Curso Estruturas de Dados e Algoritmos Expert

Prof. Nelio Alves

Grafos (parte 1)

DEVSUPERIOR

https://devsuperior.com.br

1

Por que estudar grafos?

https://devsuperior.com.br

Prof. Dr. Nelio Alves

2

Motivação

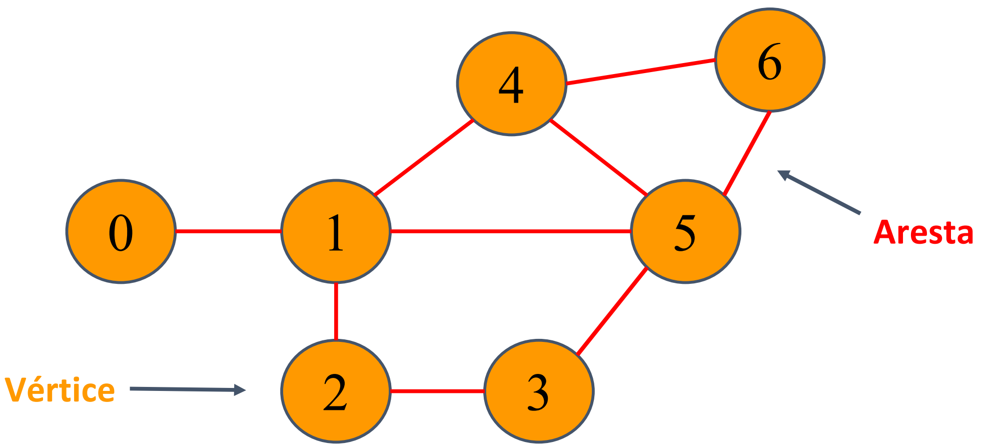
- Programação é central na Computação
  - Estruturas de dados são centrais na Programação

- Já estudamos diversas estruturas de dados
  - Listas estáticas e dinâmicas, sequenciais e encadeadas
  - Pilhas, filas, deques
  - Árvores

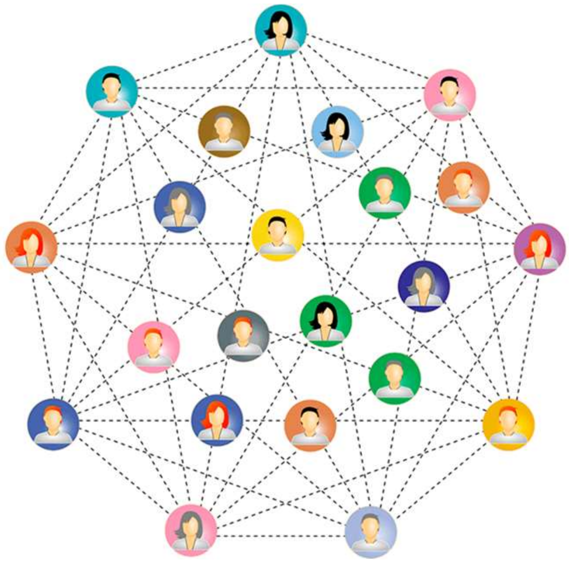
- Como modelar estruturas mais complexas e sofisticadas?
  - Grafos!

Intuitivamente, o que é um grafo?

É uma rede que ajuda a definir e visualizar relações entre vários componentes.



Onde estão os grafos?



Rede social

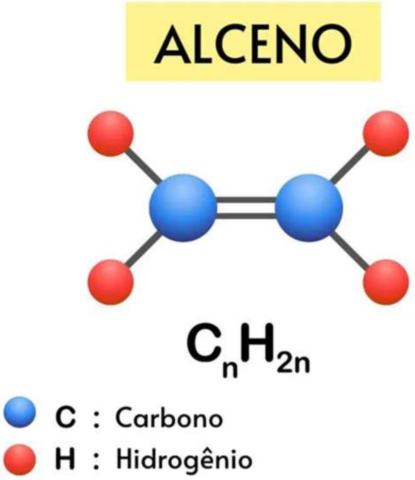
5

Onde estão os grafos?

Mapa metrô São Paulo, 2023

6

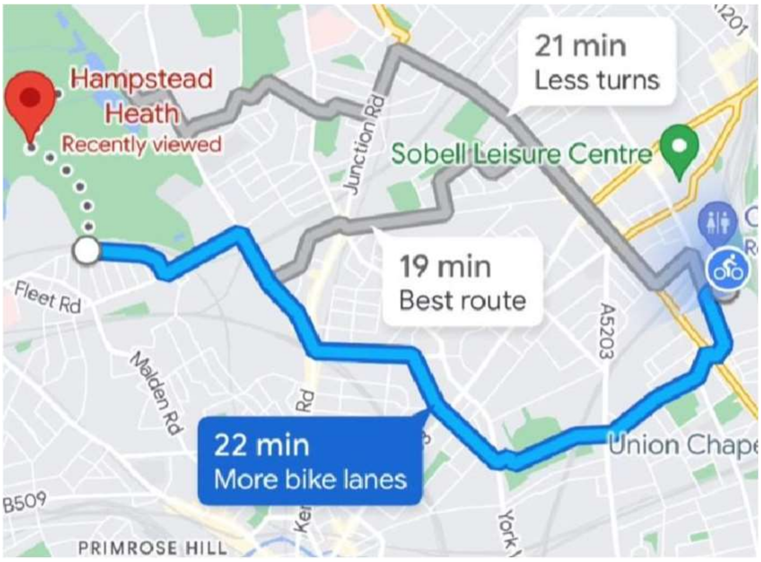
Onde estão os grafos?



Hidrocarboneto

7

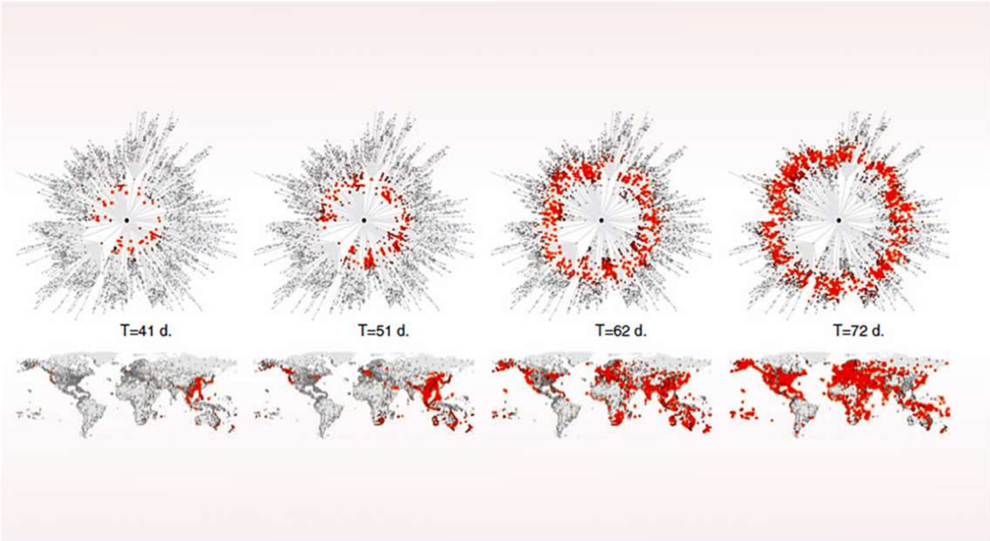
Onde estão os grafos?



Google Maps

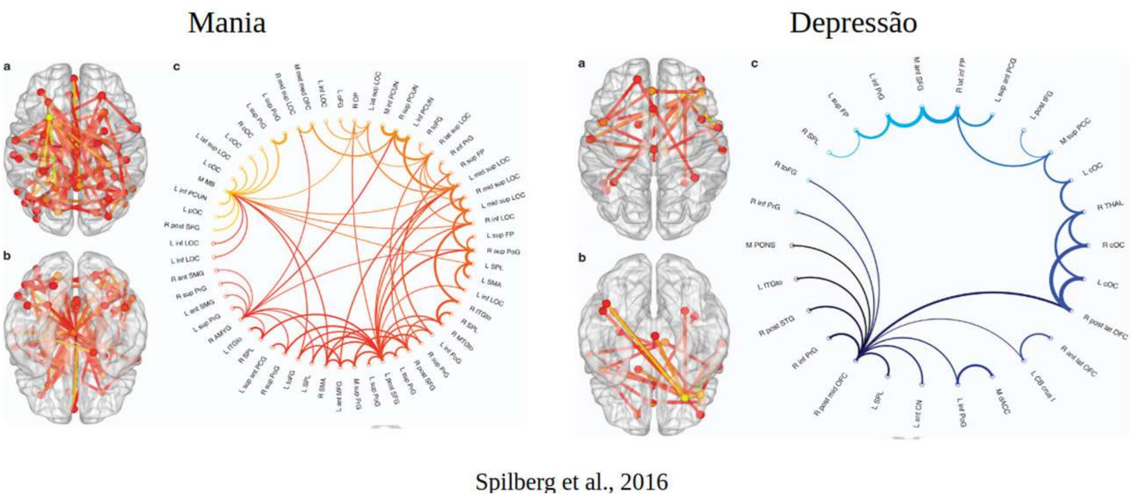
8

Onde estão os grafos?



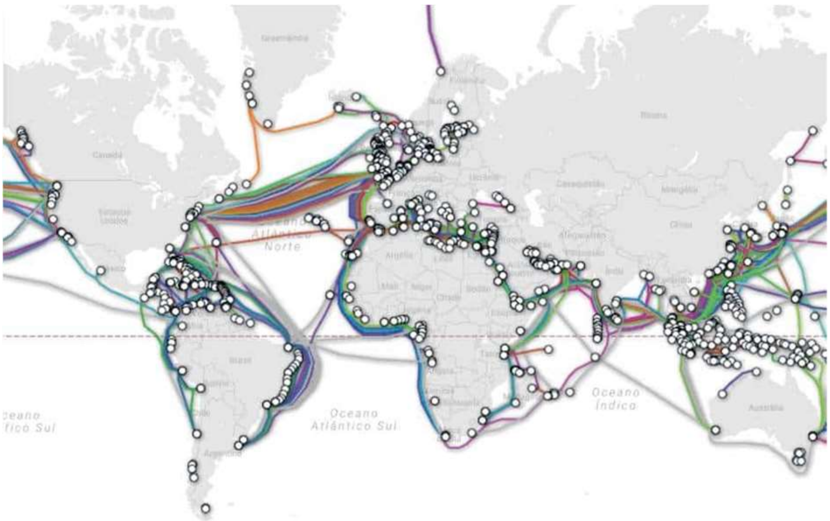
Simulação em rede da difusão da epidemia de SARS em 2003 (Brokmann e Helbing, 2013)

Onde estão os grafos?



Padrão de conectividade de um grupo de pacientes com transtorno bipolar nas duas fases do transtorno.

Onde estão os grafos?



Mapa mostrando cabos submarinos que formam a internet

Por que estudar grafos?

São estruturas presentes em toda a computação!

- Modelar relações e processos em sistemas:
  - Físicos, biológicos, sociais, de informação
- Redes de
  - Comunicação (Facebook, Instagram, Twitter, etc...)
  - Organização de dados
  - Dispositivos computacionais
- Sistemas de recomendação (Amazon, Netflix)
- Otimização de caminhos (Google Maps)

Modelos de grafos

- Sintaxe de linguagem natural
- Estudo de átomos e moléculas
- Medir prestígio/importância
- Espalhamento de rumor
- Amizades entre pessoas
- Padrões de reprodução de animais
- Espalhamento de doenças
- Relação entre genes
- ...

Breve História dos Grafos

https://devsuperior.com.br

Prof. Dr. Nelio Alves

Leonhard Paul Euler (1707-1783)

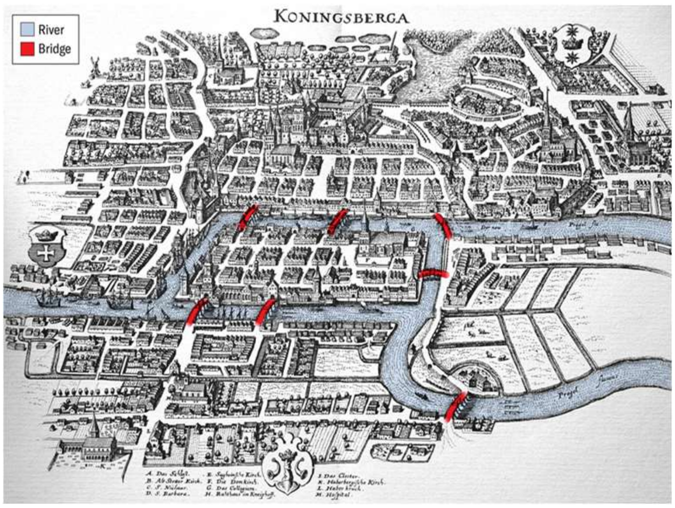
- Considerado “pai” da teoria dos grafos
  - Matemático e físico
  - Viveu na Rússia e na Alemanha
  - Ficou parcialmente cego aos 28 anos e totalmente cego nas 2 últimas décadas de vida
  - Resolveu o **problema das 7 pontes** na cidade de Konigsberg em 1735

Leonhard Euler, quadro a óleo por Johann Georg Brucker

15

As 7 Pontes de Konigsberg

- Na antiga cidade prussiana de Konigsberg havia 7 pontes que conectavam 2 ilhas.
- Os moradores se perguntavam: **é possível fazer um caminho por todas as pontes passando somente uma vez por cada uma?**

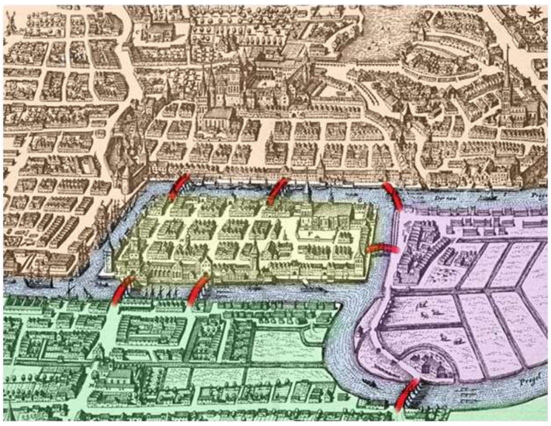


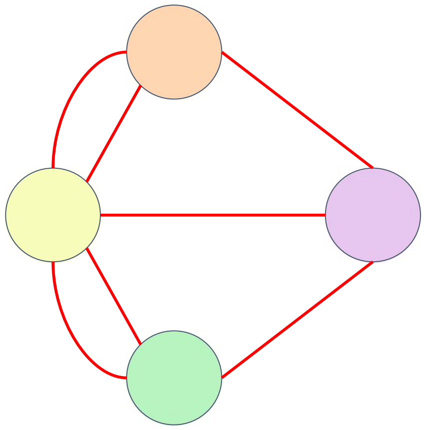
Cidade de Konigsberg na Idade Média. Imagem de Alarmy Stock Photo

16

Como modelar o problema?

Esquema de “vértices” e “arestas”

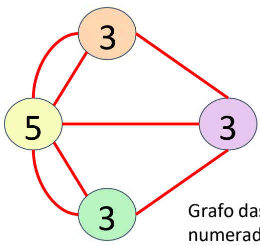




A solução

- Euler publica um artigo em 26 de Agosto de 1735 resolvendo o problema
- Critério
  - Todos os vértices intermediários devem ter número par de arestas
  - Para os vértices de chegada e saída não importa

Todos têm número de arestas ímpar!
Logo, não existe tal caminho.



Grafo das pontes de Konigsberg
numerado pelo número de arestas

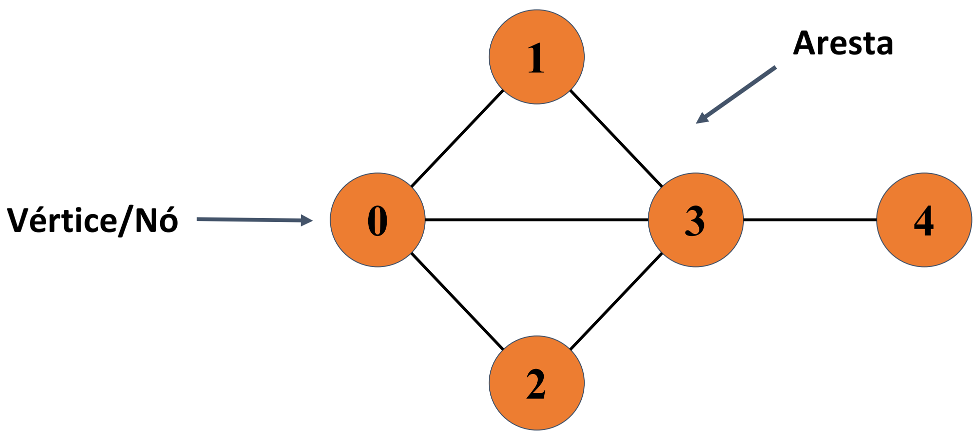
Definição de grafos

https://devsuperior.com.br

Prof. Dr. Nelio Alves

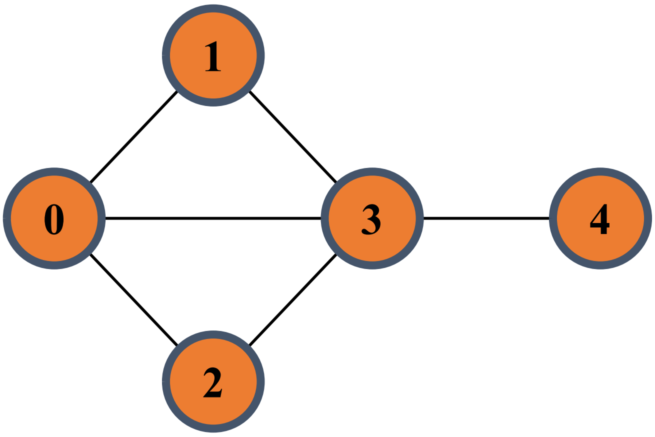
Definição

Um grafo G = (V, A) é um conjunto de vértices V e arestas A onde cada aresta (u, v) é uma conexão entre vértices. u, v ∈ V.



Definição

Um grafo G = (V, A) é um conjunto de vértices V e arestas A onde cada aresta (u, v) é uma conexão entre vértices. u, v ∈ V.

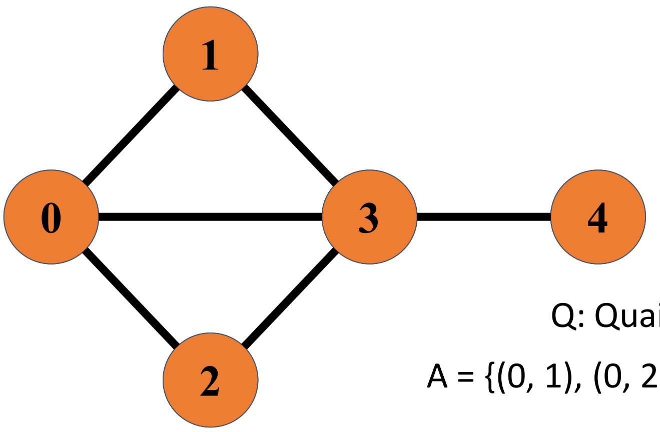


Q: Quais são os vértices?

V = {0, 1, 2, 3, 4}

Definição

Um grafo G = (V, A) é um conjunto de vértices V e arestas A onde cada aresta (u, v) é uma conexão entre vértices. u, v ∈ V.



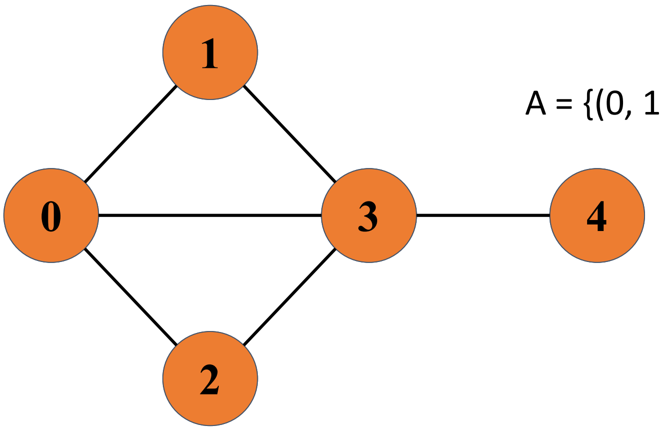
V = {0, 1, 2, 3, 4}

Q: Quais são as arestas?

A = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 4)}

Definição

Um grafo G = (V, A) é um conjunto de vértices V e arestas A onde cada aresta (u, v) é uma conexão entre vértices. u, v ∈ V.



V = {0, 1, 2, 3, 4}

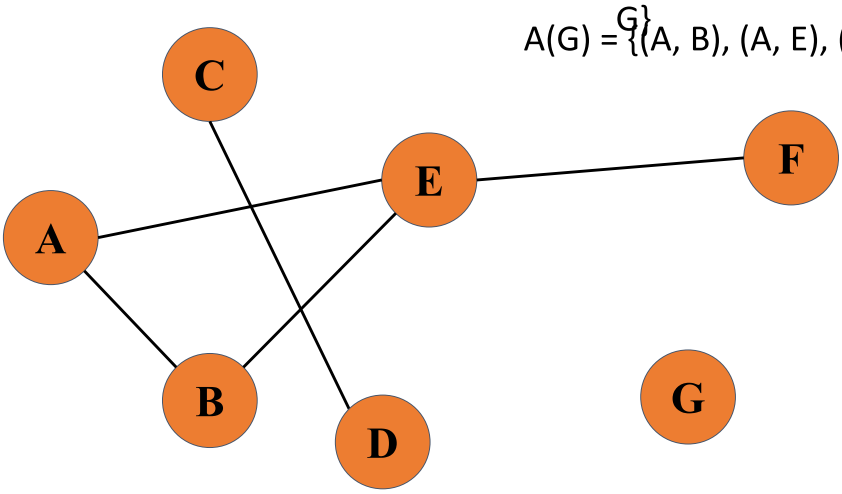
A = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 4)}

Mais um exemplo

Notação alternativa:

V(G) = {A, B, C, D, E, F, G}

A(G) = {(A, B), (A, E), (B, E), (C, D), (E, F)}



Definições básicas

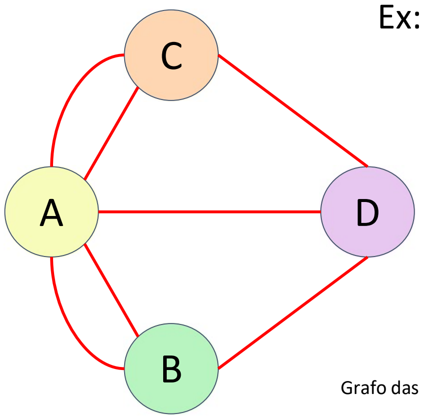
https://devsuperior.com.br

Prof. Dr. Nelio Alves

Definição

Grau de um vértice (degree): número de arestas ligadas a um vértice

Ex: degree(A) = 5, degree(C) = 3

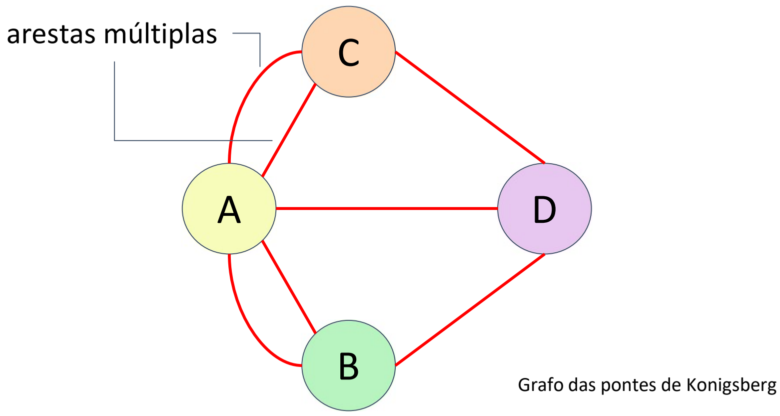


Grafo das pontes de Konigsberg

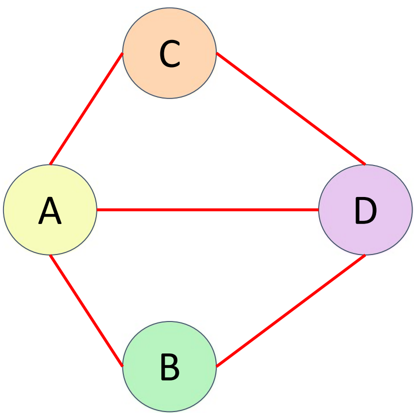
Definição

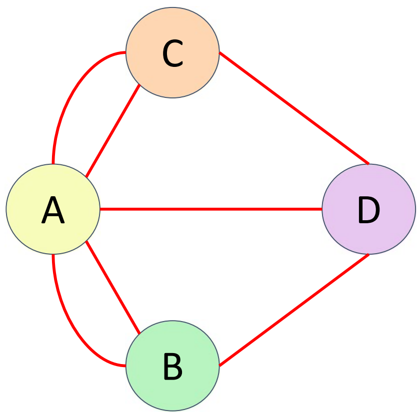
Multigrafo: grafo que possui mais de uma aresta ligando os mesmos dois vértices, possui **arestas múltiplas** (ou **arestas paralelas**)

- Caso contrário: é chamado **grafo simples**



Grafo simples vs **Multigrafo**





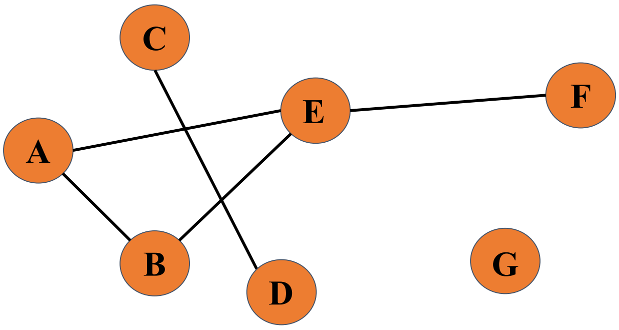
Definições

Ordem: dada pela cardinalidade do conjunto de vértices **|V(G)|**, ou seja, o número de vértices distintos

- Número de arestas de um grafo é dado por **|A(G)|**

|V(G)| = 7

|A(G)| = 5



Definições

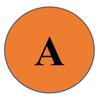
Grafo Trivial: grafo de ordem 1, sem arestas

V = {A}

A = ∅

|V(G)| = 1

|A(G)| = 0



Grafo Vazio: não possui vértices, então G = (∅, ∅). Geralmente usado como passo inicial em provas por indução ou como contra exemplo

Definição

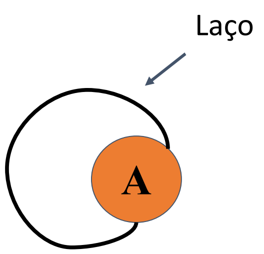
Laço: aresta a de um grafo G que tem o mesmo vértice como extremos, ou seja, a = (x, x)

V = {A}

A = {(A, A)}

|V| = 1

|A| = 1



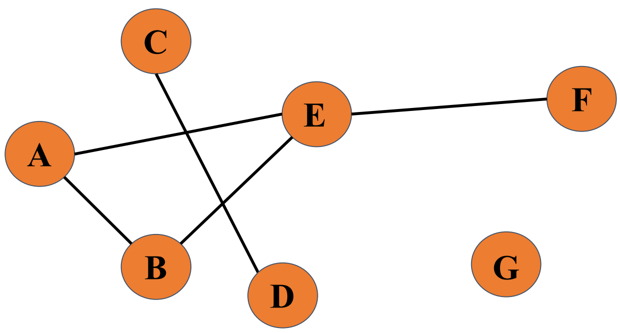
Definição

Vértices adjacentes: vértices x e y são **adjacentes** (ou **vizinhos**) se uma aresta (x, y) os conecta

A **é adjacente a** E

E **é vizinho a** A

A **NÃO é adjacente a** C



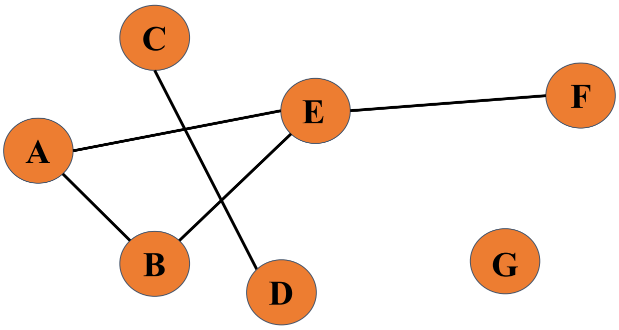
Definição

Arestas adjacentes: duas arestas são **adjacentes** (ou **vizinhas**) se possuem um mesmo vértice extremo

(A, B) **é adjacente a** (B, E)

(A, B) **NÃO é adjacente a** (E, F)

A aresta a = (E, F) é dita **incidente** a E e F



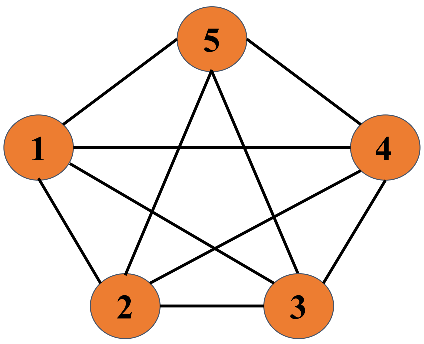
Definição

Grafo completo: grafo simples cujos vértices são todos adjacentes

V = {1, 2, 3, 4, 5}

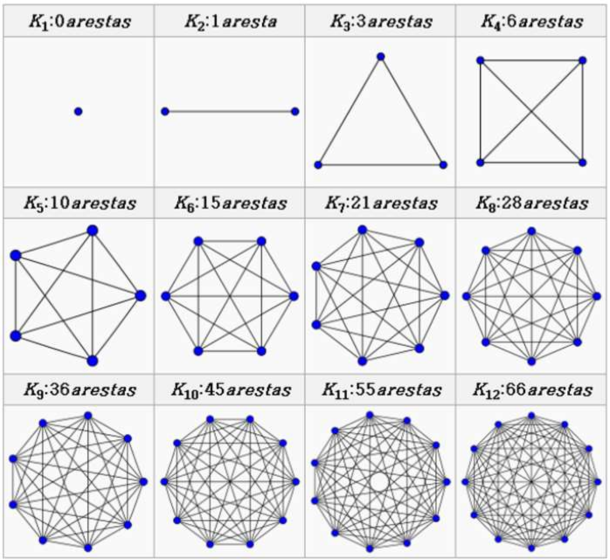
A = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)}

|V| = 5 e |A| = 10



Grafo K_5

Grafos Completos - Mais exemplos



Grafos Completos

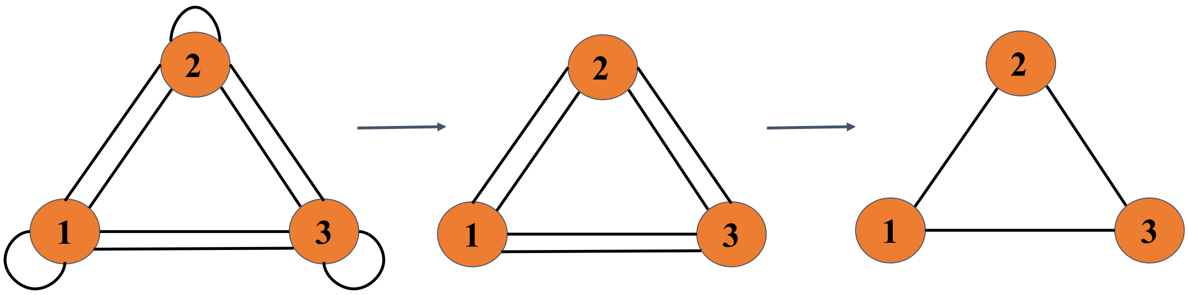
Questão

- Quantas arestas possui um grafo completo?

  - Suponha que tenhamos n vértices
    - Então temos n^2 arestas possíveis, incluindo laços
  - Como o grafo é simples
    - removemos os laços (um para cada vértices)
      - $n^2 - n$
    - removemos arestas duplicadas (u, v) e (v, u)
      - $(n^2 - n) / 2 = n (n - 1) / 2$;

Portanto, um grafo completo K_n possui **n(n-1)/2** arestas

Ex: Grafo K_3



Passo 1
- n^2 arestas possíveis, incluindo laços

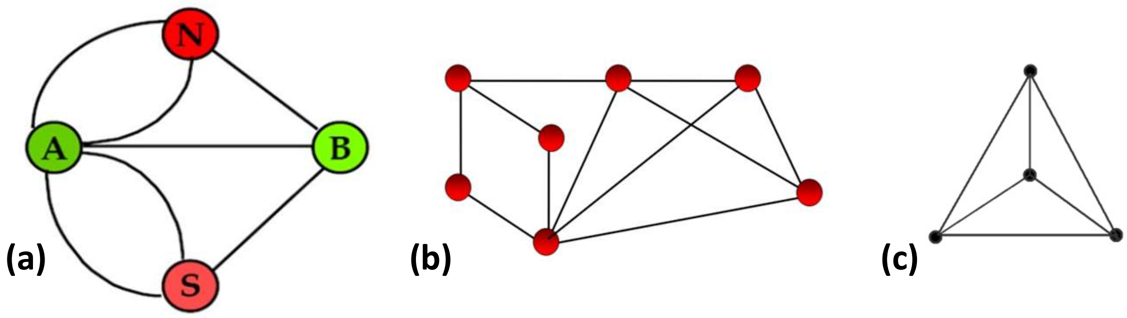
Passo 2
- removemos os laços (um para cada vértices), $n^2 - n$

Passo 3
- removemos arestas duplicadas (u, v) e (v, u)
- $(n^2 - n) / 2 = n (n - 1) / 2$;

Portanto, um grafo completo K_n possui **n(n-1)/2** arestas

$|A(K_3)| = 3(3 - 1) / 2 = 3$

Exercícios de Fixação



- Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
- Quais dos grafos acima são completos?
- Quais dos grafos acima são simples?
- No grafo (a), quais vértices são adjacentes a N?
- No grafo (a), quais arestas são adjacentes a (N, B)?

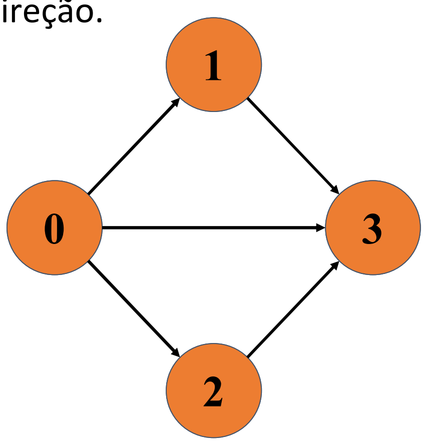
Tipos de grafos

https://devsuperior.com.br

Prof. Dr. Nelio Alves

Definição

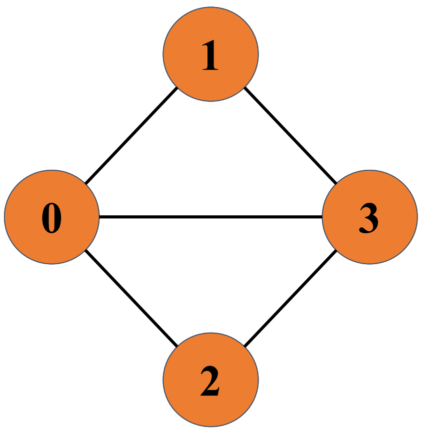
Grafo orientado/dirigido: grafo G = (V, A) que consiste de um conjunto V de vértices e de um conjunto A de arestas de pares ordenados de vértices distintos. Isto é, cada aresta tem uma única direção.



V(G) = {0, 1, 2, 3}

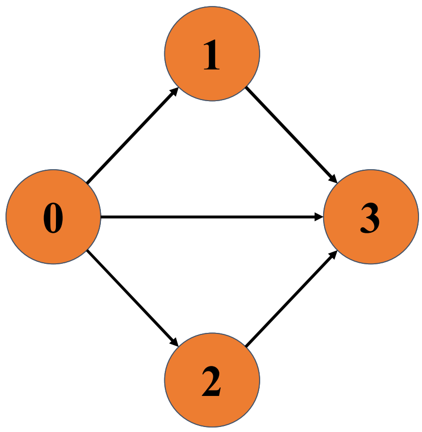
A(G) = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)}

Grafo não-orientado



Aresta (u, v) implica (v, u)

Grafo orientado



Aresta unidirecional

41

Graus em grafos orientados

Grau de Entrada (in-degree): $d_{in}(v)$, número de arestas que entram em um vértice v

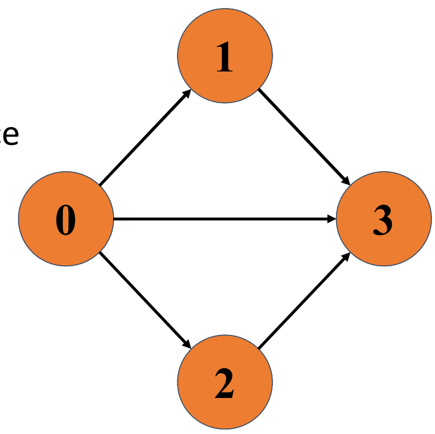
Grau de Saída (out-degree): $d_{out}(v)$, número de arestas que saem de um vértice v

Grau (geral): $d_{in}(v) + d_{out}(v)$

Ex:

$d_{in}(3) = 3$, $d_{in}(0) = 0$

$d_{out}(0) = 3$, $d_{out}(2) = 1$



42

Graus em grafos orientados

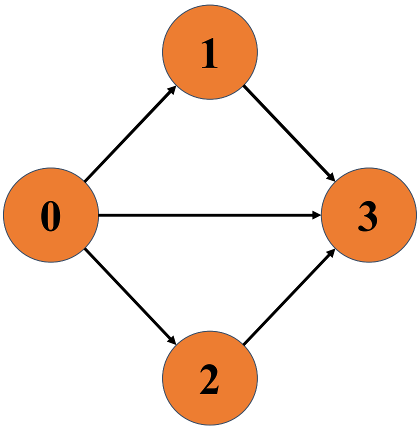
Sumidouro: vértice com grau de saída nulo

Fonte: vértice com grau de entrada nulo

Grafo regular: grafo no qual todos seus vértices têm o <u>mesmo grau</u>

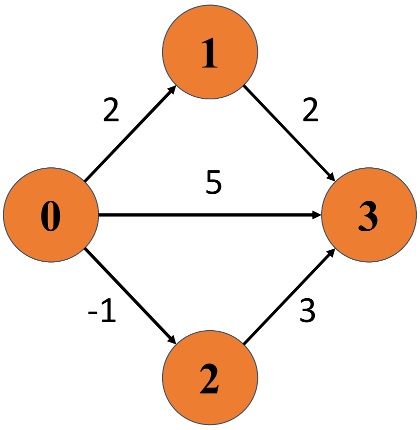
Ex:

3 é um **sumidouro**
0 é uma **fonte**



Definição

Grafo valorado: grafo G = (V, A) constituído de V vértices conectados por um conjunto de arestas com **pesos** A.



- Arestas agora são representadas por triplas (u, v, w), em que **v** e **w** são vértices de V e **w** é o peso.

V(G) = {0, 1, 2, 3}

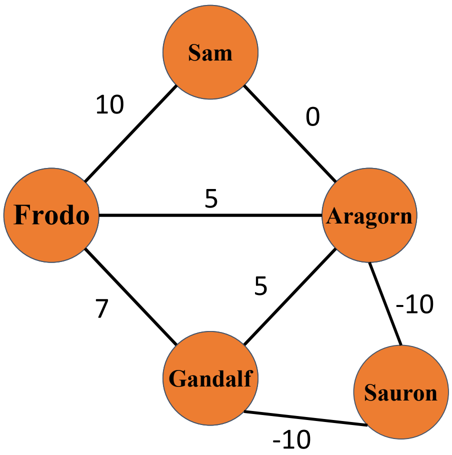
A(G) = {(0, 1, 2), (0, 2, -1), (0, 3, 5), (1, 3, 2), (2, 3, 3)}

Exemplo

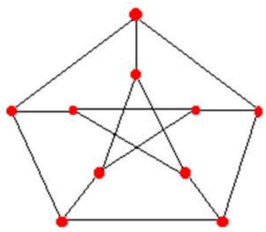
Qual o nível de amizade entre um grupo de pessoas?

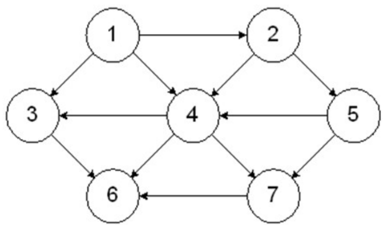
- O peso das arestas pode representar a força da relação entre os vértices.

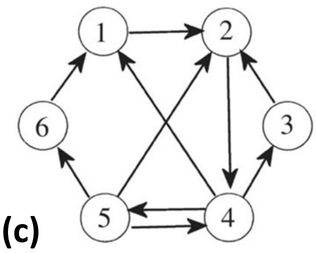
  Ex:
  - -10: inimigo
  - 0: indiferente
  - 5: colega
  - 10: muito amigo



Exercícios de Fixação

(a) 

(b) 

(c) 

- O grafo (a) é regular? Por quê?
- Existe em alguma fonte ou sumidouro no grafo (b)?
- E no grafo (c)?

Caminhos em grafos

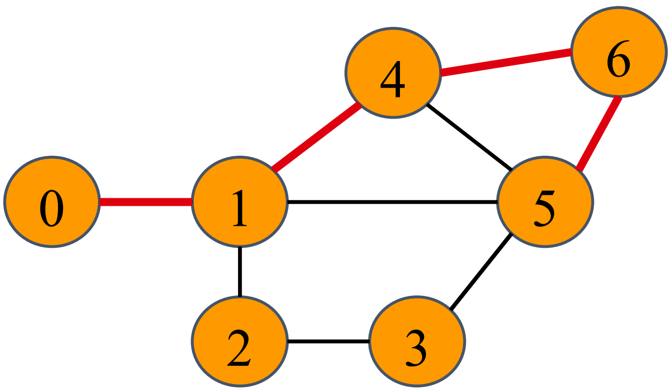
https://devsuperior.com.br

Prof. Dr. Nelio Alves

Definição

Caminho: sequência de vértices conectados por arestas

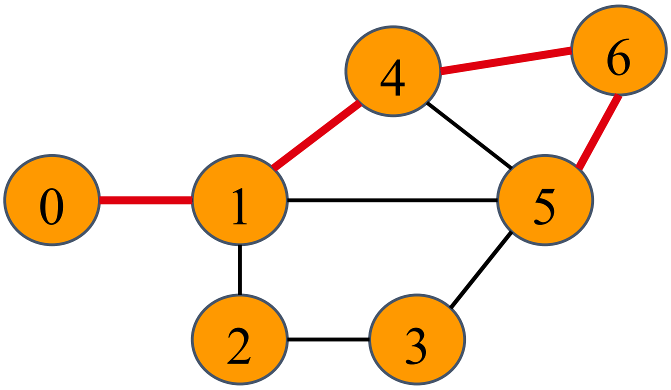
0 ⟶ 1 ⟶ 4 ⟶ 6 ⟶ 5 é um **caminho**



Definição

Tamanho de um caminho: número de arestas em um caminho

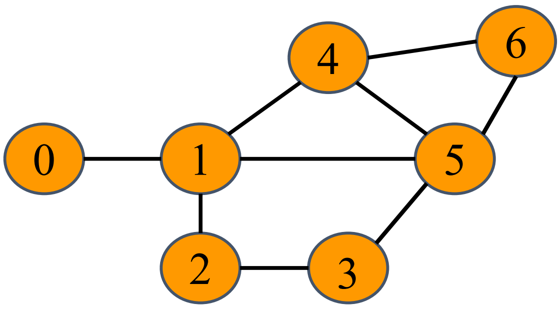
0 ⟶ 1 ⟶ 4 ⟶ 6 ⟶ 5 tem **tamanho** 4



Definição

Caminho simples: caminho composto por vértices distintos

- 1 ⟶ 4 ⟶ 6 ⟶ 5 é um **caminho simples**
- 1 ⟶ 4 ⟶ 5 ⟶ 1 **NÃO é simples**

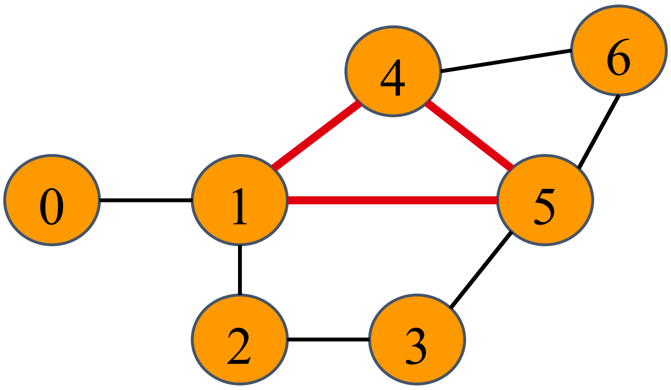


Definição

Ciclo: caminho no qual o vértice inicial e final são iguais

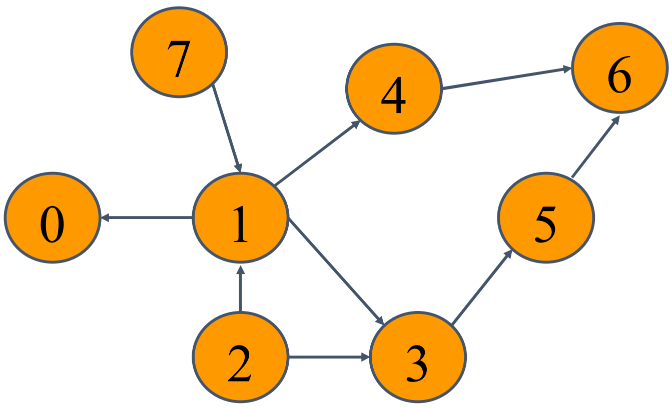
- Um grafo é dito cíclico se apresentar ao menos um ciclo

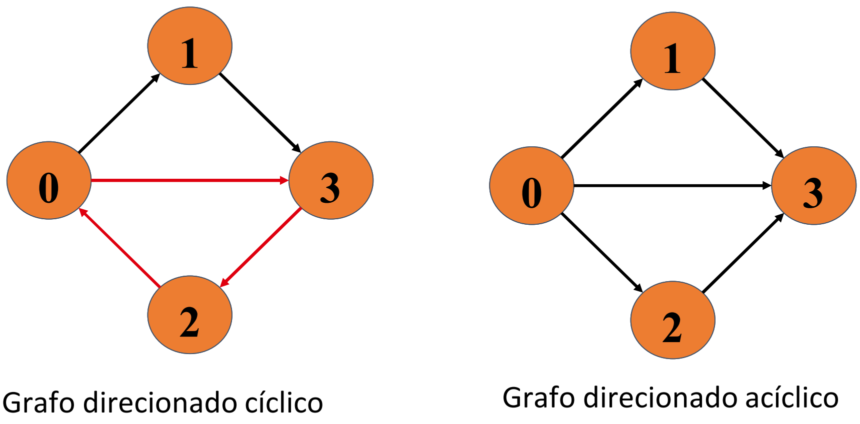
1 ⟶ 4 ⟶ 5 ⟶ 1 é um **ciclo**



DAGs (Directed Acyclic Graphs)

São grafos direcionados que não possuem ciclos.





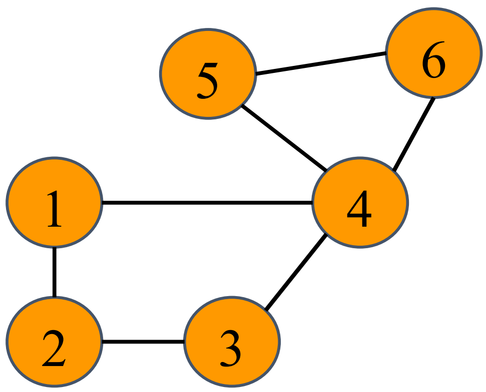
Definições

Caminho euleriano: caminho que passa por cada e toda aresta do grafo exatamente uma vez

- Pode formar **ciclo euleriano**
- Grafo é **euleriano** se possui ciclo euleriano

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1$
é um **ciclo euleriano**

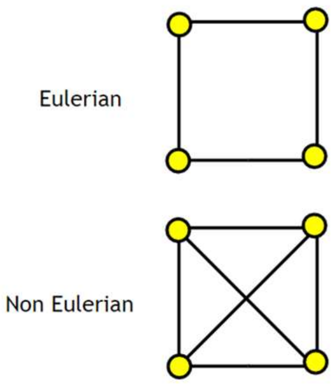
Portanto, este grafo é **euleriano**



Critério de existência de caminho euleriano

Um grafo possui **Caminho euleriano** se atender a uma das duas condições:

- Todos os vértices do grafo têm grau par
- Todos os vértices (ignorando os de grau zero) tem grau par, exceto dois vértices que possuem grau ímpar. Nesse caso, os dois vértices de grau ímpar são o início e o fim.



Definições

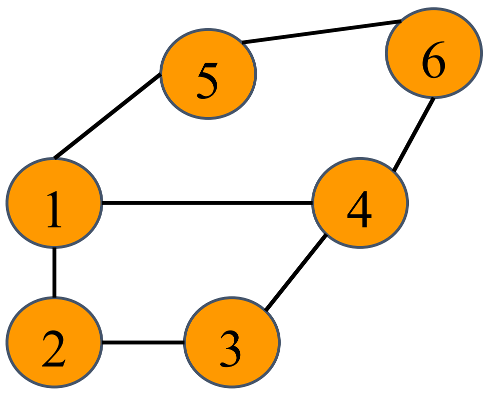
Caminho hamiltoniano: caminho que passa por cada e todo vértice do grafo exatamente uma vez

- Pode formar **ciclo hamiltoniano**
- Grafo é **hamiltoniano** se possui ciclo hamiltoniano

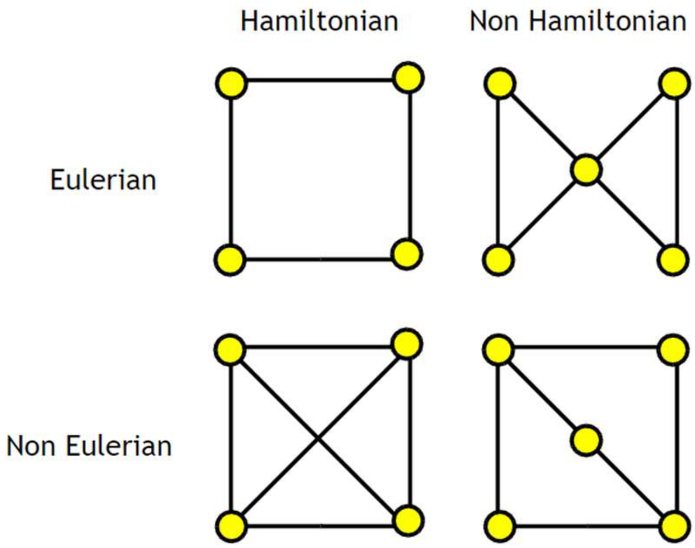
6 ⟶ 5 ⟶ 1 ⟶ 4 ⟶ 3 ⟶ 2 é um **caminho hamiltoniano**

5 ⟶ 6 ⟶ 4 ⟶ 3 ⟶ 2 ⟶ 1 ⟶ 5 é um **ciclo hamiltoniano**

Portanto, este grafo é **hamiltoniano**

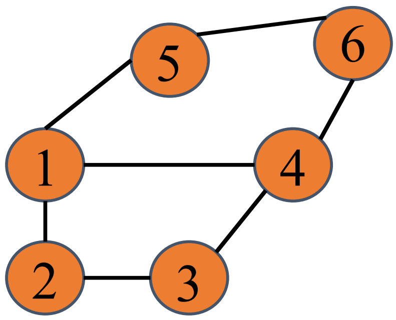


Grafos hamiltonianos vs eulerianos

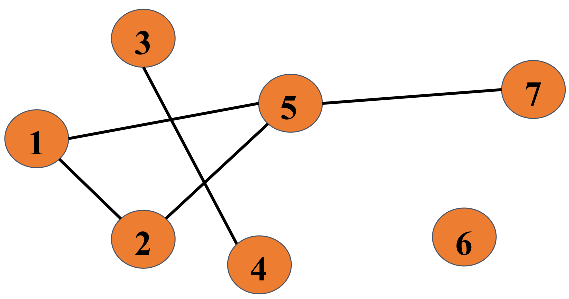


Definição

Grafo conexo: grafo no qual existe um caminho entre cada par de vértices, caso contrário, é **desconexo**



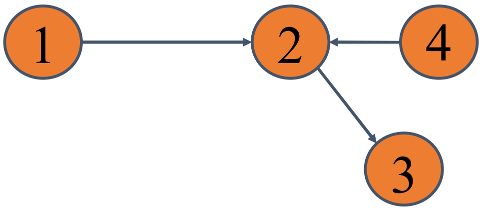
Conexo



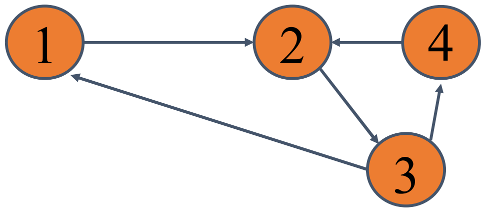
Desconexo

Definição

Grafo orientado fortemente conexo: grafo orientado no qual existe um caminho entre cada par de vértices (x, y) e também entre (y, x), ou seja, caminho de ida e volta.



Conexo*

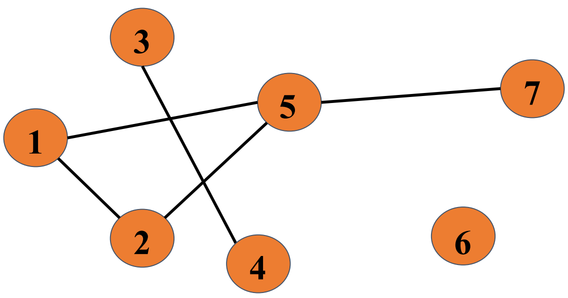


Fortemente Conexo

*Aqui o grafo é conexo porque, considerando seu equivalente não-direcionado, todos os vértices estão conectados por um caminho.

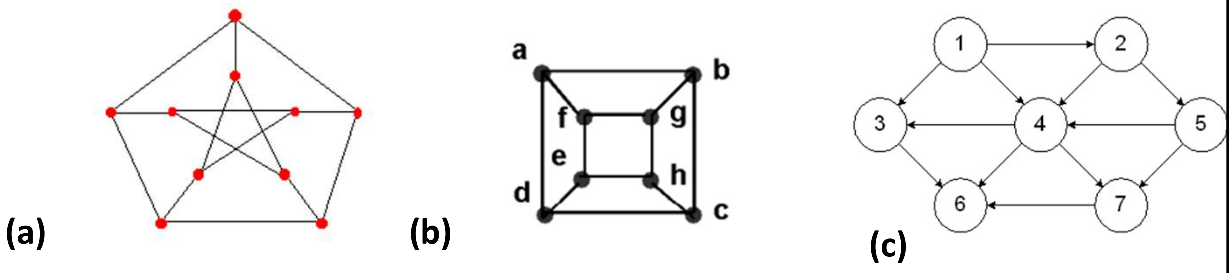
Definição

Componente conexa: subgrafo conexo



Possui 3 componentes conexas

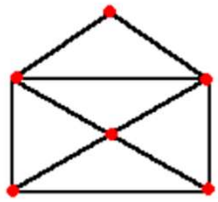
Exercícios de Fixação



- Quais dos grafos acima são cíclicos?
- Indique os grafos conexos.
- Quais dos grafos acima são eulerianos?

Problema do desenho da casa

- Uma criança diz que para fazer o desenho abaixo colocou a ponta do lápis numa das bolinhas e com movimentos contínuos (sem levantar nem retroceder o lápis) traçou as linhas que formam o desenho, cada linha uma única vez. A mãe da criança acha que ela está trapaceando, pois não foi capaz de achar nenhuma sequência que pudesse produzir tal resultado.
- A mãe está certa?

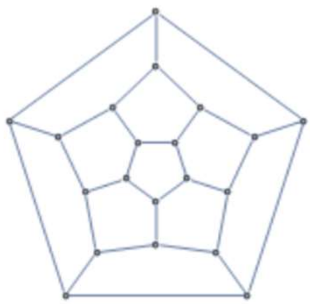


O assassinato

- O cenário abaixo é o mapa de uma residência em que ocorreu um assassinato. Um conhecido detetive (que cursou Computação) foi chamado para investigar o caso. O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (local onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida deixar aquela sala pela mesma porta que havia entrado. O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa. O detetive avaliou a planta da residência e em poucos minutos declarou solucionado o caso. O que ele concluiu? Que raciocínio ele usou?

O problema do caixeiro viajante

- Um caixeiro viajante quer otimizar sua rota e passar pelas cidades de sua região uma única vez, terminando na cidade de origem. Considere que ele tem o mapa abaixo em mãos, em que cada vértice representa uma cidade e as arestas as estradas entre elas. É possível satisfazer a vontade do caixeiro?



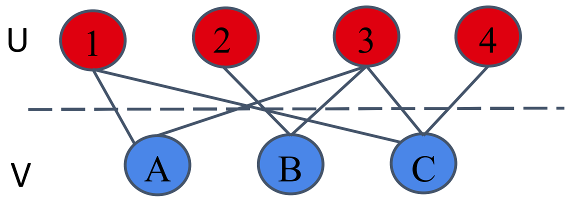
Estruturas em grafos

https://devsuperior.com.br

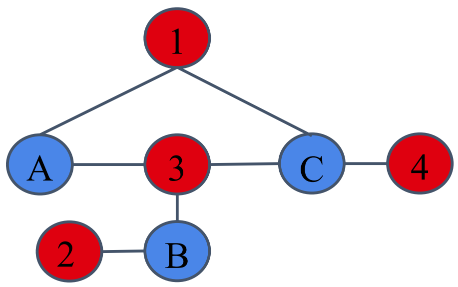
Prof. Dr. Nelio Alves

Definição

Grafo Bipartido: grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos distintos U e V tais que toda aresta conecta um vértice em U a um vértice em V

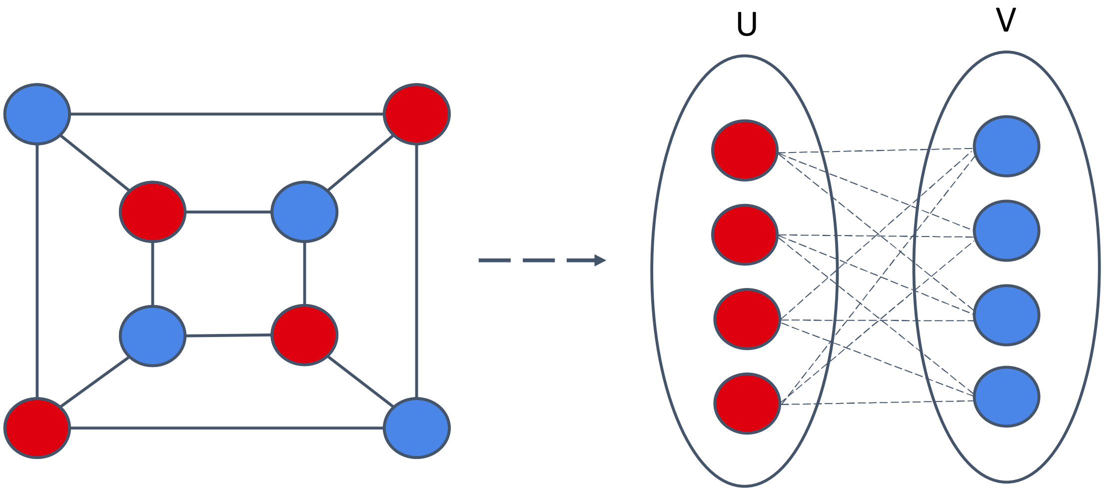


Linha divide grafo em dois conjuntos U e V



Outra visualização, cada vértice só se liga a um do outro grupo.

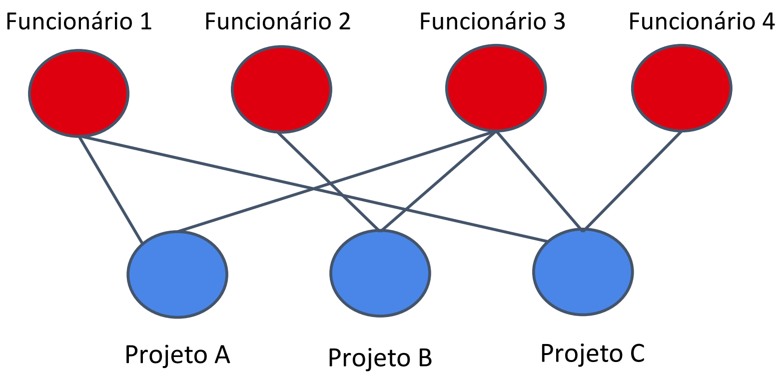
Nem sempre é simples de visualizar um grafo bipartido...



Exemplo prático

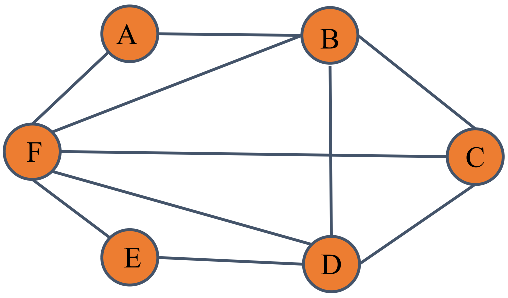
Alocação de funcionários em diferentes projetos

- Quantos funcionários estão em um dado projeto?
- Quantos projetos um funcionário tem?
- Existem funcionários sobrecarregados?

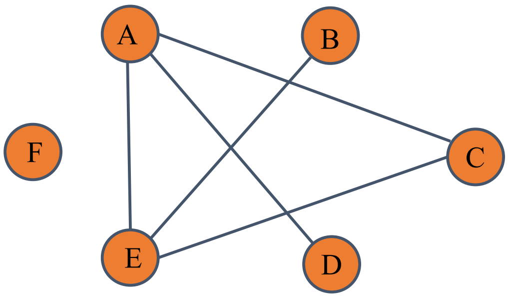


Definição

Complemento: o complemento de um grafo G = (V, A) é um grafo G' = (V', A') tal que V' = V e A' é complementar a A.



G

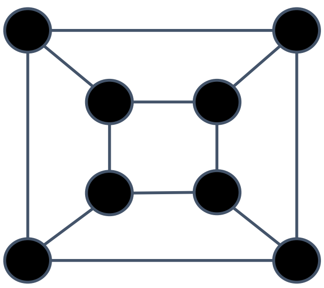


G' = complemento de G

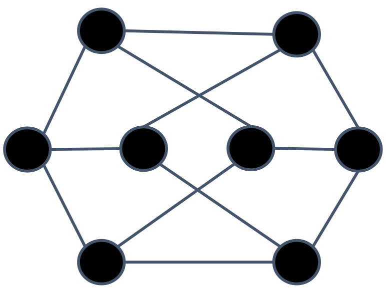
G' tem os mesmos vértices, mas somente arestas que G não tem!

Definição

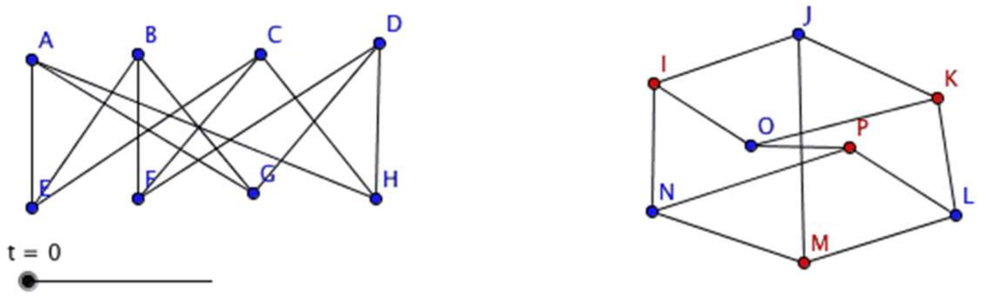
Isomorfismo: dois grafos são **isomorfos** se apresentam as mesmas propriedades estruturais, ou seja, preserva-se as relações de incidência vértice-aresta.



G



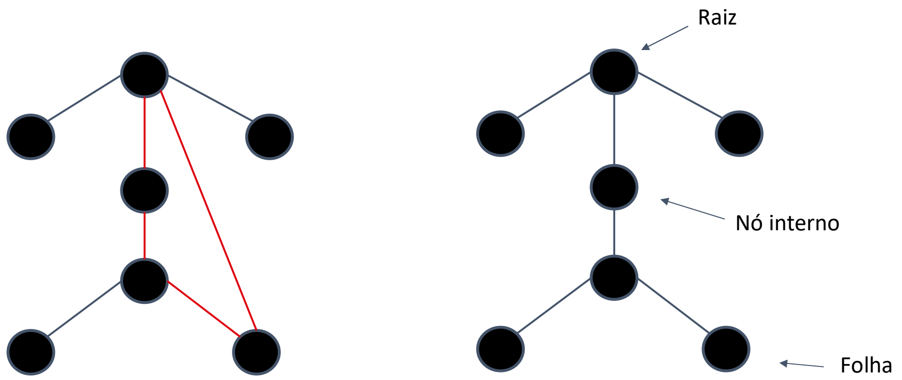
É isomorfo a G



Show that these are two different representations of the same bipartite graph.

Definição

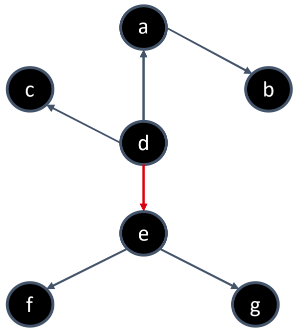
Árvore: grafo <u>conexo</u> e <u>acíclico</u>



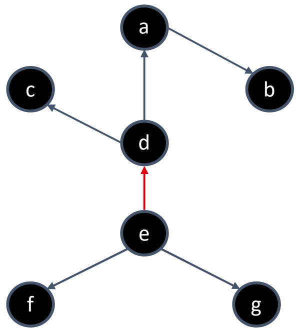
Não é árvore **É árvore**

Definição

Árvore enraizada: árvore orientada em que há um vértice do qual todas as arestas se afastam (raiz)



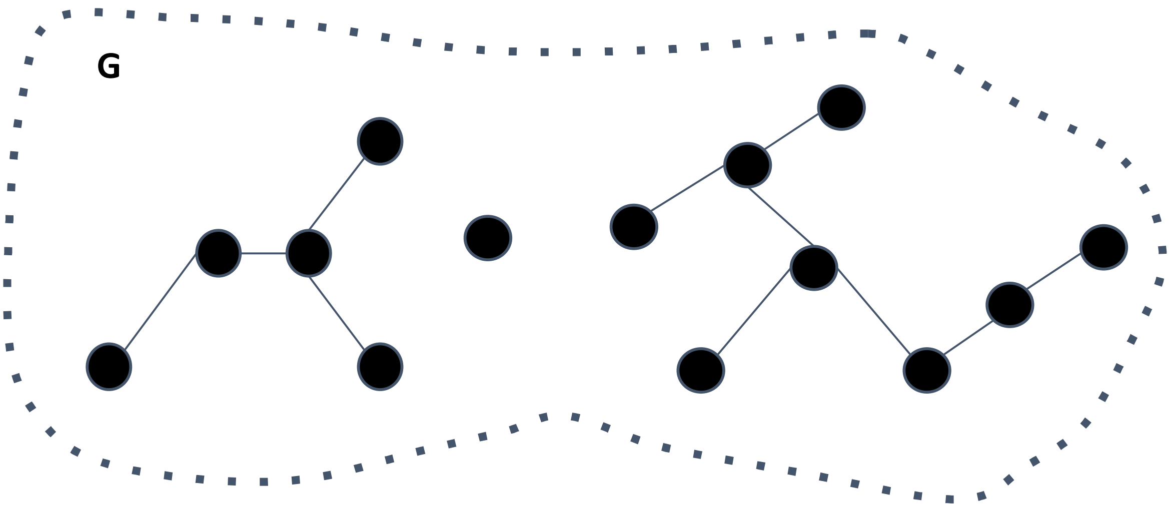
Árvore enraizada em d



Árvore enraizada em e

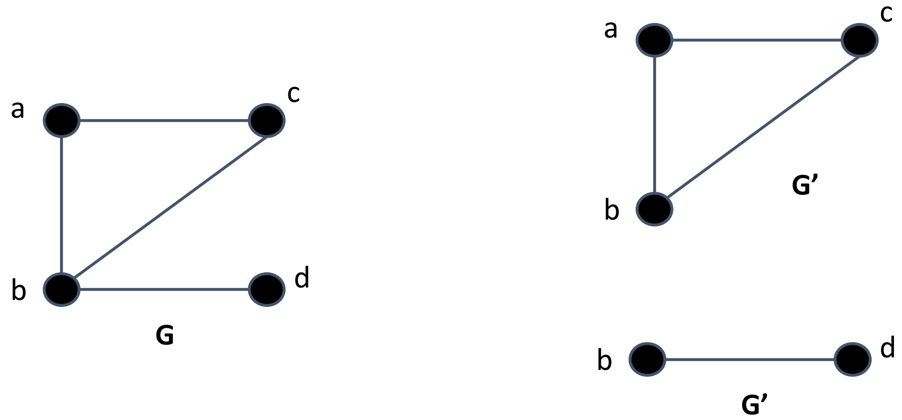
Definição

Floresta: conjunto de árvores



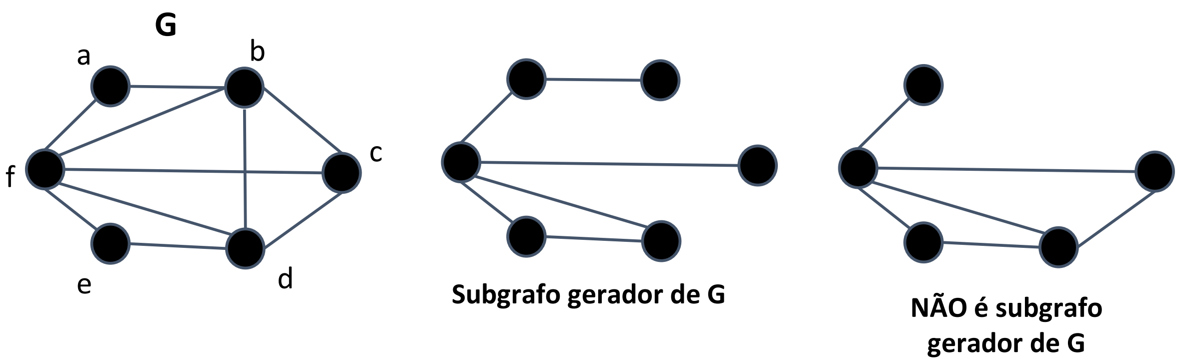
Definição

Subgrafo: é um grafo G' = (V', A'), originado de um grafo G = (V, A), tal que V'⊆ V e A'⊆ A.



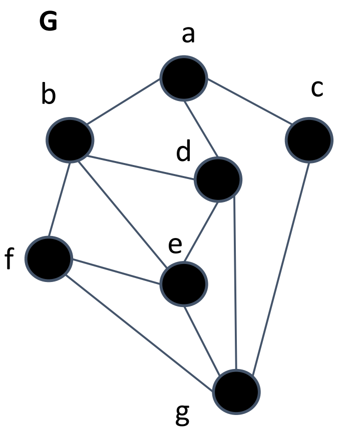
Definição

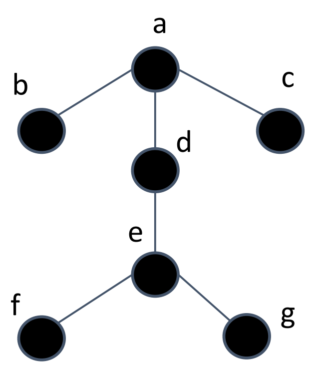
Subgrafo gerador: é um grafo G' = (V', A'), originado de um grafo G = (V, A), tal que V'= V e A'⊆ A.



Definição

Árvore geradora: subgrafo gerador que é uma árvore

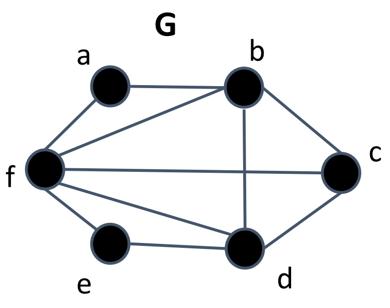


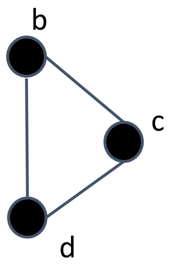


Árvore geradora de G

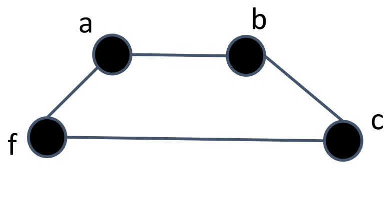
Definição

Subgrafo induzido: é um grafo G' = (V', A'), originado de um grafo G = (V, A), tal que V'⊆ V e A' contém <u>todas as arestas</u> em A que têm as duas extremidades em V'.





Subgrafo induzido de G

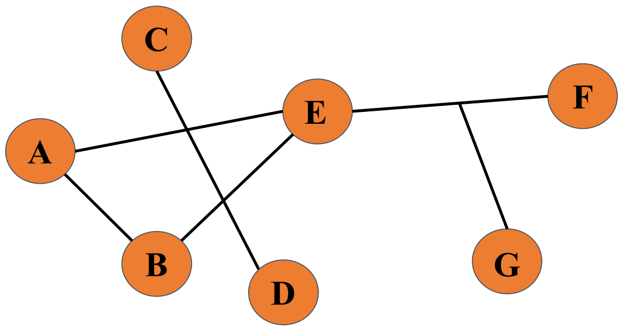


NÃO é subgrafo induzido de G

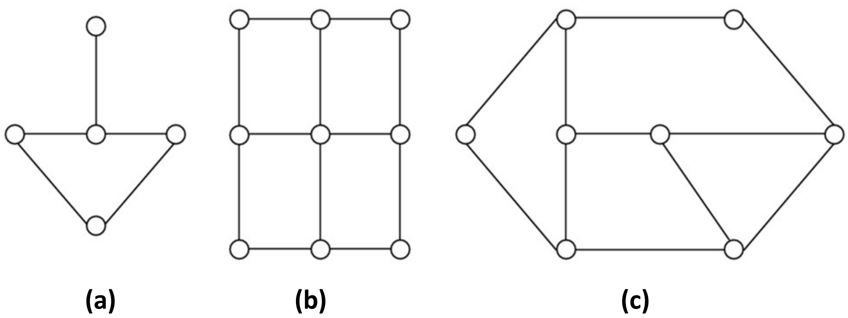
Pois (b, f) não está em A'

Definição

Hipergrafo: grafo em que há arestas que conectam mais de 2 vértices



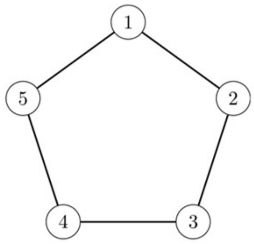
Exercícios de Fixação



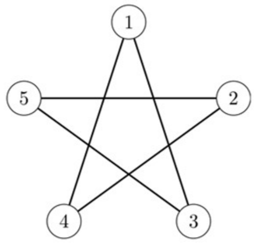
- Qual dos três grafos é bipartido?
- Desenhe uma árvore geradora de (c).
- Desenhe um subgrafo induzido de (b).

Exercícios de Fixação

(a)



(b)



- Qual o complemento do grafo (b)?
- Os grafos (a) e (b) são isomorfos?