto fundamental para mensurar viabilidade de certa análise. É dado por:

$$\frac{T}{\Delta t}$$

Ademais, e de importância par, equações que modelam as condições de fronteira e iniciais, bem como a fonte de calor, serão citadas em cada um

dos exemplos que as for pertinente. Outra consideração é que o primeiro exemplo do item 1.a), não integrará este relatório no que diz a análise de caso, somente terá seus gráficos para entrada de $N = 10$ no Apêndice.

3. Primeira Tarefa (aproximando as derivadas parciais por diferenças finitas – Euler explícito).

De posse das informações anteriores, temos por objetivo a discretização da equação que descreve a distribuição de temperatura ao longo de uma barra, ponto de partida deste objeto. Sendo ela representada por:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= u_{xx}(t, x) + f(t, x) \text{ em } [0, T] \times [0, 1], \\ u(0, x) &= u_0(x) \text{ em } [0, 1] \\ u(t, 0) &= g_1(t) \text{ em } [0, T] \\ u(t, 1) &= g_2(t) \text{ em } [0, T]. \end{aligned}$$

Nosso modelo, após as devidas passagens matemáticas, via expansão de Taylor, discretizado, pode ser representado por:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta t \left(\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{\Delta x^2} + f(x_i, t_k) \right), \quad i = 1, \dots, N-1, \text{ e } k = 0, \dots, M-1$$

Com condição inicial:

$$u_i^0 = u_0(x_i), i = 0, \dots, N$$

E condições de contorno:

$$u_0^k = g_1(t_k) \text{ e } u_N^k = g_2(t_k), k = 1, \dots, M$$

Tendo erro entre simulação e real (para avaliarmos a convergência do método):

$$e_i^{k+1} = e_i^k + \Delta t \left(\frac{e_{i-1}^k - 2e_i^k + e_{i+1}^k}{\Delta x^2} + \tau_i^k \right), \quad i = 1, \dots, N-1, \text{ e } k = 0, \dots, M-1$$

E podendo ser definido seu módulo, em certo instante, que é o interesse, desta forma:

$$\|e^k\| = \max_i |e_i^k|$$

3.1 Item a)

Com todo este arcabouço teórico, desenvolveu-se uma rotina para simulação do método, primeiramente usando as seguintes condições:

Fonte dada pela expressão:

$$f(t, x) = 10\cos(10t)x^2(1-x)^2 - (1 + \sin(10t))(12x^2 - 12x + 2)$$

Com condição inicial $x^2(1-x)^2$ e de fronteira nula. Fazendo-se o teste para diferentes valores de N, ou seja, variado o tamanho dos intervalos (refinamento), sob λ com dois valores distintos, pode-se notar, avaliando o erro, e os gráficos, que quanto menor for o intervalo, maior será a precisão, diminuindo por consequência direta o erro entre a solução encontrada pelo método e a exata, dada neste caso por $(1 + \sin(10t))x^2(1-x)^2$. Todas combinações solicitadas pelo enunciado foram realizadas, e seus valores de erro calculados, estando os resultados em Apêndice. Abaixo o gráfico para $N = 10$ e $\lambda = 0,5$, para que ao menos possa se avaliar a evolução da solução com o tempo e sua faixa de valores (u) a cada posição.

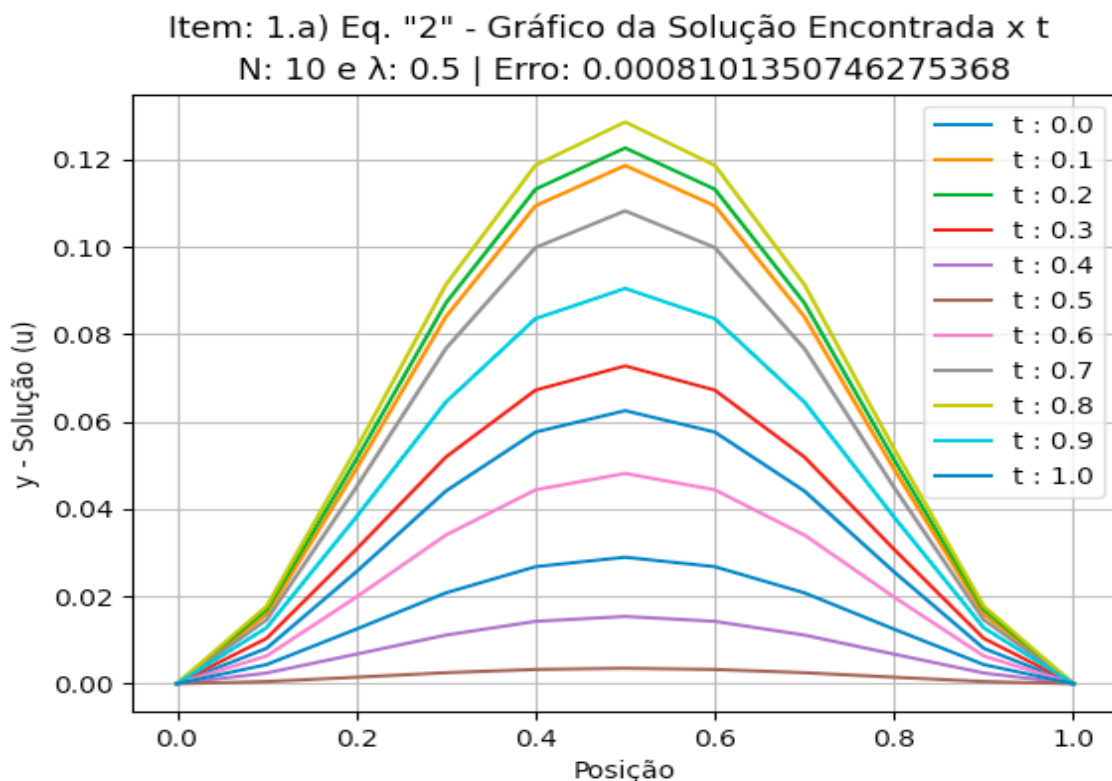


Figura 1. Simulação da Tarefa 1 - Item a) - $N = 10$ e $\lambda = 0,5$

Para melhor entender-se o fator de redução do erro, com a mudança do tamanho do intervalo, fez-se a tabela a seguir, onde ele é mostrado para as diferentes combinações.

N	Erro ($\lambda = 0,25$)	Erro ($\lambda = 0,5$)	Erro ($\lambda = 0,51$)	Fator de Redução do erro	
10	$1,692e-3$	$8,101e-4$	$7,951e-4$	$\lambda = 0,25 = 0,25$	#####
20	$4,270e-4$	$2,101e-4$	44	$\lambda = 0,5 = 0,25$	$\lambda = 0,25 = 0,25$
40	$1,071e-4$	$5,315e-5$	$7,700e39$	$\lambda = 0,25 = 0,25$	$\lambda = 0,5 = 0,25$
80	$2,678e-5$	$1,334e-5$	$1,572e198$	$\lambda = 0,5 = 0,25$	$\lambda = 0,25 = 0,25$
160	$6,697e-6$	$3,338e-6$	#	$\lambda = 0,25 = 0,25$	$\lambda = 0,5 = 0,25$
320	$1,674e-6$	$8,348e-7$	#	$\lambda = 0,5 = 0,25$	#####

Figura 2. Tabela com os valores do erro, relativa à Tarefa 1 - Item a)

Assim, após se calcular a cada iteração diferente, pode obter o fator de redução esperado por refinamento de aproximadamente 0,25.

Ao analisar a rotina do método pode-se facilmente perceber que o número de passos que será dado para certo N, depende fundamente de dois parâmetros, já detalhados eles no Tópico 2 deste documento “*Análise do problema e condições*”, M e N. Ele será quantas vezes o vetor u_{new} se renova ao vetor u_{old} , ou seja, o próprio valor de M. Sendo assim, tem-se $\frac{640^2}{\lambda}$, que é igual a 1.638.400 passos se $\lambda = 0,25$ e 819.200 se $\lambda = 0,5$.

Se $N = 1280$, então serão necessários 6.553.600 passos se $\lambda = 0,25$ e 3.276.800 se $\lambda = 0,5$, percebendo assim a ineficiência do método para valores muito grandes de N, fato este que será potencialmente melhorado na Segunda Tarefa deste documento, fazendo-se uso de rotinas que convergem mais rapidamente para solução.

Fato importante notou-se também ao transgredir a condição de convergência do método, relação entre Δx e Δt , o erro se torna instável e extremamente grande para alguns valores de N, como 160, além dos gráficos ficarem degenerados, como na imagem que se segue.

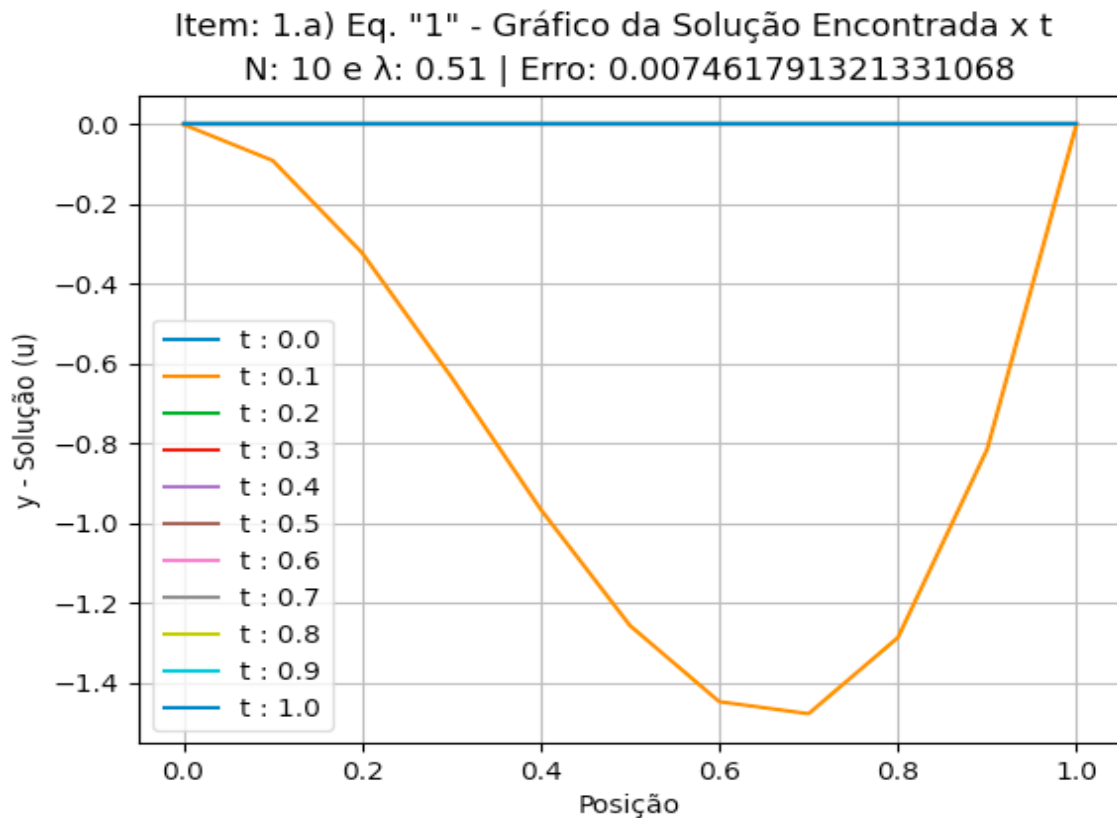


Figura 3. Simulação da Tarefa 1 - Item a) - N = 10 e $\lambda = 0,51$ – Erro muito grande

3.2 Item b)

Partindo-se da solução exata $e^{t-x} \cos(5tx)$ com o mesmo método e combinações do “Item a)” foi solicitado que se encontra-se as condições de contorno e a equação que modelassem a fonte, para o dado exemplo. Por simples substituição nas equações que modelam o problema, chegou-se a:

Fonte:

$$f(t, x) = 5e^{t-x}(5t^2 \cos(5tx) - 2t \sin(5tx) - x \sin(5tx))$$

Condição inicial $u_0(x) = e^{-x}$ e condições de fronteira $g_1(t) = e^t$ e $g_2(t) = e^{t-1} \cos(5t)$.

A seguir o gráfico com N = 10 e $\lambda = 0,25$, demais testes do mesmo item encontram-se anexados no apêndice.

Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 10 e λ : 0.25 | Erro: 0.06769565225975493

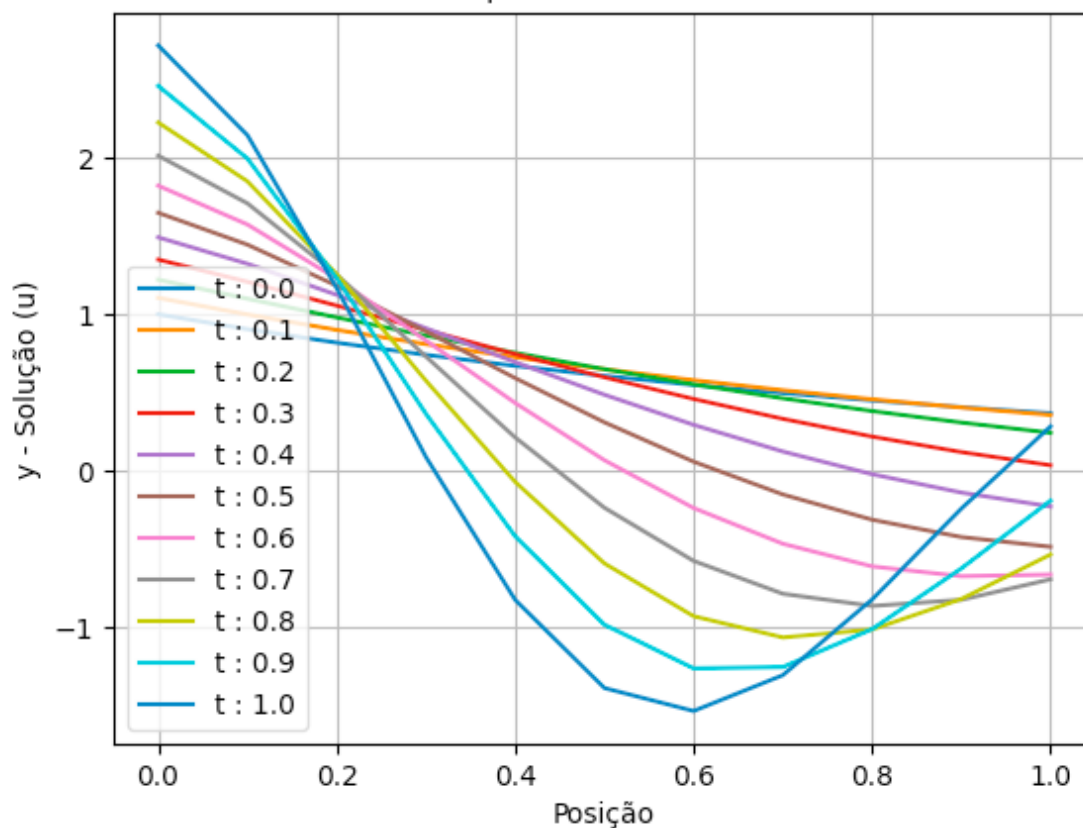


Figura 4. Simulação da Tarefa 1 - Item b) - N = 10 e $\lambda = 0,25$

Para melhor entender-se o fator de redução do erro, com a mudança do tamanho do intervalo, fez-se a tabela a seguir, onde ele é mostrado para as diferentes combinações, sendo em todas, aproximadamente 0,25.

N	Erro ($\lambda = 0,25$)	Erro ($\lambda = 0,5$)	Erro ($\lambda = 0,51$)	Fator de Redução do erro	
10	6,791e-2	8,582e-2	8,634e-2	$\lambda = 0,25 = 0,25$	
20	1,697e-2	2,145e-2	7,610	$\lambda = 0,5 = 0,25$	$\lambda = 0,25 = 0,25$
40	4,223e-3	5,321e-3	7,902e+39	$\lambda = 0,25 = 0,25$	$\lambda = 0,5 = 0,25$
80	1,052e-3	1,331e-3	7,214e+198	$\lambda = 0,5 = 0,25$	$\lambda = 0,25 = 0,25$
160	2,645e-4	3,345e-4	nan	$\lambda = 0,25 = 0,25$	$\lambda = 0,5 = 0,25$
320	6,605e-5	8,362e-5	nan	$\lambda = 0,5 = 0,25$	

Figura 5. Tabela com os valores do erro, relativa à Tarefa 1 - Item b)

Por se usar o mesmo método que no item anterior, tem-se que o número de passos se permanece, assim como o comportamento do erro para λ maiores que 0,5, fatores já explicados anteriormente. Abaixo gráfico para $N = 10$ e $\lambda = 0,51$, evidenciando assim a disparidade do erro e degeneração gráfica.

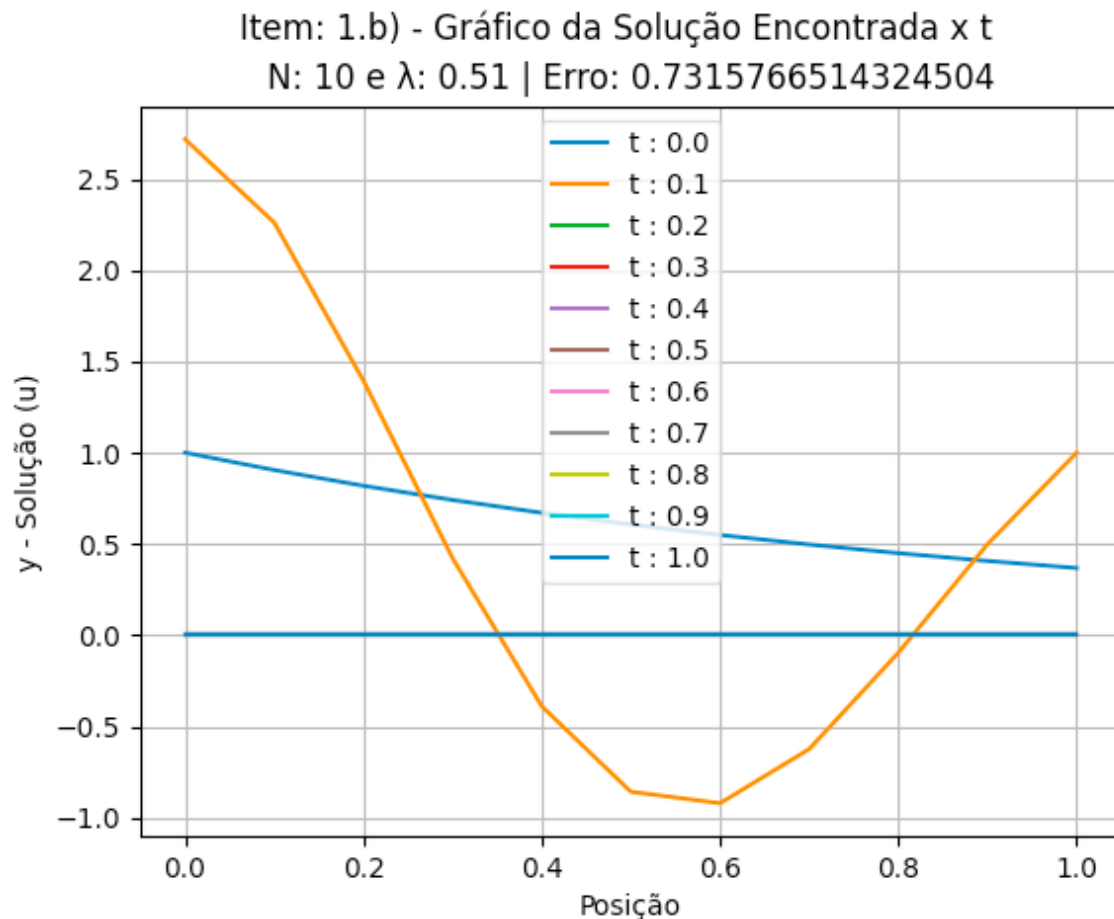


Figura 5. Simulação da Tarefa 1 - Item b) - $N = 10$ e $\lambda = 0,51$ – Erro muito grande

3.3 Item c)

Para o mesmo valor de $T = 1$ e método se aplicou uma fonte pontual, mais precisamente em um ponto $p = 0,25$ do domínio com condições inicial e de fronteiras nula.

A fonte pontual foi definida ao longo do tempo por $r(t) = 10000(1 - 2t^2)$ e o ponto de aplicação sendo $g(h) = \frac{1}{h}$ se $p - \frac{h}{2} \leq x \leq$

$p + \frac{h}{2}$, e $g(h) = 0$ caso contrário. Assim, por fim, tem-se $f(t, x) = r(t)g_h(x)$, com $h = \Delta x$.

Assim definiu-se sua solução numericamente. Abaixo gráfico da solução para $N = 10$ e $\lambda = 0,25$. Perceba que neste exemplo não poderá se fazer análise do erro por não se ter a solução exata. Gráfico das demais simulações encontram-se no Apêndice.

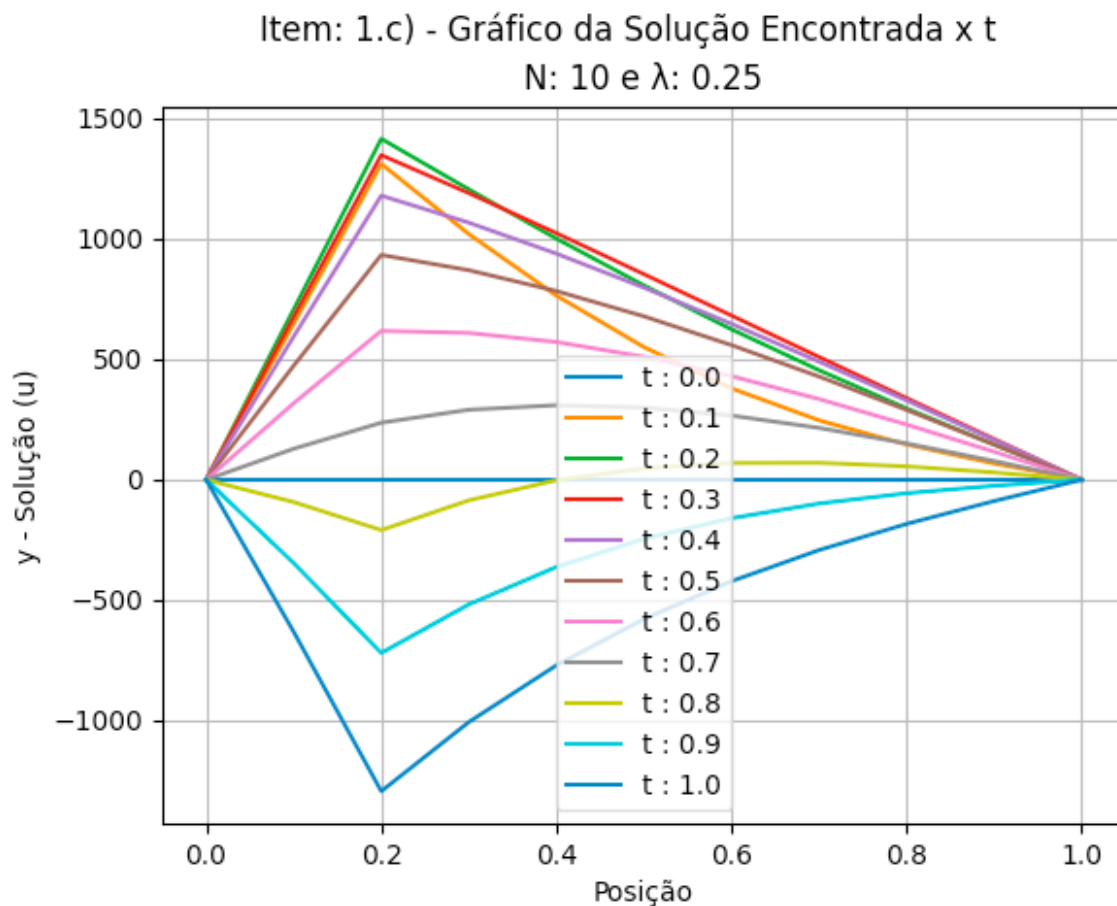


Figura 6. Simulação da Tarefa 1 - Item c) - $N = 10$ e $\lambda = 0,25$

4. Segunda Tarefa (Um método implícito)

Nesta etapa do trabalho buscara-se através de métodos mais eficientes a resolução do mesmo problema, visto que para malhas mais finas o número de passos se torna muito grande, inviabilizando o processo. As rotinas aqui, embora mais eficientes, são originadas a partir de manipulações da mesma equação diferencial que definiu o caso anterior, então ira-se logo para a

definição dos métodos. Aqui definiremos dois, sendo eles o de Euler implícito, que pode ser dado por

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \lambda(u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}) + \Delta t f(x_i, t_{k+1}), \quad i = 1, \dots, N-1, \text{ e } k = 0, \dots, M-1$$

com as mesmas notações anteriores. Nota-se que este sistema pode ser representado matricialmente da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{k+1} \\ u_{N-1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^k + \Delta t f_1^{k+1} + \lambda g_1(t^{k+1}) \\ u_2^k + \Delta t f_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^k + \Delta t f_{N-2}^{k+1} \\ u_{N-1}^k + \Delta t f_{N-1}^{k+1} + \lambda g_2(t^{k+1}) \end{bmatrix}$$

em vista destas considerações, percebe-se a impossibilidade de resolver o sistema diretamente, logo se fara necessária a fatorização LDL^t da matriz a esquerda. Para isto criou-se uma rotina que será apresentada no item a) desta Tarefa. Em paralelo, e com grandes similaridades também analisaremos como se comporta a solução quando realizado através do método de Crank-Nicolson, sendo ele da forma:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\lambda}{2} ((u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}) + (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)) + \frac{\Delta t}{2} (f(x_i, t_k) + f(x_i, t_{k+1}))$$

4.1 Item a) - Fatorização LDL^t

Neste item da segunda tarefa se elaborou uma rotina que para dada matriz de entrada A, se obtivesse as matrizes L, D e L^t , necessária para seguinte resolução do sistema, segue sua linha em detalhe abaixo:

```
N = int(input("Entre com o valor de N: "))
λ = float(input("Entre com o valor de λ: "))

#Criação dos elementos da matriz "A"
AD = []
SD = []
i = 0
while i < N:
    AD.append(1+2*λ)
    i = i + 1
j = 0
while j < N-1:
    SD.append(-λ)
```

$$j = j + 1$$

```

B = np.diagflat(AD)
C = np.diagflat(SD, k=1)
E = np.diagflat(SD, k=-1)
A = B+C+E

#Criacao do shape das matrizes L e D
L = np.zeros((N, N))
D = np.zeros((N, 1))

#Decomposicao LDLt
a = 0
b = 0
c = 0
d = 0
for i in range(N):
    for j in range(i):
        a = (L[i][j])**2*D[j]
        b = a + b
    D[i] = A[i][i] - b
    b = 0
    for j in range(i, N):
        for k in range(i):
            c = L[j][k]*L[i][k]*D[k]
            d = c + d
        L[j][i] = (A[j][i]-d)/D[i]
        d = 0

#Reshape final das matrizes L e D (L, DD, L_T)
DD = np.diagflat(D)
L_T = L.T

```

A rotina foi testada e sua eficiência comprovada, segue um exemplo de decomposição $A = LDL^t$ realizada:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.333 & 1 & 0 \\ 0 & -0.375 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.667 & 0 \\ 0 & 0 & 2.625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0.333 & 0 \\ 0 & 1 & -0.375 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De posse desta rotina, criou-se outra para resolução do sistema $Ax = LDL^t x = b$ e que será muito útil para realização dos próximos itens, no qual adentra-se no programa, dois vetores, simulando a diagonal e a subdiagonal da matriz A , e como resultado é exibido ao usuário o vetor L , o vetor D , e o conjunto solução (X).

4.2 Item b) – Resolução pelo método Euler Implícito

Para este método, pode-se averiguar analisando seu número de passos em relação a quantidade de divisões e por conseguinte, tamanho do intervalo espacial, que ele é extremamente vantajoso em relação ao anterior. Para $N = 640$, existiram 640 passos e para $N = 1280$, serão 1280 passos, visto que N e M são iguais neste caso.

4.3 Item c) – Resolução pelo método Crank-Nicolson

Para o método de Crank-Nicolson o número de passos é igual ao método anterior (Euler Implícito), mas este converge mais rápido, uma vez que suas duas dimensões convergem em ordem 2.

5. Conclusão

Pode-se notar que os métodos numéricos manipulados neste documento são muito úteis para diversas aplicações nos mais vastos campos, sejam eles industriais ou acadêmicos. Ademais, percebeu que diferentes níveis de precisão e velocidade podem se apresentar, devendo o usuário escolher de acordo com sua necessidade, e principalmente, capacidade de processamento disponível.

6 . Referências Bibliográficas

https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/pyplots/text_commands.html < acesso as 16:31 do dia 20/04/2020 >

<https://cmdlinetips.com/2018/01/12-basic-commands-with-numpy-array/> < acesso as 17:34 do dia 20/04/2020 >

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/basic.html> < acesso as 17:50 do dia 20/04/2020 >

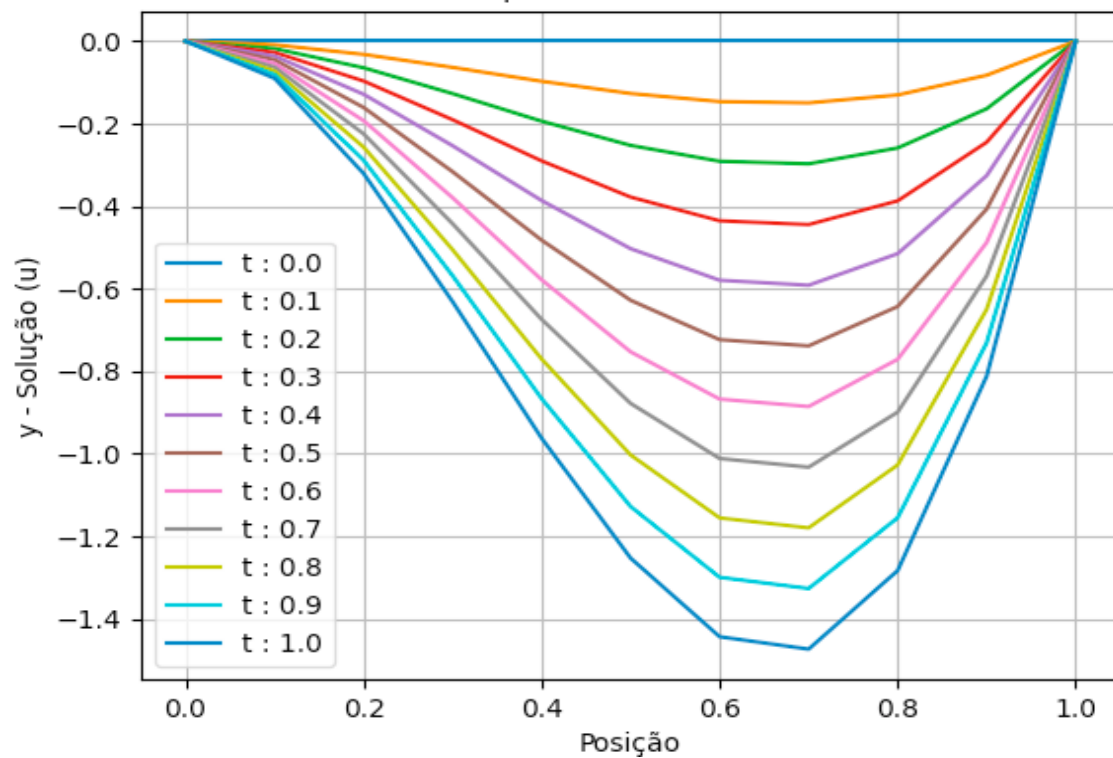
<https://cs231n.github.io/python-numpy-tutorial/> < acesso as 14:42 do dia 21/04/2020 >

<https://numpy.org/devdocs/user/quickstart.html> < acesso as 18:41 do dia 23/04/2020 >

https://s3.amazonaws.com/assets.datacamp.com/blog_assets/Numpy_Python_Cheat_Sheet.pdf < acesso as 11:34 do dia 18/05/2020 >

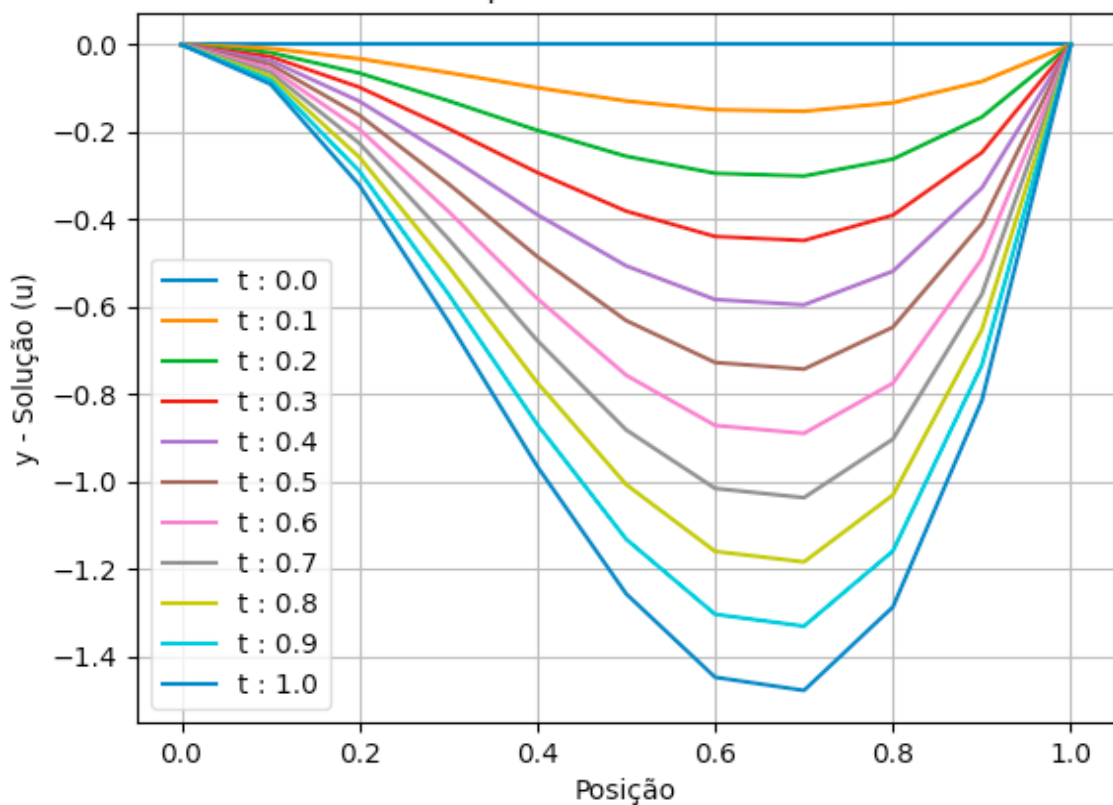
7. Apêndice – Tarefa 1 – Item a)

Item: 1.a) Eq. "1" - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 10 e λ : 0.25 | Erro: 0.003674870451642498



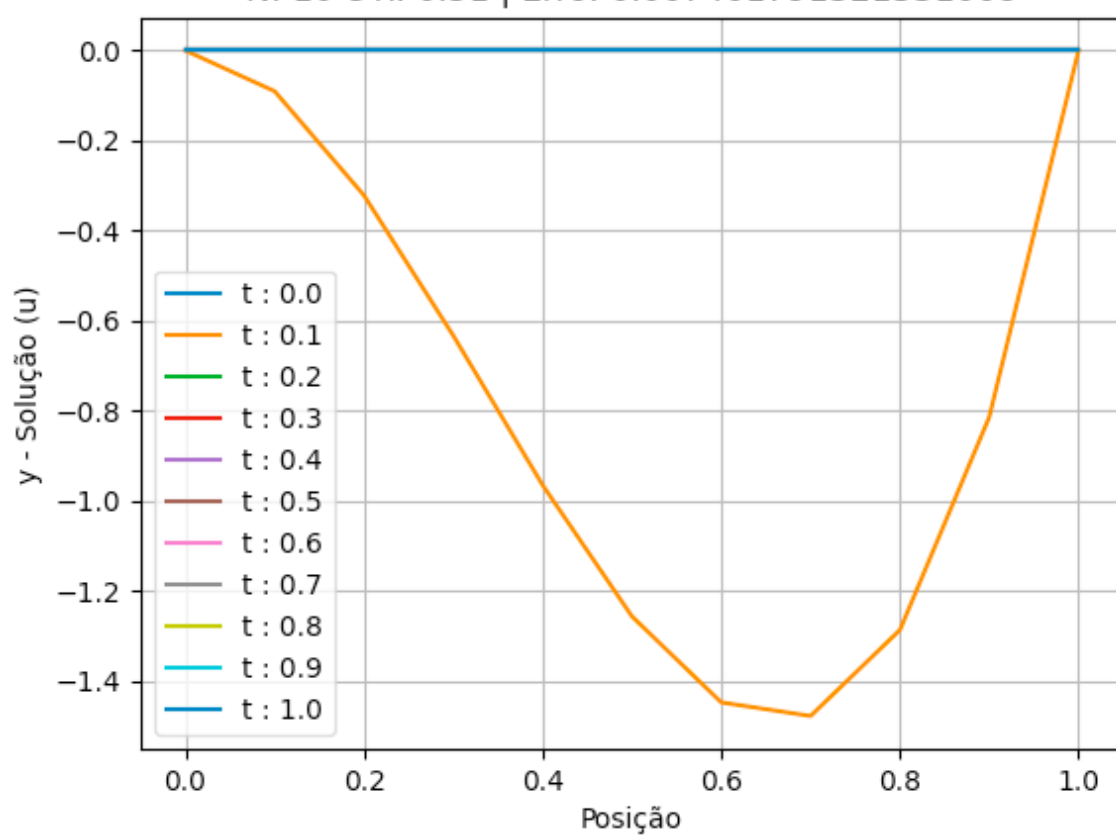
17

Item: 1.a) Eq. "1" - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 10 e λ : 0.5 | Erro: 0.007349771409290939



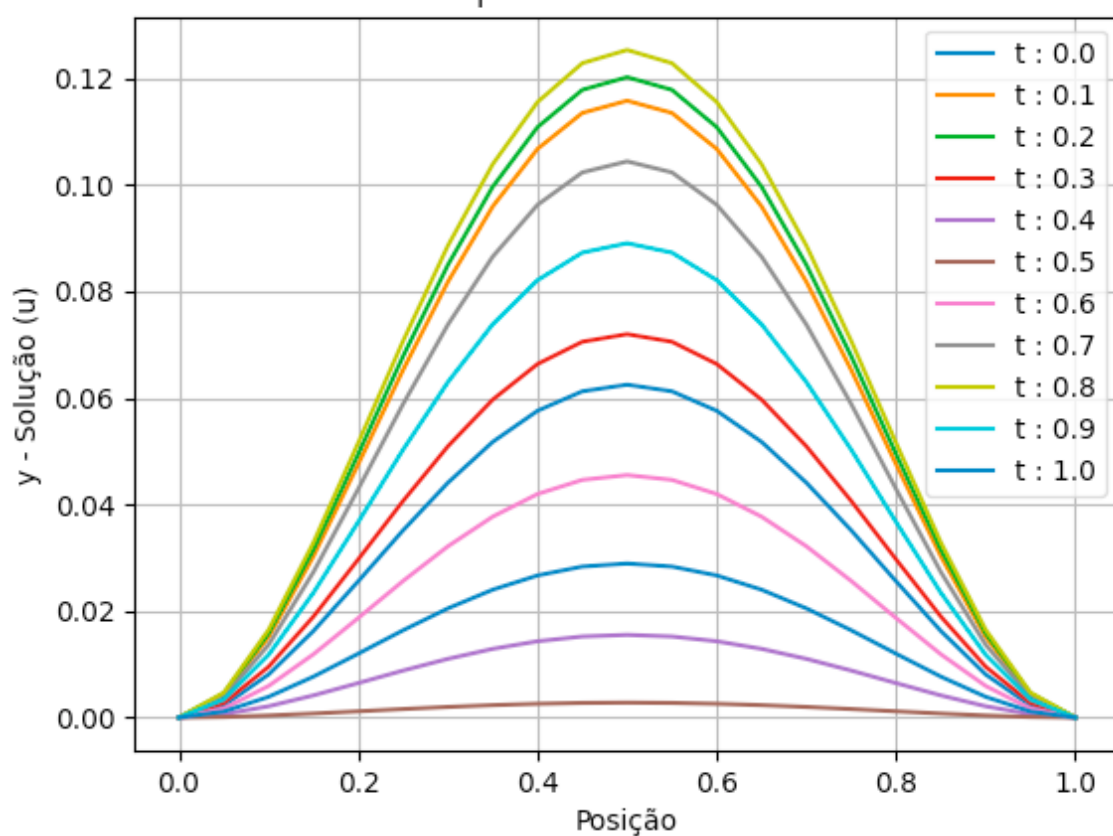
Item: 1.a) Eq. "1" - Gráfico da Solução Encontrada)

N: 10 e λ : 0.51 | Erro: 0.007461791321331068

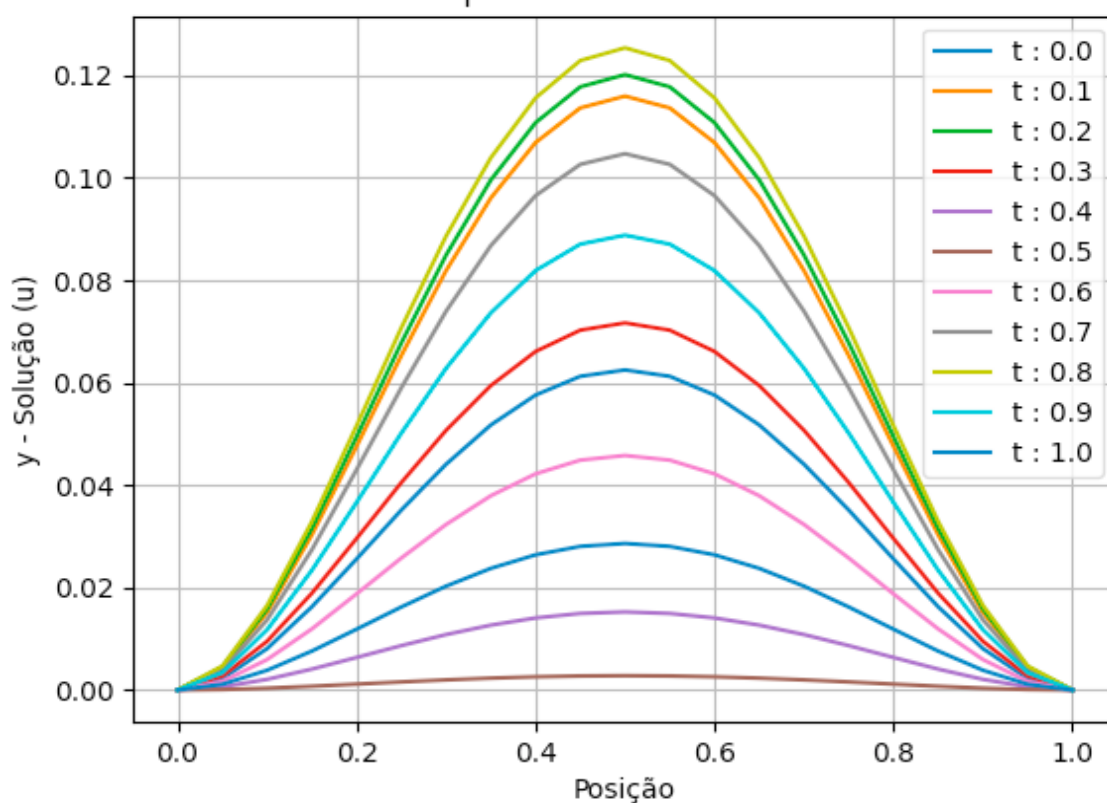


Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t

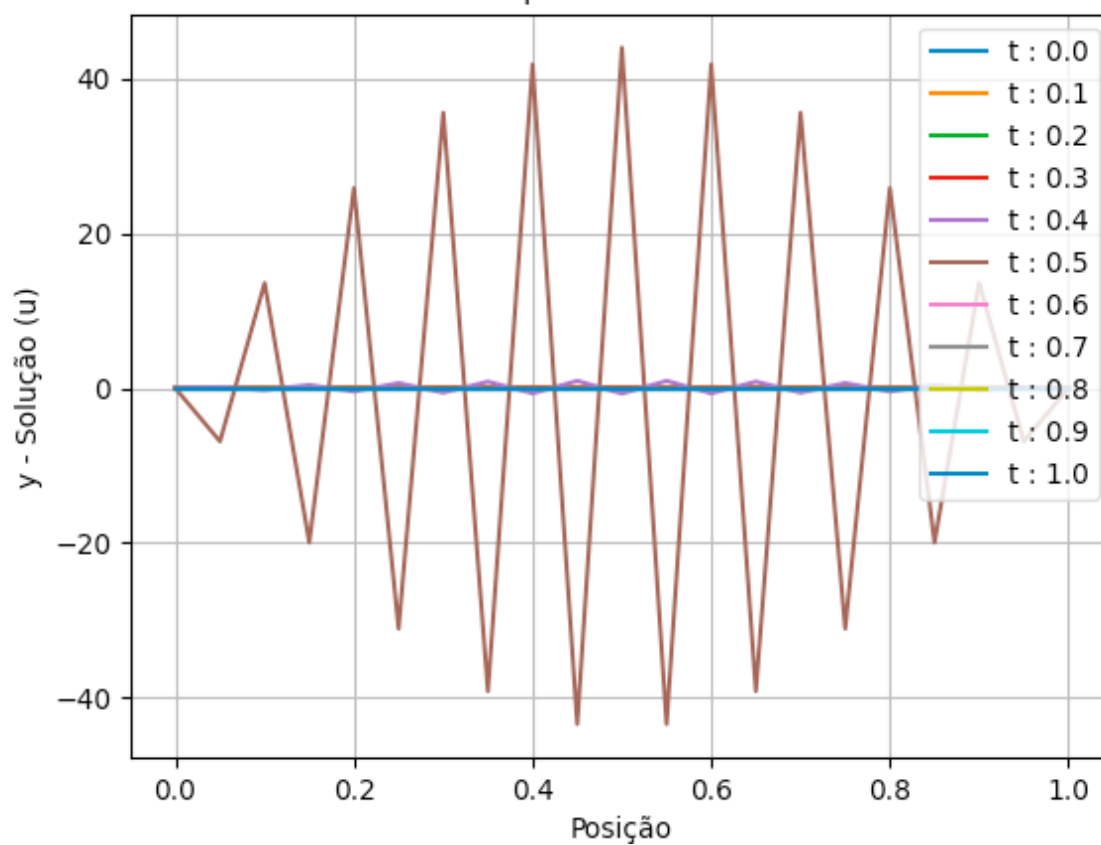
N: 20 e λ : 0.25 | Erro: 0.00042728068732774543



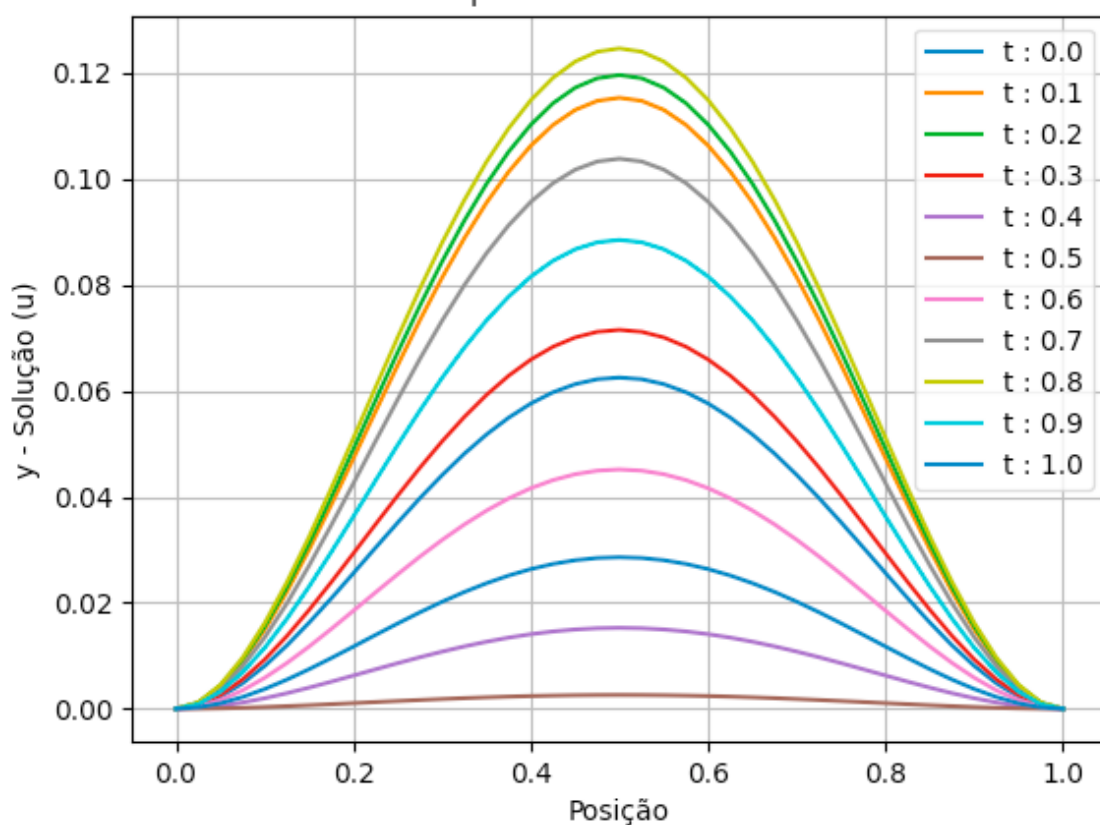
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 20 e λ : 0.5 | Erro: 0.00021066676735148615



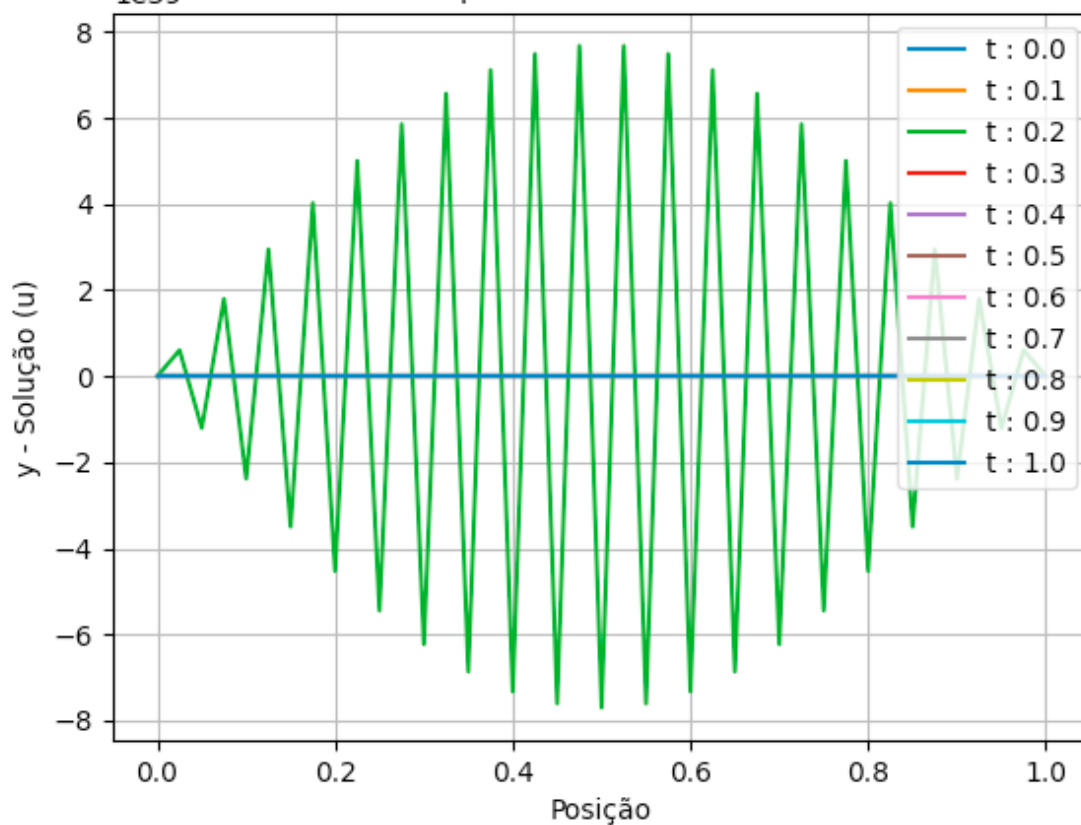
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 20 e λ : 0.51 | Erro: 44.00165627207943



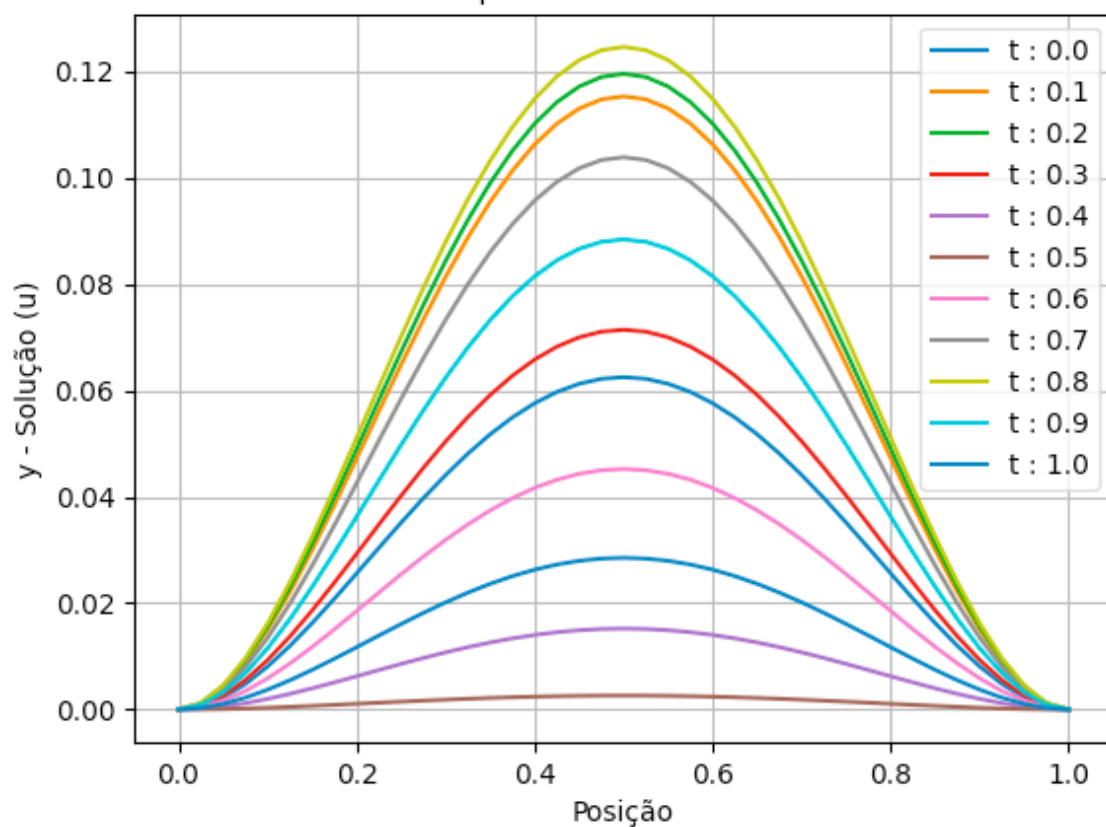
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 40 e λ : 0.25 | Erro: 0.00010707444828347498



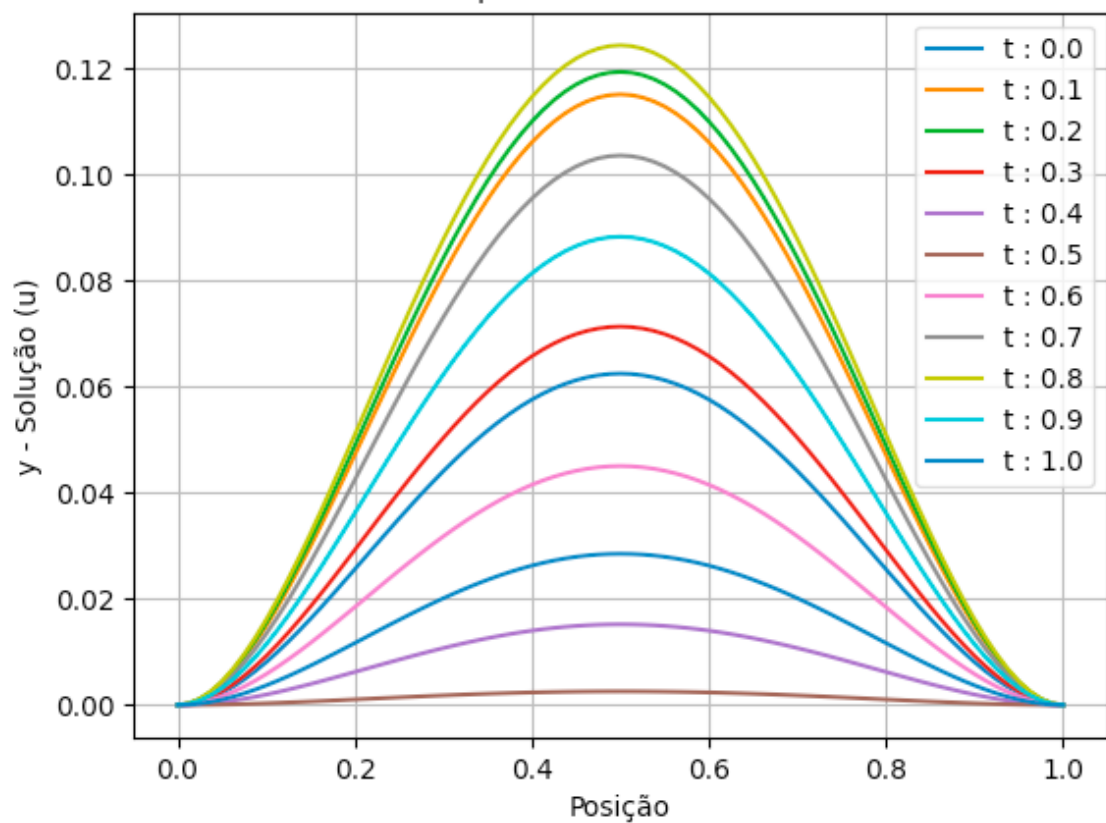
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 $1e39$ N: 40 e λ : 0.51 | Erro: 7.700141589594972e+39



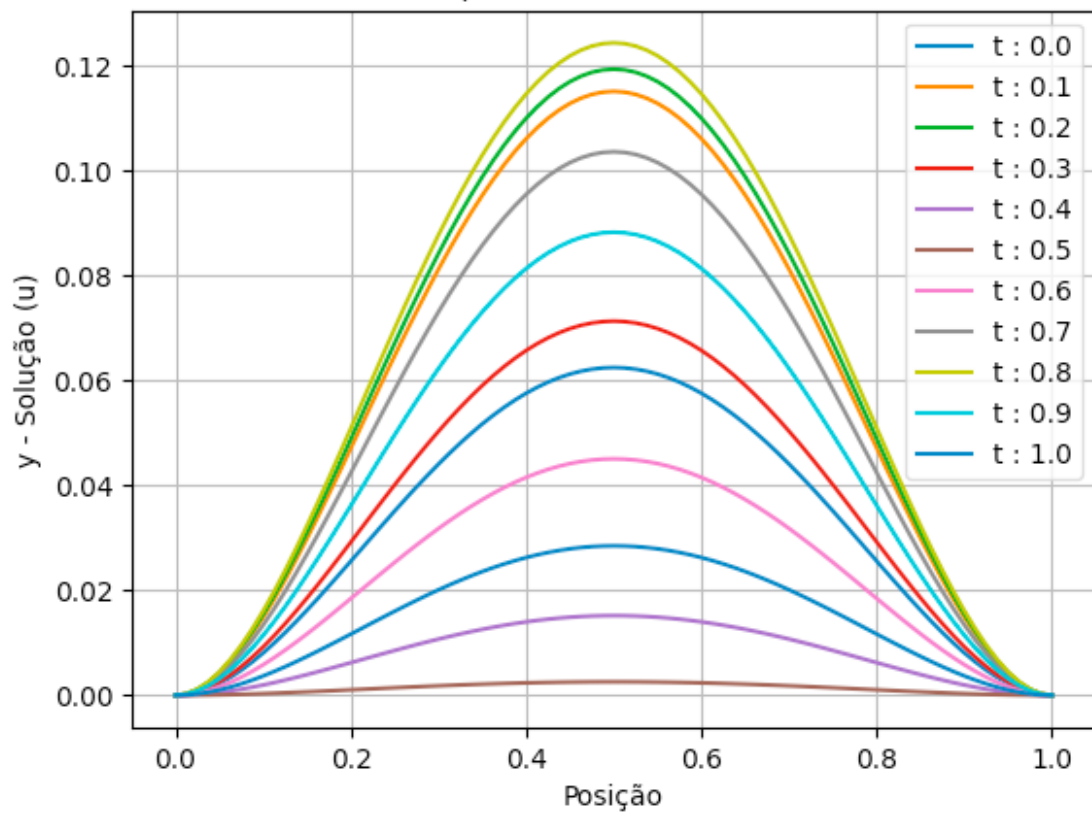
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 40 e λ : 0.5 | Erro: 5.315395016753689e-05



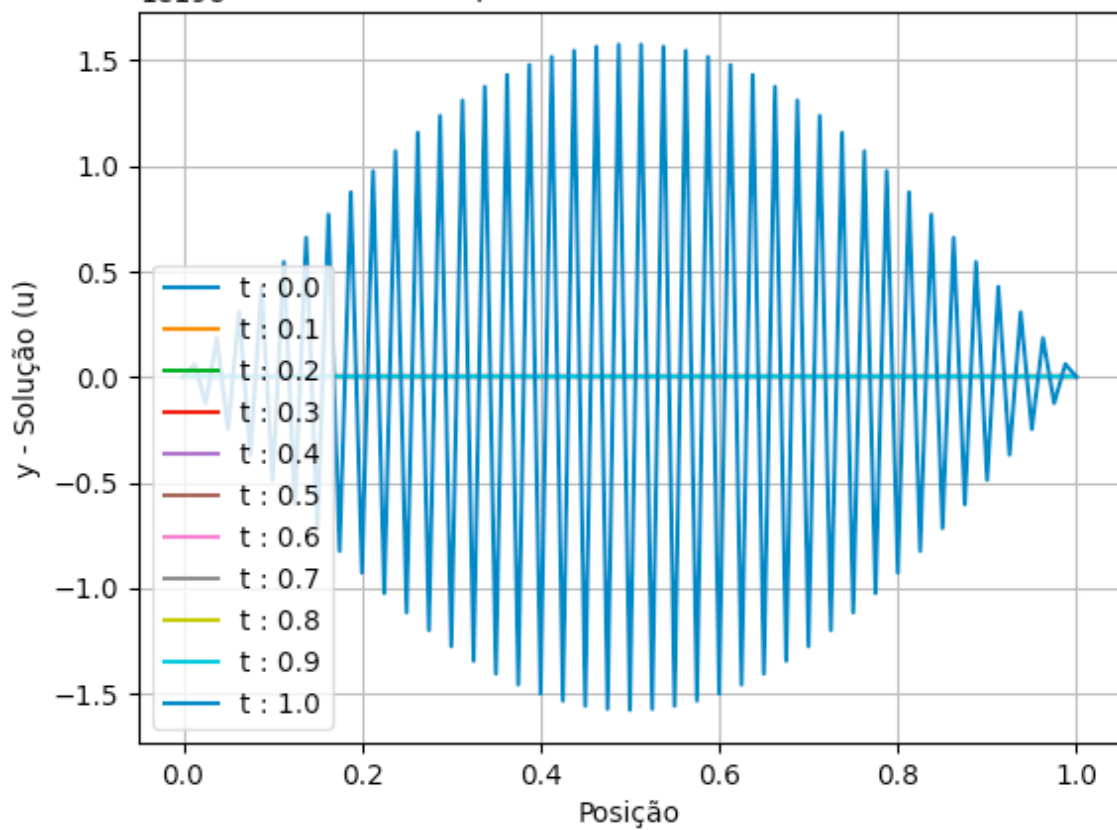
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 80 e λ : 0.25 | Erro: 2.6785829874420575e-05



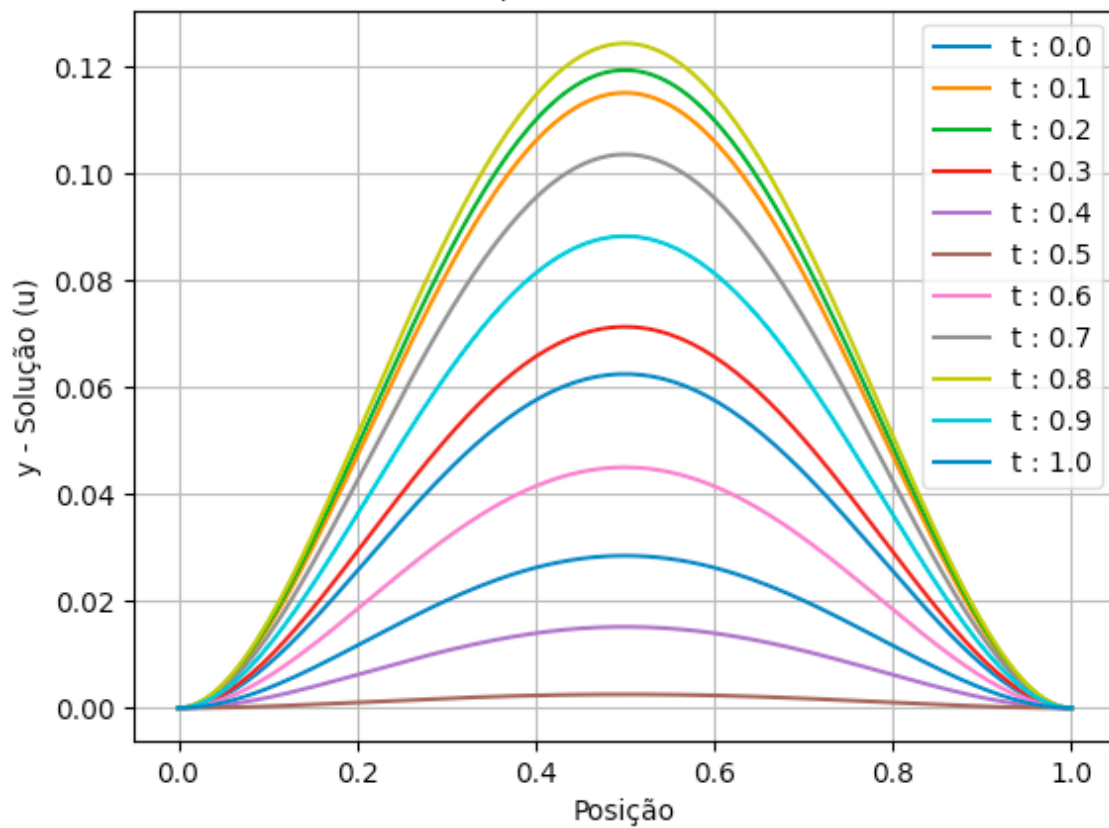
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 80 e λ : 0.5 | Erro: 1.3347646486703071e-05



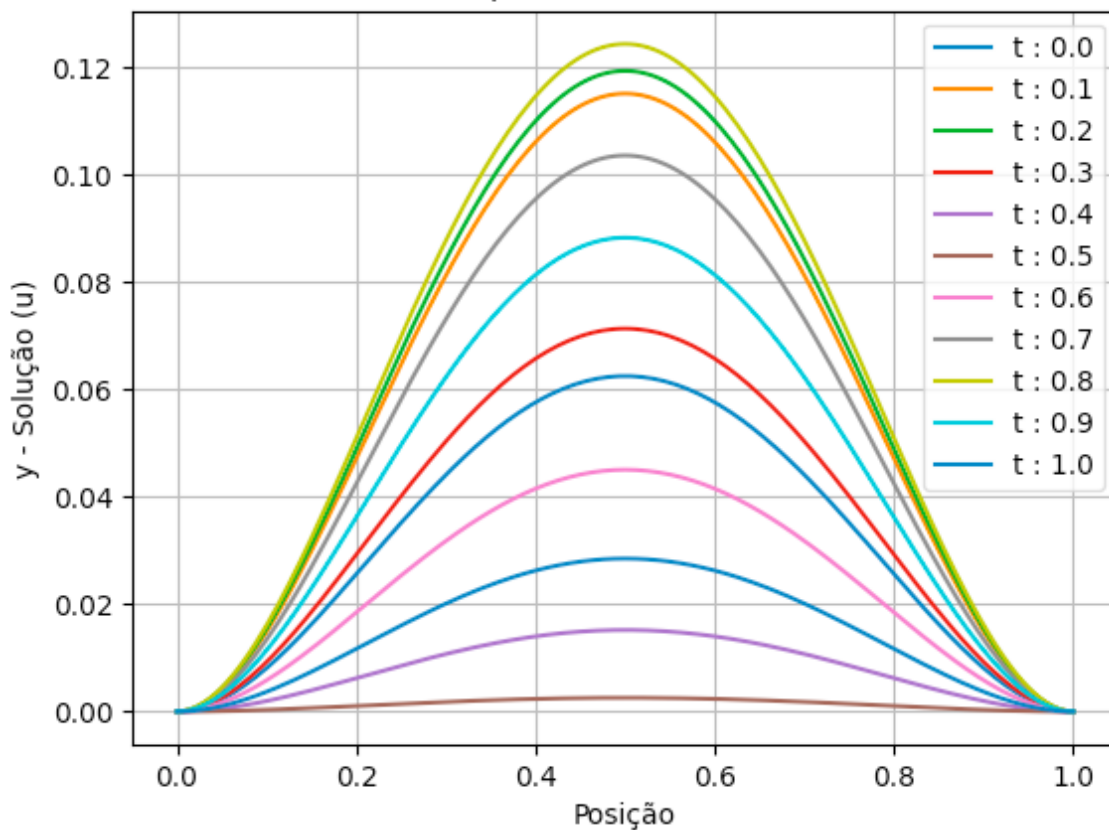
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 80 e λ : 0.51 | Erro: 1.577142560755126e+198



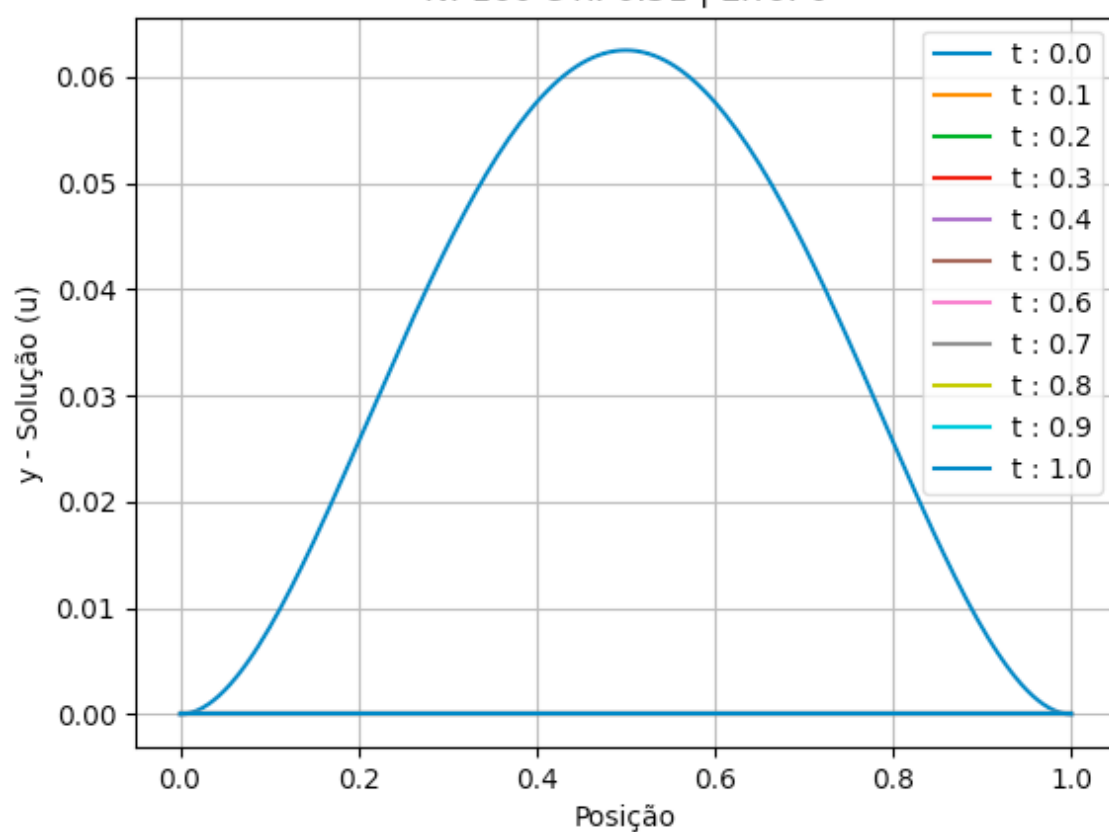
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 160 e λ : 0.25 | Erro: 6.697588378127423e-06



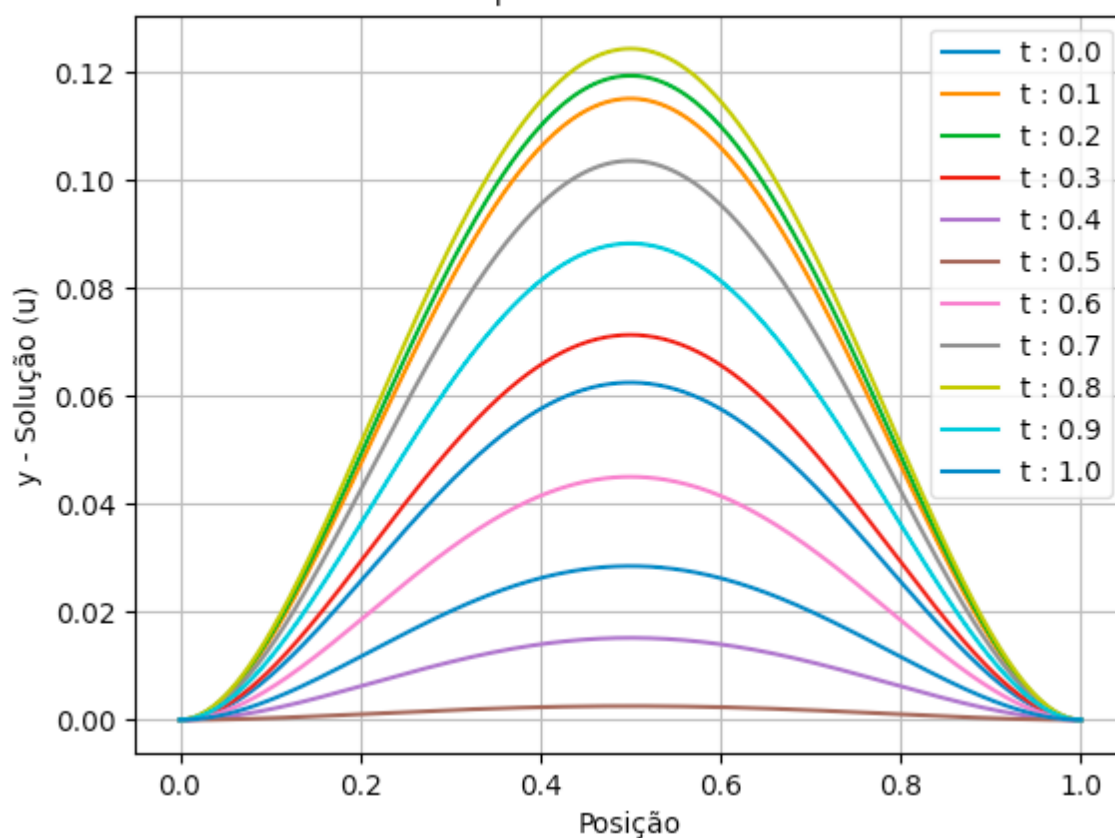
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 160 e λ : 0.5 | Erro: 3.338753175197856e-06



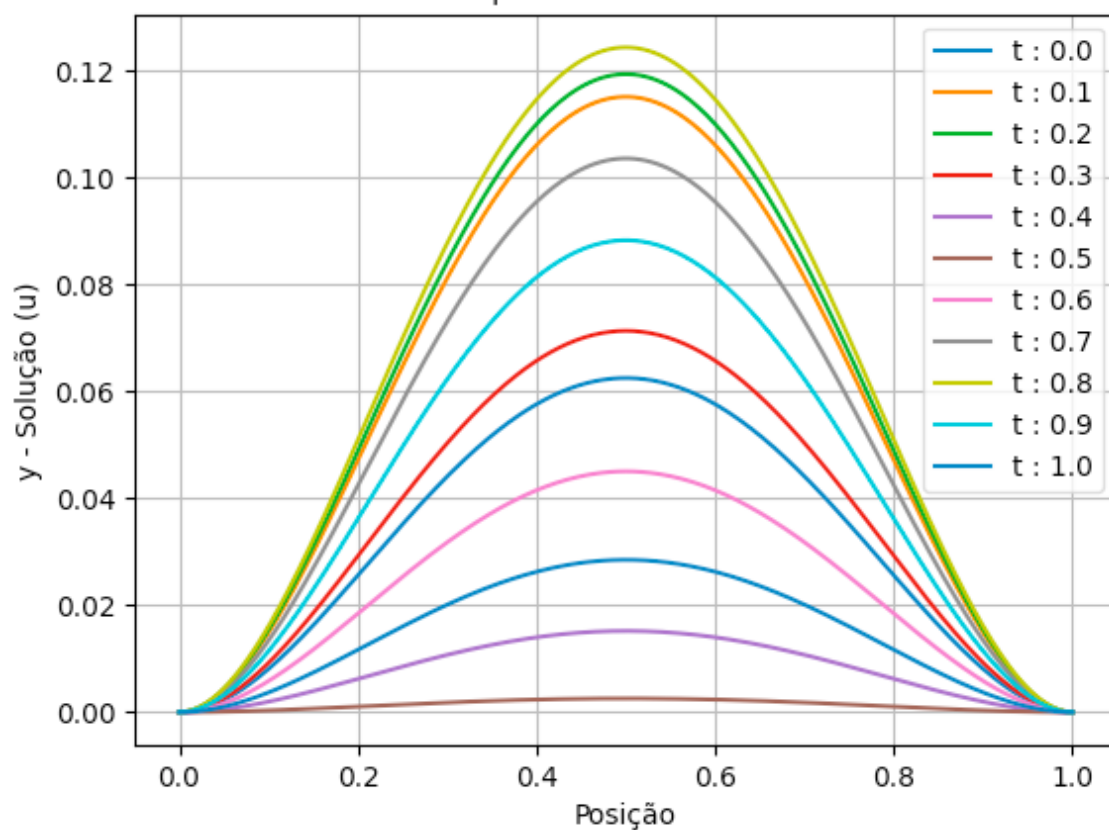
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 160 e λ : 0.51 | Erro: 0



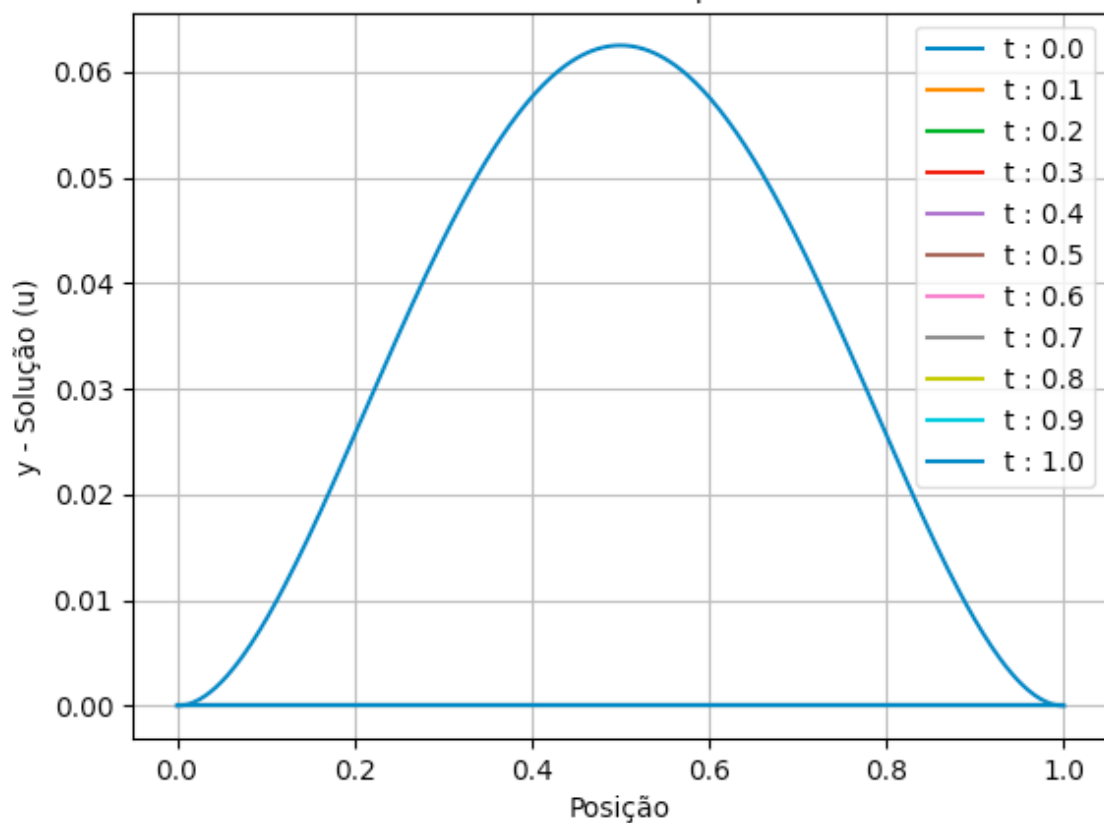
Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 320 e λ : 0.25 | Erro: 1.6744617815714347e-06



Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 320 e λ : 0.5 | Erro: 8.348137689271479e-07

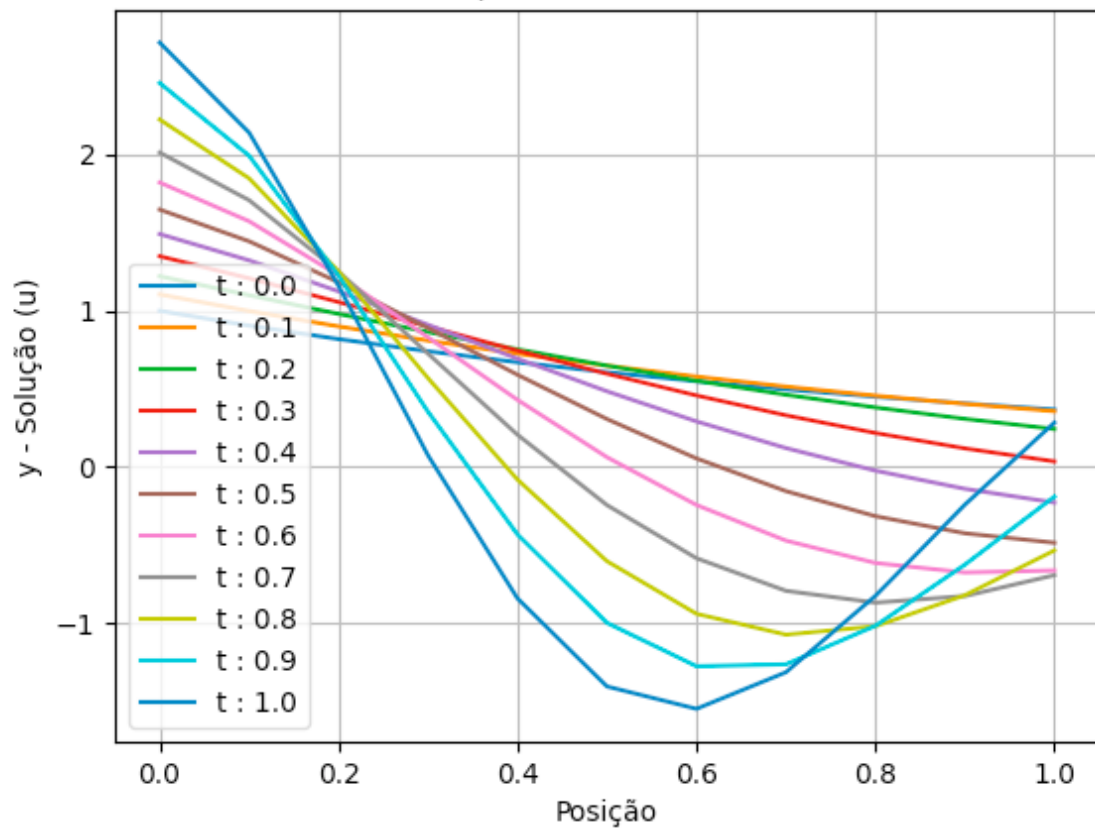


Item: 1.a) Eq. "2" - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 320 e λ : 0.51 | Erro: 0

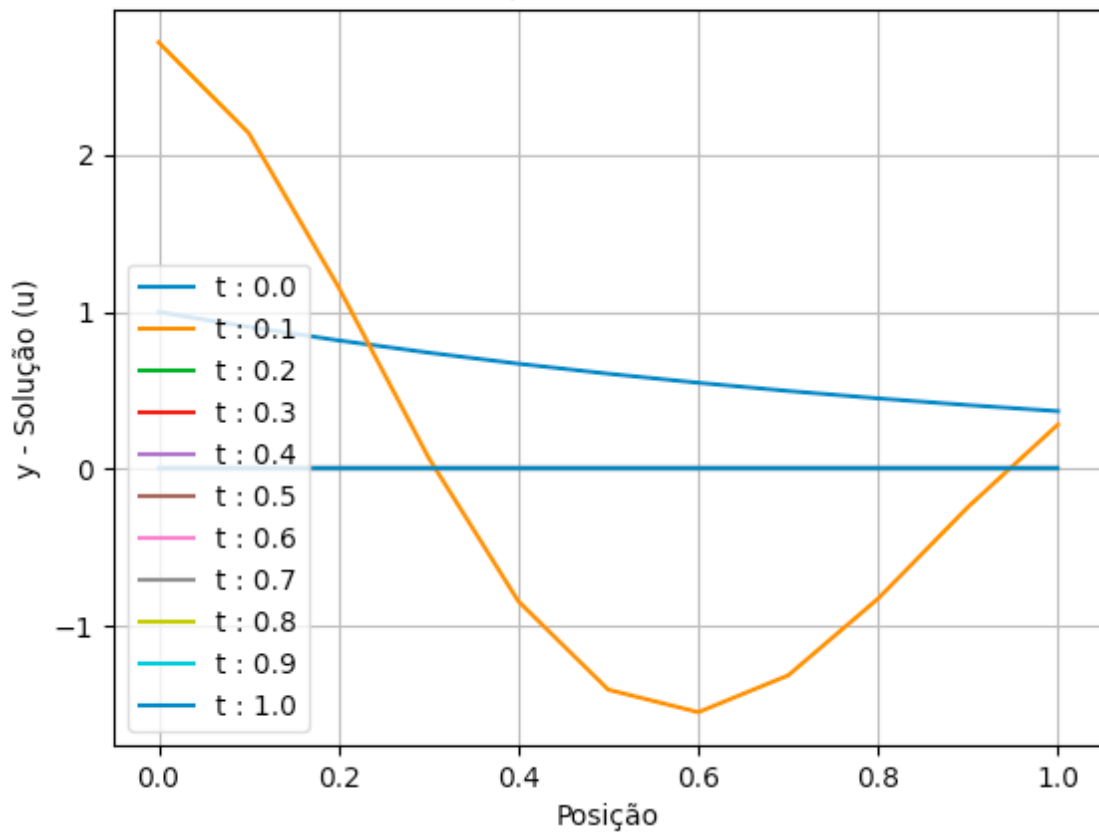


7. Apêndice – Tarefa 1 – Item b)

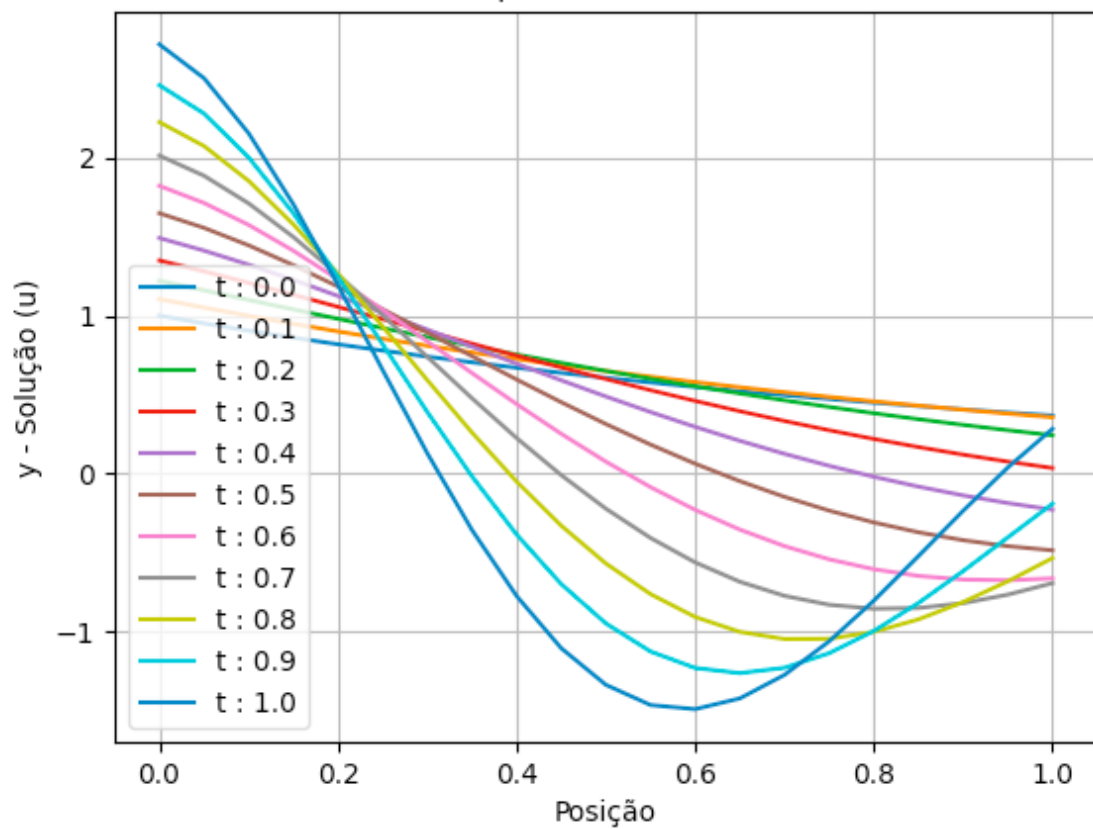
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 10 e λ : 0.5 | Erro: 0.08581083226460118



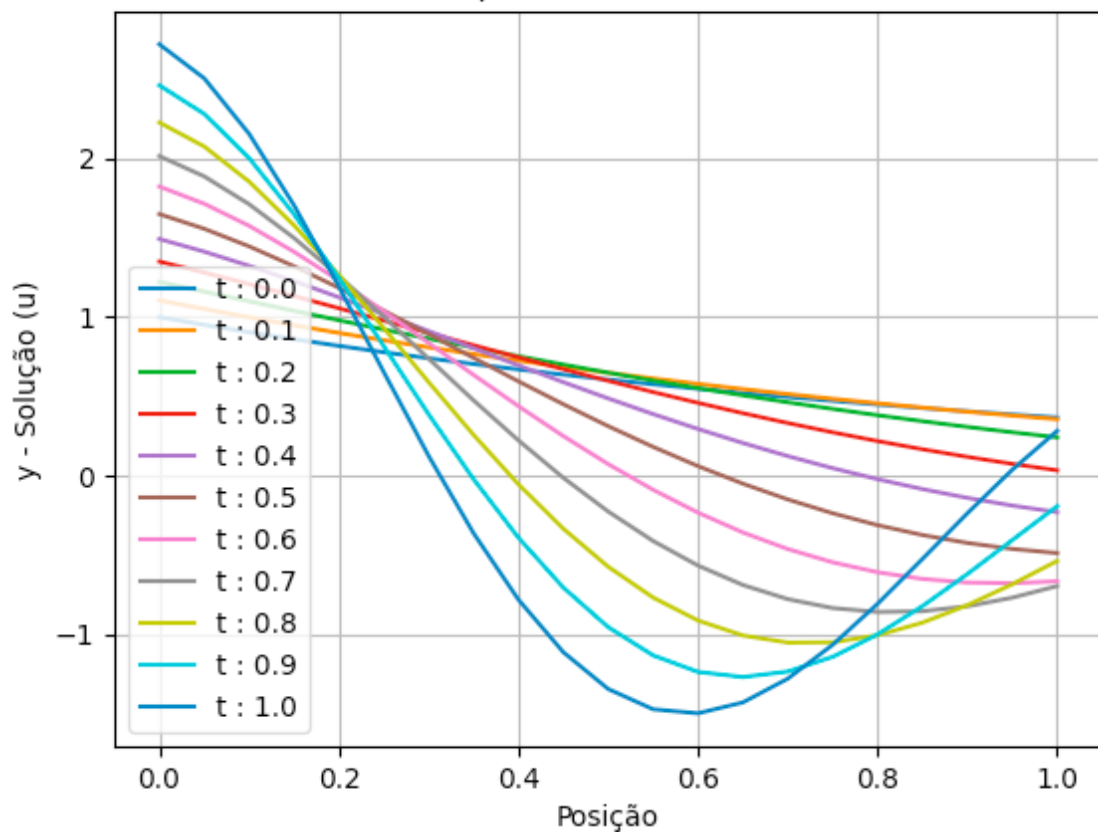
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 10 e λ : 0.51 | Erro: 0.086363909619245



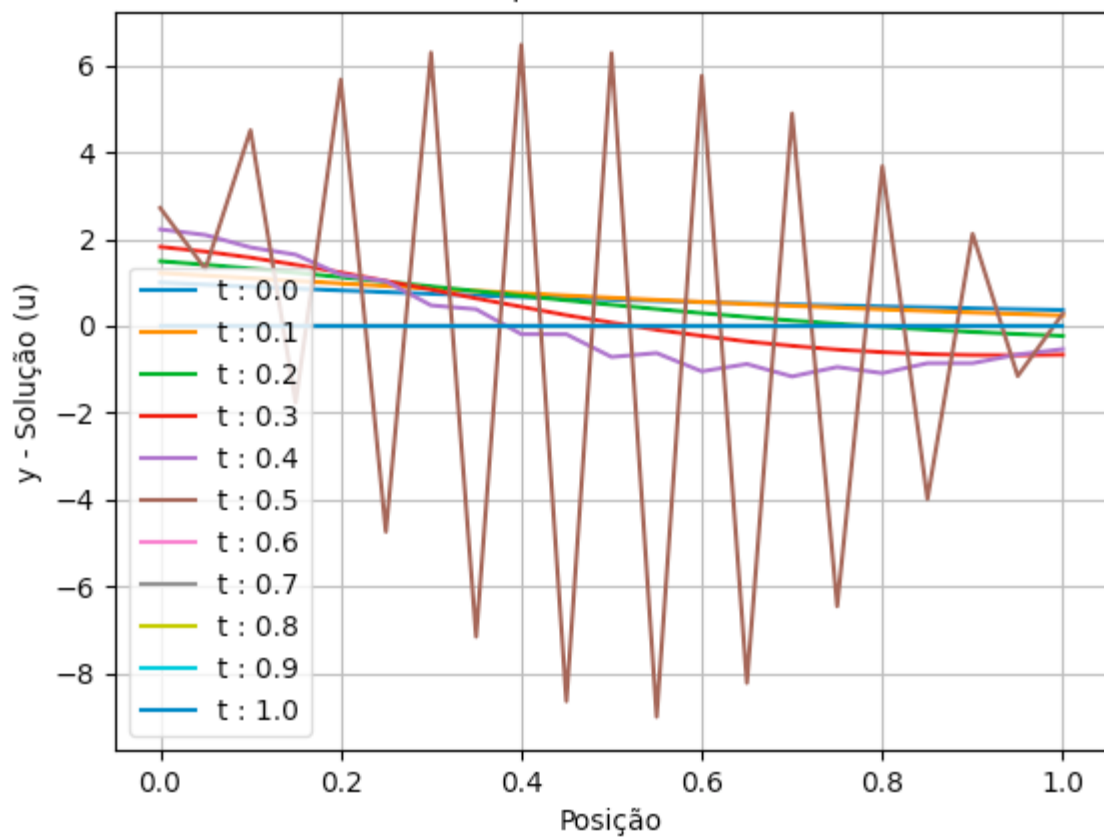
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 20 e λ : 0.25 | Erro: 0.0169528611266494



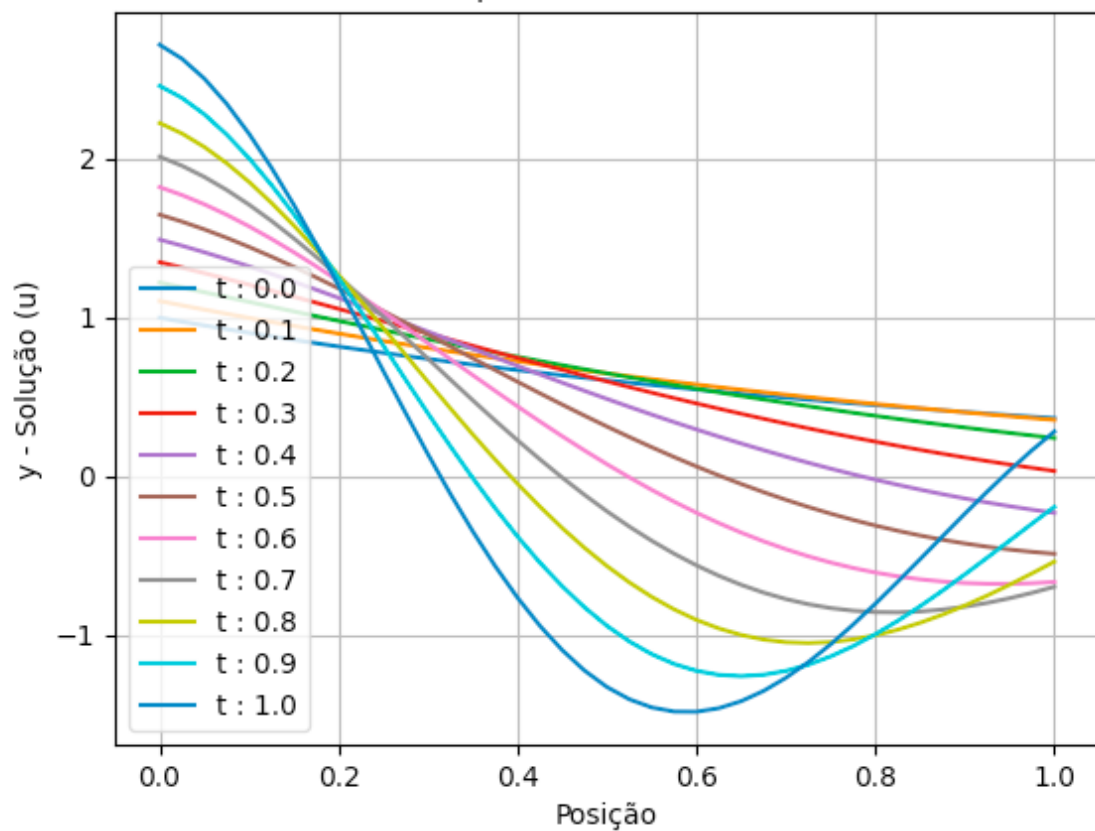
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 20 e λ : 0.5 | Erro: 0.02149406614484839



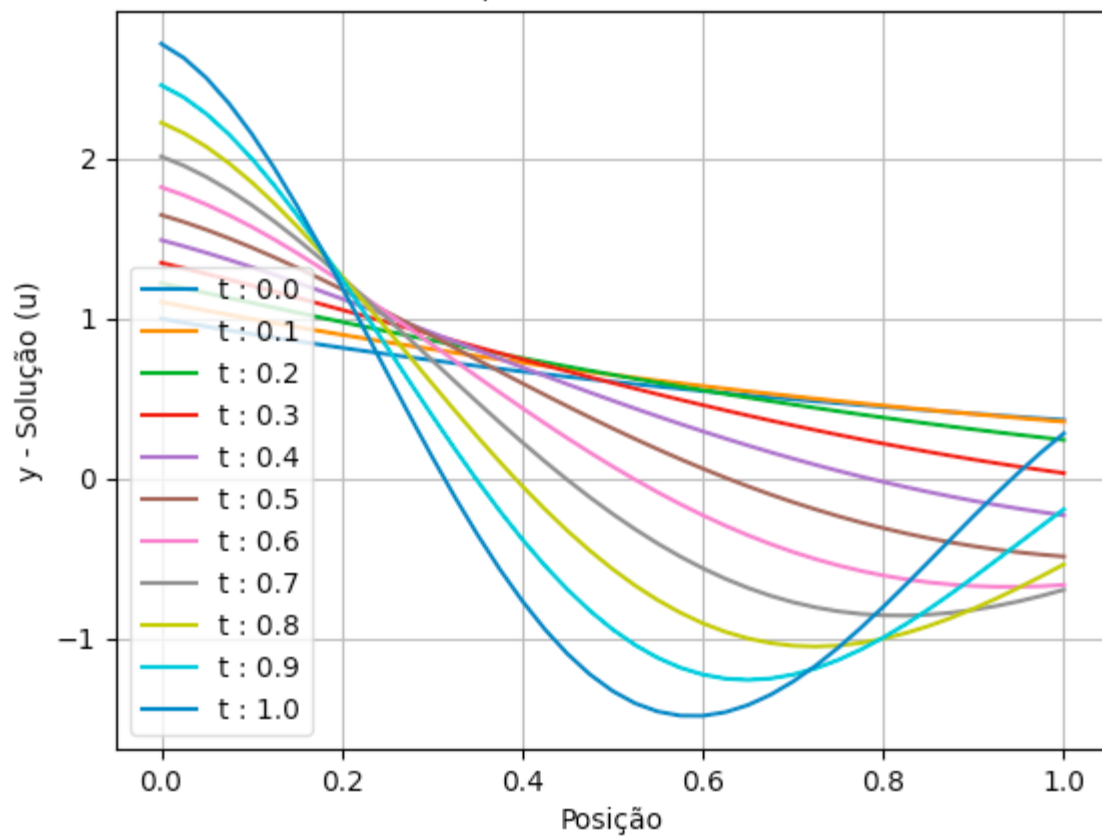
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 20 e λ : 0.51 | Erro: 7.610651978574751



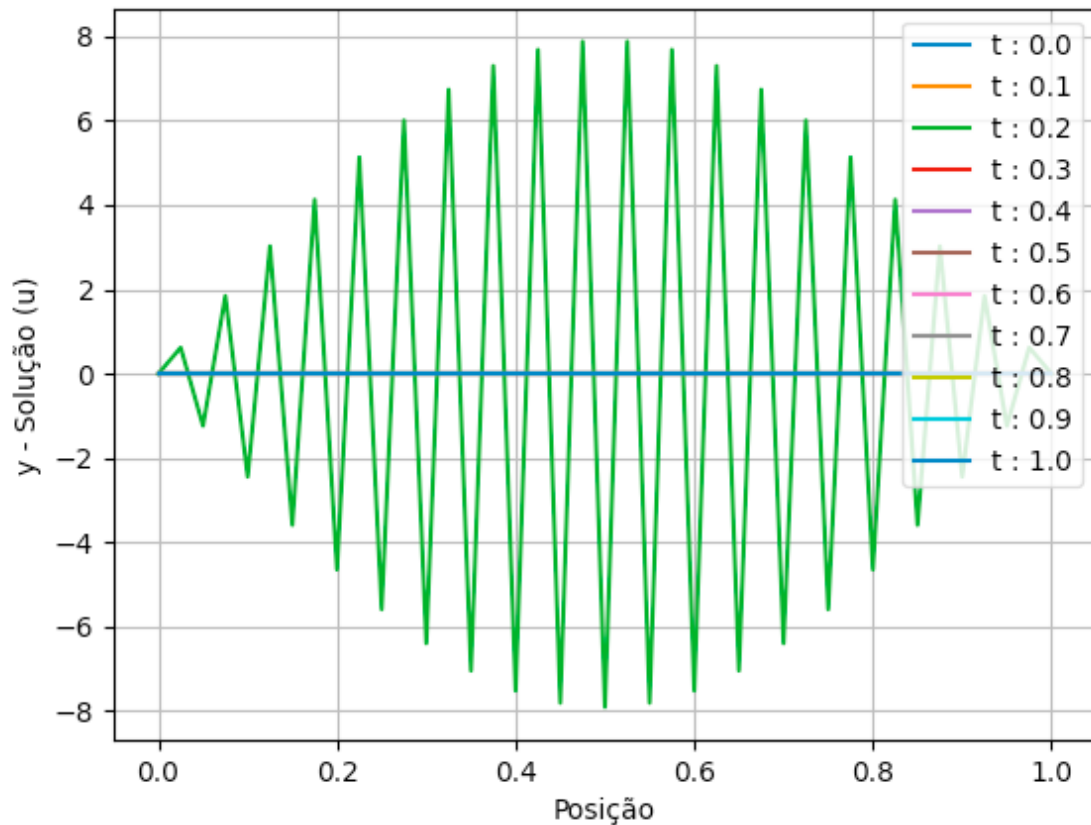
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 40 e λ : 0.25 | Erro: 0.004227115881692445



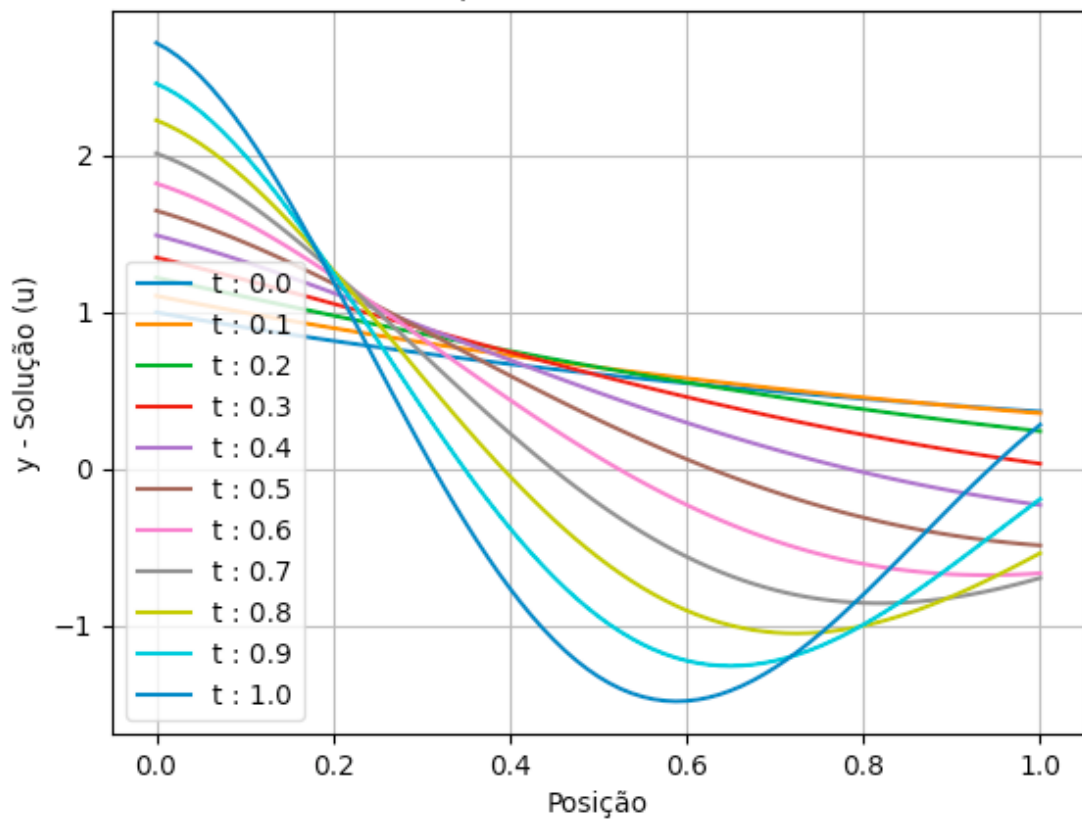
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 40 e λ : 0.5 | Erro: 0.00535569878471942



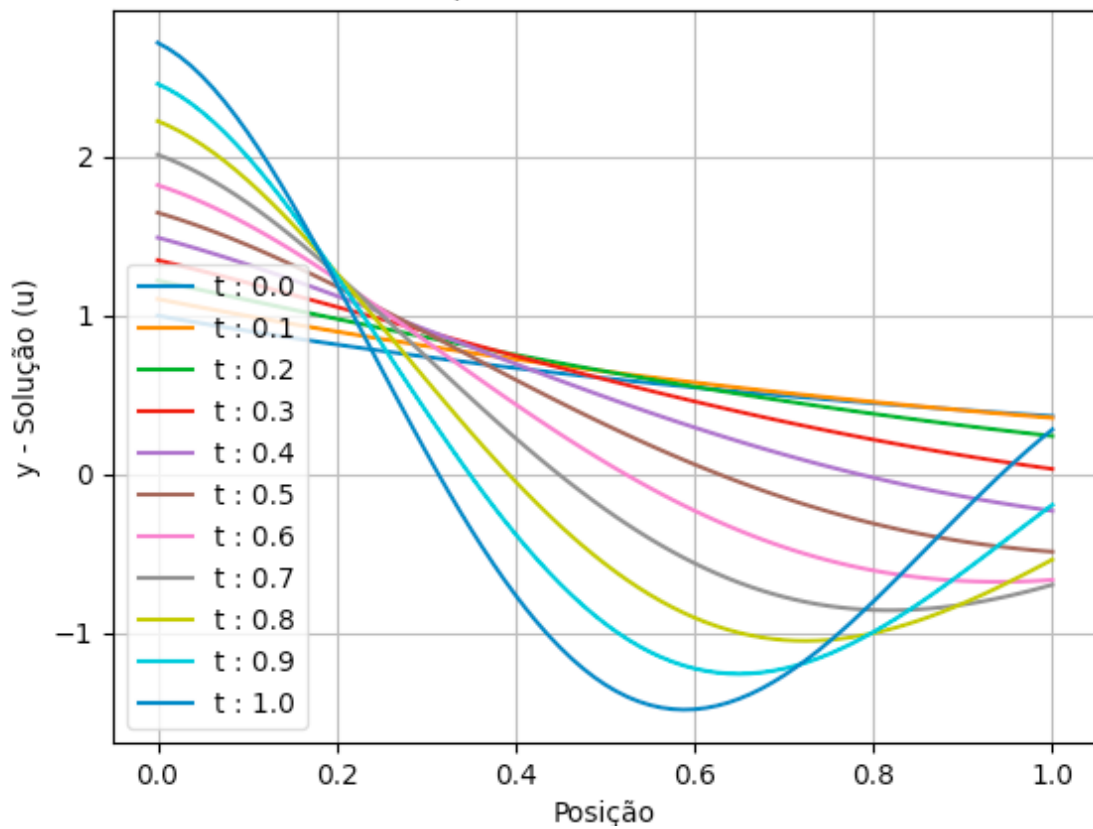
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 40 e λ : 0.51 | Erro: 7.902959726447831e+39



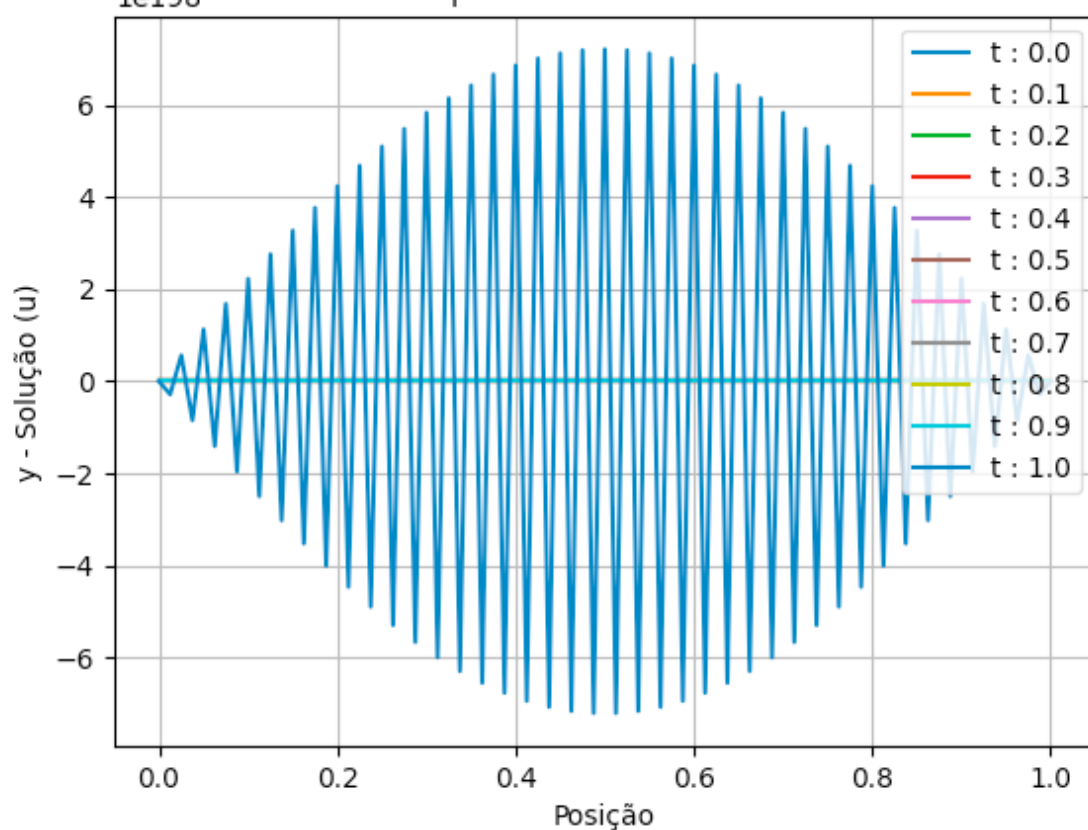
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 80 e λ : 0.25 | Erro: 0.0010570112772461115



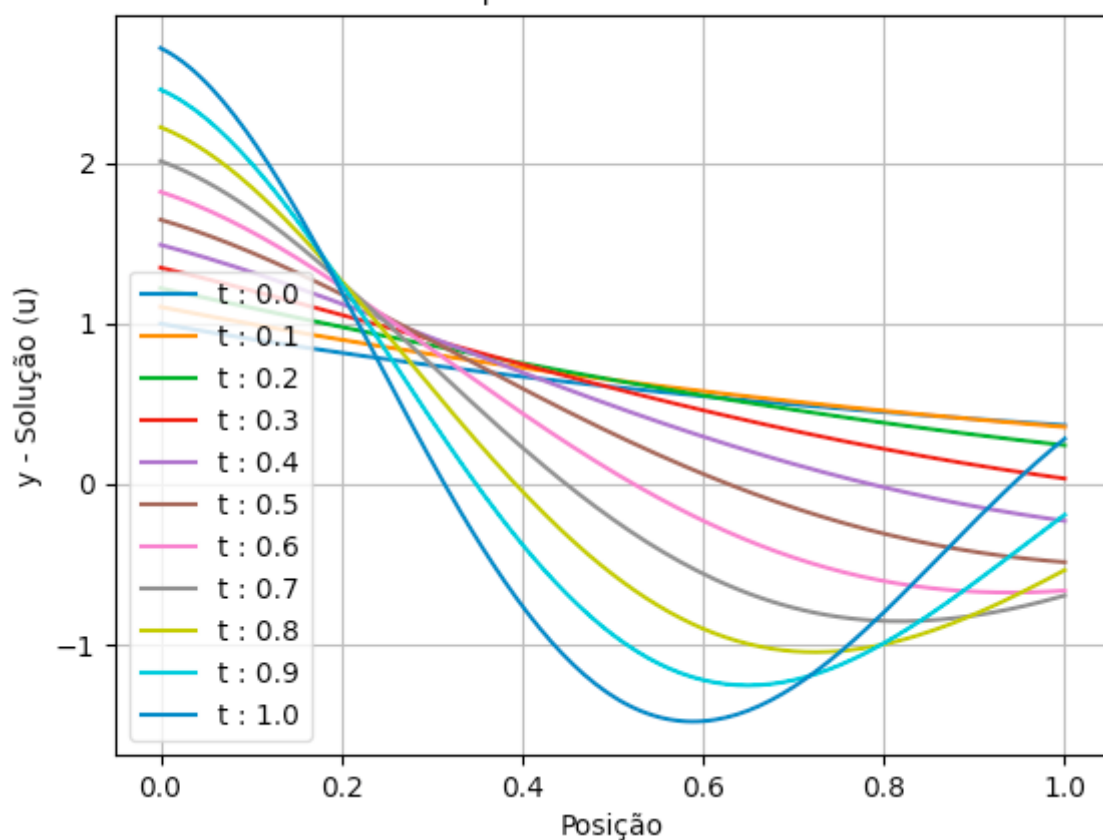
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 80 e λ : 0.5 | Erro: 0.0013382052704316028



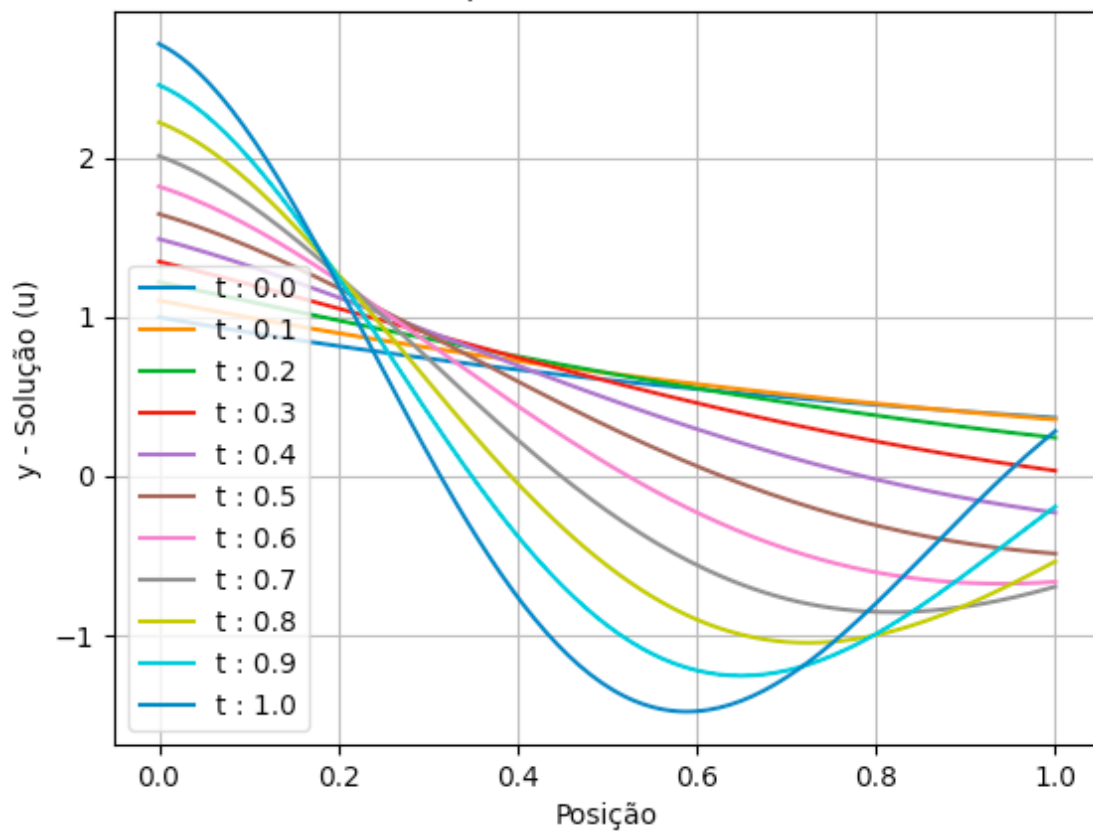
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 $N: 80$ e $\lambda: 0.51$ | Erro: $7.214969215966125e+198$



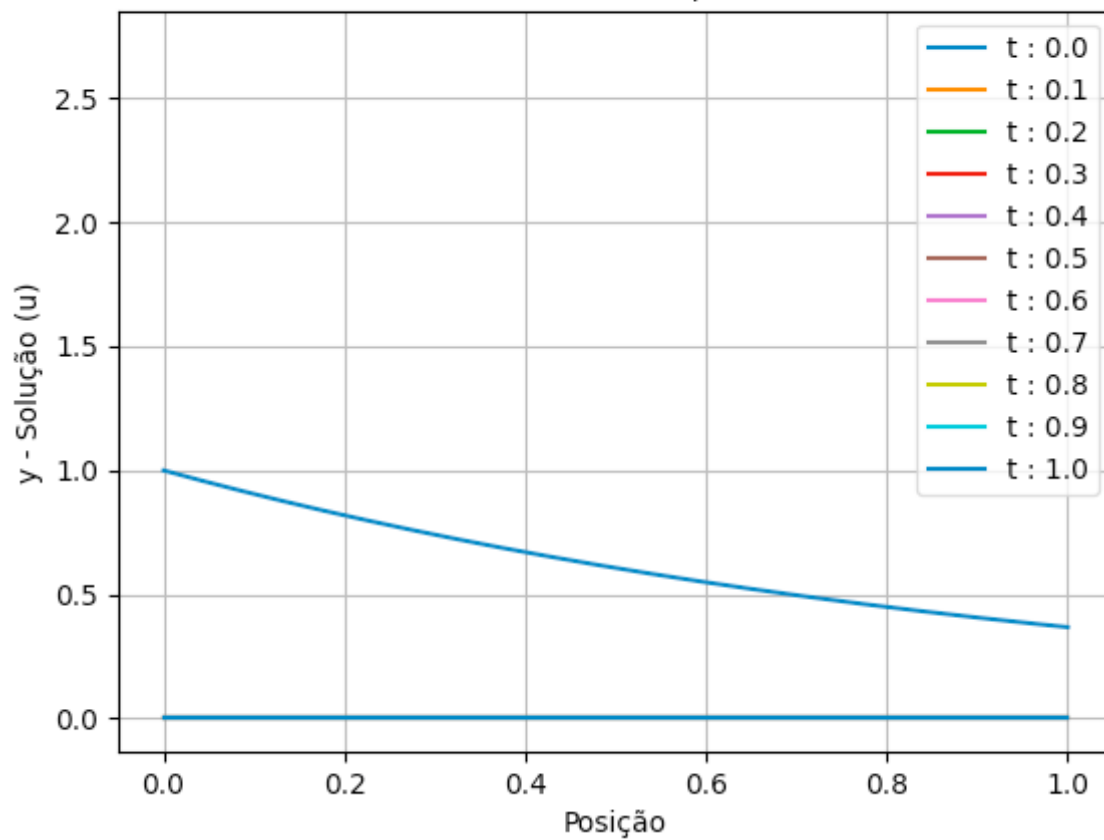
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 $N: 160$ e $\lambda: 0.25$ | Erro: 0.0002642077837933243



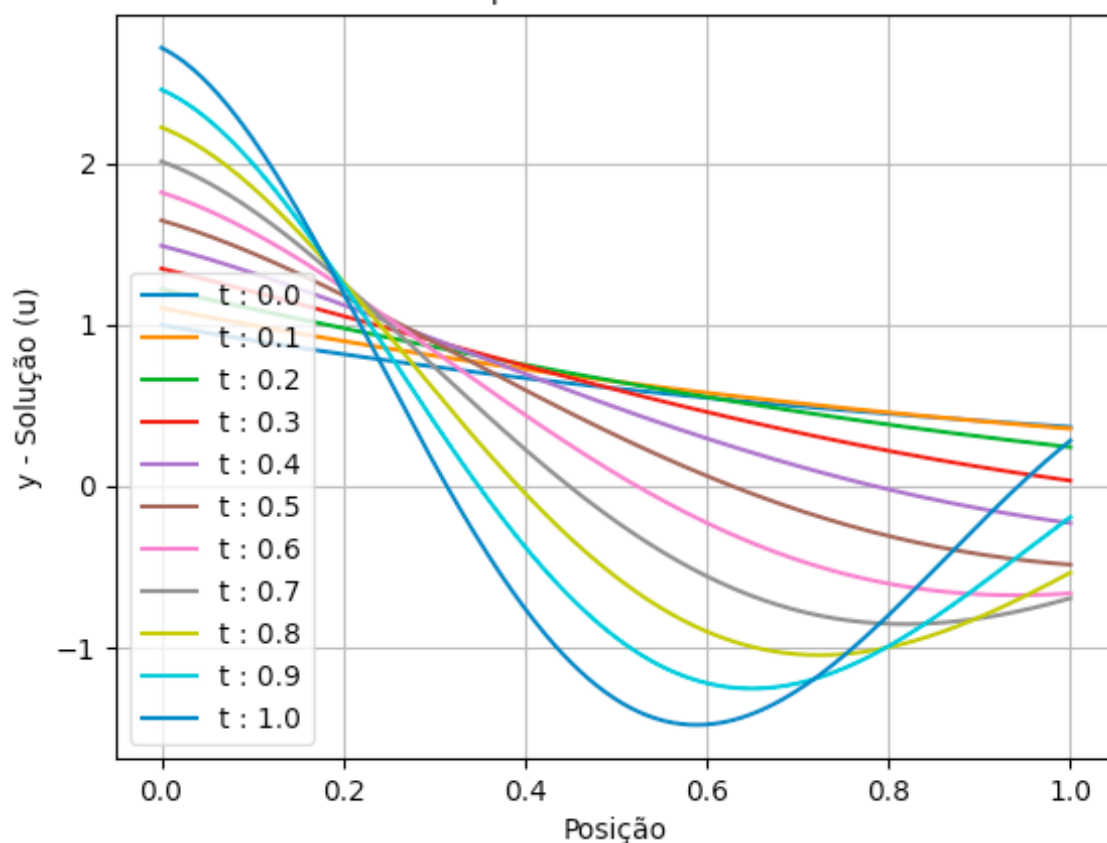
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 160 e λ : 0.5 | Erro: 0.0003345362792550599



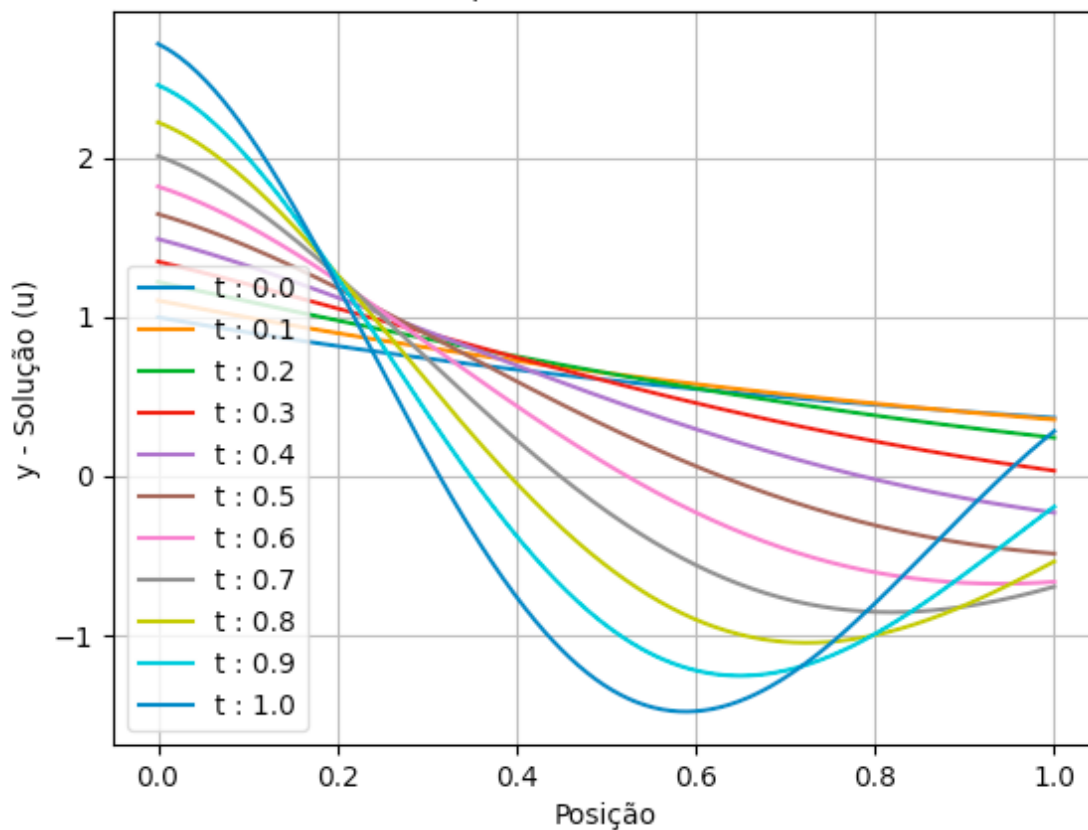
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 160 e λ : 0.51 | Erro: 0



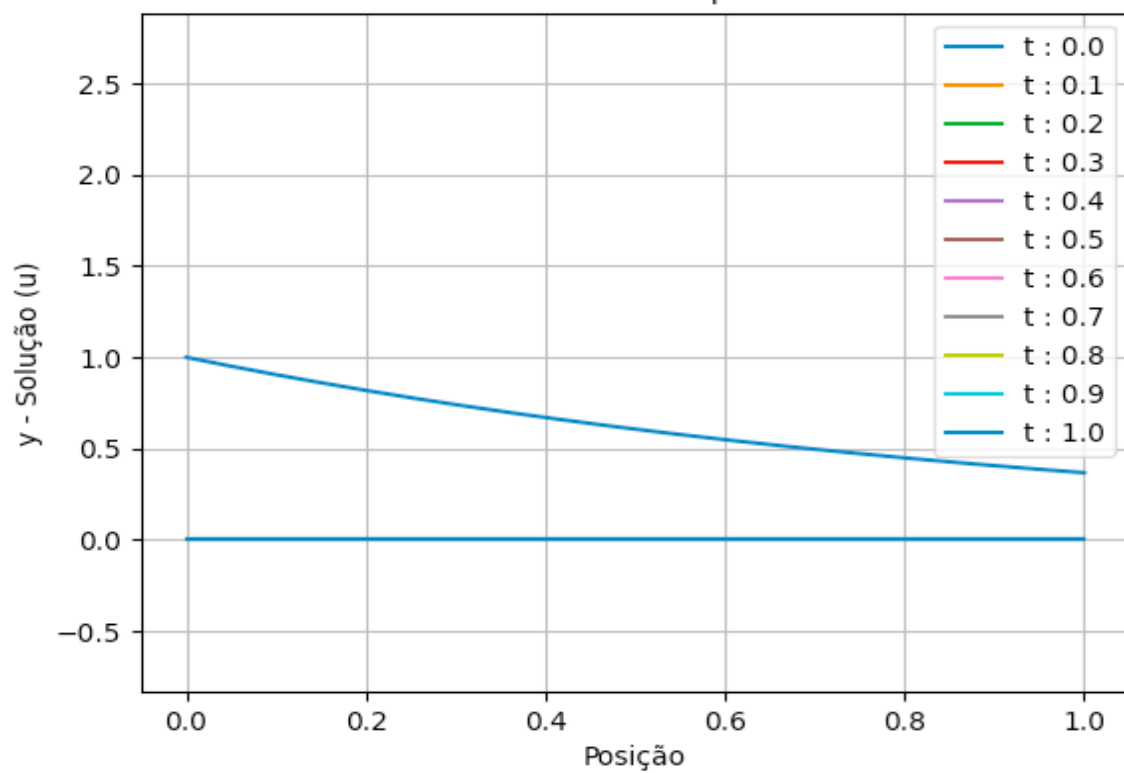
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 320 e λ : 0.25 | Erro: 6.605055649067104e-05



Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
 N: 320 e λ : 0.5 | Erro: 8.362967620678674e-05



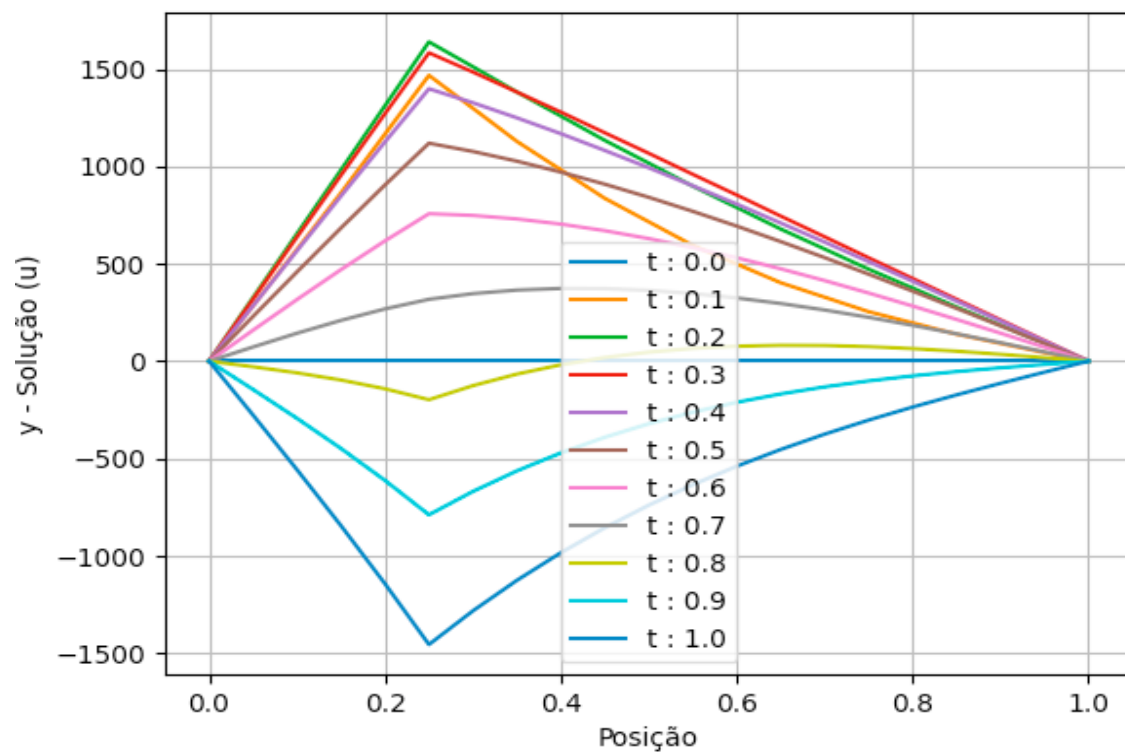
Item: 1.b) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 320 e λ : 0.51 | Erro: 0



7. Apêndice – Tarefa 1 – Item c)

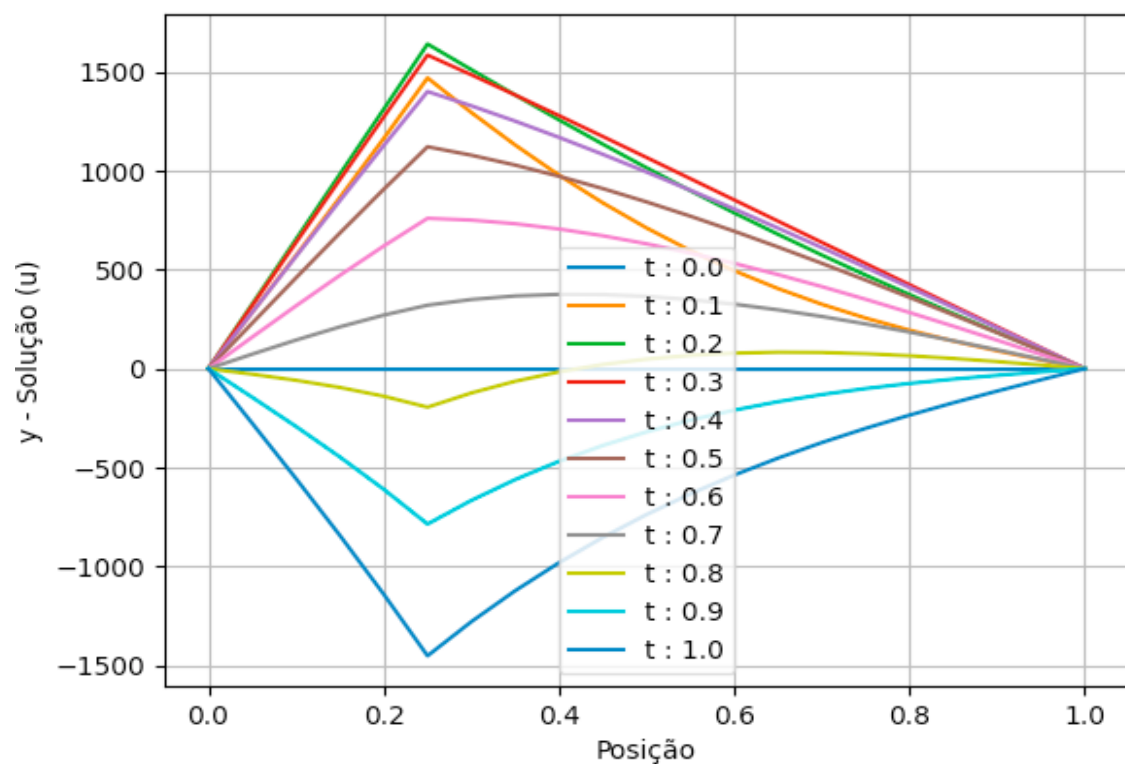
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t

N: 20 e λ : 0.5

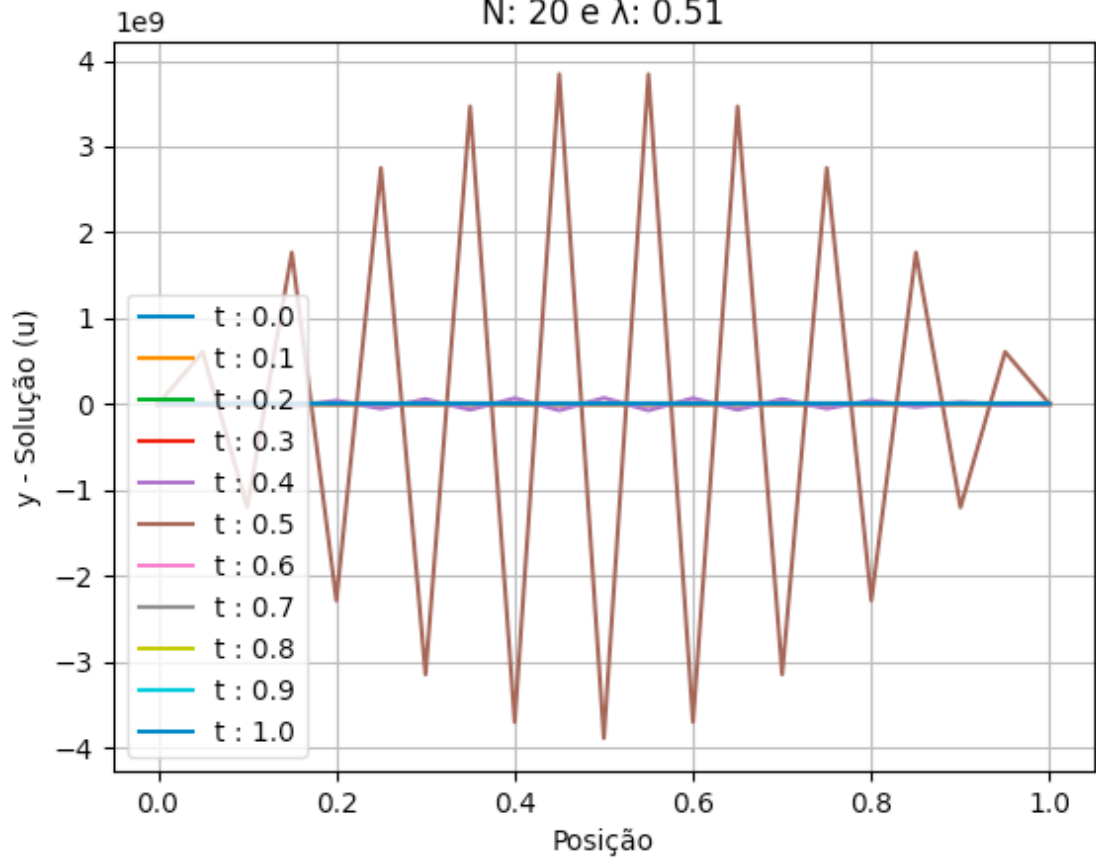


Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t

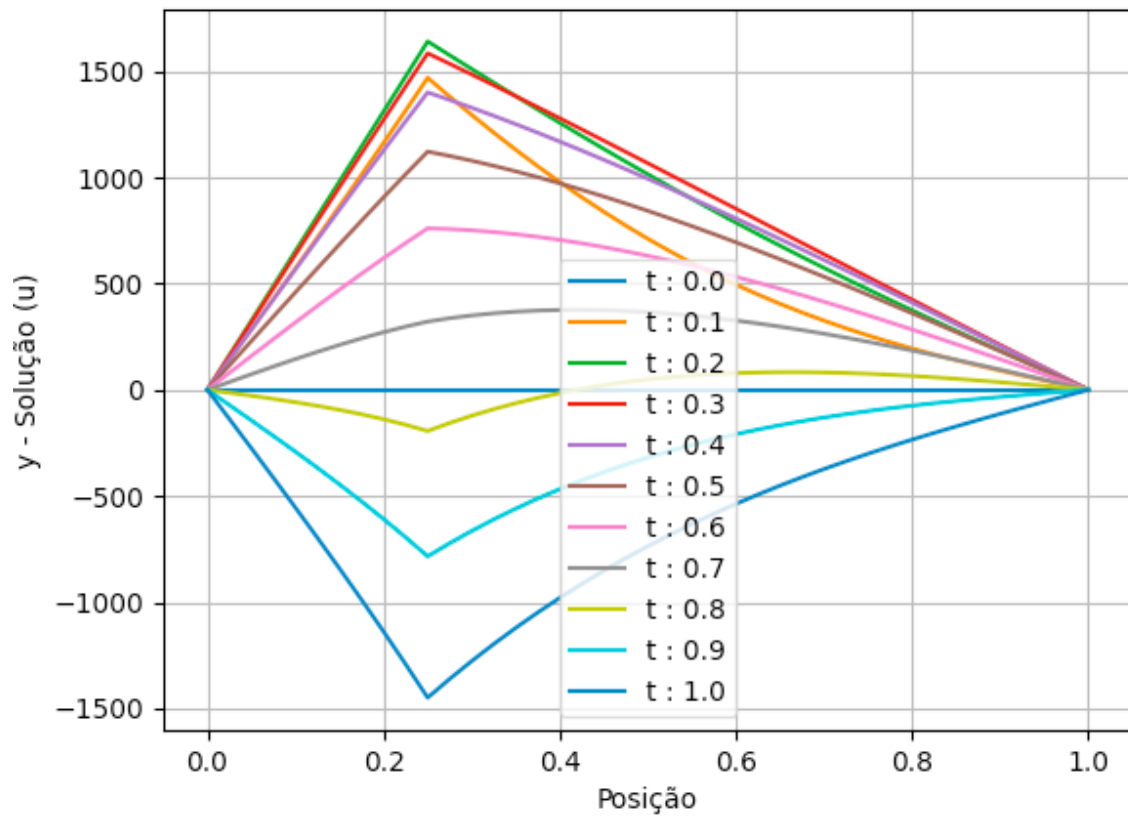
N: 20 e λ : 0.25



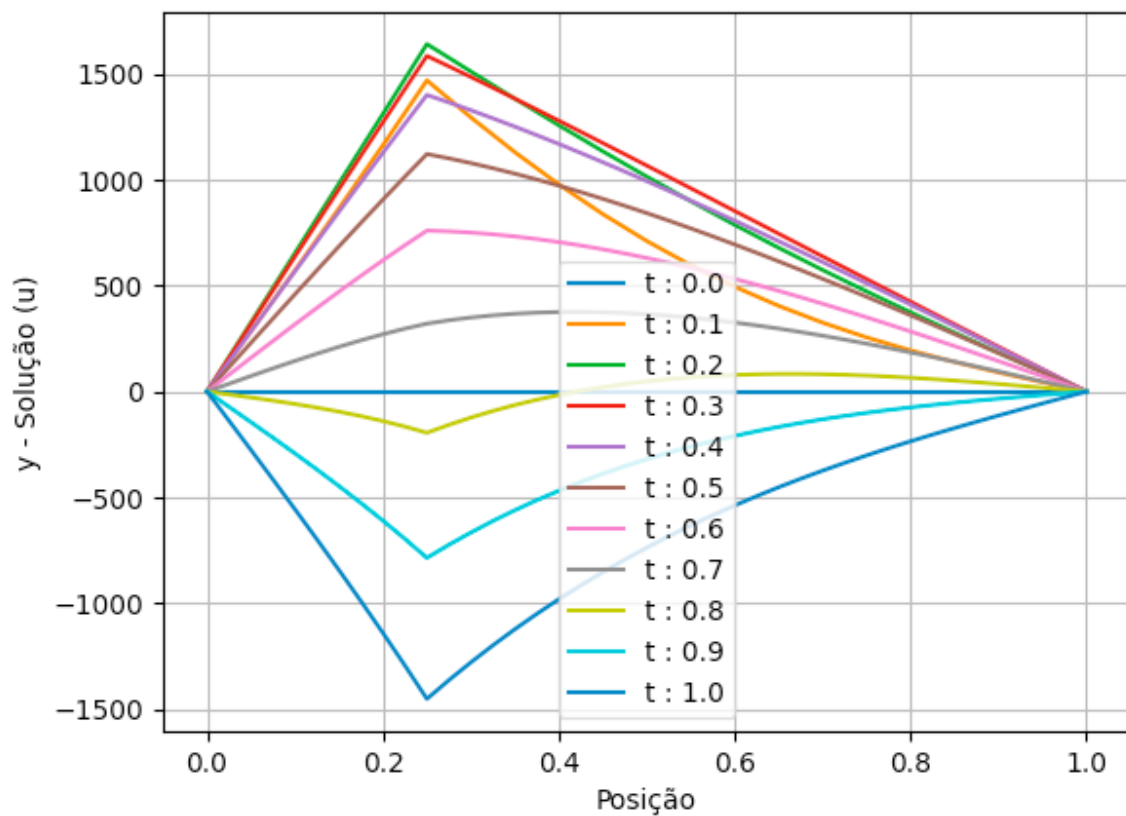
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 20 e $\lambda: 0.51$



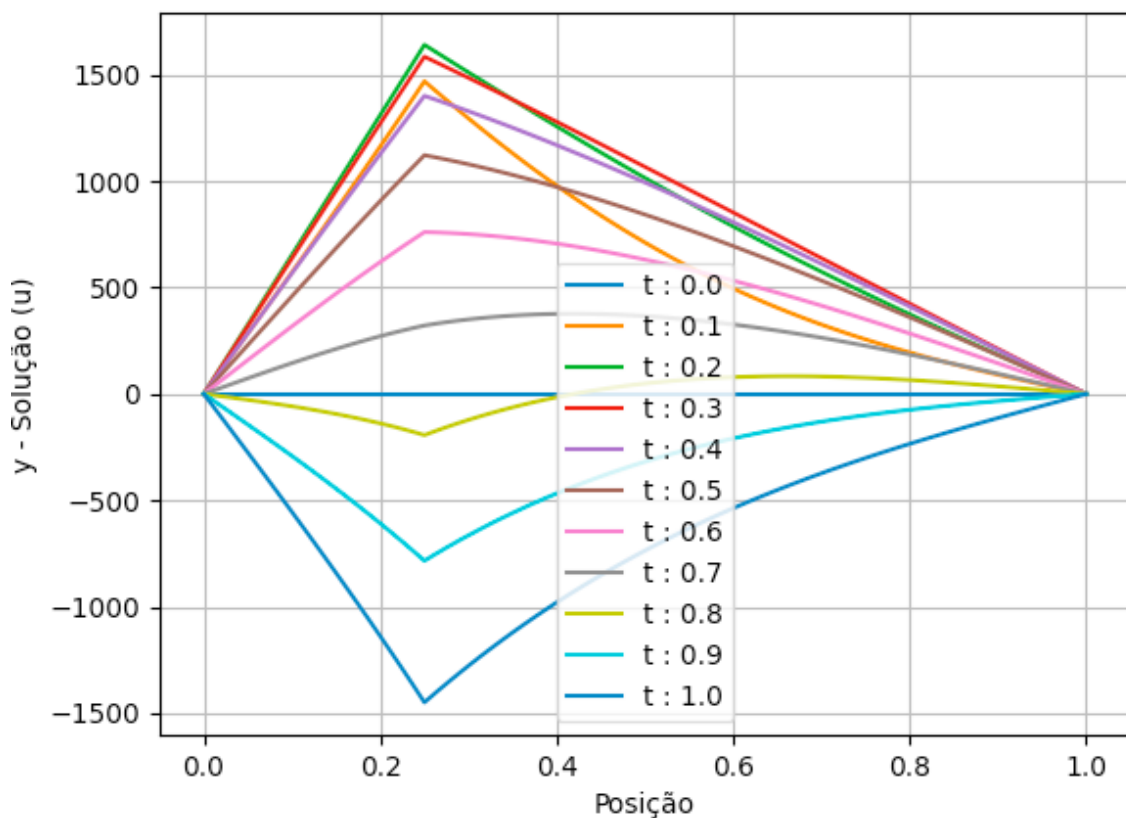
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 40 e $\lambda: 0.25$



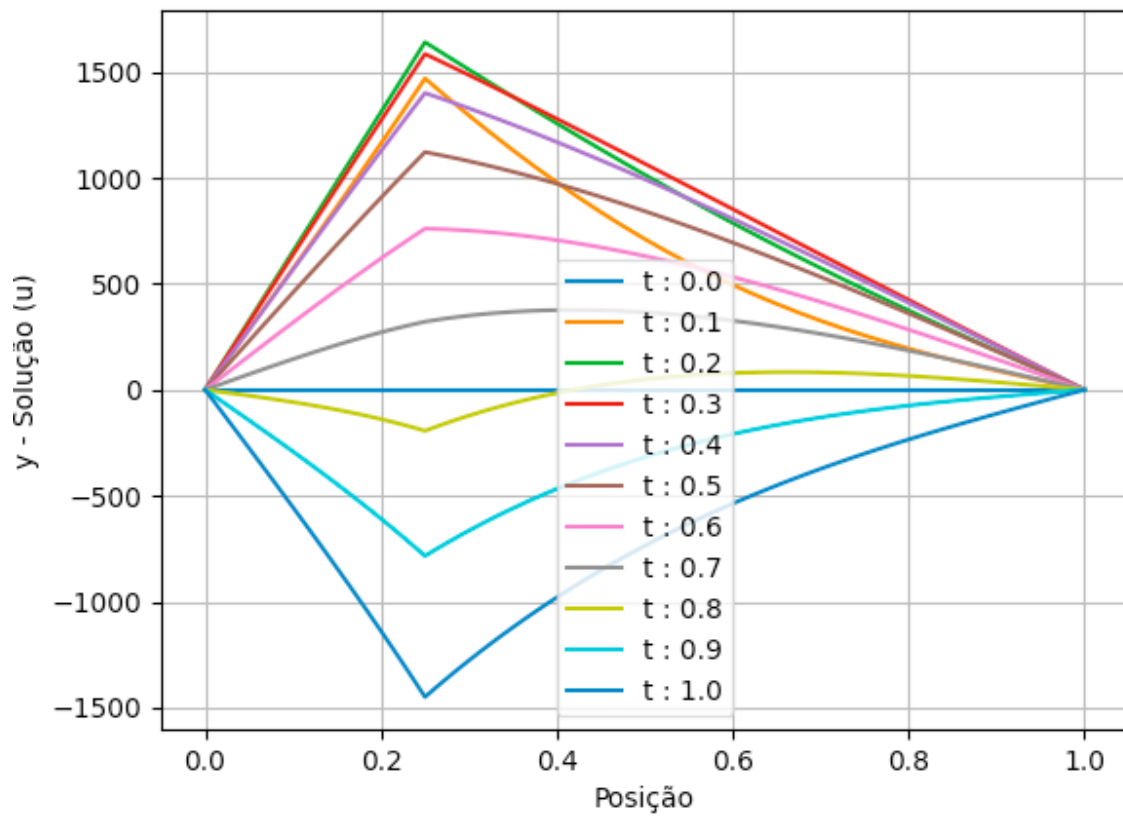
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 40 e λ : 0.5



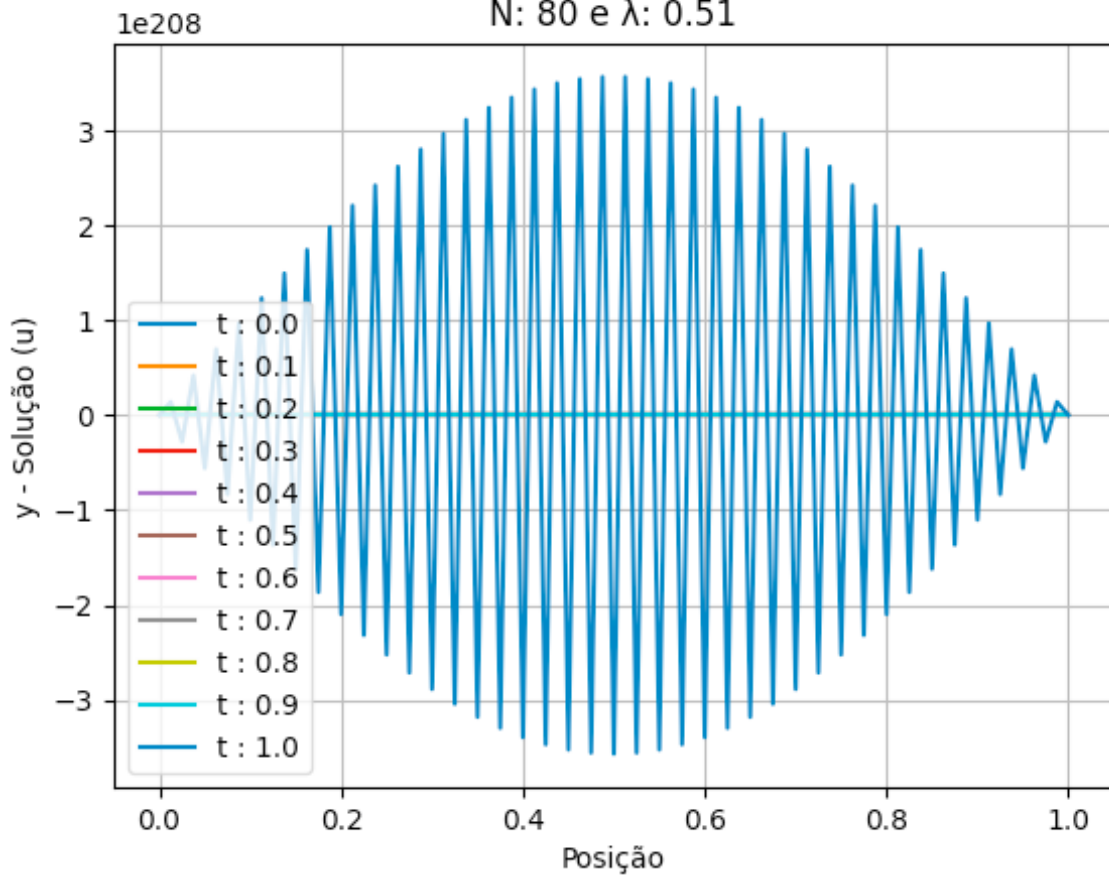
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 80 e λ : 0.25



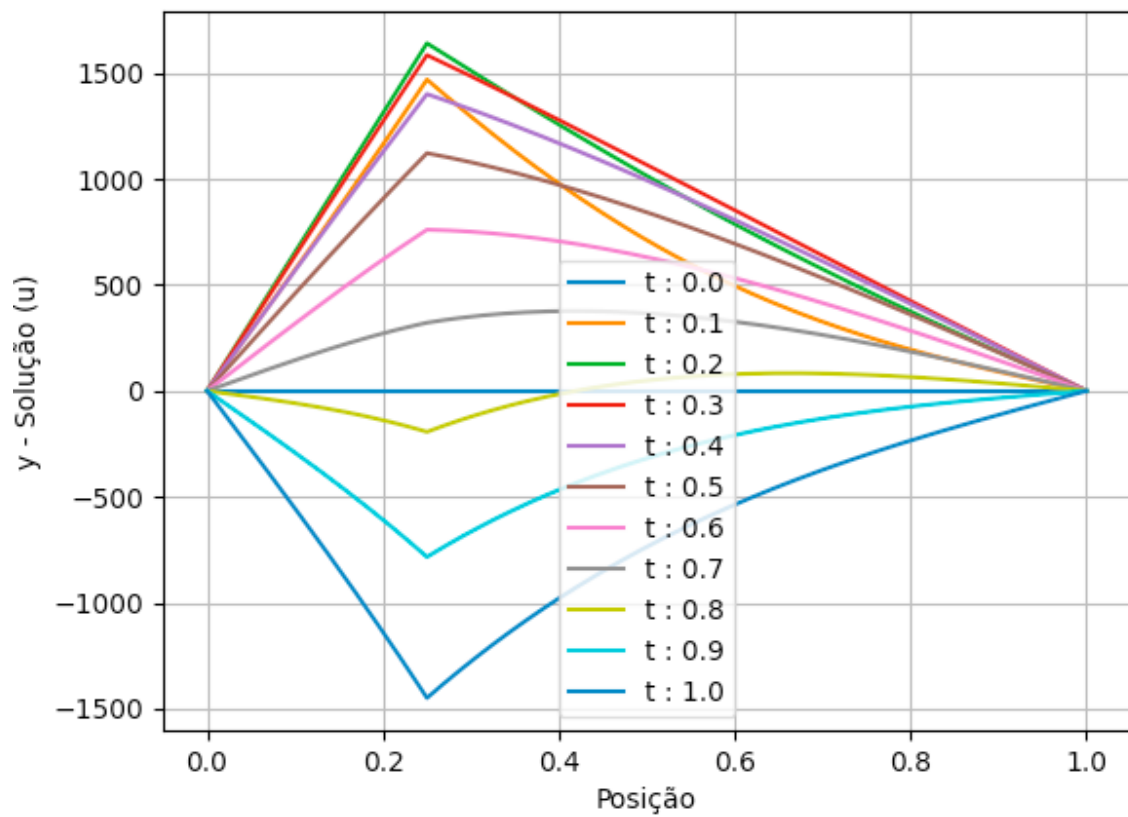
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 80 e λ : 0.5



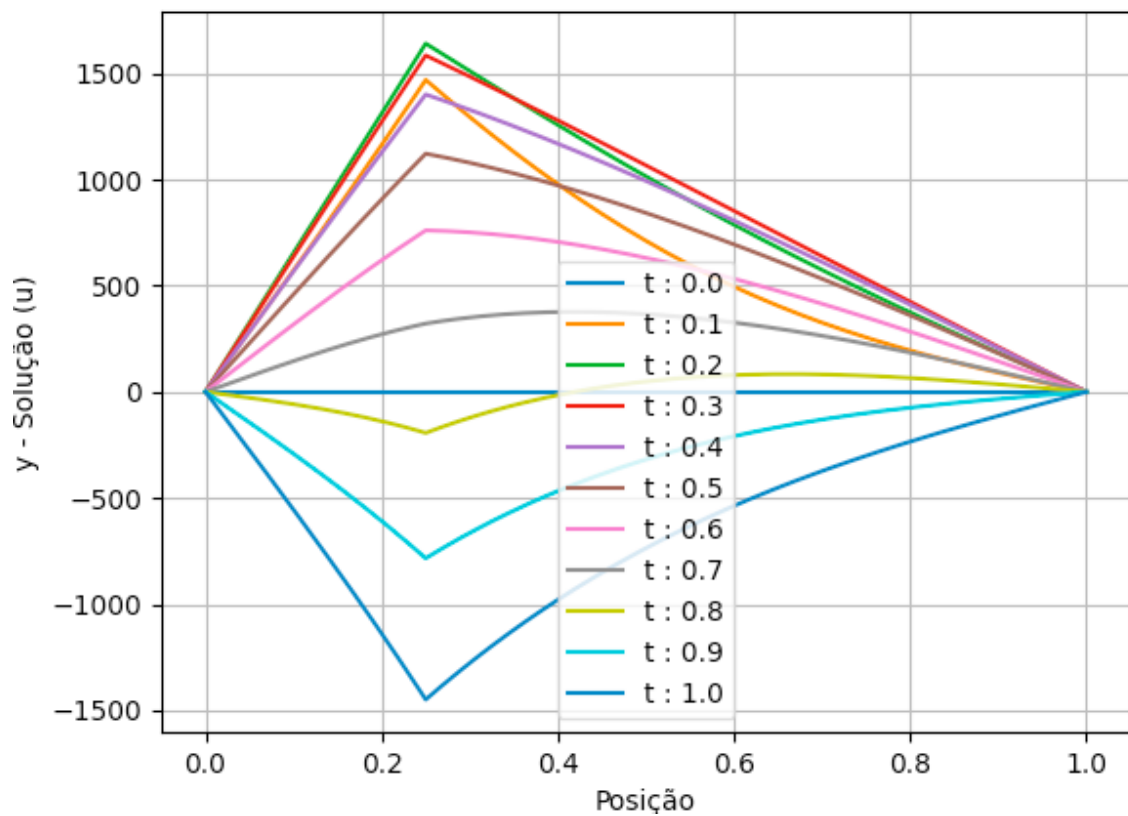
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 80 e λ : 0.51



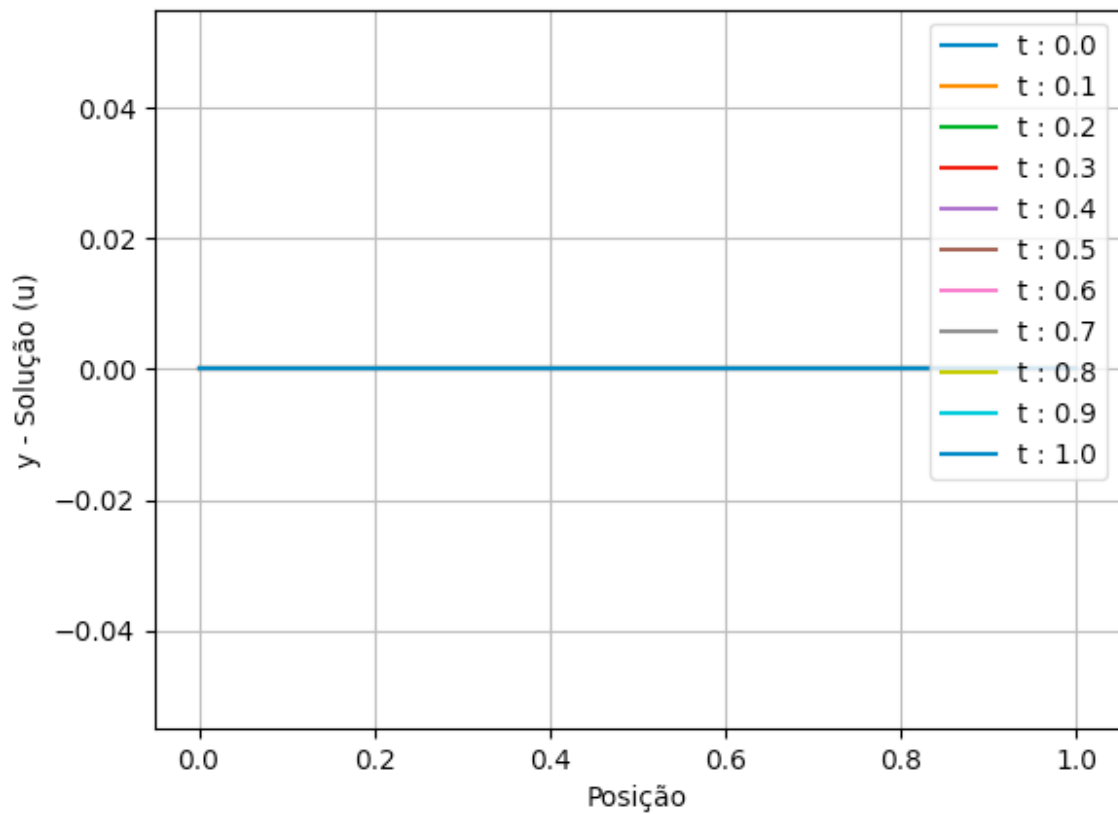
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 160 e λ : 0.25



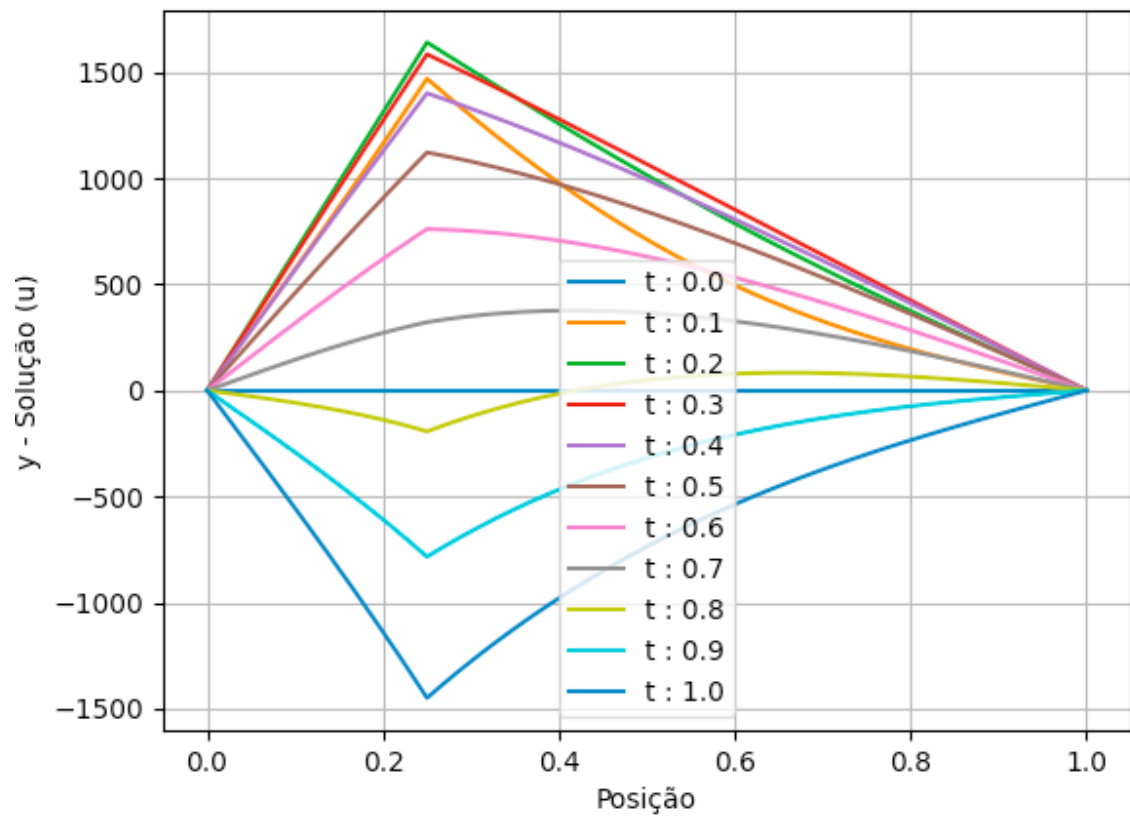
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 160 e λ : 0.5



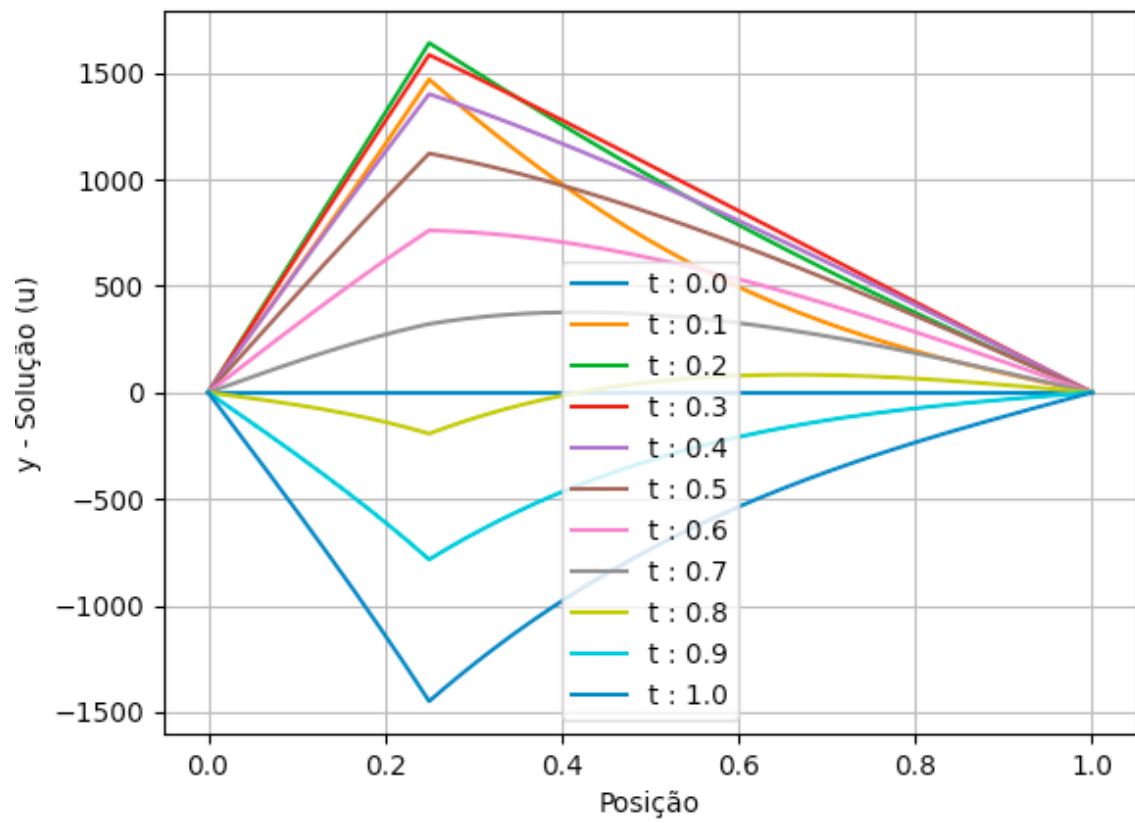
Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 160 e λ : 0.51



Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 320 e λ : 0.25



Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 320 e λ : 0.5



Item: 1.c) - Gráfico da Solução Encontrada x t
N: 320 e λ : 0.51

