

### Experiência 5:

**Emulador: Rejeição de Distúrbios**  
**Retilíneo, Torcional e Levitador: Controle Co-allocado**  
**Pêndulo Invertido: Controle em Cascata**

2 de outubro de 2024

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Emulador Industrial: Rejeição de Distúrbios</b>	<b>2</b>
1.1	Configuração do sistema . . . . .	3
1.1.1	Procedimento experimental - Parte 1: Rejeição de distúrbios . . . . .	4
1.1.2	Procedimento experimental - Parte 2: Comportamento servo . . . . .	5
1.2	Pré-relatório da Experiência 6 . . . . .	6
1.2.1	Linhas gerais do projeto . . . . .	7
1.2.2	Detalhamento . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Sistema Retilíneo: Controle Co-allocado</b>	<b>10</b>
2.1	Sistema com dois graus de liberdade . . . . .	10
2.2	Configuração . . . . .	11
2.3	Controle co-allocado . . . . .	11
2.3.1	Procedimento experimental . . . . .	11
2.3.2	Exercícios sugeridos . . . . .	12
2.4	Pré-relatório da Experiência 6 . . . . .	13
2.4.1	Linhas gerais do projeto . . . . .	13
2.4.2	Detalhamento . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Sistema Torcional: Controle Co-allocado</b>	<b>16</b>
3.1	Sistema com 2 graus de Liberdade . . . . .	16
3.2	Configuração . . . . .	17
3.3	Controle co-allocado . . . . .	17
3.3.1	Procedimento experimental . . . . .	18
3.3.2	Exercícios sugeridos . . . . .	19
3.4	Pré-relatório da Experiência 6 . . . . .	19
3.4.1	Linhas gerais do projeto . . . . .	20
3.4.2	Detalhamento . . . . .	21

<b>4</b>	<b>Controle em cascata do pêndulo invertido</b>	<b>22</b>
4.1	Controle PD do pêndulo invertido . . . . .	23
4.2	Controle do ângulo $\theta$ por alocação de polos . . . . .	24
4.3	Atenuação de ruídos . . . . .	27
4.4	Configurações do pêndulo invertido . . . . .	27
4.5	Procedimento experimental . . . . .	28
4.5.1	Controle PD . . . . .	28
4.5.2	Alocação de polos para a planta estável . . . . .	28
4.5.3	Alocação de polos para a planta instável . . . . .	30
4.6	Pré-relatório da Experiência 6 . . . . .	30
4.6.1	Modelo linearizado do pêndulo invertido com os dois graus de liberdade	30
4.6.2	Linhas gerais do projeto . . . . .	31
4.6.3	Detalhamento . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Sistema Levitador: Controle Co-alocado</b>	<b>35</b>
5.1	Sistema com dois graus de liberdade . . . . .	35
5.2	Configuração . . . . .	36
5.3	Controle co-alocado . . . . .	36
5.3.1	Procedimento experimental . . . . .	37
5.3.2	Exercícios sugeridos . . . . .	39
5.4	Pré-relatório da Experiência 6 . . . . .	39
5.4.1	Linhas gerais do projeto . . . . .	39
5.4.2	Detalhamento . . . . .	40
	<b>Referências</b>	<b>42</b>

## 1 Emulador Industrial: Rejeição de Distúrbios

O objetivo desta experiência é iniciar o estudo de variações de parâmetros e de certas características que estão presentes na maioria das implementações práticas de sistemas de controle. Algumas destas características são discutidas brevemente a seguir.

- Efeito da relação de engrenagens e inércia.** Afeta diretamente O ganho do sistema e a dinâmica em malha fechada. A situação é similar a observada quando se pedala uma bicicleta com várias marchas (relações de engrenagens) e, mantendo-se a mesma força sobre os pedais, troca-se de marcha. A velocidade da bicicleta aumenta ou diminui dependendo da troca efetuada. Para manter a mesma velocidade, a atuação nos pedais (controlador) deve ser revista para levar em conta a nova relação de engrenagens (planta),
- Efeito de fricção.** Normalmente modelado como estático, cinemático (Coulomb) ou viscoso, em pequenas quantidades ajuda na estabilidade do sistema, mas em grandes quantidades *acentuam* características não-lineares da planta (exceto o atrito viscoso), e podem deteriorar o desempenho do sistema de controle do ponto do vista de rastreamento e regulação,

3. **Efeito de distúrbios.** Uma característica importante de um sistema de controle por realimentação é sua capacidade de rejeitar forças ou touques que tendam a tirar o sistema do seu valor de referência (*set-point*, sinal comandado) ou dificultar o rastreamento da trajetória comandada. Um exemplo típico é o transporte de material através de uma esteira que se desloca com velocidade constante *set-point*. Toda vez que se coloca ou retira material da esteira ocorre uma variação de carga (distúrbio). Um bom controlador deve rejeitar O distúrbio, no sentido de que em regime ( $t \rightarrow \infty$ ), o efeito de se colocar ou retirar material da esteira cessa e a velocidade retorna ao valor desejado,
4. **Efeito de saturação no controle.** A saturação de um dispositivo ocorre quando a sua saída mantém-se em algum valor positivo (negativo) para todas as entradas acima (abaixo) de um certo limite. A saturação pode ocorrer devido ao sinal de controle exceder a faixa de operação do atuador (por exemplo,  $\pm 10$  volts). Em geral, os atuadores são construídos para saturarem numa região segura, onde não haja danos para os componentes do atuador. O efeito de saturação no sinal de controle pode comprometer completamente o desempenho do sistema de controle e no limite levar a instabilidade da planta. A ênfase em se projetar controladores que demandem pequeno esforço está ligada diretamente a necessidade de se manter o sinal de controle dentro da faixa de operação do atuador e em alguns casos economizar energia,
5. **Efeito de amostragem em tempo discreto.** Muitos processadores digitais de alto desempenho permitem taxas de amostragem suficientemente elevadas para que o sistema de controle possa ser analisado, projetado e implementado como um sistema contínuo, quando na verdade apenas as variáveis medidas são contínuas. Em alguns casos, por limitações tecnológicas ou econômicas, a taxa de amostragem está limitada a valores que inviabilizam a análise contínua. Deve-se então trabalhar com o modelo discretizado da planta (dependente da taxa de amostragem adotada) e tratar o sistema global (planta + controlador) como um sistema discreto no tempo.

Nesta experiência será estudado um dos principais efeitos mencionados acima: rejeição de distúrbios.

## 1.1 Configuração do sistema

Os resultados experimentais serão com os discos de atuação e carga conectados utilizando as correias rígidas, com a seguinte configuração e valores de parâmetros:

$k_{hw}$	$= 5,76 \text{ N-m/rd}$	ganho de hardware
$J_{dd}$	$= 0,00041 \text{ Kg-m}^2$	momento inércia do disco de atuação
$J_{d\ell}$	$= 0,0063 \text{ Kg-m}^2$	momento inércia do disco de carga
$n_{pd}$	$= 18$	nº dentes engrenagem conectada ao disco de atuação
$n_{p\ell}$	$= 24$	nº dentes engrenagem conectada ao disco de carga
$g_r$	$= 4,5, g'_r = 1,5$	relação de velocidades 4,5:1 <sup>†</sup>
$m_{wd}$	$= 2 \times 0,212 \text{ Kg}$	massa total sobre o disco de atuação
$r_{wd}$	$= 0,015 \text{ m}$	raio dos pesos sobre o disco de atuação
$d_{wd}$	$= 5,0 \text{ cm}$	distância das massas ao centro do disco de atuação
$J_{wid}$	$= m_{wd}(d_{wd}^2 + \frac{1}{2}r_{wd}^2)$	
$J_d$	$= J_{dd} + J_{wid}$	momento de inércia total no disco de atuação
$m_{w\ell}$	$= 4 \times 0,500 \text{ Kg}$	massa total sobre o disco de carga
$r_{w\ell}$	$= 0,0495/2 \text{ m}$	raio dos pesos sobre o disco de carga
$d_{w\ell}$	$= 0,10 \text{ m}$	distância das massas ao centro do disco de carga
$c_\ell$	$= 0,005 \text{ N-m/(rd/s)}$	coeficiente de atrito no disco de carga
$c_d$	$= 7,38 \times 10^{-4} \text{ N-m/(rd/s)}$	coeficiente de atrito no disco de atuação
$J_{wi\ell}$	$= m_{w\ell}(d_{w\ell}^2 + \frac{1}{2}r_{w\ell}^2)$	
$J_\ell$	$= J_{d\ell} + J_{wi\ell}$	momento de inércia total no disco de carga
$J_p$	$= 78 \times 10^{-6}$	inércia do pino SR
$J_d^*$	$= J_d + J_p(g'_r)^{-2} + J_\ell(g_r)^{-2}$	inércia total no disco de atuação
$c_d^*$	$= c_d + c_\ell(g_r)^{-2}$	coeficiente de atrito no disco de atuação

Desprezando-se as inércias das correias, obtenha O modelo dinâmico da planta incorporando o ganho de hardware e a inércia total (isto é,  $k_{hw}/(J_d^* s^2)$ ) referente à configuração acima.

### 1.1.1 Procedimento experimental - Parte 1: Rejeição de distúrbios

Nota: Os símbolos ⓐ, ⓑ, ⓒ e ⓓ indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink<sup>®</sup> e script Matlab<sup>™</sup>, respectivamente.

No procedimento experimental a seguir, investiga-se o desempenho de três controladores distintos com respeito à capacidade de rejeição de distúrbios de baixa e alta frequências. A planta deve ser configurada como descrito na senão anterior. Os controladores são os seguintes:

$C_1$ : Controlador PD com  $f_n = 2 \text{ Hz}$ ,  $\xi = 0.707$  e realimentação do Encoder #1. Parâmetros do PD:  $K_p = 0.08$ ,  $k_d = 0.009$ ;

$C_2$ : Controlador PD do item  $C_1$ , com a incorporação da ação integral:  $K_i = 1.0$ ;

$C_3$ : Controlador PD do item  $C_1$ , mais um filtro *lead*

$$F(s) = \frac{n_0 + n_1 s}{d_0 + d_1 s},$$

projetado de acordo com as especificações: zero em 0.2 Hz, polo em 1.0 Hz e ganho DC igual a 1 ⓑ.

<sup>†</sup> Com engrenagens de 18 dentes na atuação e 24 na carga. Use correias #140 e #250 respectivamente.

1. Ajuste um distúrbio senoidal dependente do tempo (**Sinusoidal (time)**) de 0.5 volts, 0.1 Hz e **30000** ms de duração. Estabeleça a frequência de amostragem da aquisição de dados a cada **20-50** ciclos para evitar a geração de arquivos de dados muito grandes. Introduza os valores de  $K_p$  e  $K_d$  do controlador  $C_1$  através da opção **PID** com realimentação do **Encoder #1** e  $T_s=0.00442$  s. Ajuste um degrau de malha fechada de amplitude **0** (zero), duração de **30000** ms e **1** (uma) repetição. Isto habilita o sistema a adquirir dados durante a regulação da malha fechada. Execute esta regulação para os controladores  $C_1$  e  $C_2$ , certificando-se que a caixa **Include Sinusoidal Disturbance** está ativada. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os dados do **Encoder #2** para ambos os casos (g g);
2. Introduza o controlador  $C_3$  através da opção **PID + Notch** da caixa de diálogo **Setup Control Algorithm**. Execute a mesma regulação do passo anterior, exportando e plotando os mesmos dados;
3. Repita os dois passos anteriores alterando a frequência de distúrbio para **2.0** Hz. Pode-se reduzir a duração do degrau para **10000** ms e aumentar a frequência de aquisição de dados para **10-20** ciclos (g g g);
4. Considere o diagrama de blocos da Fig.1. Obtenha a função de transferência de malha aberta

$$\frac{N_{ol}(s)}{D_{ol}(s)} = K(s) k_{hw} P(s)$$

e a função de transferência de malha fechada  $\Theta_1(s)/T_d(s)$  para cada controlador (t). Plote os diagramas de Bode das funções de transferência de malha aberta (três g) na mesma figura usando o comando `subplot`) e fechada (três g) na mesma figura usando o comando `subplot`) para cada controlador. Justifique as características de atenuação de distúrbios de cada controlador a partir dos seus diagramas de Bode (t).

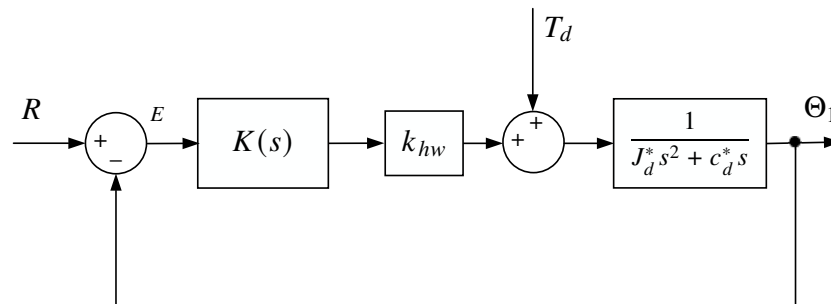










Figura 1: Controle em malha fechada.

### 1.1.2 Procedimento experimental - Parte 2: Comportamento servo

No procedimento experimental a seguir, verifica-se o desempenho dos controladores da seção anterior quanto à capacidade de rastreamento da entrada de referência (comportamento servo). Para garantir a capacidade de rastreamento do controlador com o ajuste proporcionado

pelo filtro *lead*, combina-se este filtro com o controlador com parte integral, resultando na configuração:

$C_4$ : Controlador do item  $C_2$ , mais filtro *lead* do item  $C_3$ .

5. Implemente os quatro controladores com entrada de distúrbio nula e obtenha a resposta a um degrau de amplitude **2000 counts**, **dwell time= 2000 ms** e uma repetição. Plote as saídas do **Encoder #1**, **Control Effort** e **Commanded Position** para os quatro controladores (4 ). De preferência, usar o comando plotyy;
6. Repita o item anterior utilizando uma entrada rampa com as características: **velocity= 20000**, **distance= 8000** e **dwell time= 1200**. (4 );
7. Verifique nos gráficos do item 5 se houve saturação do controlador através das curvas de *control effort* obtidas ;
8. Utilizando o Matlab, plote o diagrama de Bode da função de transferência do sistema em malha fechada com controlador PD em  $C_1$  , com o controlador PD mais filtro *lead* do item  $C_3$   e PID mais filtro *lead* do item  $C_4$  . Verifique o posicionamento do polo e do zero do filtro *lead* com relação as frequências para as quais o módulo da função de transferência em malha aberta com os controladores acima cruza o valor de 0 dB. Comente sobre as margens de fase de cada controle, e interprete as respostas temporais correspondentes obtidas nos itens 5 e 6 . Repita a questão anterior para a resposta em frequência em malha fechada, comentando sobre as frequências de corte de cada controlador, e interprete as respostas temporais correspondentes obtidas nos itens 5 e 6 .

## 1.2 Pré-relatório da Experiência 6

O controle não co-allocado será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle da velocidade angular  $\theta_1$  do disco de atuação, responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento  $\theta_1$  é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída  $\theta_2$ , por intermédio da correia flexível. De fato, é possível escrever a função de transferência entre  $\Theta_2(s)/T(s)$  na forma

$$\frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = k_{hw} \frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$\begin{aligned} N_1(s) &= J_\ell s^2 + c_\ell s + k \\ N_2(s) &= k / g_r \\ D(s) &= J_d^* J_\ell s^4 + (c_\ell J_d^* + c_d J_\ell) s^3 + [(J_d^* + J_\ell g_r^{-2}) k + c_d c_\ell] s^2 + (c_d + c_\ell g_r^{-2}) k s. \end{aligned}$$

Note que  $T(s)$  tem sentido de torque aplicado, mas está expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante  $k_{hw}$ .

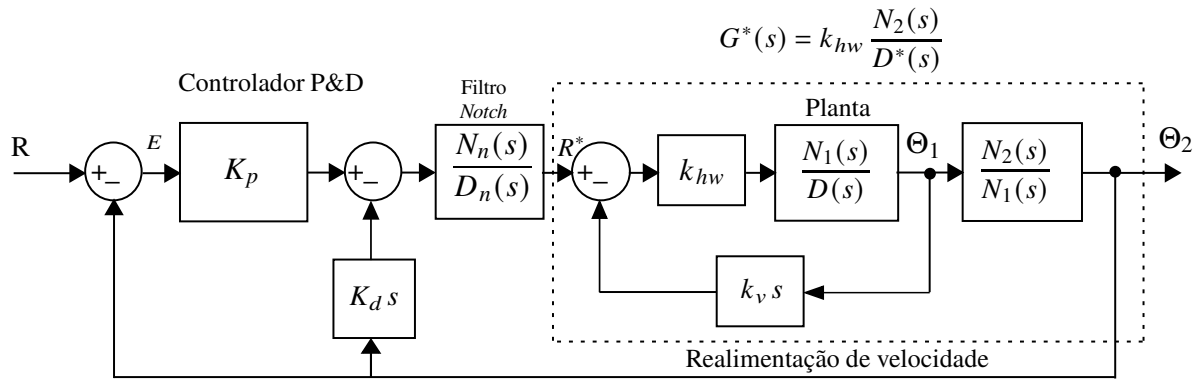


Figura 2: Diagrama para o controle *não co-allocado*.

### 1.2.1 Linhas gerais do projeto

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig.2 e a determinação dos controladores será feita da seguinte maneira:

- a. Calcula-se inicialmente o ganho  $k_v$ , utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que o amortecimento dos polos em malha fechada de  $\Theta_1(s)/R^*(s)$  seja o maior possível;
- b. Obtém-se a função de transferência  $G^*(s)$ , representada pela linha pontilhada na Fig.2;
- c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch*  $N_n(s)/D_n(s)$  de modo que:
  1. os dois zeros do filtro cancelem dois polos de  $G^*(s)$  (tipicamente polos pouco amortecidos), isto é, raízes de  $D^*(s)$  complexas conjugadas;
  2. o filtro possua dois pares de polos complexos conjugados de frequência natural  $f_{n1} = 5 \text{ Hz}$  e  $f_{n2} = 8 \text{ Hz}$  respectivamente, e  $\xi = \sqrt{2}/2$  para ambos os pares;
  3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $D_n(s)$  deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;
- d. Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de máximo amortecimento para os polos dominantes em malha fechada;
- e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios  $t(s)$ ,  $s(s)$  e  $r(s)$ .

### 1.2.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não co-allocado. Adote os valores numéricos listados no início da seção 1.1, com as seguintes alterações e acréscimos:

$$\begin{aligned} m_{wd} &= 0 && \text{massa sobre o disco de atuação,} \\ g_r &= 4, \quad g'_r = 2 && \text{relação de velocidades } 4 : 1^\dagger, \\ k &= 8.45 && \text{constante elástica da correia flexível.} \end{aligned}$$

#### Projeto da realimentação do disco de atuação:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir  $\Theta_1(s)/R^*(s)$ ,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de  $k_v$  que forneça o máximo amortecimento,
3. Implemente  $k_v$  e determine os polos da função de transferência interna  $G^*(s)$ . Selecione os polos complexos conjugados desta f.t., denominando-os  $p_1$  e  $p_2$ .

#### Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro *notch* cujos os zeros sejam  $p_1$  e  $p_2$ , e os polos especificados no item c.,
2. Associe  $G^*(s)$  ao filtro projetado.

#### Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_d$  de forma a se obter o máximo amortecimento para os polos dominantes da função de transferência da saída  $\theta_2(t)$ ,
2. Implemente o valor de  $K_d$  e determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_p$  que tenha o mínimo *tempo de estabelecimento*,
3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com  $\theta_2(t)$  como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

#### Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig.2 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama da Fig.3 é equivalente ao da Fig.2. Com essa modificação ao o controlador P&D mais filtro *notch* serão implementados na malha do *loop 1*.

---

<sup>†</sup> Relação obtida com engrenagens de 24 dentes na atuação e 36 na carga.



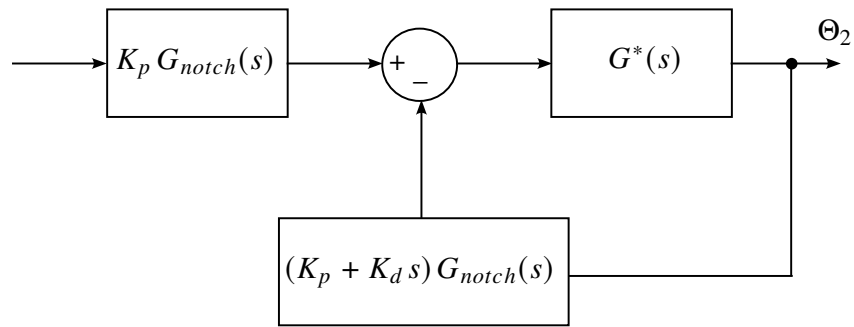


Figura 3: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a  $K_p G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $t(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). O bloco  $(K_p + K_d s) G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $s(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por  $n_2 s^2 + n_1 s + n_0$  e  $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$ , temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$t_0 = n_0 K_p$	$s_0 = n_0 K_p$	$r_0 = d_0$
$t_1 = n_1 K_p$	$s_1 = n_0 K_d + n_1 K_p$	$r_1 = d_1$
$t_2 = n_2 K_p$	$s_2 = n_1 K_d + n_2 K_p$	$r_2 = d_2$
	$s_3 = n_2 K_d$	$r_3 = d_3$
		$r_4 = 1$

1. O programa Matlab final deve apresentar os coeficientes dos polinômios  $t$ ,  $s$  e  $r$  para facilitar a implementação no laboratório.
2. Utilizando os programas Matlab desenvolvidos, simule o sistema de *controle não co-locado*, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

### Sugestão:

Para escrever os programas Matlab, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: *tf*, *pzk*, *feedback*, *minreal*

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: *rlocus*, *sgrid*, *rlocfind*, *dcgain*

Rotinas para obtenção de resposta temporal: *step*, *impulse*

## 2 Sistema Retilíneo: Controle Co-allocado

O objetivo desta experiência é realizar o controle P&D do sistema retilíneo quando este se apresenta na configuração chamada de *dois graus de liberdade*, que envolve o uso de dois carros conectados por uma mola. Nesta experiência será analisada uma estratégia conhecida como *controle co-allocado*. Por controle co-allocado, entende-se a situação em que o atuador e o sensor estão *co-allocados* no carro que se deseja controlar<sup>1</sup>. Observe que no equipamento existente, o atuador está rigidamente acoplado ao primeiro carro e que cada carro possui um sensor associado. O controle co-allocado é utilizado quando o atuador e o sensor estão acoplados à massa que se deseja controlar, mas com alguma outra massa interferindo no movimento do sistema.

### 2.1 Sistema com dois graus de liberdade

O sistema com dois graus de liberdade utilizado nesta experiência pode ser modelado a partir da análise da Fig.4.

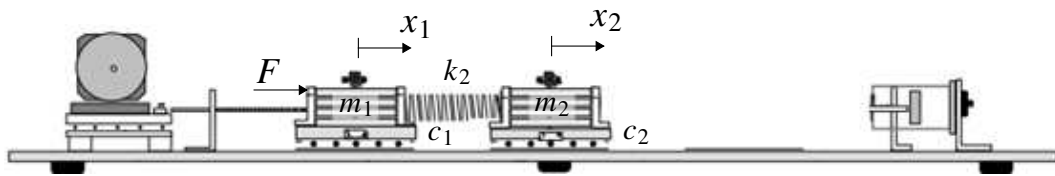


Figura 4: Sistema com dois graus de liberdade.

É possível escrever as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 &= F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em ambas as equações e resolvendo-as para  $x_1$  e  $x_2$  tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{X_1(s)}{F(s)} &= \frac{m_2 s^2 + c_2 s + k_2}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F(s)} &= \frac{k_2}{D(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1) s^3 + [(m_1 + m_2) k_2 + c_1 c_2] s^2 + (c_1 + c_2) k_2 s.$$

onde

- $X_1(s)$  : deslocamento linear do carro #1;
- $X_2(s)$  : deslocamento linear do carro #2;
- $F(s)$  : força aplicada ao carro #1;
- $m_1$  e  $c_1$  : massa e coeficiente de atrito viscoso do carro #1;
- $m_2$  e  $c_2$  : massa e coeficiente de atrito viscoso do carro #2;
- $k_2$  : constante da mola conectando os carros #1 e #2.

<sup>1</sup>O termo co-allocado é uma tradução livre da expressão em inglês *collocated*.

O que distingue as duas funções de transferência acima é a existência de dois zeros na função  $X_1(s)/F(s)$ , os quais deverão ser levados em conta caso se deseje adotar uma estratégia de *controle co-allocado* (controle do carro #1).

## 2.2 Configuração

A seguinte configuração será adotada nesta experiência:

- Carros #1 e #2 conectados por uma mola de dureza média;
- 4 massas de 500 g sobre os carros #1 e #2;
- Amortecedor desconectado dos carros.

### Dados:

$m_{c1} = 0,783$ [Kg]	$m_{c2} = 0,582$ [Kg]	(massa dos carros)
$c_{m1} = 3,92$ [N/(m/s)]	$c_{m2} = 2,36$ [N/(m/s)]	(coeficientes de atrito dos carros)
$k = 338,6$ [N/m]		(constante de mola)
$k_{hw} = 14732$		(ganho de hardware)

## 2.3 Controle co-allocado

O esquema de controle co-allocado é o representado na figura a seguir:

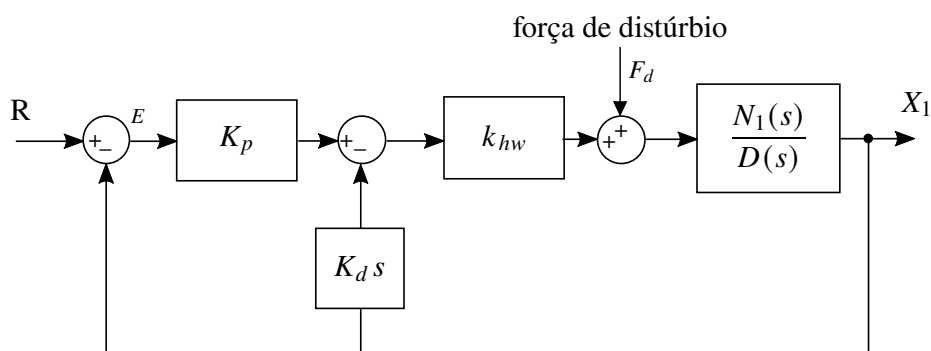






Figura 5: Diagrama para o controle *co-allocado*.

Observe que o efeito do carro #2 está modelado na função de transferência  $N_1(s)/D(s)$  presente no diagrama de blocos. O procedimento para a obtenção do controlador PD é iterativo e parte do controlador obtido na Experiência 3, e que também foi utilizado na Experiência 4.

### 2.3.1 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos , ,  e  indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink<sup>®</sup> e script Matlab<sup>™</sup>, respectivamente.

1. Ajuste o sistema de acordo com a configuração descrita na Seção 2.2;

2. Implemente o controlador criticamente amortecido utilizado na Experiência 4 (item 3.1.1) certificando-se de que o **Encoder #1** seja selecionado para o controle. Ajuste uma aquisição de dados dos **Encoders 1 e 2** e do sinal de referência (**Comanded Position**) a cada **5** ciclos. Obtenha a resposta a um degrau de amplitude **2000 counts** e **dwell time** de **1500 ms**. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os resultados do **Encoder #1** e do sinal de referência e plote o **Encoder #2** no eixo direto (de preferência, use o comando `plotyy`) (g);
3. Ajuste iterativamente os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  até obter uma resposta adequada. Faça os ajustes de ganho gradualmente (nunca maiores que 50% de uma só vez) observando os efeitos de aumentar ou diminuir cada um deles. Não use  $K_p > 1,2$  e mantenha  $0,01 < K_d < 0,05$ . Tente atingir o seguinte objetivo para o carro #1: tempo de subida  $< 200$  ms (para 90% do valor de regime) e  $overshoot \leq 5\%$ , sem oscilações excessivas. Exporte e plote a melhor resposta obtida (g). Desloque manualmente o carro #1 e observe a rigidez relativa do sistema de controle atuando sobre ele;
4. Para a última resposta obtida no passo anterior, exporte e plote a resposta ao degrau do carro #2 (g). Qual é a característica predominante do movimento do carro #2 (t)? É possível explicar as diferenças observadas nas respostas ao degrau dos dois carros a partir das diferenças de suas funções de transferência (t)?
5. Mude iterativamente  $K_p$  e  $K_d$  utilizando os valores existentes como ponto de partida, observando a resposta ao degrau da variável  $x_2$  de modo que esta variável apresente máximo  $overshoot \leq 10\%$ , sem oscilações excessivas e o menor tempo de subida possível. Exporte e plote as respostas finais (g) e forneça os ganhos correspondentes (t). Desloque manualmente os carros #1 e #2 e observe a rigidez relativa de cada um dos carros. De maneira geral, a rigidez observada aumentou ou diminuiu em relação ao observado no item 3 (t)? Compare o erro em regime da variável  $x_1$  obtido neste item com o obtido no item 3 (t);
6. A partir da Fig.5, calcule a função de transferência entre a variável  $X_1$  e a força de distúrbio  $F_d$  (t). O inverso do ganho estático (ganho da função em  $s = 0$ ) da função obtida é chamado de *servo-rigidez estática* e é uma medida da rigidez observada no item anterior. Calcule a servo-rigidez estática dos controladores obtidos nos itens 3 e 5 e compare-os com os observados (t);
7. Repita o item anterior para a variável  $X_2$ , respondendo as mesmas perguntas.

### 2.3.2 Exercícios sugeridos

1. Verifique no Matlab o ajuste encontrado, através da rotina `rlocus` de lugar das raízes. Faça outras determinações dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$  que exibam bons ajustes de malha fechada;
2. Faça o mesmo procedimento "experimental" através de simulação utilizando agora o controlador PD.

## 2.4 Pré-relatório da Experiência 6

O controle *não co-allocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle da velocidade de deslocamento  $x_1$ , responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento  $x_1$  é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída  $x_2$ , por intermédio da mola. De fato, é possível escrever a função de transferência entre  $X_2(s)/F(s)$  na forma

$$\frac{X_2(s)}{T(s)} = k_{hw} \frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$N_1(s) = m_2 s^2 + c_2 s + k$$

$$N_2(s) = k$$

$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1) s^3 + [(m_1 + m_2) k + c_1 c_2] s^2 + (c_1 + c_2) k s.$$

e as massas  $m_1$  e  $m_2$  têm os mesmos valores da Experiência 5. Note que  $F(s)$  tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante  $k_{hw}$ .

### 2.4.1 Linhas gerais do projeto

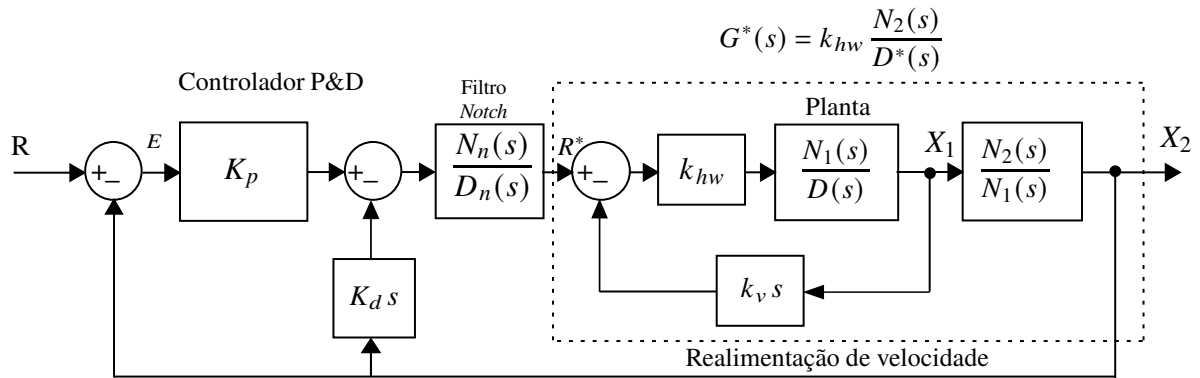


Figura 6: Diagrama para o controle *não co-allocado*.

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig.6 e a determinação dos controladores será feita da seguinte maneira:

- Calcula-se inicialmente o ganho  $k_v$ , utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que o amortecimento dos polos em malha fechada de  $X_1(s)/R^*(s)$  seja o maior possível;
- Obtém-se a função de transferência  $G^*(s)$ , representada pela linha pontilhada na Fig.6;
- Calculam-se os parâmetros do filtro *notch*  $N_n(s)/D_n(s)$  de modo que:

1. os dois zeros do filtro cancelem dois polos de  $G^*(s)$  (tipicamente polos pouco amortecidos), isto é, raízes de  $D^*(s)$  complexas conjugadas.
2. o filtro possua dois pares de polos complexos conjugados de frequência natural  $f_{n1} = 5$  Hz e  $f_{n2} = 8$  Hz respectivamente, e  $\xi = \sqrt{2}/2$  para ambos os pares.
3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $D_n(s)$  deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;
- d. Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de máximo amortecimento para os polos dominantes em malha fechada.
- e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios  $t(s)$ ,  $s(s)$  e  $r(s)$ .

### 2.4.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não co-allocado. Adote os mesmos valores numéricos utilizados na Experiência 5.

#### Projeto da realimentação do carro #1:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir  $X_1(s)/R^*(s)$ ,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de  $k_v$  que forneça o máximo amortecimento,
3. Implemente  $k_v$  e determine os polos da função de transferência interna  $G^*(s)$ . Selecione os polos complexos conjugados desta f.t., denominando-os  $p_1$  e  $p_2$ .

#### Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro *notch* cujos os zeros sejam  $p_1$  e  $p_2$ , e os polos especificados no item c.,
2. Associe  $G^*(s)$  ao filtro projetado.

#### Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_d$  de forma a se obter o máximo amortecimento para os polos dominantes da função de transferência da saída  $X_2(t)$ ,
2. Implemente o valor de  $K_d$  e determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_p$  que tenha o mínimo *tempo de estabelecimento*,

3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com  $x_2(t)$  como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

### Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig.6 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama da Fig.7 é equivalente ao da Fig.6. Com essa modificação ao o controlador P&D mais filtro *notch* serão implementados na malha do *loop 1*.

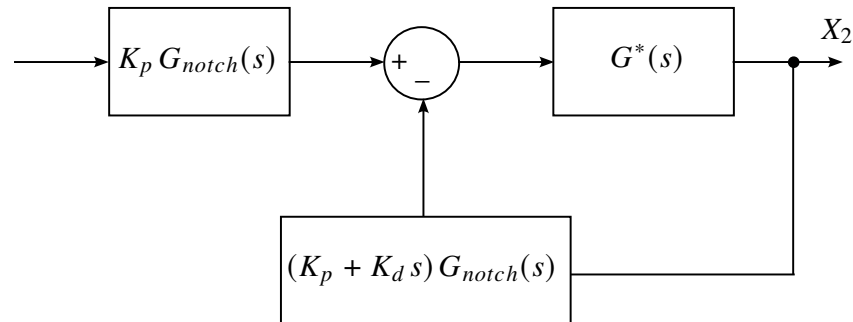


Figura 7: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a  $K_p G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $t(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). O bloco  $(K_p + K_d s) G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $s(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por  $n_2 s^2 + n_1 s + n_0$  e  $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$ , temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$t_0 = n_0 K_p$	$s_0 = n_0 K_p$	$r_0 = d_0$
$t_1 = n_1 K_p$	$s_1 = n_0 K_d + n_1 K_p$	$r_1 = d_1$
$t_2 = n_2 K_p$	$s_2 = n_1 K_d + n_2 K_p$	$r_2 = d_2$
	$s_3 = n_2 K_d$	$r_3 = d_3$
		$r_4 = 1$

1. O programa Matlab final deve apresentar os coeficientes dos polinômios  $t$ ,  $s$  e  $r$  para facilitar a implementação no laboratório.
2. Utilizando os programas Matlab desenvolvidos, simule o sistema de *controle não co-allocado*, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

### Sugestão:

Para escrever os programas Matlab, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf`, `pzk`, `feedback`, `minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus`, `sgrid`, `rlocfind`, `dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step`, `impulse`

### 3 Sistema Torcional: Controle Co-allocado

O objetivo desta experiência é realizar o controle P&D do sistema retilíneo quando este se apresenta na configuração chamada de *dois graus de liberdade*, que envolve o uso de dois carros conectados por uma mola. Nesta experiência será analisada uma estratégia conhecida como *controle co-allocado*. Por controle co-allocado, entende-se a situação em que o atuador e o sensor estão *co-allocados* no carro que se deseja controlar<sup>2</sup>. Observe que no equipamento existente, o atuador está rigidamente acoplado ao primeiro carro e que cada carro possui um sensor associado. O controle co-allocado é utilizado quando o atuador e o sensor estão acoplados à massa que se deseja controlar, mas com alguma outra massa interferindo no movimento do sistema. Um exemplo prático não-industrial de controle co-allocado é o controle da atitude de um satélite [7].

#### 3.1 Sistema com 2 graus de Liberdade

O sistema com dois graus de liberdade utilizado nesta experiência pode ser modelado a partir da análise da Fig.8. É possível escrever as seguintes equações diferenciais:

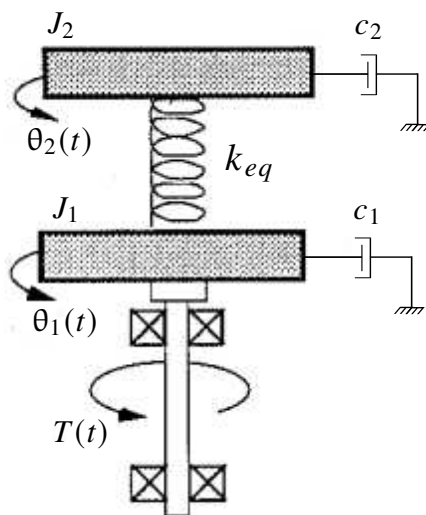


Figura 8: Diagrama para o sistema.

<sup>2</sup>O termo co-allocado é uma tradução livre da expressão em inglês *collocated*.



$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 + k_{eq} (\theta_1 - \theta_2) &= T(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_2 - k_{eq} (\theta_1 - \theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace nestas equações e resolvendo-as para  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tem-se:

$$\frac{\Theta_1(s)}{T(s)} = \frac{J_2 s^2 + c_2 s + k_{eq}}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

$$\frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = \frac{k_{eq}}{D(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = J_1 J_2 s^4 + (c_1 J_2 + c_2 J_1) s^3 + [(J_1 + J_2) k_{eq} + c_1 c_2] s^2 + (c_1 + c_2) k_{eq} s.$$

onde

- $\Theta_1(s)$  : deslocamento angular do disco inferior;
- $\Theta_2(s)$  : deslocamento angular do disco superior;
- $T(s)$  : torque aplicado ao disco inferior;
- $J_1$  e  $c_1$  : momento de inércia e coeficiente de atrito viscoso do disco #1;
- $J_2$  e  $c_2$  : momento de inércia e coeficiente de atrito viscoso do disco #2;
- $k_{eq}$  : constante elástica torcional produzida pela associação das molas.

O que distingue as duas funções de transferência acima é a existência de dois zeros na função  $\Theta_1(s)/T(s)$ , os quais deverão ser levados em conta caso se deseje adotar uma estratégia de *controle co-allocado* (controle do disco inferior).

### 3.2 Configuração

A seguinte configuração será adotada nesta experiência:

- Disco inferior conectado com o disco superior, disco intermediário removido;
- Duas massas de 500 g em cada um dos discos, fixadas simetricamente a 9 cm dos centros dos discos.

**Dados:**

$$\begin{aligned} J_{d1} &= 2,38 \times 10^{-3} \text{ [Kg-m}^2\text{]} & J_{d2} &= 1,84 \times 10^{-3} \text{ [Kg-m}^2\text{]} \\ J_1 &= J_{d1} + J_w & J_2 &= J_{d2} + J_w \\ J_w &= 2(m d^2 + m r^2 / 2) \\ k_{eq} &= 1,37 \text{ [N-rad]} & k_{hw} &= 17,58 \text{ [N-m/rad]} \\ c_1 &= 7,64 \times 10^{-3} \text{ [N-m/rad]} & c_2 &= 1,33 \times 10^{-3} \text{ [N-m/rad]} \end{aligned}$$

### 3.3 Controle co-allocado

O esquema de controle co-allocado é o representado na Fig.9:

Observe que o efeito do disco de inércia superior está modelado na função de transferência  $N_1(s)/D(s)$  presente no diagrama de blocos. O procedimento para a obtenção do controlador PD é iterativo e parte do controlador obtido na Experiência 3, e que também foi utilizado na Experiência 4.

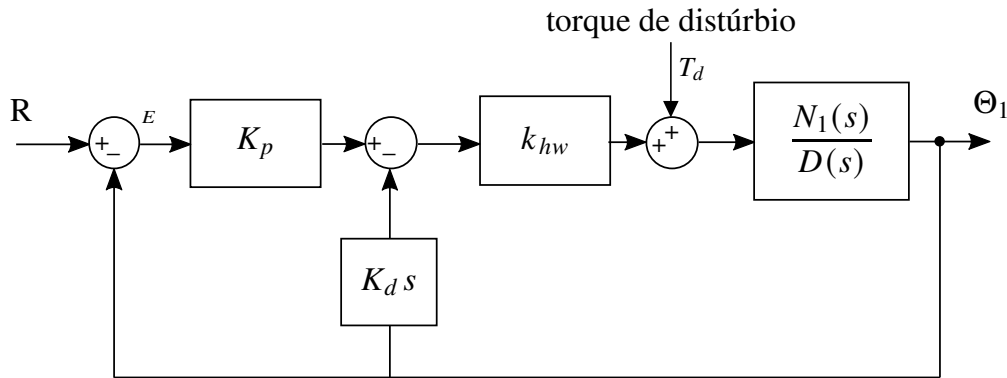











Figura 9: Diagrama para o controle *co-allocado*.

### 3.3.1 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos , ,  e  indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink<sup>®</sup> e script Matlab<sup>™</sup>, respectivamente.

1. Ajuste o sistema de acordo com a configuração descrita na Seção 3.2;
2. Implemente o controlador criticamente amortecido utilizado na Experiência 4 (item 4.1.1) certificando-se de que o **Encoder #1** seja selecionado para o controle. Ajuste uma aquisição de dados dos **Encoders #1** e **#3** e do sinal de referência (**Comanded Position**) a cada 5 ciclos. Obtenha a resposta a um degrau de amplitude **1000** counts e **dwell time** de **1500** ms. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os resultados do **Encoder #1** e do sinal de referência e plote o **Encoder #3 no eixo direto**  (de preferência, use o comando `plotyy`);
3. Ajuste iterativamente os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  até obter uma resposta adequada. Faça os ajustes de ganho gradualmente (nunca maiores que 50% de uma só vez) observando os efeitos de aumentar ou diminuir cada um deles. Não use  $K_p > 1$  e mantenha  $0,02 < K_d < 0,2$ . Tente atingir o seguinte objetivo para o disco #1: tempo de subida  $< 400$  ms (para 90% do valor de regime) e  $overshoot \leq 10\%$ , sem oscilações excessivas. Exporte e plote a melhor resposta obtida . Desloque manualmente o disco inferior e depois o disco superior observando a rigidez relativa de cada um dos discos. Note que a rigidez do disco inferior é completamente promovida pelo sistema de controle;
4. Para a última resposta obtida no item 3, exporte e plote a resposta ao degrau dos dois discos, de preferência na mesma figura . Qual é a característica predominante do movimento do disco superior ? É possível explicar as diferenças observadas nas respostas ao degrau dos dois discos a partir das diferenças de suas funções de transferência ?
5. Mude iterativamente  $K_p$  e  $K_d$  utilizando os valores existentes como ponto de partida, observando a resposta ao degrau da variável  $\theta_3$  de modo que esta variável apresente

máximo *overshoot*  $< 10\%$ , sem oscilações excessivas e o menor tempo de resposta possível. Exporte e plote as respostas finais **(g)** e forneça os ganhos correspondentes **(t)**. Desloque manualmente o disco inferior e depois o superior e observe a rigidez relativa de cada um deles. De maneira geral, a rigidez observada aumentou ou diminuiu em relação ao observado no item 3 **(t)**? Compare o erro em regime da variável  $\theta_1$  obtido neste item com o obtido no item 3 **(t)**;

6. A partir da Fig.9, calcule a função de transferência entre a variável  $\theta_1$  e o torque de distúrbio  $T_d$  **(t)**. O inverso do ganho estático (ganho da função em  $s = 0$ ) da função obtida é chamado de *servo-rigidez estática* e é uma medida da rigidez observada no item anterior. Calcule a servo-rigidez estática dos controladores obtidos nos itens 3 e 5 e compare-os com os observados **(t)**;
7. Repita o item anterior para a variável  $\theta_3$ , respondendo as mesmas perguntas.

### 3.3.2 Exercícios sugeridos

1. Verifique no Matlab o ajuste encontrado, através da rotina *rlocus* de lugar das raízes. Faça outras determinações dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$  que exibam bons ajustes de malha fechada;
2. Faça o mesmo procedimento utilizando agora o controlador PD.

## 3.4 Pré-relatório da Experiência 6

O controle não *co-allocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle da velocidade do deslocamento angular  $\theta_1$  do disco de atuação, responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento  $\theta_1$  é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída  $\theta_3$ , por intermédio da mola de torção. De fato, é possível escrever a função de transferência entre  $\Theta_3(s)/T(s)$  na forma

$$\frac{\Theta_3(s)}{T(s)} = k_{hw} \frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_3(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$\begin{aligned} N_1(s) &= J_3 s^2 + c_3 s + k_{eq} \\ N_3(s) &= k_{eq} \\ D(s) &= J_1 J_3 s^4 + (c_1 J_3 + c_3 J_1) s^3 + [(J_1 + J_3) k_{eq} + c_1 c_3] s^2 + (c_1 + c_3) k_{eq} s. \end{aligned}$$

e  $1/k_{eq} = 1/k_1 + 1/k_3$ , e as inércias  $J_1$  e  $J_3$  têm os mesmos valores da Experiência 5. Note que  $T(s)$  tem sentido de torque aplicado, mas está expresso em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante  $k_{hw}$ .

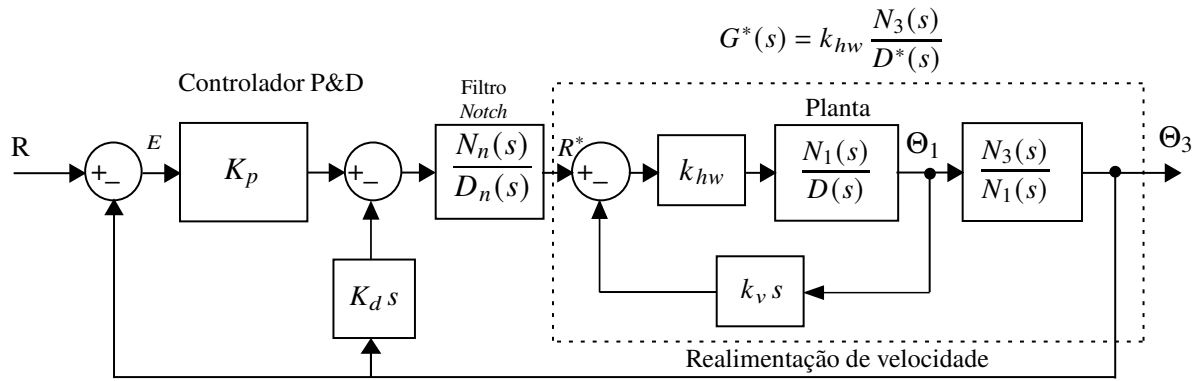


Figura 10: Diagrama para o controle *não co-allocado*.

### 3.4.1 Linhas gerais do projeto

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 10 e a determinação dos controladores será feita da seguinte maneira:

- Calcula-se inicialmente o ganho  $k_v$ , utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que o amortecimento dos polos em malha fechada de  $\Theta_1(s)/R^*(s)$  seja o maior possível;
- Obtém-se a função de transferência  $G^*(s)$ , representada pela linha pontilhada na Fig. 10;
- Calculam-se os parâmetros do filtro *notch*  $N_n(s)/D_n(s)$  de modo que:
  - Os dois zeros do filtro cancelem dois polos de  $G^*(s)$  (tipicamente polos pouco amortecidos), isto é, raízes de  $D^*(s)$  complexas conjugadas.
  - O filtro possua dois pares de polos complexos conjugados de frequência natural  $f_{n1} = 5$  Hz e  $f_{n2} = 11$  Hz respectivamente, e  $\xi = \sqrt{2}/2$  para ambos os pares.
  - O coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $D_n(s)$  deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;
- Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de máximo amortecimento para os polos dominantes em malha fechada.
- A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral **General Form** do software do ECP, com a utilização dos polinômios  $t(s)$ ,  $s(s)$  e  $r(s)$ .

### 3.4.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle não co-allocado. Adote os mesmos valores numéricos utilizados na Experiência 5.

#### Projeto da realimentação do disco de atuação (disco #1):

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir  $\Theta_1(s)/R^*(s)$ ,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de  $k_v$  que forneça o máximo amortecimento,
3. Implemente  $k_v$  e determine os polos da função de transferência interna  $G^*(s)$ . Selecione os polos complexos conjugados desta f.t., denominando-os  $p_1$  e  $p_2$ .

#### Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro *notch* cujos os zeros sejam  $p_1$  e  $p_2$ , e os polos especificados no item c.,
2. Associe  $G^*(s)$  ao filtro projetado.

#### Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_d$  de forma a se obter o máximo amortecimento para os polos dominantes da função de transferência da saída  $\Theta_3(t)$ ,
2. Implemente o valor de  $K_d$  e determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_p$  que tenha o mínimo *tempo de estabelecimento*,
3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com  $\Theta_3(t)$  como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

#### Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig.10 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama da Fig.11 é equivalente ao da Fig.10. Com essa modificação, o controlador P&D mais o filtro *notch* serão implementados na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a  $K_p G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $t(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). O bloco  $(K_p + K_d s) G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $s(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o denominador do filtro *notch* por  $n_2 s^2 + n_1 s + n_0$  e  $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$ , temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$$\begin{array}{lll}
 t_0 = n_0 K_p & s_0 = n_0 K_p & r_0 = d_0 \\
 t_1 = n_1 K_p & s_1 = n_0 K_d + n_1 K_p & r_1 = d_1 \\
 t_2 = n_2 K_p & s_2 = n_1 K_d + n_2 K_p & r_2 = d_2 \\
 & s_3 = n_2 K_d & r_3 = d_3 \\
 & & r_4 = 1
 \end{array}$$

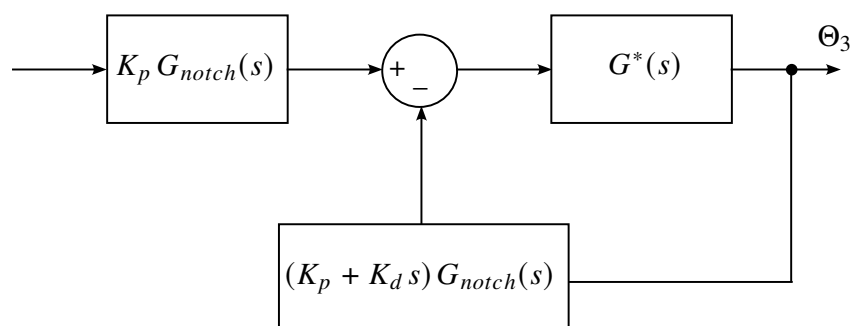


Figura 11: Representação do filtro *notch* + P&D implementado na malha do *loop 1*.

1. O programa Matlab final deve apresentar os coeficientes dos polinômios  $t$ ,  $s$  e  $r$  para facilitar a implementação no laboratório.
2. Utilizando os programas Matlab desenvolvidos, simule o sistema de *controle não co-allocado*, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

**Sugestão.** Para escrever os programas Matlab, podem ser utilizados os seguintes comandos:

- Rotinas para construção de funções de transferência: `tf`, `pzk`, `feedback`, `minreal`
- Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus`, `sgrid`, `rlocfind`, `dcgain`
- Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step`, `impulse`

## 4 Controle em cascata do pêndulo invertido

O objetivo desta experiência é desenvolver um sistema de controle em malha fechada para o pêndulo invertido através da realimentação em cascata da posição linear da haste e da posição angular do pêndulo. O controle da posição linear da haste através de um controlador **PD** foi objeto da Experiência 3 e corresponde ao controle da malha interna. Esta experiência lida especificamente com o controle da malha externa - posição angular do pêndulo - que será realizado através de uma estratégia simples de alocação de polos.

O controle em cascata do pêndulo invertido torna-se atraente do ponto de vista de projeto devido a possibilidade de se obter um modelo simplificado, de 2ª ordem, para a função de transferência  $X(s)/F(s)$ . O controle pode ser então realizado por duas malhas sucessivas.

**Malha interna** - Fecha-se uma malha de controle interna, que resolve o problema de gerar a posição linear  $x$  que produzirá um ângulo de referência especificado,  $\theta$ . A malha interna deve responder rapidamente e sem oscilações, para que eventuais transitórios não sejam percebidos pela malha externa;

**Malha externa** - A posição linear produzida pela malha interna é transformada em posição angular, dado que se conhece a função de transferência  $\theta(s)/X(s)$ , também de 2ª ordem. A malha externa pode então ser fechada por um controlador que forneça um comportamento apropriado para a posição angular.

Observe que abordagens *diretas* para o projeto de sistemas de controle do pêndulo invertido teriam que lidar com a função de transferência instável de 4ª ordem  $X(s)/F(s)$ , o que levaria a um projeto muito mais elaborado de alocação de polos do que o viabilizado pela estratégia de simplificação de modelo/controle em cascata adotada nesta experiência.

#### 4.1 Controle PD do pêndulo invertido

A malha interna do sistema controla a posição linear da haste deslizante através de um controlador **PD**. O projeto dos controladores baseia-se no modelo simplificado do sistema já utilizado nas Experiências 3 e 4, vide a Fig.12.

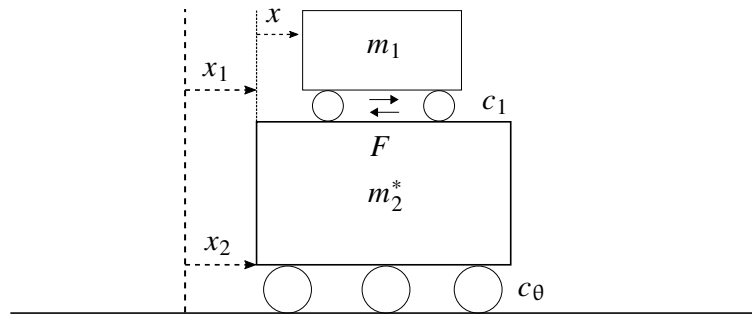


Figura 12: Modelo simplificado do sistema.

Para pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio, o conjunto pêndulo-haste pode ser visto como um sistema composto por duas massas deslizantes com transmissão de força entre elas. Na Fig.12,  $m_1$  representa a massa equivalente da haste,  $m_2^*$  a massa equivalente do pêndulo e contra-peso,  $x_2$  a posição *linear* do pêndulo e  $x$  a posição da haste relativa ao pêndulo, que é objeto do projeto inicial de controle. Considerando o atrito viscoso com coeficiente  $c_1$  e assumindo que  $c_\theta \approx 0$ , temos que

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F - c_1 \dot{x} \\ m_2^* \ddot{x}_2 &= -F + c_1 \dot{x} \end{aligned}$$

onde  $x_1$  é a posição da haste relativa ao referencial do pêndulo. Logo  $x_1 = x_2 + x$  e portanto

$$m_1 (\ddot{x}_2 + \ddot{x}) = F - c_1 \dot{x}.$$

Usando a segunda expressão, obtém-se

$$m^* \ddot{x} + c_1 \dot{x} = F, \quad m^* = \frac{m_1 m_2^*}{m_1 + m_2^*}$$

A massa  $m_2^*$  pode ser obtida a partir do momento de inércia do conjunto sem a haste através de

$$m_2^* \ell_o^2 = \bar{J}$$

onde  $\ell_o$  é o comprimento da haste e  $\bar{J}$  é o momento de inércia do pêndulo sem a haste. O sistema de controle em malha fechada do sistema simplificado pode ser representado como na Fig. 13, onde agora  $E^*$  é um sinal de referência gerado pela malha externa. A função de transferência de malha fechada é

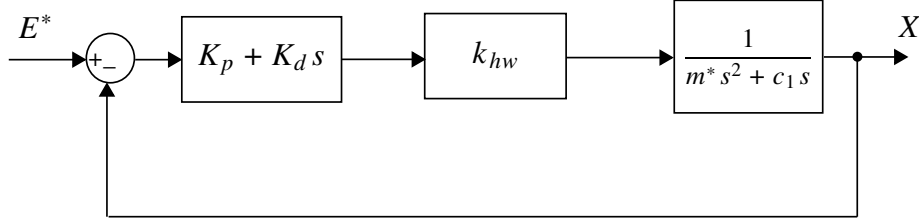


Figura 13: Controle PD da haste.

$$\frac{X(s)}{E^*(s)} = \frac{(k_{hw}/m^*)(K_p + K_d s)}{s^2 + (k_{hw}/m^*)(K_p + K_d s)}, \quad (1)$$

expressando-se  $X(s)$  em unidades de *Counts* devido a presença do ganho  $k_{hw} = k_s k_f k_x$ . Definindo-se

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_{hw} K_p}{m^*}} \quad [\text{rd/s}] \quad (2)$$

$$\xi := \frac{c_1 + k_{hw} K_d}{2 m^* \omega_n} = \frac{c_1 + k_{hw} K_d}{2 \sqrt{m^* k_{hw} K_p}} \quad (3)$$

a função de transferência em malha fechada pode ser colocada na forma padrão

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

## 4.2 Controle do ângulo $\theta$ por alocação de polos

Considere o sistema de controle da malha externa do pêndulo em unidades de counts, como ilustrado na Fig. 14. Nela, as quantidades  $\theta$ ,  $X$  e  $R_c$  (referência) estão representadas em counts:  $\theta = k_a \theta$  [rd], onde  $k_a = 2546$  [counts/rd] é o fator de escala da posição angular do pêndulo;  $x = k_x x_m$ , onde  $k_x = 50200$  [counts/m] é o fator de escala da posição linear da haste.

Ainda com relação à Fig. 14,  $k_{pfc}$  é o ganho do pré-filtro em counts e os polinômios  $S(s)$  e  $R(s)$  (não confundir com a transformada de Laplace do sinal de referência) devem ser determinados para posicionar os polos do sistema em malha fechada nas localizações especificadas. Observe que a função de transferência  $X(s)/E^*(s)$  é dada por (1).



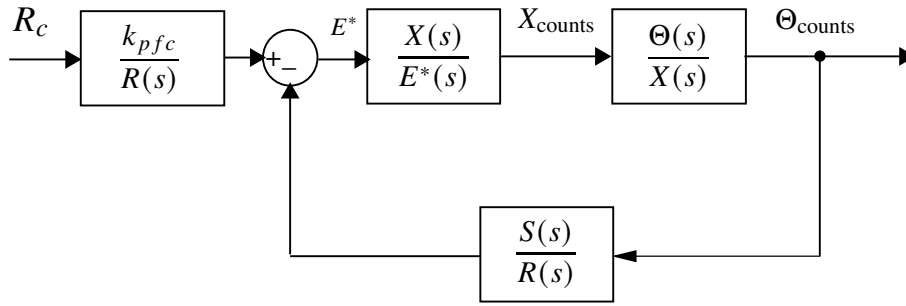


Figura 14: Controle da malha externa do pêndulo.

As especificações adotadas para o projeto do controlador **PD** para a malha do deslocamento da haste deslizante, fazem com que a posição linear siga rapidamente a posição comandada, de tal forma que para todos os efeitos, a função de transferência  $X(s)/E^*(s)$  se comporta aproximadamente como um ganho unitário, e nessa situação podemos considerar que a malha externa envolve agora o controle da planta simplificada:

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{k_a m_1 \ell_0}{k_x J^*} \frac{-s^2 + g/\ell_0}{s^2 + [c_r - (m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c)g]/J^*} := k^* \frac{N_{ax}(s)}{D_{ax}(s)} \quad (4)$$

com os seguintes valores:

$m_1$	$= 0,238$ [Kg]	massa da haste deslizante com os pesos circulares,
$m_{2o}$	$= 0,785$ [Kg]	massa da haste principal,
$m_{w2}$	$= 1,0$ [Kg]	massa do contrapeso,
$m_2$	$= m_{2o} + m_{w2}$ [Kg]	
$\ell_o$	$= 0,330$ [m]	distância do $c_m^\dagger$ da haste deslizante,
$\ell_{co}$	$= 0,071$ [m]	distância do $c_m^\dagger$ da haste principal,
$\ell_{w2}$	$= -0,1385$ [m]	distância do $c_m^\dagger$ do contrapeso $\ell_t = 10$ cm (estável),
$ou$	$= -0,1085$ [m]	distância do $c_m^\dagger$ do contrapeso $\ell_t = 7$ cm (instável),
$\ell_c$	$= (m_{w2} \ell_{w2} + m_{2o} \ell_{co})/m_2$ [m]	
$J_0^*$	$= 0,0246$ [Kg-m <sup>2</sup> ]	mom. inércia do pêndulo (s/ haste des. e contrapeso),
$J^*$	$= J_0^* + m_1 \ell_o^2 + m_{w2} \ell_{w2}^2$	momento de inércia total,
$c_r$	$= 0,0144$ [Nm s / rd]	coeficiente de atrito da haste principal,
$k_a$	$= 2546$ [counts / rd]	ganho do encoder #1,
$k_x$	$= 50200$ [counts / m]	ganho do encoder #2.

**Exercício 1:** Considere as equações linearizadas para o pêndulo a seguir (vide manual da experiência 5 de EA-619, eq.(4), ou o manual do equipamento [1]):

$$\begin{cases} \bar{J} \ddot{x}_m + m_1 \ell_o g x_m + (m_2 \ell_o \ell_c - \bar{J}) g \theta_{rd} = \frac{J^*}{m_1} F(t) \\ \bar{J} \ddot{\theta}_{rd} - m_1 g x_m - m_2 \ell_c g \theta_{rd} = -\ell_o F(t) \end{cases}$$

<sup>†</sup>distâncias dos respectivos centros de massa ( $c_m$ ) orientadas a partir do pivô do pêndulo.

onde

$$\begin{aligned} x_m &- \text{deslocamento da haste em metros,} \\ \theta_{rd} &- \text{deslocamento angular em radianos, e} \\ \bar{J} &= J^* - m_1 \ell_o^2. \end{aligned}$$

Mostre que  $\frac{\Theta(s)}{X(s)}$  é dado pela função de transferência em (4). (t)

Como especificação ao de projeto, deseja-se que a equação característica do sistema em malha fechada da Fig.14 deva ser igual a um certo polinômio  $D_{cl}(s)$ , cujas raízes são os polos desejados para o sistema de malha fechada.

**Exercício 2:** Mostre que a equação característica do sistema em malha fechada da Fig.14 é igual a

$$D_{ax}(s)R(s) + k^* N_{ax}(s)S(s) = D_{cl}(s). \quad (5)$$

Equações polinomiais da forma acima são conhecidas como *Equações Diofantinas*. Pode-se mostrar que como os polinômios  $D_{ax}(s)$  e  $k^* N_{ax}(s)$  são *co-primos*, isto é, não possuem raízes comuns, sempre é possível encontrar polinômios  $S(s)$  e  $R(s)$  de ordem 1 que resolvem a equação polinomial (5), qualquer que seja  $D_{cl}(s)$ , e portanto quaisquer que sejam as localizações arbitradas para os polos de malha fechada do sistema.

A equação polinomial (5) pode ser resolvida definindo-se  $S(s) = s_0 + s_1 s$  e  $R(s) = r_0 + r_1 s$ , desenvolvendo os produtos de polinômios e igualando os coeficientes de mesma potência, porém, este procedimento pode torna-se trabalhoso mesmo para polinômios de ordens relativamente baixas. Por outro lado, sabe-se que equações Diofantinas podem ser representadas como sistemas de equações lineares através da chamada *matriz de Sylvester*. No caso específico em questão, o sistema de equações assume a forma

$$\begin{bmatrix} d_0 & n_0 & 0 & 0 \\ d_1 & n_1 & d_0 & n_0 \\ d_2 & n_2 & d_1 & n_1 \\ 0 & 0 & d_2 & n_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde  $d_i$  e  $n_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  são os coeficientes dos polinômios  $D_{ax}(s)$  e  $k^* N_{ax}(s)$  e  $f_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  são os coeficientes do polinômio  $D_{cl}(s)$ , em ordem crescente de potências de  $s$ .

A solução da equação de Silvester (6) fornece  $S(s) = s_0 + s_1 s$  e  $R(s) = r_0 + r_1 s$  que aloca os polos nas localizações definidas por  $D_{cl}(s)$ , mas não é capaz de fazer com que, em regime, a posição angular do pêndulo  $\theta$  siga a referência  $R_c$ , uma vez que não existe nenhum integrador no caminho direto. Esta especificação será atingida através do ganho do pré-filtro,  $k_{pfc}$ .

A função de transferência de malha fechada entre  $\Theta(s)$  e  $R_c(s)$  é dada por

$$H_c(s) = \frac{\Theta(s)}{R_c(s)} = \frac{k_{pfc}}{R(s)} \frac{G_p(s)}{[1 + G_c(s)G_p(s)]},$$

onde  $G_p(s) = \Theta(s)/X(s)$  e  $G_c(s) = S(s)/R(s)$ .

**Exercício 3:** Se em regime a saída deve seguir a entrada, então o ganho DC de  $H_c(s)$  deve ser unitário. Impondo  $H_c(0) = 1$  na expressão acima, mostre que o ganho de pré-filtro será

$$k_{pfc} = s_0 - \frac{k_x r_0}{k_a m_1} (m_1 \ell_o + m_2 \ell_c). \quad \textcircled{t} \quad (7)$$

O cálculo de  $k_{pfc}$  completa o projeto de controle da malha externa do pêndulo invertido por alocação de polos.

### 4.3 Atenuação de ruídos

Em certos casos, o pêndulo pode apresentar pequenas oscilações na posição linear da haste em torno do ponto de equilíbrio. O problema é causado pelo efeito conhecido como *jitter* (ruído numérico), produzido por erros de quantização, e normalmente amplificado pela diferenciação numérica introduzida pelo controlador PD. Este problema pode ser facilmente resolvido através de um filtro passa-baixas, com frequência de corte significativamente maior que a largura de banda do sistema em malha fechada para não comprometer a resposta dinâmica desejada, e baixa o suficiente para atenuar efetivamente o ruído. A função de transferência do filtro é

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1},$$

onde  $\tau(s)$  é a constante de tempo do filtro e  $1/\tau$  [rd/s] é a sua frequência de corte (largura de banda). Sugere-se  $\tau = 0,008$  s.

**Exercício 4:** Justifique esta escolha, comparando a frequência de corte  $1/\tau$  com as frequências relativas aos polos do sistema em malha fechada  $\textcircled{t}$ .





### 4.4 Configurações do pêndulo invertido

A experiência utiliza as configurações estável e instável do pêndulo: utiliza-se os 'donuts' da haste, o contra-peso do pêndulo e a distância do contra-peso ao pivot é de  $\ell_t = 10$  cm e  $\ell_t = 7$  cm para as plantas estável e instável, respectivamente (o que corresponde a distância do centro de massa ao pivô de  $\ell_{w2} = -0,1385$  m e  $\ell_{w2} = -0,1085$  m, respectivamente). A partir das constantes envolvidas apresentadas na seção anterior, determina-se o modelo simplificado do movimento da haste deslizante, envolvendo os valores de  $k_{hw}$  e de  $m^*$  relativos a cada configuração. Em seguida utiliza-se o modelo dado na equação (4) e malha fechada como na Fig. 14, considerando  $X(s)/E^*(s) \approx 1$ .

#### Dados adicionais do modelo:



$k_f$	$= 0,0013 \text{ N/DAC}_{\text{counts}}$	ganho combinado: conversor DA/amplificador/motor/roldana,
$k_s$	$= 32 \text{ DAC}_{\text{counts}}/\text{Counts}$	conversão de pulsos de encoder para unidade da placa DSP,
$k_{hw}$	$= k_x k_f k_s$	ganho de hardware para o deslocamento da haste ( $X(s)$ ).

## 4.5 Procedimento experimental


Nota: Os símbolos , ,  e  indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink® e script Matlab™, respectivamente.





O procedimento da Experiência 5 é apresentado a seguir. Por razões didáticas, parte do procedimento experimental da Experiência 3 deverá ser repetido, deixando assim claras as vantagens do esquema de controle em cascata.

### 4.5.1 Controle PD

1. Ajuste o sistema na configuração estável (Planta #1);
2. A partir das equações (2) e (3), determine os valores de  $K_p$  e  $K_d$  para produzir  $f_n = 10$  Hz ( $20\pi$  rad/s) e  $\xi = 1$  (amortecimento crítico) em malha fechada . Caso não obtenha  $0,15 < K_p < 0,35$  ou  $0,004 < K_d < 0,012$ , refaça seus cálculos;
3. Ajuste a coleta de dados do **Encoder #2** e **Commanded Position** através da caixa de diálogo **Set-up Data Acquisition** do menu **Data**, com amostragem de dados a cada dois períodos. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory** e selecione **Step-Set-up**. Selecione **Closed Loop Step** com tamanho de **1000** counts, duração de **1000** ms e uma repetição. Retorne ao *Background Screen* clicando **OK** sucessivamente. O controlador está agora preparado para comandar um degrau de **1000** counts (cerca de 2 cm) para frente e para trás com **dwell time** de **1** s;
4. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** do menu **Set-up** e defina o período **Ts= 0,00442** s. Selecione **Continuous Time Control**. Selecione **PID** e **Set-up Algorithm**. Atribua os valores de  $K_p$  e  $K_d$  ( $K_i = 0$ ) determinados no item 2 (não atribua valores fora das faixas  $0,15 < K_p < 0,35$  ou  $0,004 < K_d < 0,012$ ), selecione **Encoder #2** para realimentação e clique **OK**;
5. Posicione o mecanismo com a haste no meio da sua excursão, de tal forma que o pêndulo fique aproximadamente na vertical. Selecione **Implement Algorithm** e clique **OK**;
6. Selecione **Execute** no menu **Command** e clique **Run**. A haste deve se movimentar para frente e para trás cerca de 2 cm, ao mesmo tempo em que o pêndulo balança devido à reação ao movimento da haste;
7. Exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os dados do **encoder #2** e da posição comandada no mesmo gráfico (eixo) . Deve-se observar uma resposta criticamente amortecida com um tempo de subida (critério de 90%) de aproximadamente 60 ms.

### 4.5.2 Alocação de polos para a planta estável

8. Determine os coeficientes dos polinômios  $S(s)$  e  $R(s)$  do controlador da malha externa que aloca os polos do sistema em  $-\pi - j\pi$ ,  $-\pi + j\pi$  e  $-3\pi$ , resolvendo a equação de *Sylvester* (6) .

9. Calcule o ganho do pré-filtro  $k_{pfc}$  que elimina o erro de regime através de (7) .
10. Faça a coleta de dados de **Encoder #1**, **Encoder #2** e **Commanded Position** através do menu **Set-up Data Acquisition** a cada dois períodos de amostragem. No menu **Command**, selecione **Trajectory-Step-Set-up**, selecione **Closed Loop Step** e atribua amplitude de **500 counts**, duração de **2500 ms** e **1** repetição. Retorne ao **Background Screen** clicando **OK** sucessivamente. O controlador está agora em posição de comandar um degrau de **500 counts** ( $\approx 11$  graus) para frente e para trás com **dwell time** de **2,5 s**;
11. Entre na opção **Control Algorithm** do menu **Set-up**, atribua **Ts=0.00884 s** e selecione **Continuous Time Control**. Selecione **General Form** e **Set-up Algorithm** e atribua os valores de  $K_p$  e  $K_d$  ( $K_i = 0$ ) obtidos com o projeto do controlador PD, os quais correspondem aos coeficientes  $e_0$  e  $e_1$  respectivamente. Atribua os coeficientes de  $S(s)$  e  $R(S)$  determinados no item 8. Atribua o valor de  $k_{pfc}$  calculado no item 9 que corresponde ao coeficiente  $t_0$  da **General Form**. Assegure-se que  $i_0 = 1$  para fechar a malha do loop interno, **Encoder #1** está selecionado para o **Loop #1** e que **Encoder #2** está selecionado para o **Loop #2**. Selecione **OK** para sair da caixa de diálogo de especificação do controlador;
12. Para evitar transitórios ao implementar o controlador, observe as seguintes instruções. Selecione **Abort Control** para se certificar de que o pêndulo pode ser manipulado com segurança. Ajuste a haste deslizante aproximadamente no meio do seu percurso, o que manterá o pêndulo na vertical. Certifique-se de que a caixa de acionamento do controlador está ligada. Selecione **Reset Controller** no menu **Utility**. Não perturbe o pêndulo;
13. Volte à caixa de diálogo **Control Algorithm** e selecione **Implement Algorithm**. Se o pêndulo reagir violentamente, você pode ter implementado um controlador instável ou atribuído valores incorretos aos coeficientes do algoritmo de controle. Neste caso, refaça os passos anteriores. Se o pêndulo se comportar da maneira esperada, você pode perturbá-lo ligeiramente da posição vertical e observar como a haste desliza numa tentativa de regular o sistema contra a perturbação. Mantenha o sistema em malha fechada pelo menor tempo possível para evitar desgaste excessivo de componentes (o pêndulo pode apresentar alguma tremedeira provocada por ruídos no sistema em malha fechada que não foram suficientemente atenuados). Neste caso incorpore o filtro passa-baixas com os parâmetros definidos por  $g_1 = 0,008$  e  $g_0 = 1$ ;
14. Selecione **Jog Position** no menu **Utility** e atribua um *jog* absoluto de **-250 counts**. Você deverá observar que o pêndulo move-se no sentido horário cerca de **5,5 graus**. Execute a trajetória comandada, exporte e plote os dados de **Encoder #1** e **Commanded Position**. .
15. Os polos de malha fechada dominantes são  $-\pi - j\pi$  e  $-\pi + j\pi$ . Calcule  $\xi$  e  $\omega_n$  associados a estes polos dominantes e, em seguida, o máximo *overshoot* ( $M_p$ ) e o tempo de estabelecimento ( $t_s$ ) teoricamente esperados . Compare os valores teóricos com os observados experimentalmente. Justifique as diferenças existentes. .

### 4.5.3 Alocação de polos para a planta instável

16. Ajuste a posição dos contra-pesos em  $l_t = 7,0$  cm, certificando-se que estão firmemente seguros. Os 'donuts' deverão estar também firmemente ajustados à haste. O pêndulo se encontra agora na configuração ao instável - Planta #2;
17. As especificações para o controlador PD são as mesmas da configuração estável. Entretanto, devido ao novo ajuste da posição dos contra-pesos, o momento de inércia da haste se altera, com impacto na massa equivalente  $m^*$ ; assim, este valor deverá ser recalculado. As especificações para os polos de malha fechada da malha externa também são as mesmas da configuração estável, porém os passos de projeto e implementação deverão ser refeitos; naturalmente, em vista da nova configuração da planta #2;
18. Com o pêndulo na configuração instável, torna-se mais difícil mantê-lo inicialmente na posição de equilíbrio, antes da implementação do controlador. Este problema pode ser contornado com um pouco de prática;
19. Caso o pêndulo não apresente *tremedeira*, repita os passos da seção 4.5.2 agora para o pêndulo na configuração ao instável. Caso apresente *tremedeira*, incorpore o filtro passa-baixas (vide seção 4.3) com os parâmetros definidos por  $g_1 = 0,008$  e  $g_0 = 1$ , certificando-se que  $f_0 = f_1 = 0$ . Repita então os passos da seção 4.5.2;
20. Compare a resposta ao degrau com a obtida na configuração estável [\(t\)](#).

## 4.6 Pré-relatório da Experiência 6

### 4.6.1 Modelo linearizado do pêndulo invertido com os dois graus de liberdade

Este modelo é obtido diretamente das equações de balanço de forças, do qual temos nos utilizado de forma ligeiramente diferente. As equações são as seguintes:

$$\begin{aligned} (m_1 s^2 + c_1 s) X(s) + (m_1 \ell_0 s^2 - m_1 g) \Theta(s) &= F(s) \\ [J^* s^2 + c_r s - (m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c) g] \Theta(s) + (m_1 \ell_0 s^2 - m_1 g) X(s) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

vide pag.54 do Manual [1]. Para a experiência será usado o pêndulo na configuração estável, resultando no centro de massa do contrapeso  $\ell_{w2} = -0,1384$  cm. Lembrando ainda que  $\ell_c$  é expresso por:

$$\ell_c = \frac{(m_{w2} \ell_{w2} + m_{2o} \ell_{co})}{m_2}$$

Fica a cargo do aluno verificar que as equações linearizadas utilizadas até aqui são equivalentes às equações em (8). Considere a notação:

$$\begin{aligned} D_x(s) &= m_1 s^2 + c_1 s \\ D_\Theta(s) &= J^* s^2 + c_r s - (m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c) g \\ N_a(s) &= m_1 \ell_0 s^2 - m_1 g \end{aligned} \quad (9)$$

De (8) e (9), podemos escrever

$$X(s) = \frac{1}{D_x(s)} (F(s) - N_a(s) \Theta(s)), \quad \Theta(s) = -\frac{N_a(s)}{D_\Theta(s)} X(s)$$

Substituindo  $\Theta(s)/X(s)$  na primeira equação acima, temos que  $(D_x D_\Theta - N_a^2) X = D_\Theta F$ , e assim

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{D_\Theta(s)}{D(s)}, \quad \frac{\Theta(s)}{X(s)} = -\frac{N_a(s)}{D_\Theta(s)} \quad (10)$$

$$D(s) = D_x(s) D_\Theta(s) - N_a(s)^2. \quad (11)$$

O controle não co-allocado será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle PD do deslocamento  $x_1$ . O deslocamento  $x_1$  é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída  $\theta$ , por médio da interação entre a haste deslizante e a haste rotacional. Conforme deduzido acima, podemos escrever a função de transferência  $\Theta(s)/F(s)$  na forma

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde  $D(s)$  é dado por (11) e

$$N_1(s) = k_s k_f k_x D_\Theta(s) = k_s k_f k_x [J^* s^2 + c_r s - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g],$$

$$N_2(s) = -k_s k_f k_a N_a(s) = -k_s k_f k_a (m_1 l_0 s^2 - m_1 g)$$

de acordo com as expressões (9) e (10). Note que  $F(s)$  tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista das constantes  $k_s$ ,  $k_f$ ,  $k_x$  e  $k_a$ .

#### 4.6.2 Linhas gerais do projeto

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig. 15 e a determinação dos controladores será feita da seguinte maneira:

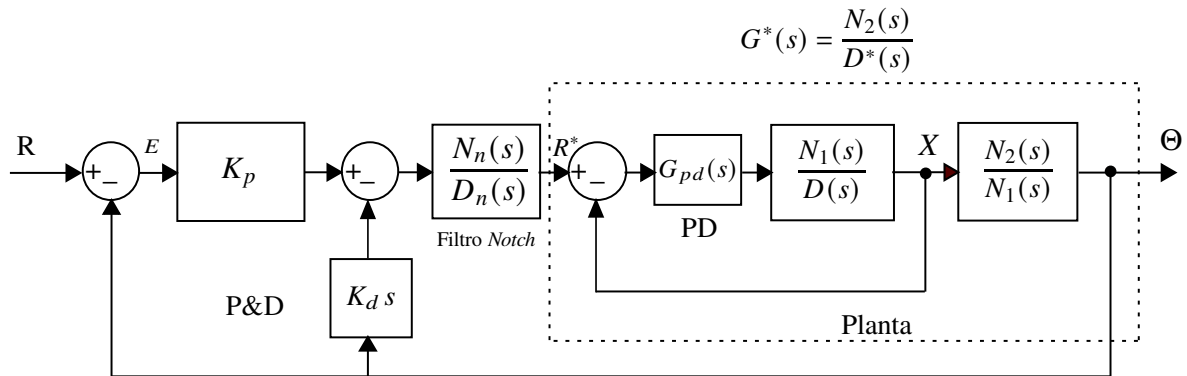


Figura 15: Diagrama para o controle *não co-allocado*.

- a. O controlador PD da malha interna tem a forma  $G_{pd}(s) = K_{p1}(1 + \tau s)$ , com  $\tau = 0,0319$ , isto é, o zero do controlador PD é fixo<sup>3</sup>. Calcula-se inicialmente o ganho  $K_{p1}$  do controlador PD interno, utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) de modo a estabilizar a malha interna;
- b. Obtém-se a função de transferência  $G^*(s)$ , representada pela linha pontilhada na Fig. 15;
- c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch*  $N_n(s)/D_n(s)$  de modo que:
  1. um zero do filtro cancele o polo dominante. Caso os polos dominantes sejam complexos conjugados, adote o zero negativo e igual ao módulo desses.
  2. dois outros zeros do filtro cancelem dois polos de  $G^*(s)$  (tipicamente polos pouco amortecidos), isto é, raízes de  $D^*(s)$  complexas conjugadas com parte imaginária grande.
  3. o filtro possua dois pares de polos reais parametrizados por  $f_{n1} = 5$  Hz e  $f_{n2} = 11$  Hz (frequência natural) respectivamente, e  $\xi = 2$  (fator de amortecimento) para ambos os pares.
  4. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $D_n(s)$  deve ser 1 (polinômio mônico) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário;
- d. Os parâmetros do controlador P&D da malha externa devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, por tentativas.
- e. A implementação do filtro *notch* e controlador P&D será realizada utilizando a forma geral General Form do software do ECP, com a utilização dos polinômios  $t(s)$ ,  $s(s)$  e  $r(s)$ .

#### 4.6.3 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do *controle não co-allocado*. Adote os mesmos valores numéricos utilizados nas experiências anteriores.

#### Projeto da realimentação da haste deslizante:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir  $X(s)/R^*(s)$ ,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de  $K_{p1}$  do controlador PD interno, de modo a estabilizar essa malha, fazendo que os polos dominantes sejam rápidos, porém reais,

---

<sup>3</sup>O valor de  $\tau$  escolhido corresponde aproximadamente ao valor  $K_d/K_p$  para o ajuste de comportamento criticamente amortecido da haste deslizante adotado nos experimentos anteriores.



3. Implemente  $K_{p1}$  e determine os polos da função de transferência interna  $G^*(s)$ . Selecione o polo dominante  $p_1$  e os polos complexos conjugados desta f.t. com parte imaginária grande, denominando-os  $p_2$  e  $p_3$ .

#### Projeto do filtro notch:

1. Projete o filtro *notch* cujos os zeros sejam  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , e os polos especificados no item c.,
2. Associe  $G^*(s)$  ao filtro projetado.

#### Projeto do controlador P&D:

1. Determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_d$  de forma que a parte imaginária dos polos que caminham para o semi-plano direito seja ligeiramente superior à parte real desses polos.
2. Implemente o valor de  $K_d$ , e determine através do lugar das raízes o valor do ganho  $K_{p2}$  utilizando o mesmo critério para o ajuste do ganho  $K_d$  descrito no item anterior.
3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com  $\theta(t)$  como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

#### Implementação no software ECP:

O diagrama da Fig.15 não pode ser implementado diretamente nesta forma. Mostre através de operações algébricas no diagrama de blocos, que o diagrama da Fig.16 é equivalente ao da Fig.15. Com essa modificação ao o controlador P&D mais filtro *notch* serão implementados na malha do *loop 1*.

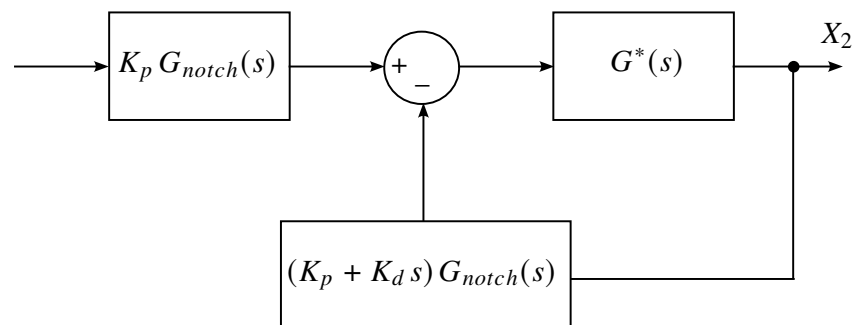


Figura 16: Representação do filtro notch + P&D implementado na malha do *loop 1*.

O bloco correspondente a  $K_p G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $t(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). O bloco  $(K_p + K_d s) G_{notch}(s)$  é implementado através dos polinômios  $s(s)$  (numerador) e  $r(s)$  (denominador). Denotando-se respectivamente o numerador e o

denominador do filtro *notch* por  $n_3 s^3 + n_2 s^2 + n_1 s + n_0$  e  $s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$ , temos as seguintes relações entre os coeficientes dos polinômios:

$$\begin{array}{lll}
 t_0 = n_0 K_p & s_0 = n_0 K_p & r_0 = d_0 \\
 t_1 = n_1 K_p & s_1 = n_0 K_d + n_1 K_p & r_1 = d_1 \\
 t_2 = n_2 K_p & s_2 = n_1 K_d + n_2 K_p & r_2 = d_2 \\
 t_3 = n_3 K_p & s_3 = n_2 K_d + n_3 K_p & r_3 = d_3 \\
 & s_4 = n_3 K_d & r_4 = 1
 \end{array}$$

1. O programa Matlab final deve apresentar os coeficientes dos polinômios  $t$ ,  $s$  e  $r$  para facilitar a implementação no laboratório.
2. Utilizando os programas Matlab desenvolvidos, simule o sistema de *controle não colocado*, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

### Sugestão:

Para escrever os programas Matlab, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf`, `pzk`, `feedback`, `minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus`, `sgrid`, `rlocfind`, `dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step`, `impulse`

## 5 Sistema Levitador: Controle Co-allocado

O objetivo desta experiência é realizar o controle P&D do sistema levitador quando este se apresenta na configuração chamada de *dois graus de liberdade*, que envolve o uso de dois discos posicionados de forma a gerar força de repulsão entre eles. Nesta experiência será analisada uma estratégia conhecida como *controle co-allocado*. Por controle co-allocado, entende-se a situação em que o atuador e o sensor estão co-allocados no disco que se deseja controlar<sup>4</sup>, mas com alguma outra massa interferindo no movimento do sistema.

### 5.1 Sistema com dois graus de liberdade

O sistema com dois graus de liberdade utilizado nesta experiência pode ser modelado a partir da análise da Fig. 17. É possível escrever as seguintes equações diferenciais:

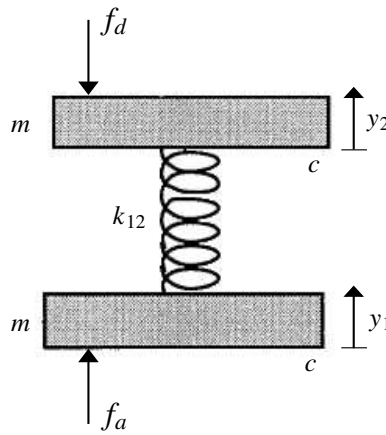


Figura 17: Sistema com dois graus de liberdade e compensação da força do atuador.

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + c \dot{y}_1 + k_{12} y_1 - k_{12} y_2 &= F_a(t) \\ m \ddot{y}_2 + c \dot{y}_2 + k_{12} y_2 - k_{12} y_1 &= F_d(t) \end{aligned}$$

Fazendo  $F_d \equiv 0$ , e aplicando-se a transformada de Laplace em ambas as equações e resolvendo-as para  $y_1$  e  $y_2$  tem-se:

$$\frac{Y_1(s)}{F_a(s)} = \frac{m s^2 + c s + k_{12}}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

$$\frac{Y_2(s)}{F_a(s)} = \frac{k_{12}}{D(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = m^2 s^4 + 2 c m s^3 + (2 m k_{12} + c^2) s^2 + 2 c k_{12} s.$$

<sup>4</sup>O termo co-allocado é uma tradução livre da expressão em inglês *collocated*.

onde

- $Y_1(s)$  : deslocamento linear do disco #1;
- $Y_2(s)$  : deslocamento linear do disco #2;
- $F_a(s)$  : força aplicada ao disco #1;
- $m$  e  $c$  : massa e coeficiente de atrito viscoso dos discos #1 e #2;
- $k_{12}$  : constante da mola conectando os discos #1 e #2.

O que distingue as duas funções de transferência acima é a existência de dois zeros na função  $Y_1(s)/F_a(s)$ , os quais deverão ser levados em conta caso se deseje adotar uma estratégia de controle co-allocado (controle do disco #1).

## 5.2 Configuração

A seguinte configuração será adotada nesta experiência:

- Discos #1 e #2 posicionados de forma a gerar força de repulsão entre os discos;
- Implementação por software da compensação da força do atuador magnético (bobina).

### Dados

$m_1, m_2$	$= 0,123$ [Kg]	massa dos discos
$c$	$= 0,4078$ [N/(m/s)]	coeficientes de atrito dos discos
$k_{12}$	$= 37,18$ [N/m]	constante de mola
$k_{sys}$	$= 100$	ganho do sistema

## 5.3 Controle co-allocado

O esquema de controle co-allocado é o representado na Fig.18.

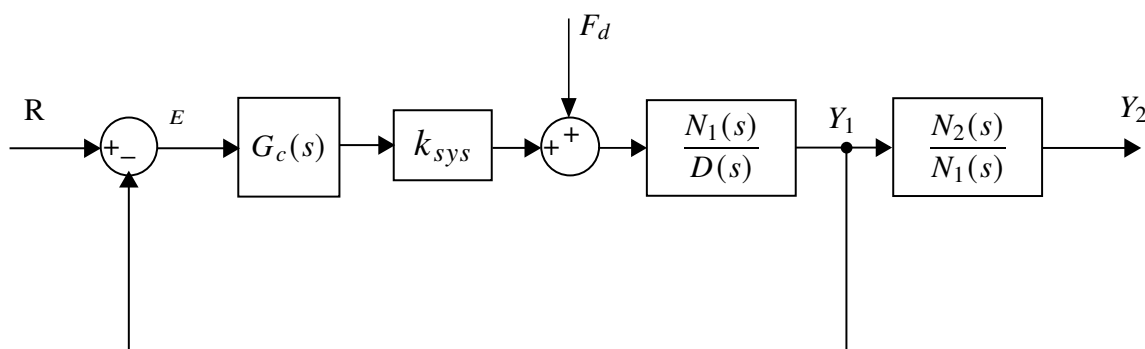






Figura 18: Controle sujeito a perturbações.

Observe que o efeito do disco #2 está modelado na função de transferência  $N_1(s)/D(s)$  presente no diagrama de blocos. O procedimento para a obtenção do controlador PID é iterativo e parte do controlador obtido na Experiência 3, e que também foi utilizado na Experiência 4.

### 5.3.1 Procedimento experimental

Nota: Os símbolos , ,  e  indicam a necessidade de produção de um gráfico, desenvolvimento teórico, diagrama simulink® e script Matlab™, respectivamente.

#### Inicialização do Levitador

Este procedimento se refere ao experimento com um disco magnético montado.

1. No menu **File** carregue os parâmetros de calibração do sensor. Através da opção **Load Settings** carregue o arquivo `Cal.cfg` que se encontra na pasta `/ea722/programas`. Entre no menu **Setup, Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor**  $Y_{cal} = a/Y_{raw} + f/\sqrt{Y_{raw}} + g + h * Y_{raw}$  e habilite a opção **Apply Thermal Compensation**;
2. Entre na caixa de diálogo **Control Algorithm** e verifique se **Ts = 0.001768s**. Carregue o algoritmo `Cal_2d.alg` que se encontra na pasta `/ea722/programas` através da opção **Load from disk**. Em seguida selecione **Implement Algorithm**. O disco irá se mover para a altura de aproximadamente 1,0 [cm] mantendo-se nesta posição;
3. Verifique se o **Sensor 1 Pos** está indicando o valor de  $10000 \pm 500$  [counts]. Caso isso não ocorra, entre no menu **Setup, Sensor Calibration**, selecione a opção **Calibrate Sensor** e ajuste o termo  $g$  da calibração para que a leitura do **Sensor 1 Pos** no fundo de tela seja próximo 10000 [counts];
4. Selecione **Execute** no menu **Command** e em seguida **Trajectory #1 only**; depois plote as variáveis **Commanded Position** e **Variable Q10** e **Variable Q13**. Verifique se a trajetória da variável Q10 e Q13 apresentam pelo menos duas oscilações acima do valor de regime. Caso isso não ocorra, solicite a presença do professor.

Após a conclusão deste procedimento, clique no botão **Abort Control** no fundo de tela.

1. Para realização dos ensaios carregue o algoritmo do arquivo `exp5.alg` que se encontra na pasta `/ea722/programas`, através da opção **Load from disk**. Selecione **Edit Algorithm** para introduzir modificações nos valores de  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$  no programa. Ajuste no programa `exp5.alg` os ganhos do controlador para  $K_p = 0,5$ ,  $K_d = 0,05$  e  $K_i = 0,5$ ;
2. Através da caixa de diálogo **Set-up Data Acquisition** do menu **Data**, ajuste a coleta dos dados de **Command Position**, incluindo também a coleta das seguintes variáveis:
  - posição  $y_1$  relativa ao ponto de equilíbrio inicial. No programa é a variável `delta_y`;
  - esforço incremental de controle. No programa é a variável `delta_u`;
  - posição  $y_2$  absoluta. No programa é a variável `sensor2_pos`

Para isto, verifique no programa se estas variáveis estão associadas as variáveis de saídas q10,q11,q12 ou q13, e ajuste no menu Data a coleta de dados das variáveis correspondentes. Especifique uma amostragem de dados a cada 5 ciclos;

3. Entre no menu **Command**, vá para **Trajectory #1** e selecione **Step**. Ajuste um degrau com amplitude de **15000 counts**, **dwell time=1000 ms** e **1** (uma) repetição. Certifique-se que a opção **Unidirectional Move Only** esteja habilitada;
4. Selecione **Execute** no menu **Command** e em seguida **Trajectory #1 only**; depois exporte e plote (usando o script `plotRawData.m`) os resultados experimentais obtidos (g);
5. Ajuste iterativamente os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  até obter uma resposta adequada. Faça os ajustes de ganho gradualmente (nunca maiores que 50% de uma só vez) observando os efeitos de aumentar ou diminuir cada um deles. Não utilize  $K_p > 3$  e mantenha  $0,02 < K_d < 0,1$ <sup>5</sup>. Tente atingir o seguinte objetivo para o disco #1: tempo de subida < 200 ms (para 90% do valor de regime) e *overshoot* ≤ 10%, sem oscilações excessivas. Exporte e plote a melhor resposta obtida (g). Desloque manualmente os discos #1 e #2 (toque somente as bordas dos discos), e observe a rigidez relativa dos discos;
6. Para a última resposta obtida no passo anterior, exporte e plote a resposta ao degrau do disco #2 (g). Qual é a característica predominante do movimento do disco #2 (t)? É possível explicar as diferenças observadas nas respostas ao degrau dos dois discos a partir das diferenças de suas funções de transferência (t)?
7. Entre no menu **Command** vá para **Trajectory #2** e selecione **Impulse**. Ajuste um impulso unidirecional com Amplitude = **20000 counts**, **Pulse Width = 1000 ms**, **Dwell Time =1000 ms** e **2** repetições. Vá para **Trajectory #1** e selecione **Step**. Ajuste um degrau com amplitude de **0 counts**, **Dwell Time= 2000 ms** e **1** (uma) repetição.
8. Na opção **Command**, menu **Execute**, selecione **Execute Trajectory #1 first then Trajectory #2 with delay**, e faça esse atraso ser de **500 ms**. Em seguida execute com o botão **Run**. Exporte e plote os resultados (g) e observe o resultado da perturbação em cada disco;
9. Verifique se a resposta ao degrau da variável  $y_2$  apresenta um *overshoot* máximo inferior a 10%, sem oscilações excessivas, e com o menor tempo de subida possível. Se necessário, altere iterativamente  $K_p$  e  $K_d$  utilizando os valores existentes como ponto de partida. Exporte e plote as respostas finais e anote os ganhos correspondentes (g). Desloque manualmente os discos #1 e #2 e observe a rigidez relativa de cada um discos. De maneira geral, a rigidez observada aumentou ou diminuiu em relação ao observado no item 5 (t)? Compare o erro em regime do controlador obtido neste item com o obtido no item 5 (t).
10. Repita os itens 7 e 8 com os valores de  $K_p$  e  $K_d$  encontrados no item anterior, fornecendo as mesmas respostas e gráficos.

---

<sup>5</sup>Se o sistema apresentar comportamento irregular (ruidoso), diminua o ganho  $K_d$ , e se estiver muito oscilatório, aumente  $K_d$ .

11. A partir da Fig.18, calcule a função de transferência entre a variável  $x_1$  e a força de distúrbio  $F_d$  (t). O inverso do ganho estático da função (ganho da função em  $s = 0$ ) obtida é chamado de *servo-rigidez estática* e é uma medida da rigidez observada no item anterior. Calcule a servo-rigidez estática dos controladores obtidos nos itens 1 e 9 e compare-os com os observados (t).
12. Repita o item anterior para a variável  $x_2$ , respondendo as mesmas perguntas.

### 5.3.2 Exercícios sugeridos

- Verifique no Matlab o ajuste encontrado, através da rotina *rlocus* de lugar das raízes. Faça outras determinações dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$  que exibam bons ajustes de malha fechada;
- Faça o mesmo procedimento "experimental" através de simulação utilizando agora o controlador P&D.

## 5.4 Pré-relatório da Experiência 6

O controle *não co-allocado* será objeto de estudos na Experiência 6 e baseia-se na existência de uma malha interna de controle de velocidade do deslocamento  $y_1$ , responsável pelo ajuste do amortecimento. O deslocamento  $y_1$  é a variável que exerce a ação sobre a variável de saída  $y_2$ , por intermédio da interação magnética entre os discos. De fato, é possível reescrever a função de transferência entre  $Y_2/F(s)$  na forma

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{N_1(s)},$$

onde

$$N_1(s) = m_2 s^2 + c_2 s + k_{12}, \quad N_2(s) = k_{12}$$

$$D(s) = m_1 m_2 s^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1) s^3 + [(m_1 + m_2) k_{12} + c_1 c_2] s^2 + (c_1 + c_2) k_{12} s.$$

com  $m_1 = m_2 = m$ .

Note que  $F(s)$  tem sentido de força aplicada, mas está expressa em unidades apropriadas ao uso no ECP, em vista da constante  $k_{sys}$ .

### 5.4.1 Linhas gerais do projeto

Adotaremos o esquema de controle representado na Fig.19 e a determinação dos controladores será feita da seguinte maneira:

- a. Calcula-se inicialmente o ganho  $k_v$ , utilizando-se o lugar das raízes (*root locus*) da malha interna, de modo que ele tenha o maior valor possível tal que o amortecimento dos polos em malha fechada de  $Y_1(s)/R^*(s)$  tenha valor 0,2;
- b. Obtém-se a função de transferência  $G^*(s)$ , representada pela linha pontilhada na Fig.19;

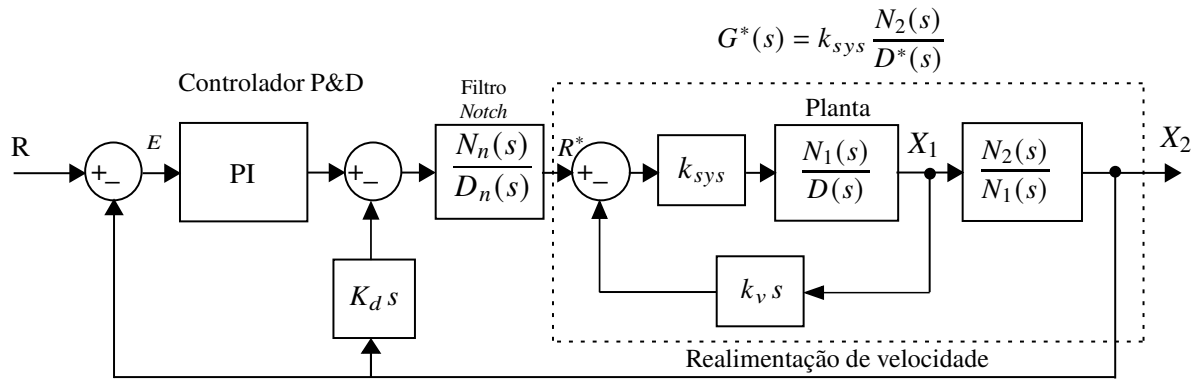


Figura 19: Diagrama para o controle *não co-allocado*.

c. Calculam-se os parâmetros do filtro *notch*  $N_n(s)/D_n(s)$  de modo que:

1. os dois zeros do filtro cancelem dois polos de  $G^*(s)$  (tipicamente polos pouco amortecidos), isto é, raízes de  $D^*(s)$  complexas conjugadas.
2. o filtro possua um par de polos complexos conjugados de frequência natural  $f_n = 8$  Hz respectivamente, e  $\xi = \sqrt{2}/2$ .
3. o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $D_n(s)$  deve ser 1 (polinômio *mônico*) e o ganho estático (DC) da função de transferência do filtro deve ser unitário; Considere assim a seguinte representação para o filtro *notch* a ser utilizado.

$$G_{notch}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Então  $a_0 = b_0$ ;

- d. Os parâmetros do controlador P&D devem ser obtidos com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se os critérios especificados na seção Detalhamento.

#### 5.4.2 Detalhamento

Considere os passos a seguir para a realização do projeto do controle *não co-allocado*. Adote os mesmos valores numéricos utilizados na Experiência 5.

#### Projeto da realimentação do disco 1:

Escreva um programa Matlab para executar os seguintes passos:

1. Implemente as funções de transferências da planta utilizando os valores numéricos para definir  $Y_1(s)/R^*(s)$ ,
2. Determine através do lugar das raízes *root locus* o valor de  $k_v$  de acordo com o especificado no item a.,



3. Implemente  $k_v$  e determine os polos da função de transferência interna  $G^*(s)$ . Selecione os polos complexos conjugados desta f.t., denominando-os  $p_1$  e  $p_2$ .

**Projeto do filtro notch:**

1. Projete o filtro *notch* cujos os zeros sejam  $p_1$  e  $p_2$ , e os polos especificados no item c.,
2. Associe  $G^*(s)$  ao filtro projetado.

**Projeto do controlador PI&D:**

1. Determine o ganho  $K_d$  de forma que os polos dominantes apresentem frequência natural em torno de 50 rd/s e fator de amortecimento 0,56,
2. A parte PI do controlador tem a seguinte função de transferência:

$$G_{PI}(s) = K_p \left( \frac{1}{1 + \tau s} \right)$$

Assumindo que  $\tau = 1,5$ , a determinação do ganho  $K_p$  deve ser obtida com o auxílio do diagrama do lugar das raízes *root locus*, adotando-se o critério de amortecimento em torno de 0,6 e frequência natural em torno de 40 rd/s;

3. Utilize a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com  $y_2(t)$  como saída, como critério para verificação da adequação do ajuste.

Utilizando os programas Matlab desenvolvidos, simule o sistema de controle *não co-aleado*, de forma a poder fazer comparações com os resultados experimentais a serem obtidos na Experiência 6.

**Sugestão:**

Para escrever os programas Matlab, podem ser utilizados os seguintes comandos

Rotinas para construção de funções de transferência: `tf`, `pzk`, `feedback`, `minreal`

Rotinas para obtenção do lugar das raízes e ganhos: `rlocus`, `sgrid`, `rlocfind`, `dcgain`

Rotinas para obtenção de resposta temporal: `step`, `impulse`

## Referências

- [1] ECP. *Manual for Model 505 - Inverted Pendulum - Educational Control Products*, 1994. 4.2, 4.6.1
- [2] ECP. *Manual for Model 220 - Industrial Emulator/Servo Trainer - Educational Control Products*, 1995.
- [3] ECP. *Manual for Model 205/205a - Torsional Control System - Educational Control Products*, 1997.
- [4] ECP. *Manual for Model 210/210a - Rectilinear Control System - Educational Control Products*, 1998.
- [5] ECP. *Manual for Model 730 - Magnetic Levitation System - Educational Control Products*, 1999.
- [6] P. A. V. Ferreira. Introdução aos Sistemas de Controle. Notas de aula, prof. Paulo Valente. FEEC-UNICAMP, 1999.
- [7] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson Education Limited, 8th edition, 2018. 3
- [8] J.C. Geromel and R.H. Korogui. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Edgard Blücher Ltda., 3rd edition, 2011.
- [9] J.C. Geromel and A.G.B. Palhares. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Edgard Blücher Ltda., 3rd edition, 2019.
- [10] D.J. Higham and N.J. Higham. *MATLAB Guide*. Siam, 3rd edition, 2017.
- [11] The MathWorks Inc. *MATLAB and Simulink® Coverage™ User's Guide*. The MathWorks, Inc., 2022.
- [12] N.S. Nise. *Control System Engineering*. Wiley, 8th edition, 2019.
- [13] K. Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall, 5th edition, 2010.