

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

GABRIEL MOREIRA MINOSI  
VINICIUS BUENO DE MORAES

**EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 2**  
**MAP3122 - Métodos Numéricos e Aplicações**

SÃO PAULO  
2021

GABRIEL MOREIRA MINOSI  
VINICIUS BUENO DE MORAES

**EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 2**  
**MAP3122 - Métodos Numéricos e Aplicações**

Estudo acerca de Métodos Numéricos para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Nele se abordam majoritariamente o Método de Euler Implícito, Método de Euler Explícito e o Método de Runge-Kutta 4.

SÃO PAULO  
2021

## SUMÁRIO

1 - Introdução .....	3
2 - Desenvolvimento	
2.1.1 - Verificação dos Métodos - Runge-Kutta 4 .....	4
2.1.2 - Verificação dos Métodos - Euler Implícito .....	7
2.2 - Modelo presa-predador - Comparação dos Métodos .....	8
2.2.1 - Item 2.3 do Enunciado (Comparação entre Euler Explícito e Euler Implícito) .....	10
3 - Resultados e Discussões .....	11
4 - Conclusão .....	12
5 - Referências Bibliográficas.....	13

## 1 - Introdução

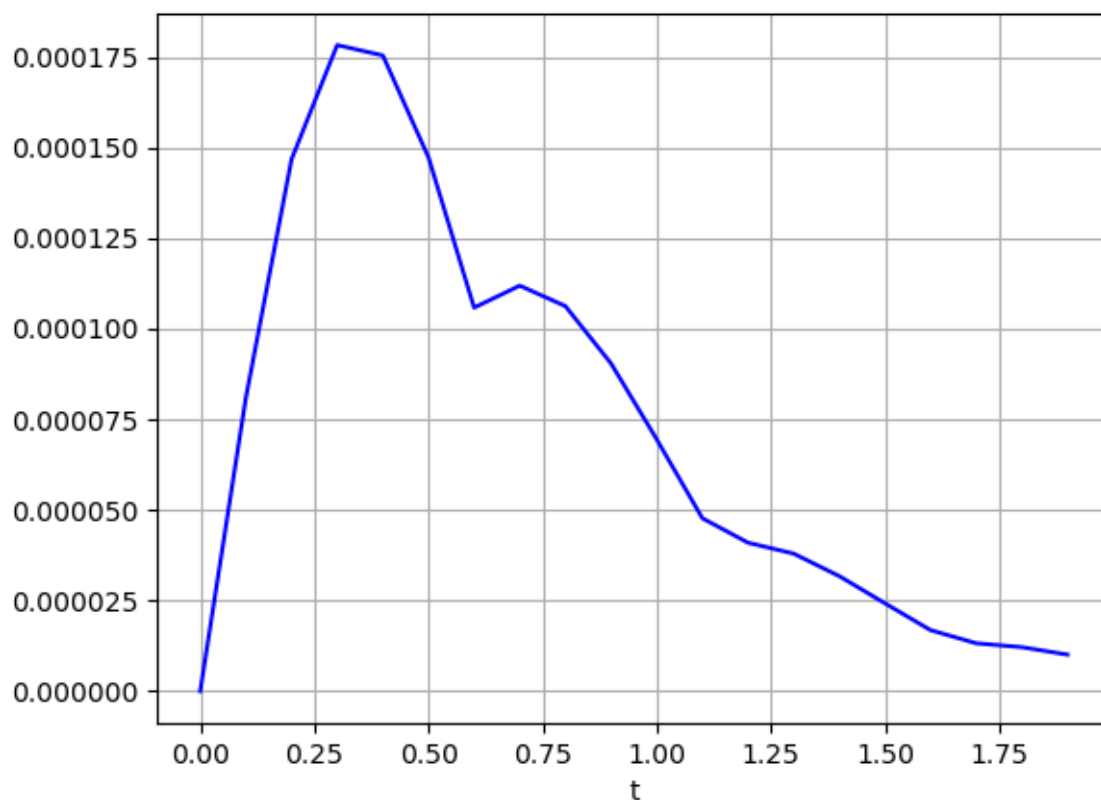
Neste se relatarão os resultados obtidos através da execução de algoritmos computacionais desenvolvidos utilizando a linguagem de programação python para resolução de Sistemas de Equações Diferenciais (EDOs). O documento contará majoritariamente com imagens geradas a partir das rotinas desenvolvidas, para desta forma evidenciar os resultados bem como preservar sua concisão. Ademais, breves discussões acerca dos resultados alcançados serão explicitadas aqui.

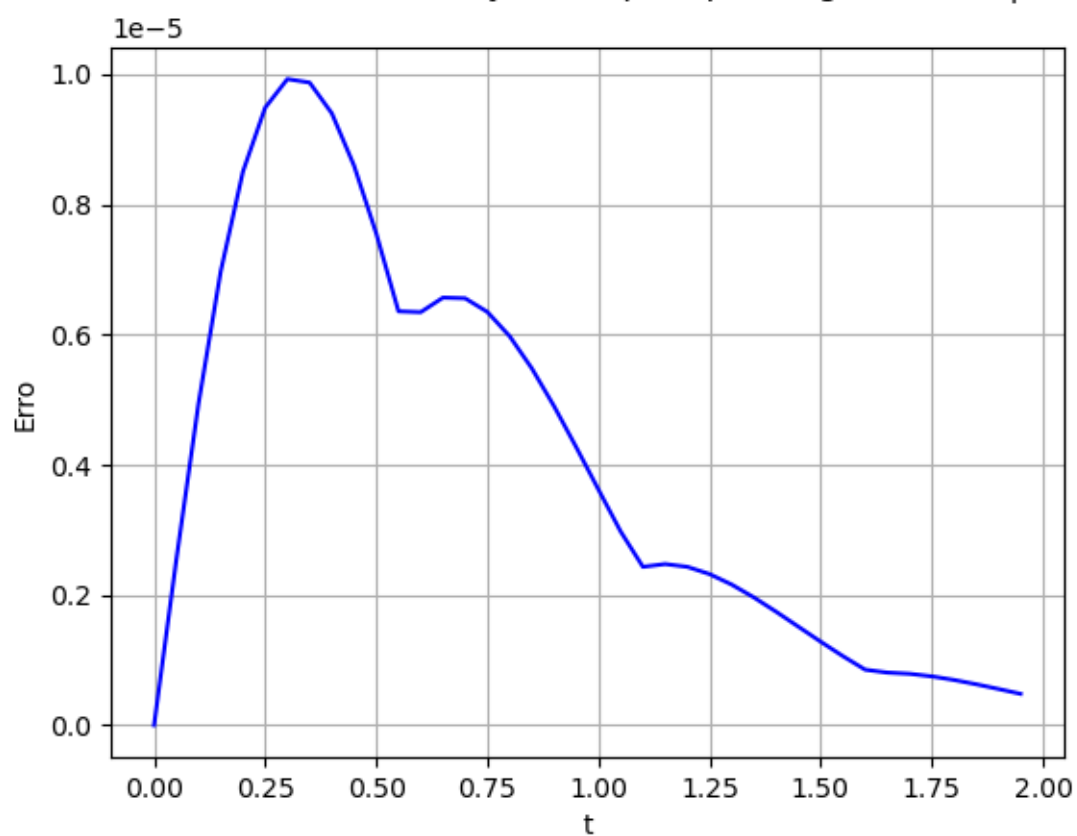
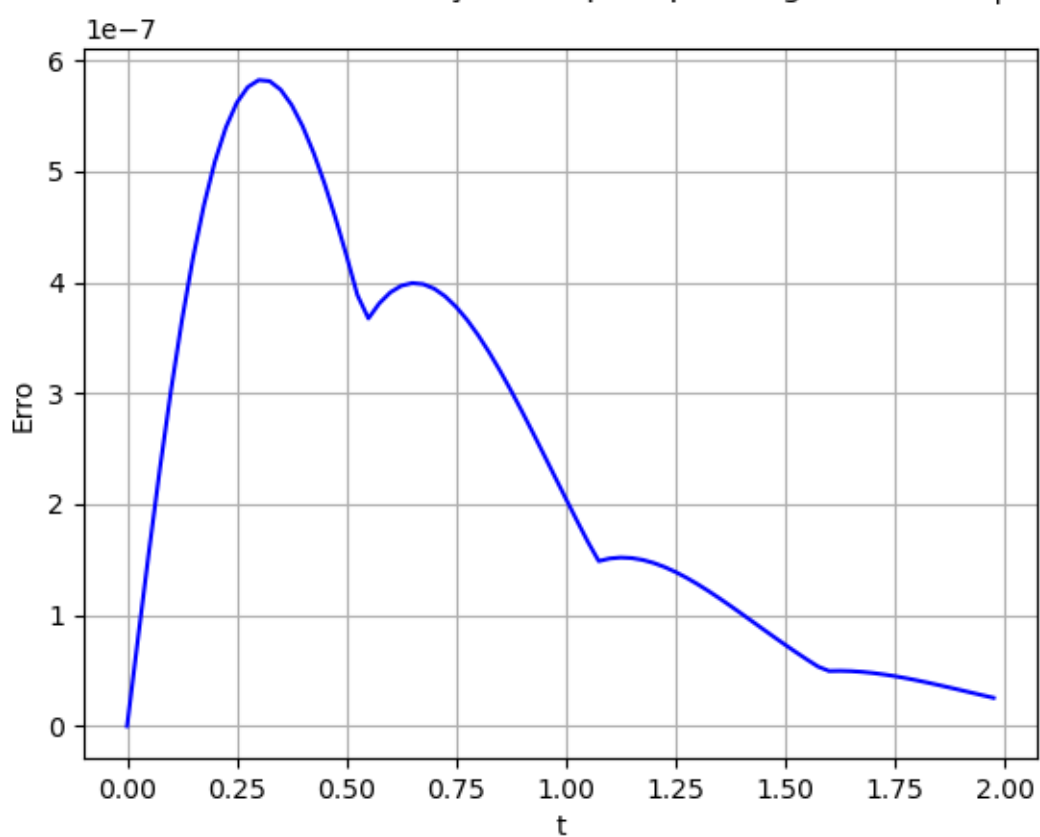
## 2 - Desenvolvimento

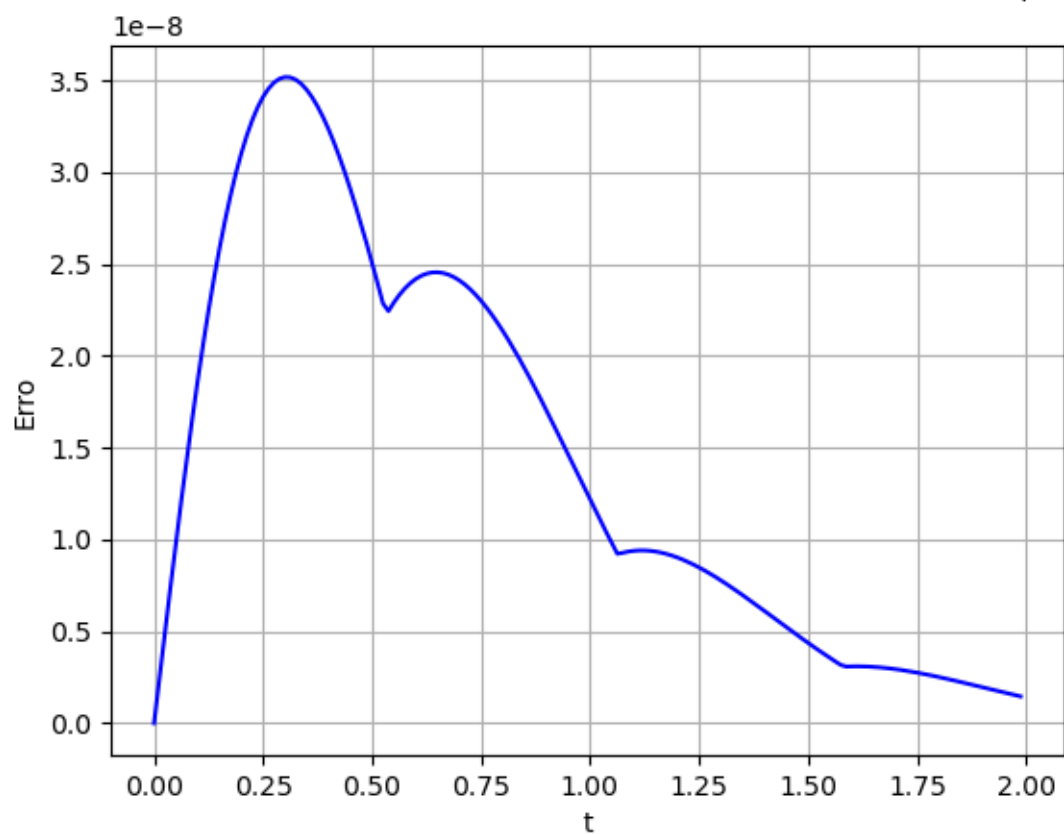
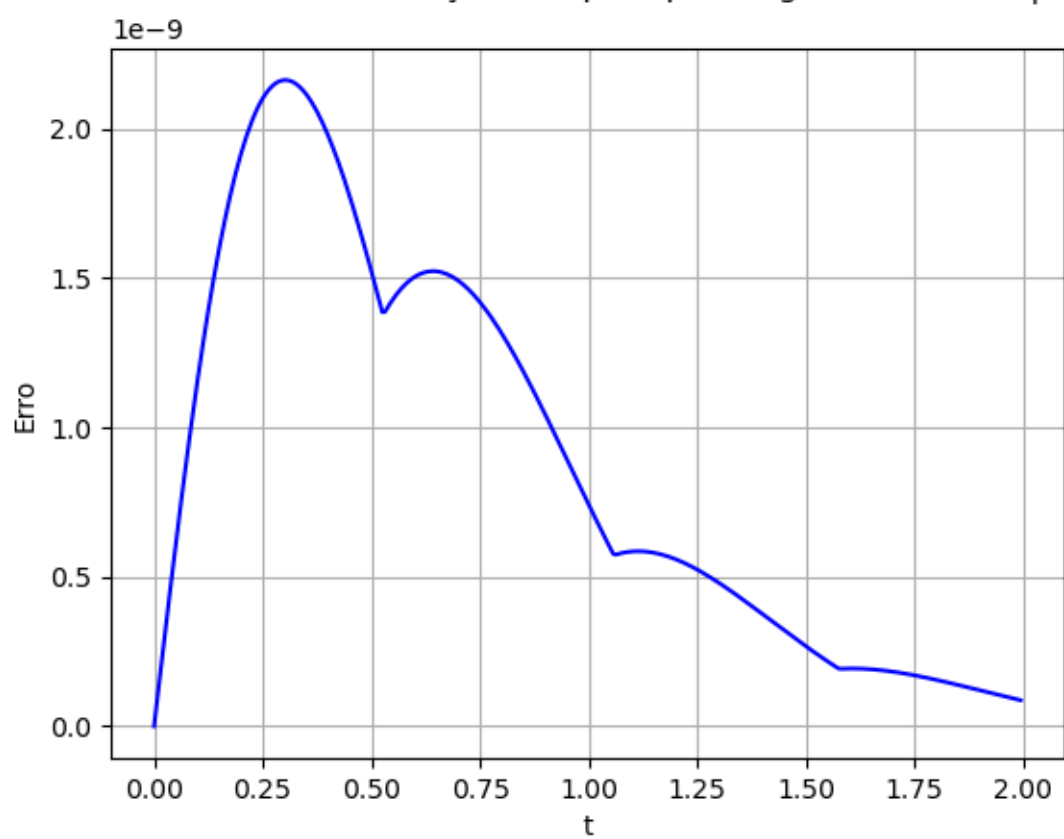
### 2.1.1 - Verificação dos Métodos - Runge-Kutta 4

Foi desenvolvido um algoritmo de Kunge-Kutta 4 com diferentes números de intervalos entre o tempo  $[0, 2]$ , sendo esses ns, parâmetro principal para alterar o nível de precisão do algoritmo e definir o passo. Foi realizado o seguinte número de divisões no intervalo de tempo, alterando assim o valor do passo:  $n = 20$ ,  $n = 40$ ,  $n = 80$ ,  $n = 160$ ,  $n = 320$  e  $n = 640$ . As imagens que explicitam o Erro em relação ao tempo são mostradas a seguir para cada um dos ns anteriormente citados:

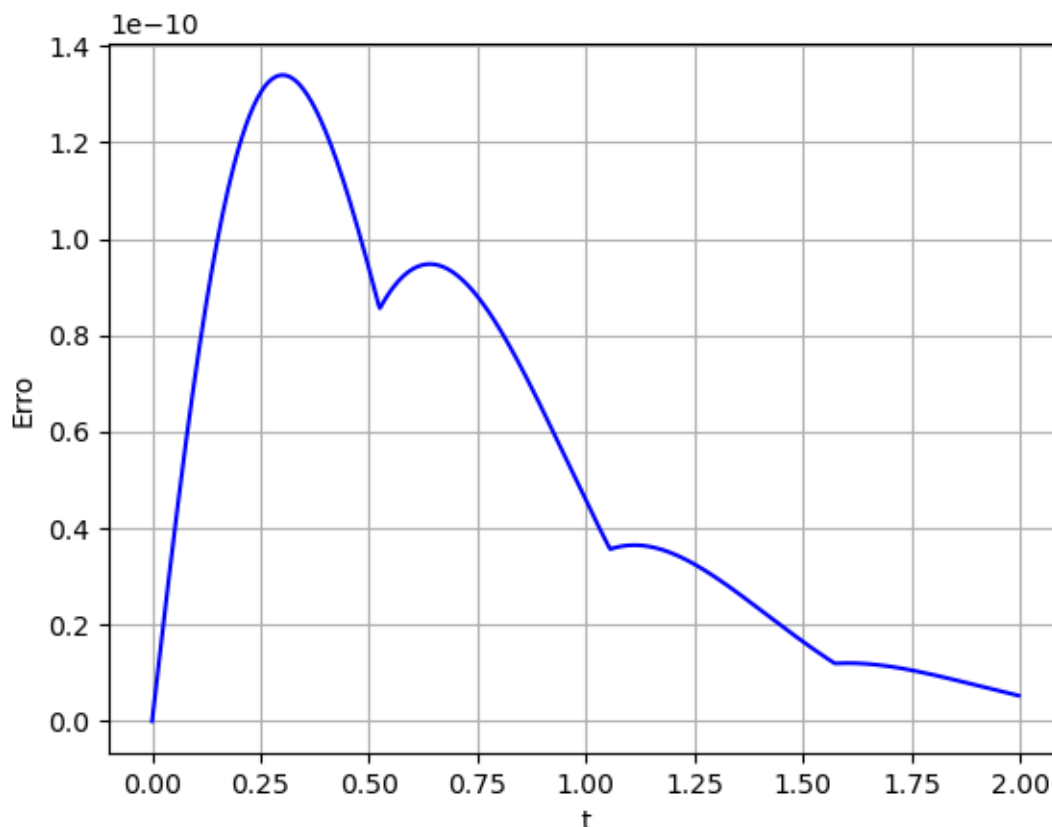
1.1 - Gráfico do Erro em função de t para passo igual à 0.1 |  $n = 20$



1.1 - Gráfico do Erro em função de  $t$  para passo igual à 0.05 |  $n = 40$ 1.1 - Gráfico do Erro em função de  $t$  para passo igual à 0.025 |  $n = 80$ 

1.1 - Gráfico do Erro em função de  $t$  para passo igual à 0.0125 |  $n = 160$ 1.1 - Gráfico do Erro em função de  $t$  para passo igual à 0.00625 |  $n = 320$ 

### 1.1 - Gráfico do Erro em função de t para passo igual à 0.003125 | n = 640



Ademais, calculou-se os  $R(i)s$ , para desta forma explicitar a diminuição do Erro com o aumento do número de iterações do Método. Os resultados foram:

$$\begin{aligned} R1 &= 17.96037346612415 \\ R2 &= 17.053544238760875 \\ R3 &= 16.542757314041598 \\ R4 &= 16.275098340187203 \\ R5 &= 16.138450494090986 \end{aligned}$$

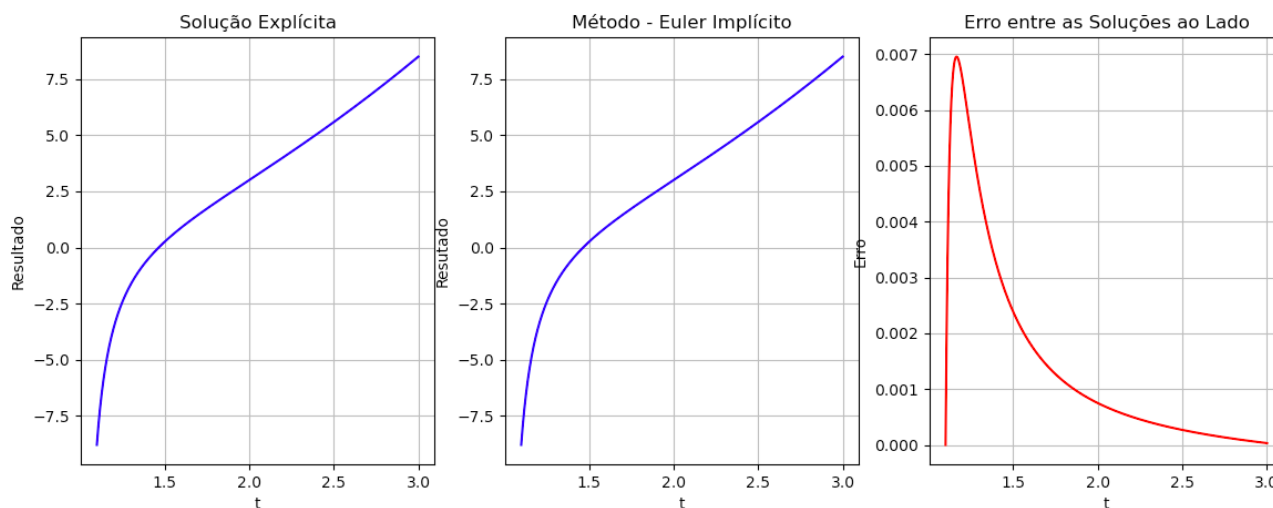
Pode-se perceber que com o aumento da sensibilidade adotada para resolução do problema, o erro (E1) diminui, isto é de se esperar uma vez que os passos são mais justos e não se perdem muitas informações com a discretização proposta. Em complemento, sempre deve-se analisar o número de processos e gasto computacional em vista do resultado alcançado, uma vez que este é um *trade-off* muito importante em situações do tipo.

#### 2.1.2 - Verificação dos Métodos - Euler Explícito

Nesta etapa, executou-se o Método de Euler Implícito para  $n = 5000$ . A solução aproximada, a real, bem como o erro (E2) entre ambas, segue abaixo:



1.2 - Comparação entre a Solução Explícita e o Método de Euler Implícito



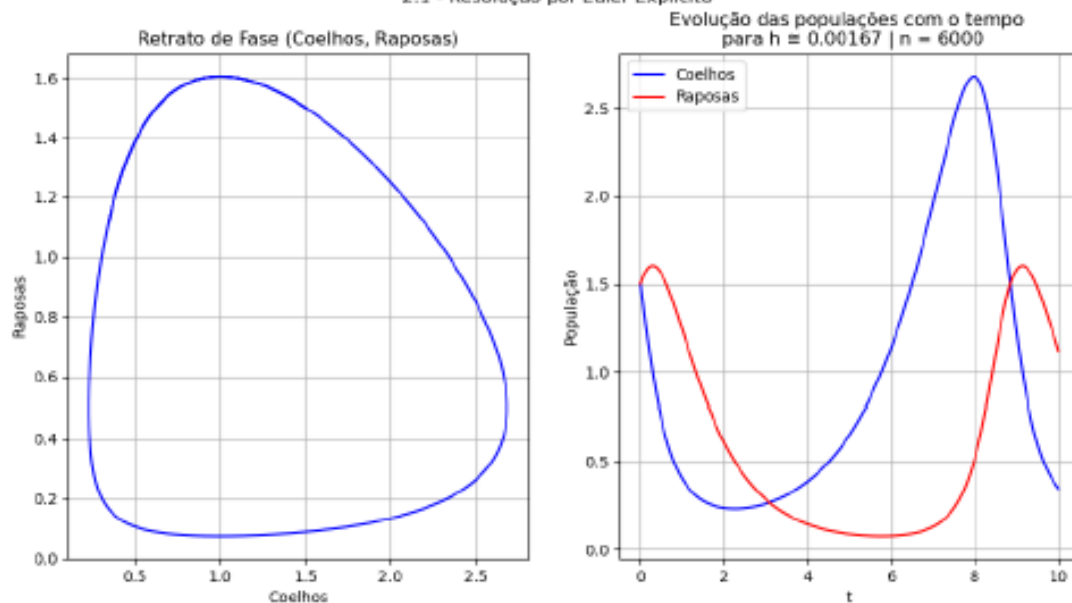
## 2.2 - Modelo presa-predador - Comparação dos Métodos

De posse do correto de funcionamento dos Métodos, se executou o teste de um Modelo presa-predador de três formas diferentes, sendo elas:

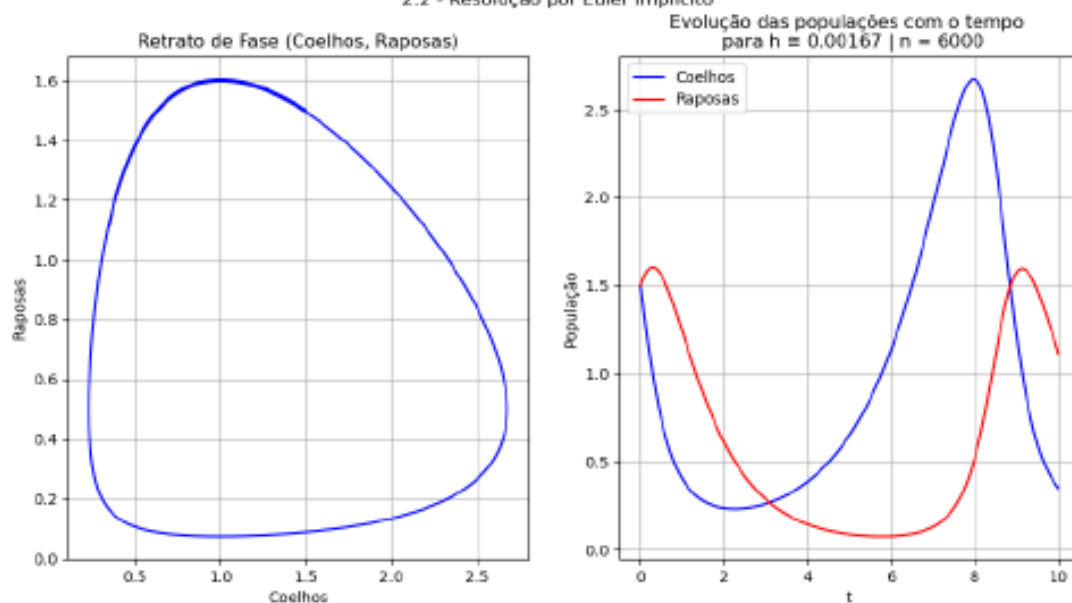
- Pelo Método Euler Explícito (2.1);
- Pelo Método Euler Implícito (2.2);
- Pelo Método Runge-Kutta 4 (2.4).

A imagem, comparando o resultado dos três Métodos, contendo o diagrama de fase, bem como a evolução das populações com o tempo, para cada um deles, segue abaixo:

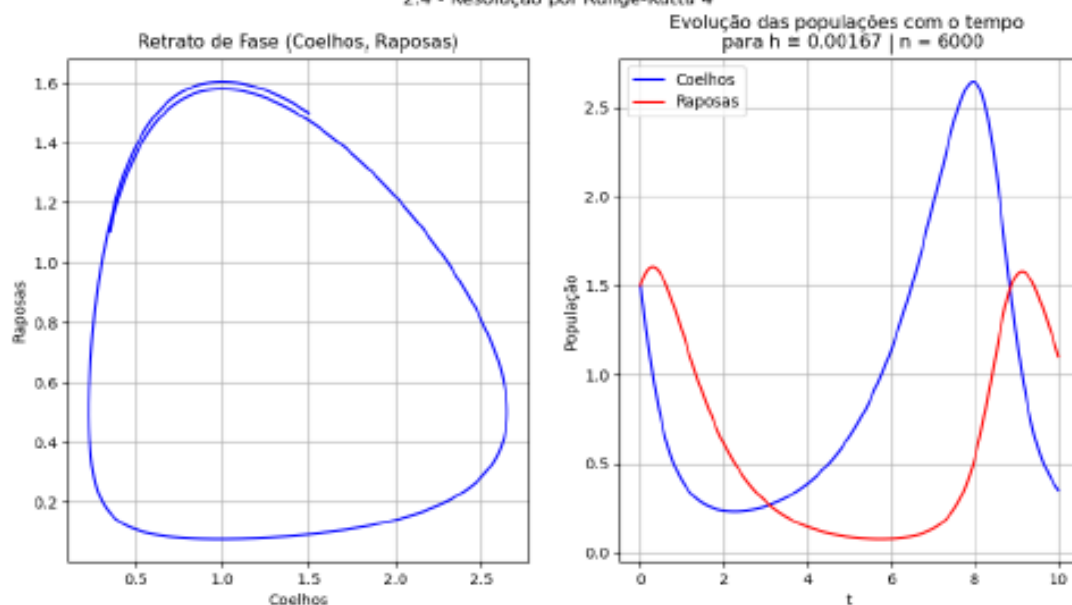
## 2.1 - Resolução por Euler Explícito



## 2.2 - Resolução por Euler Implícito



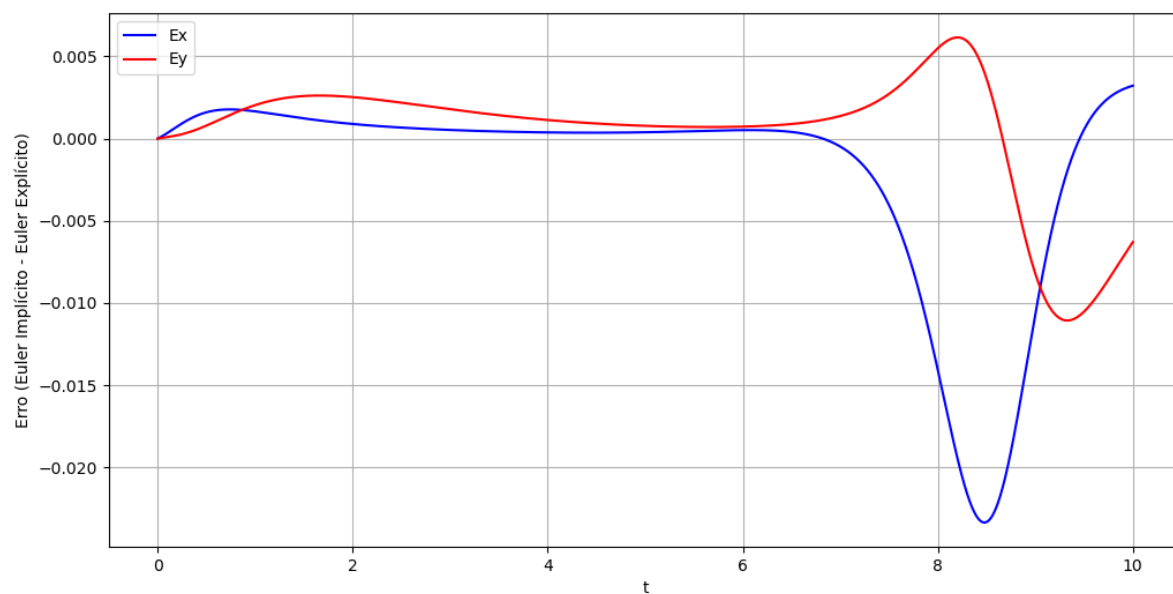
## 2.4 - Resolução por Runge-Kutta 4



### 2.2.1 - Item 2.3 do Enunciado - (Comparação entre Euler Explícito e Euler Implícito)

O resultado apresentado abaixo, evidência que ambas as formas de resolverem o sistema, tanto por Euler Implícito como por Euler Explícito, apresentam devida compatibilidade e a divergência entre os resultados alcançados é muito pequena.

2.3 - Erro - Divergência da Solução por Euler Implícito e Explícito |  $n = 4000$



### **3 - Resultados e Discussões**

Os resultados alcançados ao longo desses experimentos estão plenamente de acordo com o observado na teoria, todos possuem entre si uma compatibilidade muito grande. Ademais, os erros notados são pequenos e tendem a zero com o aumento do tempo e com a melhor resolução de discretização proposta.

#### 4 - Conclusão

Após o uso de vários métodos para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), se nota que todos atingem resultados satisfatórios, diferindo apenas a eficiência de um com relação aos demais. O uso destas ferramentas matemáticas se torna cada dia mais importante na vida das pessoas, visto que o número de dispositivos eletrônicos, os quais aplicamos esses algoritmos para resolver problemas do dia-a-dia, cresce exponencialmente e se integram cada dia mais com a rotina humana. Desta forma, estudar e desenvolver métodos, soluções e arcabouços para máquinas aproximarem raciocínios antes somente possíveis pela capacidade humana, é fato relevante e enriquecedor para a sociedade de forma geral.

## 5 - Referências Bibliográficas

**Solução de Sistemas de Equações Diferenciais**, disponível em: [https://www.ufrgs.br/reatamat/CalculoNumerico/livro-py/pdvi-solucao\\_de\\_sistemas\\_de\\_equacoes\\_diferenciais.html](https://www.ufrgs.br/reatamat/CalculoNumerico/livro-py/pdvi-solucao_de_sistemas_de_equacoes_diferenciais.html) - acesso em 30/03/2021;

**Equações Diferenciais Ordinárias**, disponível em: <https://phkonzen.github.io/notas/EDO/main.pdf> - acesso em 30/03/2021;

**Métodos de Ringe-Kutta Implícitos**, disponível em: [https://www.ufrgs.br/reatamat/CalculoNumerico/livro-py/pdvi-metodos\\_de\\_runge-kutta\\_implicitos.html](https://www.ufrgs.br/reatamat/CalculoNumerico/livro-py/pdvi-metodos_de_runge-kutta_implicitos.html) - acesso em 01/04/2021;

**Métodos de Passo Simples para Equações Diferenciais Ordinárias**, disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/15876/mod\\_resource/content/1/edonum.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/15876/mod_resource/content/1/edonum.pdf) - acesso em 01/04/2021;

**Métodos Numéricos para EDOs**, disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5905240/mod\\_resource/content/2/EDOs.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5905240/mod_resource/content/2/EDOs.pdf) - acesso em 02/04/2021;

**Métodos Numéricos: Método de Euler em Python**, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=A33mYZmrbcY> - acesso em 02/04/2021.