
PROJETO 2

Arthur Assis Gonçalves

cc22300@g.unicamp.br

Vinícius Dos Santos Andrade

cc22333@g.unicamp.br

TI327 - Tópicos em Inteligência Artificial

Prof. Dr. Guilherme Macedo

Colégio Técnico de Campinas - UNICAMP

Campinas, 19 de Junho de 2024

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 4 |
| 2 | Descrição | 5 |
| 2.1 | Descrição 1º problema | 5 |
| 2.2 | Descrição 2º problema | 5 |
| 2.3 | Descrição 3º problema | 5 |
| 2.4 | Descrição 4º problema | 6 |
| 2.5 | Descrição 5º problema | 6 |
| 2.6 | Descrição 7º problema | 6 |
| 3 | Desenvolvimento | 7 |
| 3.1 | Código 1º problema | 7 |
| 3.2 | Código 2º problema | 10 |
| 3.3 | Código 3º problema | 11 |
| 3.4 | Código 4º problema | 12 |
| 3.5 | Código 5º problema | 13 |
| 3.6 | Código 7º problema | 14 |
| 4 | Resultados | 15 |
| 4.1 | Testes Computacionais | 15 |
| 4.2 | Experimento | 16 |
| 4.2.1 | Ferramentas e Justificativas | 16 |
| 4.2.2 | Objetivos | 16 |
| 4.2.3 | Parâmetros e Resultados | 17 |
| 4.3 | Solução 1º Problema | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3.1 | Análise do Gráfico 2D (Figura 1) | 18 |
| 4.3.2 | Análise do Gráfico 3D (Figura 2) | 19 |
| 4.4 | Solução 2º Problema | 21 |
| 4.4.1 | Análise do Gráfico 2D (Figura 3) | 21 |
| 4.4.2 | Análise do Gráfico 3D (Figura 4) | 22 |
| 4.5 | Solução 3º Problema | 24 |
| 4.5.1 | Análise do Gráfico 2D (Figura 5) | 24 |
| 4.5.2 | Análise do Gráfico 3D (Figura 6) | 25 |
| 4.6 | Solução 4º Problema | 27 |
| 4.6.1 | Análise do Gráfico 2D (Figura 7) | 27 |
| 4.6.2 | Análise do Gráfico 3D (Figura 8) | 28 |
| 4.7 | Solução 5º Problema | 30 |
| 4.7.1 | Análise dos Gráficos 2D (Figura 9, Figura 10, Figura 11) | 30 |
| 4.7.2 | Análise do Gráfico 3D (Figura 12) | 31 |
| 4.8 | Solução 7º Problema | 34 |
| 4.8.1 | Análise do Gráfico 2D (Figura 13) | 34 |
| 4.8.2 | Análise do Gráfico 3D (Figura 14) | 35 |
| 5 | Referências Bibliográficas | 37 |

1 Introdução

A otimização linear, é uma técnica matemática utilizada para maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Este método encontra aplicações em diversas áreas como economia, engenharia, logística e pesquisa operacional, sendo essencial para a tomada de decisões eficientes e racionais.

Apesar de sua extensa aplicação, a otimização possui algumas limitações. Os problemas relacionados à modelagem, solução e interpretação dos resultados podem impactar significativamente a eficiência e a aplicabilidade dos métodos de otimização linear. Entre os desafios mais comuns estão a complexidade computacional de grandes modelos, a dificuldade em lidar com dados imprecisos ou incompletos e as limitações inerentes das suposições de linearidade.

As funções de otimização são descritas de forma genérica por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c^T x \\ &\text{sujeito a } Ax = b \\ &x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{1}$$

Neste relatório, apresentamos a implementação do método Simplex em Python para resolver problemas de otimização linear, seguido da aplicação desse método em vários problemas de teste.

2 Descrição

Nesta seção, apresentaremos os problemas propostos no Projeto 2 da disciplina TI327 - Tópicos em Inteligência Artificial, ministrada pelo Prof. Dr. Guilherme Macedo. Os respectivos códigos utilizados para cada um dos seis problemas serão detalhados na seção 2.2,

2.1 Descrição 1º problema

Minimizar: $5x_1 + x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2.2 Descrição 2º problema

Minimizar: $2x_1 - 3x_2$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2.3 Descrição 3º problema

Minimizar: $15(x_1 + 2x_2) + 11(x_2 - x_3)$

Sujeito a:

$$3x_1 \geq x_1 + x_2 + x_3,$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

2.4 Descrição 4º problema

Minimizar: $10(x_3 + x_4)$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^4 x_j = 400,$$

$$x_j - 2x_{j+1} \geq 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

2.5 Descrição 5º problema

Maximizar: $-5x_1 + 3(x_1 + x_3)$

Sujeito a:

$$x_j + 1 \leq x_{j+1}, \quad j = 1, 2,$$

$$\sum_{j=1}^3 x_j = 12,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

2.6 Descrição 7º problema

Maximizar: $9x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$$\sin\left(\frac{k}{13}\right)x_1 + \cos\left(\frac{k}{13}\right)x_2 \leq 7, \quad k = 1, \dots, 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3 Desenvolvimento

3.1 Código 1º problema

```
1 from scipy.optimize import linprog
2 import numpy as np
3
4 def problema_1():
5     c = [5, 1]
6     A = [[-2, -1],
7          [-1, -1],
8          [-1, -5]]
9     b = [-6, -4, -10]
10
11     x0_bounds = (0, None)
12     x1_bounds = (0, None)
13
14     res = linprog(
15         c,
16         A_ub=A,
17         b_ub=b,
18         bounds=[x0_bounds, x1_bounds],
19         method='highs',
20         options={'disp': False}
21     )
22
23     print(f'A solucao otima deste problema foi x* = ({res.x[0]:.0f}, {res.x[1]:.0f}) com f(x*) = {res.fun:.0f}.')
24
25     plot_2d_problema_1(res)
26     plot_3d_problema_1(res)
27
28     return res
```

Este código foi desenvolvido para solucionar o primeiro problema proposto na seção 2.1. Adotamos essa abordagem para resolver todos os problemas apresentados, alterando apenas nos casos em que o objetivo era a maximização; para esses, os coeficientes da função objetivo foram invertidos.

O código inicia com a definição dos coeficientes da função objetivo que será minimizada, representada pela lista

$$c = [5, 1],$$

onde a função objetivo é dada por

$$f(x) = 5x_1 + x_2.$$

Em seguida, estabelece-se a matriz A , contendo os coeficientes das restrições de desigualdade, onde cada linha corresponde a uma restrição e cada coluna, a uma variável. As restrições definidas são

$$-2x_1 - x_2 \leq -6,$$

$$-x_1 - x_2 \leq -4,$$

$$-x_1 - 5x_2 \leq -10,$$

que podem ser reescritas como

$$2x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10,$$

respectivamente.

O vetor

$$b = [-6, -4, -10]$$

contém os termos independentes das restrições de desigualdade. Os limites das variáveis são definidos pelos pares

$$x0_bounds = (0, None),$$

$$x1_bounds = (0, None),$$

garantindo que ambas as variáveis sejam não-negativas, ou seja,

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0.$$

A resolução do problema de programação linear é realizada através da função `linprog`, utilizando o solver 'highs'. Os parâmetros fornecidos incluem os coeficientes da função objetivo, a matriz de restrições, os termos independentes, os limites das variáveis e o método de otimização escolhido. Após a resolução, a solução ótima é apresentada, onde os valores das variáveis x_1 e x_2 são exibidos juntamente com o valor da função objetivo $f(x)$.

Por fim, o código invoca funções para a plotagem de gráficos bidimensionais e tridimensionais que ilustram a solução ótima encontrada e retorna o objeto contendo os resultados da otimização, que inclui tanto a solução ótima quanto o valor da função objetivo.

3.2 Código 2º problema

```
1 from scipy.optimize import linprog
2 import numpy as np
3
4 def problema_2():
5     c = [-2, 3]
6     A = [[1, 2],
7          [2, -1]]
8     b = [6, 8]
9
10    x0_bounds = (0, None) # x1 >= 0
11    x1_bounds = (0, None) # x2 >= 0
12
13    res = linprog(
14        c,
15        A_ub=A,
16        b_ub=b,
17        bounds=[x0_bounds, x1_bounds],
18        method='highs',
19        options={'disp': False}
20    )
21
22    print(f'A solucao otima deste problema e x* = ({res.x[0]:.0f}, {res.x[1]:.0f})
23          com f(x*) = {-res.fun:.0f}.')
24
25    plot_2d_problema_2(res)
26    plot_3d_problema_2(res)
27
28    return res
```

3.3 Código 3º problema

```
1 from scipy.optimize import linprog
2 import numpy as np
3
4 def problema_3():
5     c = [-15, -41, 11] # Original: 15x1 + 41x2 - 11x3
6     A = [[-2, -1, -1]]
7     b = [-3]
8
9     x_bounds = [(0, 1), (0, 1), (0, 1)]
10
11     res = linprog(
12         c,
13         A_ub=A,
14         b_ub=b,
15         bounds=x_bounds,
16         method='highs',
17         options={'disp': False}
18     )
19
20     print(f'A solucao otima deste problema e x* = ({res.x[0]:.0f}, {res.x[1]:.0f}, {res.x[2]:.0f}) com f(x*) = {-res.fun:.0f}.')
21
22     plot_2d_problema_3(res)
23     plot_3d_problema_3(res)
24
25     return res
```

3.4 Código 4º problema

```
1 from scipy.optimize import linprog
2 import numpy as np
3
4 def problema_4():
5     c = [0, 0, 10, 10]
6     A_ub = [
7         [-1, 2, 0, 0],
8         [0, -1, 2, 0],
9         [0, 0, -1, 2]
10    ]
11    b_ub = [0, 0, 0]
12
13    A_eq = [[1, 1, 1, 1]]
14    b_eq = [400]
15
16    bounds = [(0, None), (0, None), (0, None), (0, None)]
17
18
19    res = linprog(
20        c,
21        A_ub=A_ub,
22        b_ub=b_ub,
23        A_eq=A_eq,
24        b_eq=b_eq,
25        bounds=bounds,
26        method='highs',
27        options={'disp': False}
28    )
29
30    print(f'A solucao otima deste problema e x* = ({res.x[0]:.0f}, {res.x[1]:.0f},
31          {res.x[2]:.0f}, {res.x[3]:.0f}) com f(x*) = {res.fun:.0f}.')
32
33    plot_2d_problema_4(res)
34    plot_3d_problema_4(res)
35
36    return res
```

3.5 Código 5º problema

```
1 from scipy.optimize import linprog
2 import numpy as np
3
4 def problema_5():
5     c = [2, -3, -3]
6     A_ub = [
7         [1, -1, 0],
8         [0, 1, -1]
9     ]
10    b_ub = [-1, -1]
11    A_eq = [[1, 1, 1]]
12    b_eq = [12]
13
14    bounds = [(0, None), (0, None), (0, None)]
15
16    res = linprog(
17        c,
18        A_ub=A_ub,
19        b_ub=b_ub,
20        A_eq=A_eq,
21        b_eq=b_eq,
22        bounds=bounds,
23        method='highs'
24    )
25
26    if res.success:
27        x_opt = res.x
28        f_opt = -res.fun
29        print(f"A solucao otima deste problema e x* = ({x_opt[0]:.0f}, {x_opt[1]:.0f}, {x_opt[2]:.0f}) com f(x*) = {f_opt:.2f}.")
30        plot_2d_problema_5(res)
31        plot_3d_problema_5(res)
32    else:
33        print("O problema de otimizacao nao encontrou uma solucao viavel.")
34
35    return res
```

3.6 Código 7º problema

```
1 from scipy.optimize import linprog
2 import numpy as np
3
4 def problema_7():
5     c = [-9, -5]
6     A_ub = np.array([[np.sin(k / 13), np.cos(k / 13)] for k in range(1, 14)])
7     b_ub = np.array([7] * 13)
8
9     bounds = [(0, None), (0, None)] # x1 >= 0, x2 >= 0
10
11     res = linprog(
12         c,
13         A_ub=A_ub,
14         b_ub=b_ub,
15         bounds=bounds,
16         method='highs',
17         options={'disp': False}
18     )
19
20     if res.success:
21         plot_2d_problema_7(res)
22         plot_3d_problema_7(res)
23
24         print(r'A solucao otima deste problema e $x* = ({:.2f}, {:.2f})$ com $f(x$
25         *) = {:.2f}$.'.format(res.x[0], res.x[1], -res.fun))
26     else:
27         print("Otimizacao falhou. Status:", res.status)
28         print("Mensagem:", res.message)
29     return res
```

4 Resultados

4.1 Testes Computacionais

Os testes foram realizados em dois dispositivos distintos:

- **Notebook**

- **CPU:** Intel Core i5 12500H
- **RAM:** 8 GB DDR5
- **GPU:** NVIDIA GeForce RTX 3050 Laptop

- **Desktop**

- **CPU:** AMD Ryzen 3 3300X
- **RAM:** 2 x 8 GB DDR4
- **GPU:** NVIDIA GeForce GTX 1660 SUPER

4.2 Experimento

Para a realização dos experimentos, utilizamos a IDE PyCharm Professional 2024.1.3 (build 241.17890.14) com a versão 3.12.3 do Python. A biblioteca central para a análise foi a SciPy 1.13.1, explorando a função `linprog(method='highs')` para a resolução eficiente dos problemas de programação linear.

4.2.1 Ferramentas e Justificativas

A escolha da função `linprog(method='highs')` se deve à sua capacidade de selecionar automaticamente o solver mais adequado entre o método dual simplex revisado (`'highs-ds'`) e o método de ponto interior (`'highs-ipm'`), ambos da biblioteca **HIGHS**. Essa abordagem híbrida garante robustez, precisão e desempenho na resolução de problemas de programação linear, mesmo em larga escala.

Além disso, a função `linprog` oferece uma interface intuitiva para definir a função objetivo, as restrições e os parâmetros do problema, facilitando a implementação e análise dos resultados.

4.2.2 Objetivos

Com este experimento, buscamos:

1. Resolver de forma eficiente e precisa os problemas de otimização linear propostos.
2. Validar a implementação do método Simplex.
3. Avaliar o desempenho da biblioteca SciPy na resolução de problemas de otimização.

4.2.3 Parâmetros e Resultados

Os parâmetros utilizados na função `linprog` foram:

- `c`: Vetor de coeficientes da função objetivo.
- `A_ub`: Matriz de coeficientes das restrições de desigualdade.
- `b_ub`: Vetor de termos independentes das restrições de desigualdade.
- `bounds`: Tupla definindo os limites das variáveis de decisão.
- `method`: Método de resolução ('highs').
- `options`: Opções adicionais, como exibição de mensagens ('disp').

A função `linprog` retorna um objeto `OptimizeResult` contendo:

- `x`: Valores ótimos das variáveis de decisão.
- `fun`: Valor ótimo da função objetivo.
- `success`: Indicador de sucesso na resolução.
- `status`: Código de status da otimização.
- `message`: Mensagem sobre o resultado.

4.3 Solução 1º Problema

As Figuras 1 e 2 ilustram a representação gráfica do Problema 1 em duas e três dimensões, respectivamente. Em ambas as figuras, buscamos visualizar a região factível, definida pelas restrições do problema, e a solução ótima que maximiza a função objetivo.

4.3.1 Análise do Gráfico 2D (Figura 1)

Região Factível: A área sombreada em cinza claro na Figura 1 representa a região factível do problema, ou seja, o conjunto de todos os pontos (x_1, x_2) que satisfazem simultaneamente todas as restrições.

Restrições: Cada restrição é representada por uma reta, e a região factível está sempre do lado "permitido" da desigualdade:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

As áreas abaixo das duas primeiras retas e acima da terceira reta representam os pontos que satisfazem as respectivas restrições.

Solução Ótima: A estrela vermelha, localizada em $(x_1, x_2) = (0, 6)$, representa a solução ótima do problema. Este é o ponto dentro da região factível que maximiza a função objetivo.

4.3.2 Análise do Gráfico 3D (Figura 2)

A Figura 2 complementa a análise com uma perspectiva tridimensional.

1. **Superfície da Função Objetivo:** O plano inclinado representa a função objetivo $f(x_1, x_2)$. A inclinação do plano indica como a função objetivo varia em relação a x_1 e x_2 .
2. **Projeção da Região Factível:** A região factível, definida pelas mesmas restrições lineares do gráfico 2D, é projetada no plano x_1x_2 .
3. **Conexão da Solução Ótima:** A linha tracejada conecta o ponto da solução ótima no espaço 3D à sua projeção na região factível no plano x_1x_2 , facilitando a visualização da localização da solução ótima.

Em ambas as visualizações, a solução ótima é consistente: $x^* = (0, 6)$ com $f(x^*) = 6$.

A representação 3D oferece uma visão adicional da relação entre a função objetivo e a região factível, mostrando como a função objetivo cresce à medida que nos aproximamos da solução ótima, ilustrando a natureza da otimização linear.

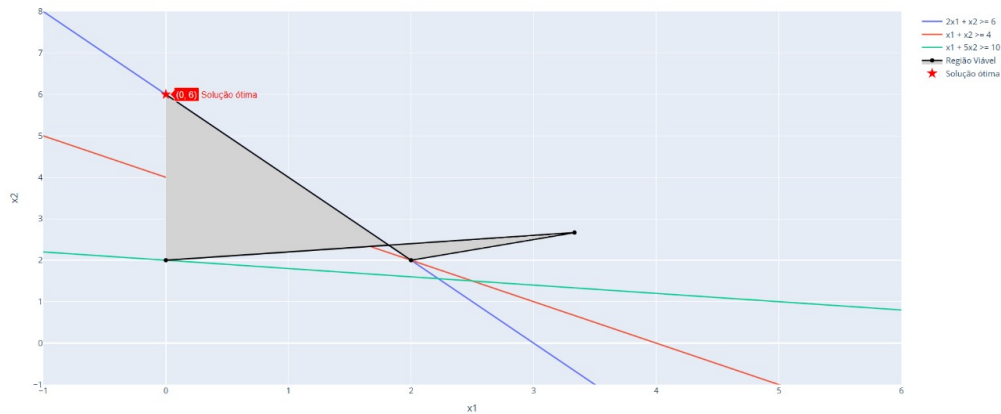


Figura 1: Plot 2D do 1º Problema

A região factível, da figura 1, representada pela cor cinza claro, delimitada pelas restrições lineares, com a solução ótima destacada em vermelho.

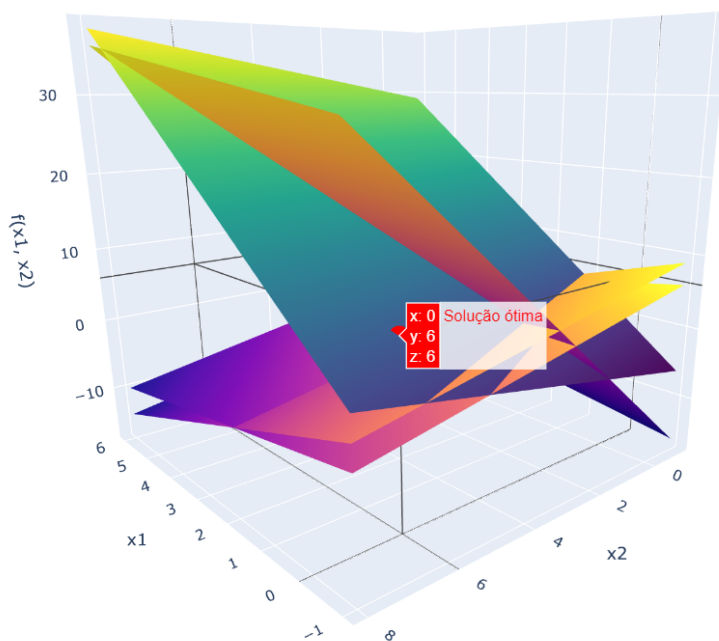


Figura 2: Plot 3D do 1º Problema

A superfície da função objetivo (plano inclinado), tem sua região factível projetada no plano $f(x_1, x_2)$, e solução ótima conectada ao plano $x_1 x_2$ por uma linha tracejada.

4.4 Solução 2º Problema

As Figuras 3 e 4 ilustram a representação gráfica do Problema 2 em duas e três dimensões, respectivamente. Em ambas as figuras, buscamos visualizar a região factível, definida pelas restrições do problema, e a solução ótima que maximiza a função objetivo.

4.4.1 Análise do Gráfico 2D (Figura 3)

Região Factível: A área sombreada em cinza claro na Figura 3 representa a região factível do problema, ou seja, o conjunto de todos os pontos (x_1, x_2) que satisfazem simultaneamente todas as restrições.

Restrições: Cada restrição é representada por uma reta, e a região factível está sempre do lado "permitido" da desigualdade:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 \leq 8$$

As áreas abaixo de ambas as retas representam os pontos que satisfazem as respectivas restrições.

Solução Ótima: A estrela vermelha, localizada em $(x_1, x_2) = (4, 0)$, representa a solução ótima do problema. Este é o ponto dentro da região factível que maximiza a função objetivo.

4.4.2 Análise do Gráfico 3D (Figura 4)

A Figura 4 complementa a análise com uma perspectiva tridimensional.

1. **Superfície da Função Objetivo:** O plano inclinado representa a função objetivo $f(x_1, x_2)$. A inclinação do plano indica como a função objetivo varia em relação a x_1 e x_2 .
2. **Projeção da Região Factível:** A região factível, definida pelas mesmas restrições lineares do gráfico 2D, é projetada no plano x_1x_2 .
3. **Conexão da Solução Ótima:** A linha tracejada conecta o ponto da solução ótima no espaço 3D à sua projeção na região factível no plano x_1x_2 , facilitando a visualização da localização da solução ótima.

Em ambas as visualizações, a solução ótima é consistente: $x^* = (4, 0)$ com $f(x^*) = 8$.

A representação 3D oferece uma visão adicional da relação entre a função objetivo e a região factível, mostrando como a função objetivo cresce à medida que nos aproximamos da solução ótima, ilustrando a natureza da otimização linear.

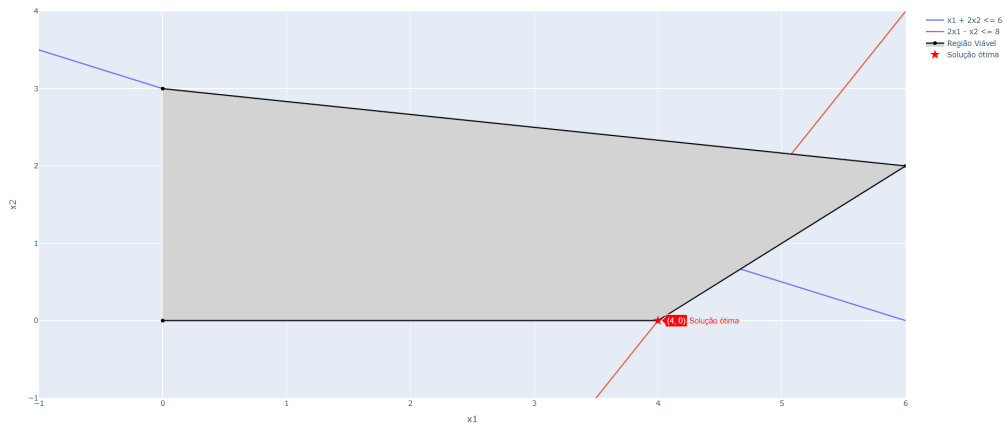


Figura 3: Plot 2D do 2º Problema

A região factível, da figura 3, representada pela cor cinza claro, delimitada pelas restrições lineares, com a solução ótima destacada em vermelho.

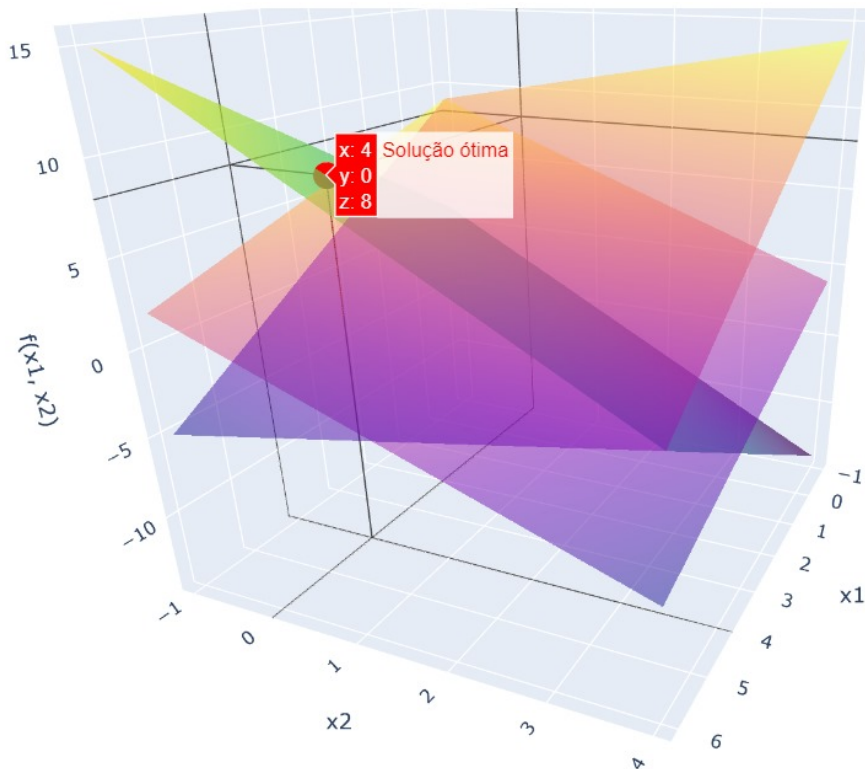


Figura 4: Plot 3D do 2º Problema

A superfície da função objetivo (plano inclinado), região factível projetada no plano $f(x_1, x_2)$, e solução ótima conectada ao plano x_1x_2 por uma linha tracejada.

4.5 Solução 3º Problema

As Figuras 5 e 6 ilustram a representação gráfica do Problema 3 em duas e três dimensões, respectivamente. Em ambas as figuras, buscamos visualizar a região factível, definida pelas restrições do problema, e a solução ótima que maximiza a função objetivo.

4.5.1 Análise do Gráfico 2D (Figura 5)

A Figura 5 apresenta uma seção transversal da região factível em duas dimensões, fixando $x_3 = 0$.

Região Factível: A área sombreada em cinza claro na Figura 5 representa a região factível do problema nesse plano, ou seja, o conjunto de todos os pontos (x_1, x_2) que satisfazem simultaneamente todas as restrições quando $x_3 = 0$.

Restrições: Cada restrição é representada por uma reta, e a região factível está sempre do lado "permitido" da desigualdade. As restrições, considerando $x_3 = 0$, são:

$$2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

Solução Ótima: A estrela vermelha, localizada em $(x_1, x_2) = (1, 1)$, representa a solução ótima do problema projetada nesse plano.

4.5.2 Análise do Gráfico 3D (Figura 6)

A Figura 6 complementa a análise com uma perspectiva tridimensional da região factível.

1. **Superfície da Função Objetivo:** Os pontos roxos representam a função objetivo $f(x_1, x_2, x_3)$. A distribuição espacial desses pontos indica como a função objetivo varia em relação a x_1 , x_2 e x_3 .
2. **Região Factível:** A região factível, destacada em laranja, é definida pelas restrições do problema e delimita o espaço tridimensional onde a solução ótima pode estar localizada.
3. **Conexão da Solução Ótima:** A estrela vermelha, localizada em $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$, representa a solução ótima do problema. A linha tracejada conecta a solução ótima à sua projeção no plano x_1x_2 , facilitando a visualização da localização da solução.

Em ambas as visualizações, a solução ótima é consistente: $x^* = (1, 1, 0)$ com $f(x^*) = 56$.

A representação 3D oferece uma visão mais completa da relação entre a função objetivo, as restrições e a solução ótima, ilustrando a natureza da otimização linear em um espaço tridimensional.

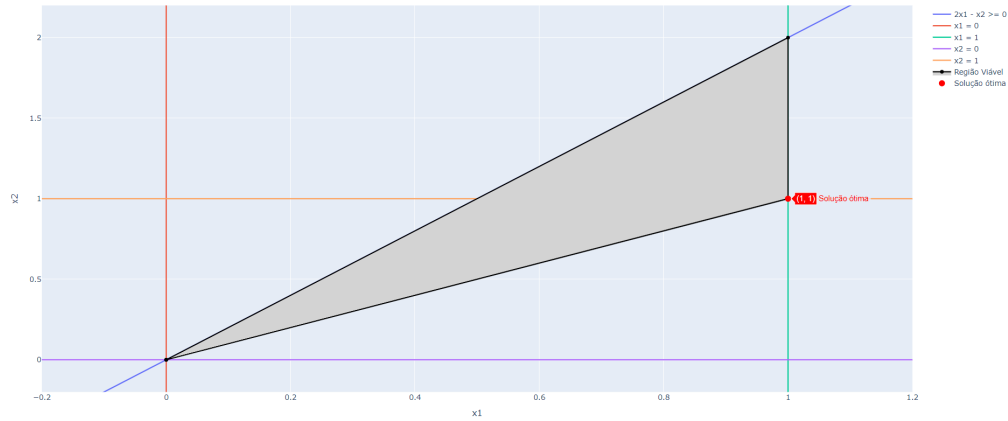


Figura 5: Plot 2D do 3º Problema

A seção transversal da região factível, da figura 5, com $x_3 = 0$. A região factível, observada pela cor cinza claro, é delimitada pelas restrições lineares, com a solução ótima projetada neste plano destacada em vermelho.

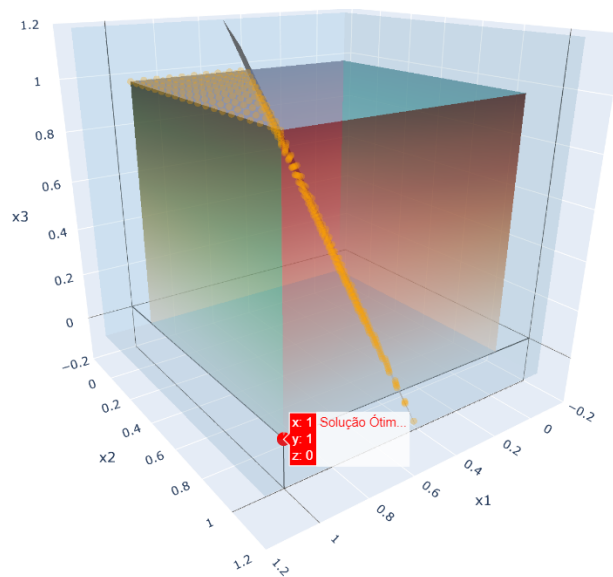


Figura 6: Plot 3D do 3º Problema

A representação da função objetivo (pontos roxos), região factível (pontos laranjas) delimitada pelas restrições, e solução ótima (estrela vermelha) conectada ao plano x_1x_2 por uma linha tracejada.

4.6 Solução 4º Problema

As Figuras 7 e 8 ilustram a representação gráfica do Problema 4. Devido à alta dimensionalidade do problema (4 variáveis), a plotagem direta da região factível se torna complexa. Portanto, optamos por apresentar uma projeção 2D da região factível no plano x_1x_2 (Figura 7), fixando o valor de x_3 , e uma visualização 3D que destaca a solução ótima e as restrições projetadas em três dimensões (Figura 8).

4.6.1 Análise do Gráfico 2D (Figura 7)

A Figura 7 apresenta uma projeção da região factível no plano x_1x_2 , fixando x_3 em um valor específico.

Região Factível Projetada: A área sombreada em cinza claro na Figura 7 representa a região factível projetada, ou seja, o conjunto de todos os pontos (x_1, x_2) que, para o valor fixo de x_3 , satisfazem as restrições do problema.

Restrições Projetadas: Cada restrição é representada por uma reta, delimitando a região factível projetada. As restrições, considerando $x_4 = 400 - x_1 - x_2 - x_3$, são:

$$x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_2 - 2x_3 \geq 0$$

$$x_3 - 2x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 400 - x_3$$

Solução Ótima Projetada: A estrela vermelha na Figura 7 representa a solução ótima do problema projetada nesse plano, considerando o valor fixo de x_3 .

4.6.2 Análise do Gráfico 3D (Figura 8)

A Figura 8 complementa a análise com uma perspectiva tridimensional. Devido à dificuldade de representar um espaço de quatro dimensões, algumas restrições são apresentadas como planos para auxiliar a visualização.

1. **Solução Ótima:** A estrela vermelha na Figura 8 representa a solução ótima do problema em quatro dimensões, com a coordenada x_4 determinada pela restrição de igualdade ($x_4 = 400 - x_1 - x_2 - x_3$).
2. **Planos de Restrições:** Os planos representam as restrições do problema projetadas em três dimensões. A região factível, embora não diretamente visível devido à quarta dimensão, está contida na intersecção das regiões delimitadas por esses planos.

Em ambas as visualizações, a solução ótima é: $x^* = (400, 0, 0, 0)$ com $f(x^*) = 0$.

As representações gráfica 2D e 3D, apesar de limitadas pela alta dimensionalidade do problema, fornecem insights importantes sobre a solução do Problema 4.

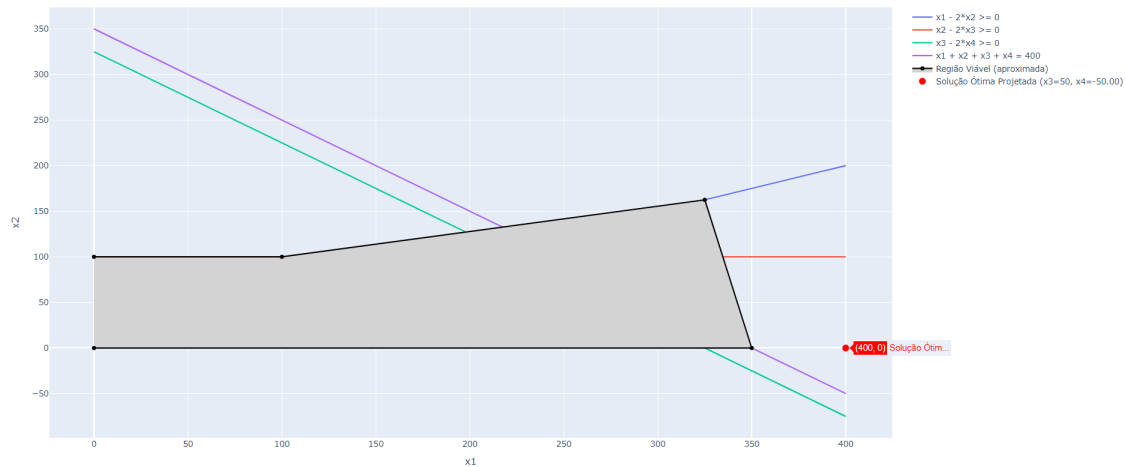


Figura 7: Plot 2D do 4º Problema

Projeção da região factível no plano x_1x_2 , na figura 7, com x_3 fixo. A região viável projetada (cinza claro) é delimitada pelas restrições projetadas, com a solução ótima projetada neste plano destacada em vermelho.

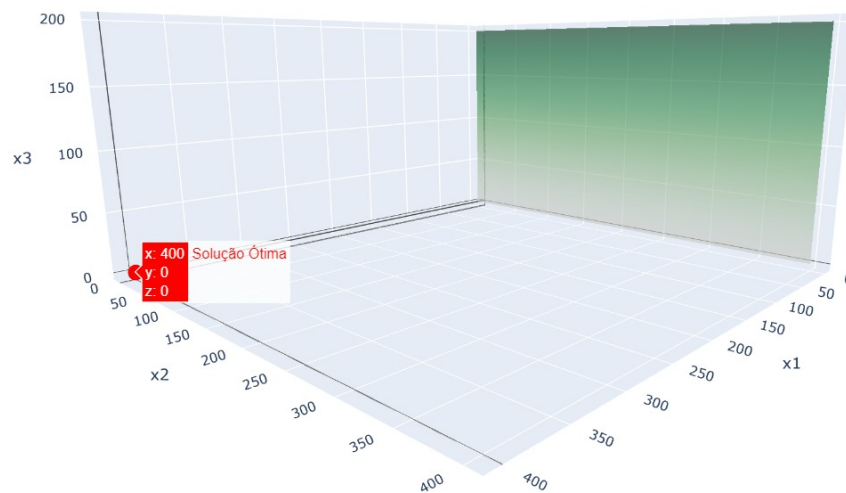


Figura 8: Plot 3D do 4º Problema

Representação da solução ótima (estrela vermelha) e dos planos de restrições, visíveis na figura 8. Devido à alta dimensionalidade, a região factível não é diretamente visível, mas está contida na intersecção das regiões delimitadas pelos planos.

4.7 Solução 5º Problema

O Problema 5 apresenta um desafio interessante de visualização, pois a região factível é definida em um espaço tridimensional. Para facilitar a análise, empregamos duas abordagens:

1. Projeções 2D: As Figuras 9, 10 e 11 ilustram a região factível projetada em diferentes planos bidimensionais, fixando uma das variáveis de decisão por vez.

2. Visualização 3D: A Figura 12 apresenta uma representação tridimensional da região factível, exibindo a intersecção das restrições no espaço $x_1x_2x_3$.

4.7.1 Análise dos Gráficos 2D (Figura 9, Figura 10, Figura 11)

Cada gráfico 2D apresenta uma projeção da região factível em um plano formado por duas variáveis, mantendo a terceira variável constante.

Figura 9 (x_3 fixo) A área sombreada em azul claro representa a região factível projetada no plano x_1x_2 , considerando um valor fixo para x_3 .

Figura 10 (x_2 fixo) A área sombreada em verde claro representa a região factível projetada no plano x_1x_3 , considerando um valor fixo para x_2 .

Figura 11 (x_1 fixo) A área sombreada em coral representa a região factível projetada no plano x_2x_3 , considerando um valor fixo para x_1 .

Em cada projeção, as restrições relevantes são representadas por retas, e a solução ótima projetada é destacada em vermelho.

4.7.2 Análise do Gráfico 3D (Figura 12)

A Figura 12 oferece uma visão espacial da região factível.

1. **Planos de Restrições:** Os planos coloridos representam as restrições de desigualdade e igualdade do problema. A região factível está contida na intersecção dos semi-espacos definidos por esses planos.
2. **Solução Ótima:** A esfera vermelha destaca a solução ótima do problema no espaço tridimensional.

Em todas as visualizações, a solução ótima é: $x^* = (0, 1, 11)$ com $f(x^*) = 36$.

A combinação de projeções 2D e visualização 3D facilita a compreensão da geometria do problema e da localização da solução ótima no espaço de decisão.

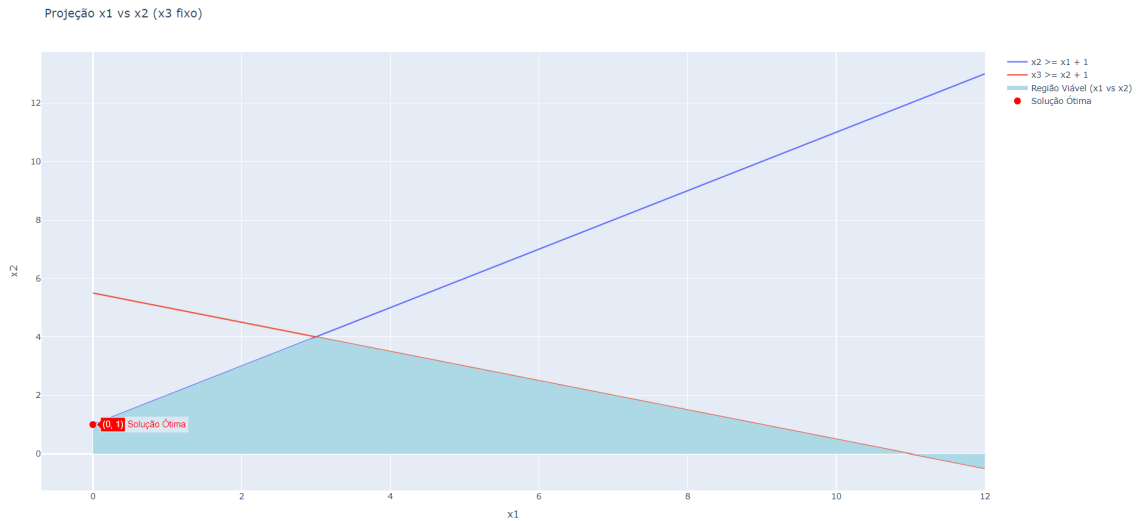


Figura 9: Projecção 2D do 5º Problema

Projecção da região factível no plano x_1x_2 , na figura 9, com x_3 fixo. A região viável (azul claro) é delimitada pelas restrições projetadas, com a solução ótima projetada neste plano destacada em vermelho.

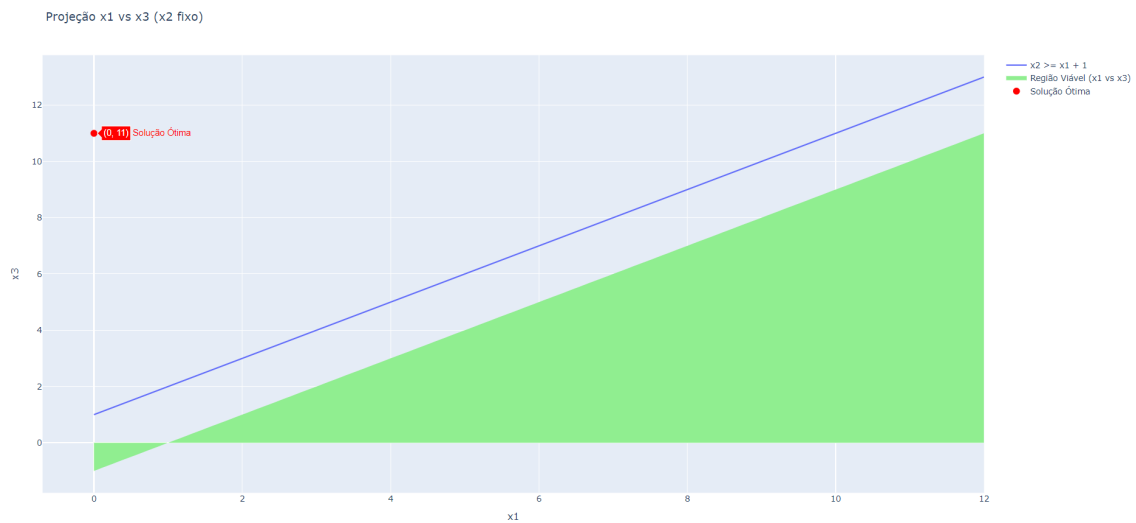


Figura 10: Projecção 2D do 5º Problema

Projecção da região factível no plano x_1x_3 , na figura 10, com x_2 fixo. A região viável (verde claro) é delimitada pelas restrições projetadas, com a solução ótima projetada neste plano destacada em vermelho.

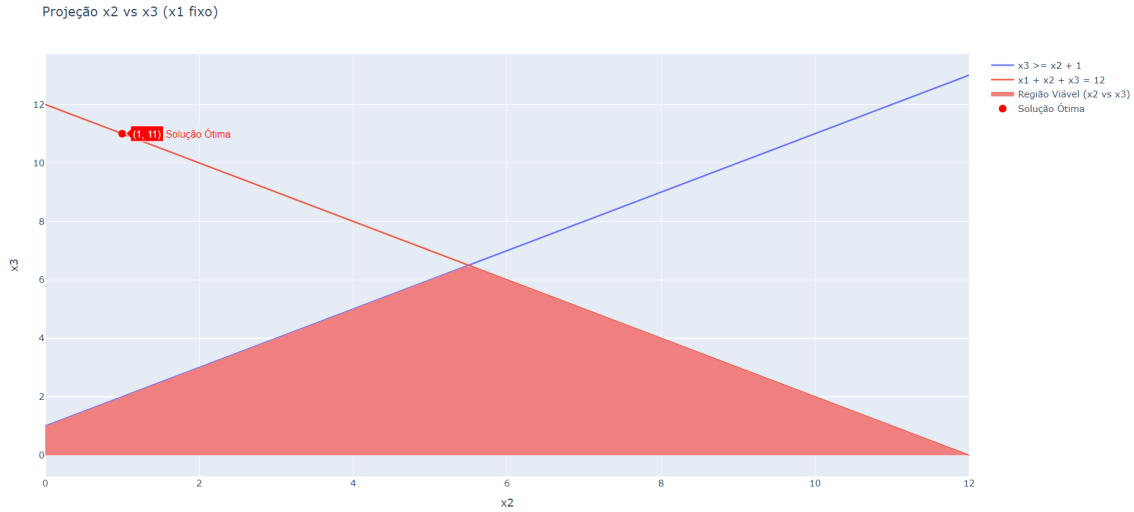


Figura 11: Projeção 2D do 5º Problema

Projeção da região factível no plano x_2x_3 , na figura 11, com x_1 fixo. A região viável (coral) é delimitada pelas restrições projetadas, com a solução ótima projetada neste plano destacada em vermelho.

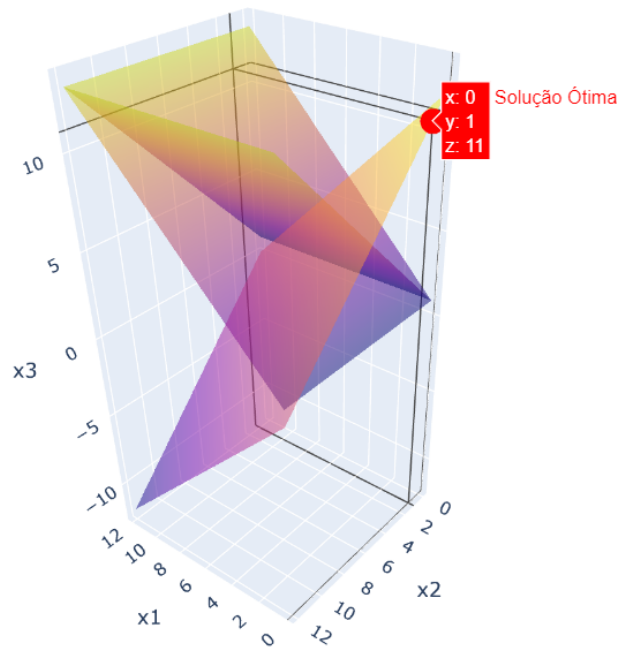


Figura 12: Visualização 3D do 5º Problema

Representação da região factível delimitada pelos planos de restrições e da solução ótima (esfera vermelha), na figura 12.

4.8 Solução 7º Problema

As Figuras 13 e 14 ilustram a representação gráfica do Problema 7 em duas e três dimensões, respectivamente. Em ambas as figuras, buscamos visualizar a região factível, definida pelas restrições do problema, e a solução ótima que maximiza a função objetivo.

4.8.1 Análise do Gráfico 2D (Figura 13)

Região Factível: A área sombreada em cinza claro na Figura 13 representa a região factível do problema, ou seja, o conjunto de todos os pontos (x_1, x_2) que satisfazem simultaneamente todas as restrições.

Restrições: Cada restrição é representada por uma linha curva, e a região factível está sempre do lado "permitido" da desigualdade:

$$\sin\left(\frac{k}{13}\right)x_1 + \cos\left(\frac{k}{13}\right)x_2 \leq 7, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 13$$

As áreas abaixo de todas as curvas representam os pontos que satisfazem as respectivas restrições.

Solução Ótima: A estrela vermelha, localizada em $(x_1, x_2) = (0, 7)$, representa a solução ótima do problema. Este é o ponto dentro da região factível que maximiza a função objetivo.

4.8.2 Análise do Gráfico 3D (Figura 14)

A Figura 14 complementa a análise com uma perspectiva tridimensional.

1. **Superfícies de Restrição:** Cada superfície representa uma das restrições trigonométricas do problema. A região factível, embora não diretamente visível, está contida na intersecção dos espaços abaixo de todas as superfícies.
2. **Solução Ótima:** A estrela vermelha representa a solução ótima do problema em duas dimensões (x_1, x_2) , com a terceira dimensão representando o valor da restrição.

Em ambas as visualizações, a solução ótima é : $x^* = (8.319, 0)$ com $f(x^*) = 74.87$.

Apesar da dificuldade de representar visualmente todas as restrições trigonométricas em 3D, a Figura 14 oferece uma visualização complementar da solução ótima no contexto das restrições.

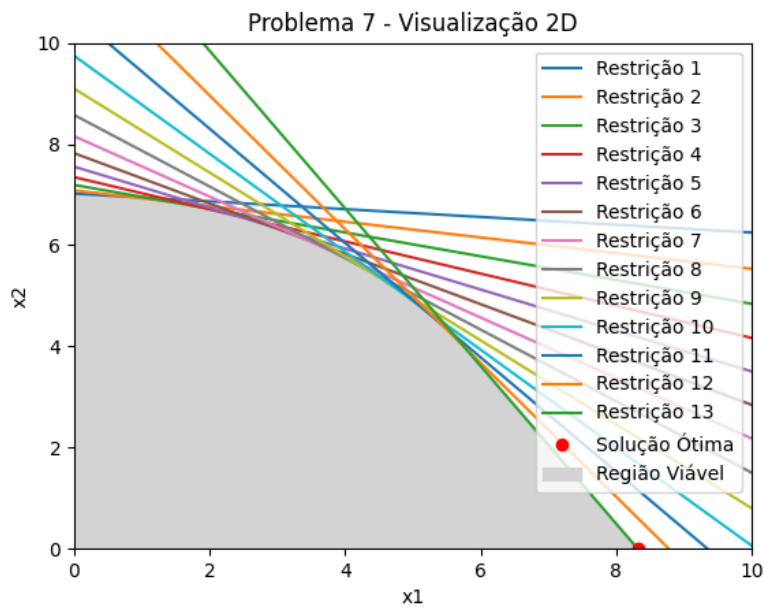


Figura 13: Plot 2D do 7º Problema

A região factível, da figura 13, representada pela cor cinza claro, delimitada pelas restrições trigonométricas, com a solução ótima destacada em vermelho.

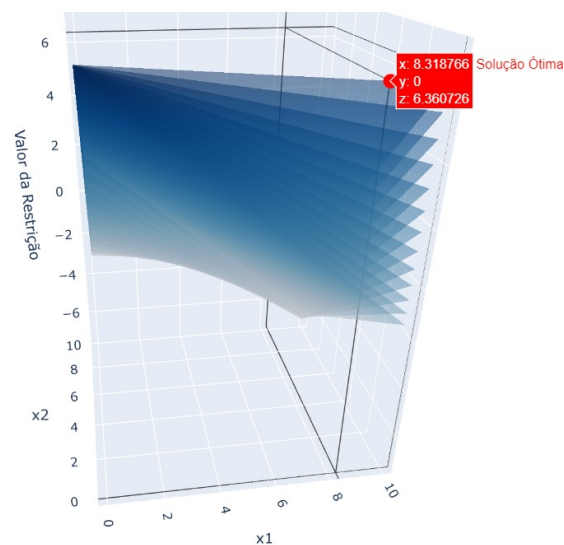


Figura 14: Plot 3D do 7º Problema

Representação da solução ótima (estrela vermelha) e das superfícies de restrição, visíveis na figura 14. A região factível está contida na intersecção dos espaços abaixo de todas as superfícies.

5 Referências Bibliográficas

- [1] Huangfu, Q., Galabova, I., Feldmeier, M., and Hall, J. A. J. "HiGHS - high performance software for linear optimization." <https://highs.dev/>
- [2] Huangfu, Q. and Hall, J. A. J. "Parallelizing the dual revised simplex method." *Mathematical Programming Computation*, 10 (1), 119-142, 2018. DOI: 10.1007/s12532-017-0130-5
- [3] Harris, Paula MJ. "Pivot selection methods of the Devex LP code." *Mathematical programming* 5.1 (1973): 1-28.
- [4] Goldfarb, Donald, and John Ker Reid. "A practicable steepest-edge simplex algorithm." *Mathematical Programming* 12.1 (1977): 361-371.
- [5] Virtanen, P. et al., 2020. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17(3), pp.261-272.
- [6] SciPy documentation. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>. Acessado em [data de acesso].
- [7] Dantzig, George B. *Linear programming and extensions*. Rand Corporation Research Study. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.
- [8] Hillier, S.H. and Lieberman, G.J. "Introduction to Mathematical Programming". McGraw-Hill, 1995. Chapter 4.
- [9] Bland, Robert G. "New finite pivoting rules for the simplex method." *Mathematics of Operations Research* 2 (1977): 103-107.
- [10] Andersen, Erling D., and Knud D. Andersen. "The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm." *High performance optimization*. Springer US, 2000. 197-232.
- [11] Andersen, Erling D. "Finding all linearly dependent rows in large-scale linear programming." *Optimization Methods and Software* 6.3 (1995): 219-227.

- [12] Freund, Robert M. "Primal-Dual Interior-Point Methods for Linear Programming based on Newton's Method." Unpublished Course Notes, March 2004. Accessed February 25, 2017. https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-084j-nonlinear-programming-spring-2004/lecture-notes/lec14_int_pt_mthd.pdf
- [13] Fourer, Robert. "Solving Linear Programs by Interior-Point Methods." Unpublished Course Notes, August 26, 2005. Accessed February 25, 2017. <http://www.4er.org/CourseNotes/Book%20B/B-III.pdf>
- [14] Andersen, Erling D., and Knud D. Andersen. "Presolving in linear programming." *Mathematical Programming* 71.2 (1995): 221-245.
- [15] Bertsimas, Dimitris, and J. Tsitsiklis. "Introduction to linear programming." *Athena Scientific* 1 (1997): 997.
- [16] Andersen, Erling D., et al. *Implementation of interior point methods for large scale linear programming*. HEC/Universite de Geneve, 1996.