

EG950

Teste 2, Vinícius Esperança Mantovani, 247395

Exercício 1:

Questão 1:

De acordo com o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon:

Para que o sinal seja recuperável:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_m,$$

Logo: a menor taxa de amostragem possível é de $\omega_s > 2\omega = 2\pi \cdot 50000 \text{ rad/s}$

$\hookrightarrow \omega_s$ mínimo é o valor imediatamente maior que $2\pi \cdot 50000$ amostras por segundo.

Quanto a $H(e^{j\omega})$, tem-se

$$H(e^{j\omega}) : H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < \omega_{d1} \text{ ou } \omega > \omega_{d2} \\ X(e^{j\omega}), & \text{se } \omega_{d1} < \omega < \omega_{d2} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < \omega_{d1} \text{ ou } \omega > \omega_{d2} \\ 1, & \text{se } \omega_{d1} < \omega < \omega_{d2} \end{cases} \quad \text{amostras}$$

$$\text{onde: } \omega_{d1} = 2\pi \cdot \frac{\omega_1}{\omega_s} = \frac{2\pi \cdot 2\pi \cdot 4500}{2\pi \cdot 50000} = 2\pi \cdot \frac{9}{100} \text{ amostras/s}$$

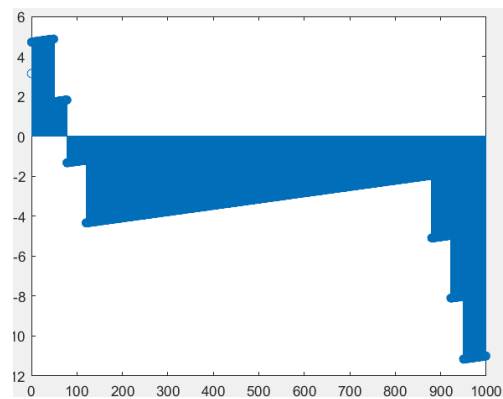
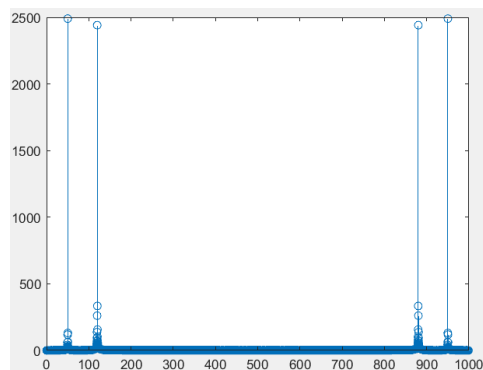
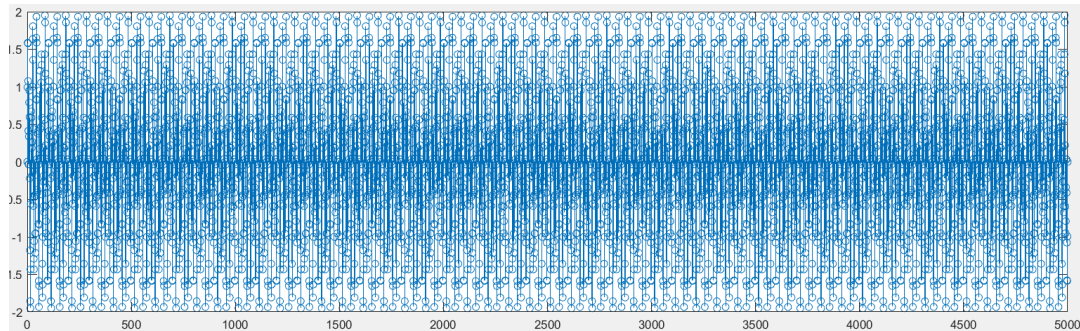
$$\omega_{d2} = 2\pi \cdot \frac{\omega_2}{\omega_s} = 2\pi \cdot \frac{6500}{50000} = 2\pi \cdot \frac{13}{100} \text{ amostras/s}$$

$$\rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < 2\pi \cdot \frac{9}{100} \text{ ou } \omega > 2\pi \cdot \frac{13}{100} \\ 1, & \text{se } 2\pi \cdot \frac{9}{100} < \omega < 2\pi \cdot \frac{13}{100} \end{cases}$$

Exercício 2 (Computacional):

Item a)

Gráficos do sinal, da magnitude de sua transformada discreta de Fourier e da fase desta transformada:



Tais resultados, foram obtidos a partir da amostragem do sinal analógico de origem a uma frequência de 1kHz de amostragem, por meio do código matlab “.m” abaixo, pensado para todos os três itens deste exercício:

```
M=16; %redução da taxa
% M=1; %taxa normal (1kHz)
n=linspace(0,5000/M, 5000/M+1);
x=sin(2*pi*50*n*0.001*M)+sin(2*pi*120*n*0.001*M);
```

```

X=fft(x);
figure;
stem(n,x);
figure;
stem((1000/M)/(5000/M)*(0:length(X)-1),abs(X));
figure;
stem((1000/(5000))*(0:length(X)-1),unwrap(angle(X)));

```

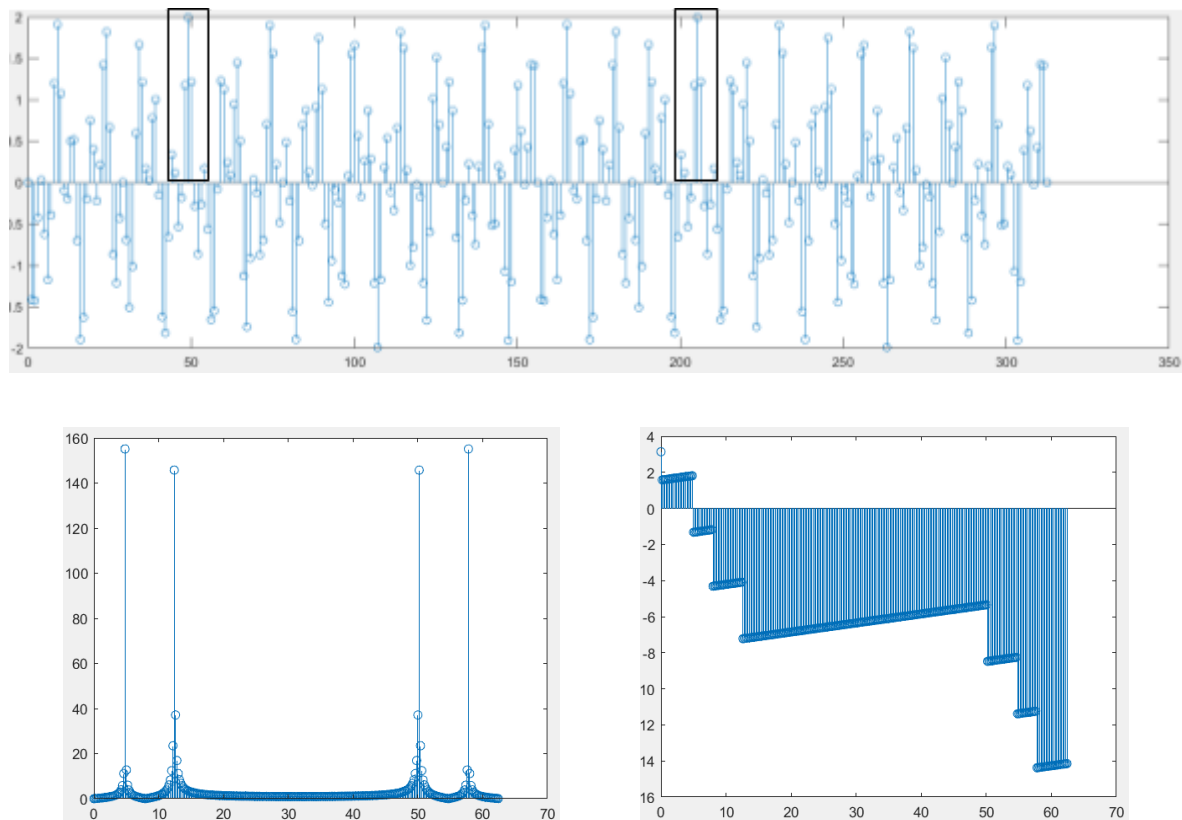
A respeito dos resultados obtidos, é possível afirmar que o sinal possui, conforme o esperado, picos em frequência a 120Hz e a 50Hz (analógicos, que correspondem a 600Hz e 250Hz, em frequência digital). Vale ressaltar que a frequência apresentada no gráfico da fft está seguindo a frequência analógica, para facilitar o entendimento. Além disso, cabe ressaltar que o sinal usado tem um período de $1/600 \cong 0,00167$ s, uma vez que 50 e 120 têm 600 como mínimo múltiplo comum. Por fim, cabe destacar que em unidades digitais de frequência, ter-se-ia um pico em 250Hz e outro em 600Hz, pois com as 5000 amostras, com cada uma representando $\frac{1}{5000}$ de frequência analógica, precisar-se-ia de 5 vezes o número de elementos para se chegar aquele que correspondesse a 50Hz e aquele para 120Hz.

1 amostra digital = $\frac{1}{5000}$ de frequência analógica.

Aqui, há claramente uma amostragem que satisfaz o teorema de Nyquist-Shannon, uma vez que a maior frequência do sinal é de 120Hz e a frequência de amostragem é muito mais que 240Hz, sendo ela de 1000Hz.

Item b)

Seguindo, ao se reduzir a frequência de amostragem por um fator de 16, tem-se os seguintes gráficos:

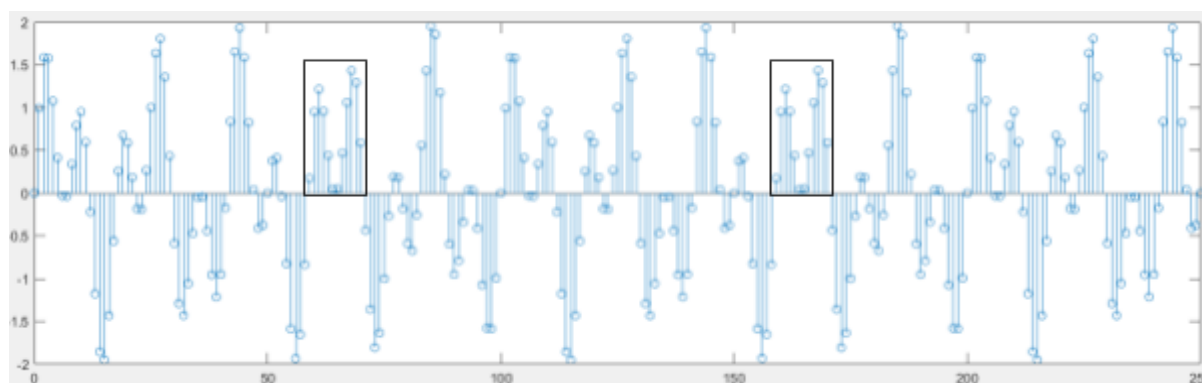


Desses resultados, conforme se esperava por causa da redução da taxa de amostragem, tem-se um problema de sub-amostragem. De modo que a frequência de amostragem passa a ser de $1000/16 = 62,5$, implicando um valor muito menor que a maior frequência do sinal e, por consequência, que o sinal não seja recuperável. Coerentemente a isso, está o fato de que as frequências maiores do sinal analógico foram perdidas, conforme o gráfico de magnitude apresentado acima, de maneira que a sobreposição de frequências no espectro causou picos aproximadamente em 5 e 12Hz. Assim, o sinal teve sua frequência máxima reduzida por causa da sub-amostragem e, além disso, também por este motivo, teve sua magnitude diminuída nos picos de frequência. Por fim, destaca-se a queda geral da fase da transformada, devida ao fato de que a sub-amostragem retarda o comportamento do sinal, de modo a reduzir-lhe a fase.

Principais mudanças no espectro: redução da frequência máxima, redução da magnitude das frequências de pico e redução geral da fase do sinal transformado.

c)

Plotando, novamente, o gráfico para amostragem com 1kHz, mas agora limitado às 250 primeiras amostras, tem-se o seguinte:



Feito isso para melhor visualização do comportamento do gráfico para um número de amostras próximo daquele em que se trabalha para frequência 62,5Hz, nota-se facilmente alguns padrões que se repetem com frequência razoável neste último gráfico, conforme o que está desenhado sobre ele. No entanto, conforme se espera, enquanto que no gráfico em que há sub-amostragem, essa frequência de repetições é menor, dando-se respectivamente a aproximadamente intervalos de 210 amostras e 100 amostras. Lembrando ainda que uma amostra do gráfico com sub-amostragem representa um intervalo maior de tempo do que uma amostra do gráfico com amostras a 1000Hz, pode-se afirmar que o período em que ocorrem essas repetições citadas é bastante maior no caso de sub-sampling, de modo que, por consequência, a maior frequência (analógica) deste caso (sub-sampling) se mostra muito menor que aquela do caso de amostragem adequada. Isso corrobora com o que foi explicado no item anterior, de modo a, novamente, evidenciar o problema de sobreposição de frequências ocasionado pela sub-amostragem.

Isso explicado acima, pode ser explicado teoricamente, conforme afirmado acima, como causa da sub-amostragem, que por gerar um número de amostras incapaz de representar os períodos do sinal a tempo, representa períodos distorcidos de maior duração e, por conseguinte, frequências menores que as do sinal original. Desse modo, o sinal fica impossibilitado de ser recuperado por causa da perda de informações na sobreposição de frequências que deveriam ser adequadamente distinguidas.