# EA722
# Laboratório de Princípios de Controle e Servomecanismos

Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Marconi Kolm Madrid

## Experimento 3
## Controle PD e P&D dos sistemas ECP

**Equipamento utilizado:** Sistema Torcional

**Turma D**
**Participantes:**
Nicolas Pereira da silva (RA:247298)
Pedro Nícolas Sampaio Gomes (RA: 247333)
Vinícius Esperança Mantovani (RA: 247395)

## Motivação

Este experimento tem como objetivo estudar o comportamento de um sistema de controle utilizando um controlador proporcional-derivativo (PD), aplicando os conceitos a um sistema de segunda ordem hipotético. A análise é focada em como o controlador PD pode melhorar o desempenho do sistema em malha fechada, reduzindo overshoot e oscilações, em comparação com o controle apenas proporcional. Controladores PD são amplamente utilizados em aplicações práticas, como o controle de máquinas-ferramentas e sistemas aeroespaciais, devido à sua capacidade de antecipar tendências do erro e, assim, ajustar a ação de controle para melhorar a resposta do sistema. Este estudo também visa comparar os resultados teóricos calculados em relatórios anteriores com os valores experimentais obtidos, validando a eficácia do controle PD em diferentes cenários.

## Introdução

Sistemas de controle em malha fechada desempenham um papel central em diversas áreas de engenharia, especialmente naqueles que exigem precisão e estabilidade. O controlador proporcional-derivativo (PD), que adiciona uma ação derivativa ao controle proporcional tradicional, tem como principal função melhorar o amortecimento do sistema, reduzindo o overshoot e as oscilações. Trabalhos anteriores mostraram que, ao aplicar apenas o controle proporcional, o sistema exibe altos valores de overshoot e instabilidade temporária, como ilustrado na Figura 1. Este relatório se baseia nesses resultados teóricos e se propõe a verificar experimentalmente os efeitos da introdução de um termo derivativo no controle, validando sua capacidade de melhorar a resposta do sistema no tempo. Por meio dessa abordagem, é possível observar a contribuição do termo derivativo na antecipação do comportamento do erro, tornando o sistema mais estável e eficiente.

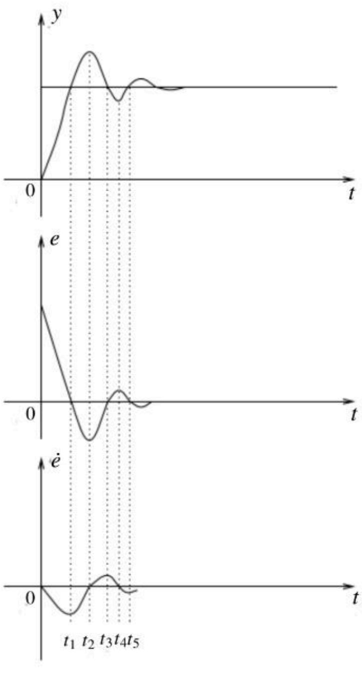


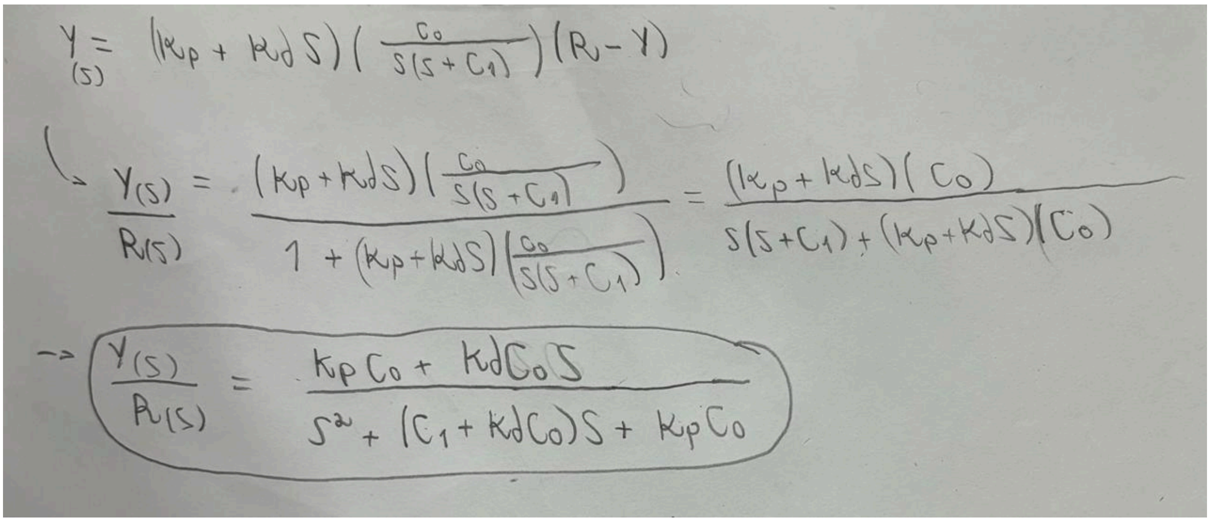

*Figura 1: Análise das ações proporcional e derivativa.*

## Itens Propostos

### Exercício 1:

Conforme desejado, foi provado, na figura 2 que a função de transferência do sistema é equivalente à apresentada abaixo.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_d\, c_0\, s + K_p\, c_0}{s^2 + (c_1 + k_d\, c_0)\, s + K_p\, c_0}$$



$$Y_{(s)} = (K_p + K_d S)\left(\frac{C_0}{S(S+C_1)}\right)(R - Y)$$

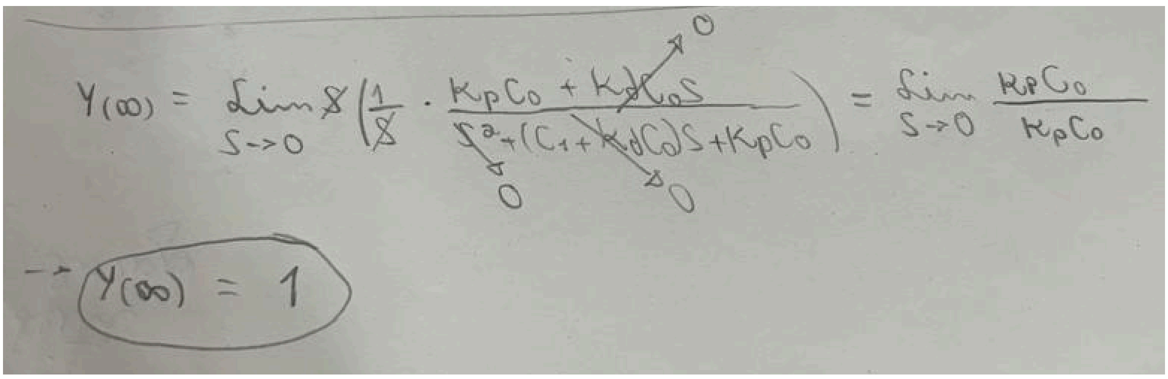
$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{(K_p + K_d S)\left(\frac{C_0}{S(S+C_1)}\right)}{1 + (K_p + K_d S)\left(\frac{C_0}{S(S+C_1)}\right)} = \frac{(K_p + K_d S)(C_0)}{S(S+C_1) + (K_p + K_d S)(C_0)}$$

$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K_p C_0 + K_d C_0 S}{S^2 + (C_1 + K_d C_0) S + K_p C_0}$$

*Figura 2: Demonstração exercício 1*

### Exercício 2:

Em sequência, neste exercício, foi feito um processo também de demonstração, no entanto, agora a respeito do valor de y com o tempo tendendo a infinito, conforme requisitado:



$$Y_{(\infty)} = \lim_{S \to 0} \cancel{S}\left(\frac{1}{\cancel{S}} \cdot \frac{K_p C_0 + \cancel{K_d C_0 S}}{\cancel{S^2} + \cancel{(C_1 + K_d C_0) S} + K_p C_0}\right) = \lim_{S \to 0} \frac{K_p C_0}{K_p C_0}$$

$$Y_{(\infty)} = 1$$

*Figura 3: Demonstração exercício 2*

**Exercício 3:**

Em continuidade, foi demonstrada, novamente, a igualdade da função de transferência de um sistema em moldes distintos aos do anterior e, obteve-se a demonstração abaixo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p\, c_0}{s^2 + (c_1 + k_d\, c_0)\, s + K_p\, c_0}$$

$$Y = G_p\left(K_p(R - Y) - K_d S Y\right) \rightarrow Y = G_p\left(K_p R - K_p Y - K_d S Y\right)$$

$$\rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{G_p K_p}{1 + G_p(K_p + K_d S)} = \frac{\frac{C_0}{S(S + C_1)} K_p}{1 + \frac{C_0}{S(S+C_1)}(K_p + K_d S)} =$$

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{C_0 K_p}{S(S + C_1) + C_0(K_p + K_d S)} = \frac{C_0 K_p}{S^2 + (C_1 + C_0 K_d)S + C_0 K_p}$$

*Figura 3: Demonstração exercício 3*

**Exercício 4:**

Prosseguindo, foi demonstrada a função de transferência do sistema rotacional dentro dos conformes requisitados:

$$\frac{\Theta_1(s)}{R(s)} = \frac{k_{hw}\, K_p\, / J_1}{s^2 + \left[(c_1 + k_{hw}\, K_d)\, s + k_{hw}\, K_p\right] / J_1}$$

$$\Theta_1(S) = \frac{K_{hw}}{J_1 S^2 + C_1 S}\left(K_p(R - \Theta_1) - K_d S \Theta_1\right) =$$

$$\frac{K_{hw}}{J_1 S^2 + C_1 S}\left(K_p R - K_p \Theta_1 - K_p K_d S \Theta_1\right) \rightarrow \frac{\Theta_1}{R} = \frac{\frac{K_{hw} K_p}{J_1 S^2 + C_1 S}}{1 + \frac{K_{hw}}{J_1 S^2 + C_1 S}(K_p + K_p K_d S)}$$

$$\frac{\Theta_1(S)}{R(S)} = \frac{K_{hw} K_p}{J_1 S^2 + C_1 S + K_{hw} K_p + K_{hw} K_d S} = \frac{K_{hw} K_p}{J_1 S^2 + (C_1 + K_{hw} K_d) S + K_{hw} K_p}$$

$$\rightarrow \frac{\Theta_1(S)}{R(S)} = \frac{K_{hw} K_p / J_1}{S^2 + \frac{(C_1 + K_{hw} K_d) S + K_{hw} K_p}{J_1}}$$

*Figura 4: Demonstração exercício 4*

### 4.1.1 Procedimento experimental - parte 1

**Itens 1 a 5)**

Durante a experiência em sala, foram feitos ajustes para que o sistema torcional funcionasse de acordo com o enunciado. Para fazer isso corretamente, como orientado pelo item 2, foi necessário calcular o coeficiente de ganho proporcional $K_p$ para um oscilador mola-inércia de frequência 2 Hz de acordo com a seguinte fórmula:

$$\omega n \; = \; \sqrt{\frac{k_{kw} K_p}{J_1}} [rd/s] \; (1)$$

Considerando que estamos realizando o cálculo em função da frequência angular $\omega_n$, que é dada por radianos por segundo, a frequência de 2 Hz significa uma frequência angular $\omega_n = 2 * 2\pi$ rad/s. Considerando os valores de $k_{hw}$ e $J_1$ utilizados nos experimentos anteriores ($k_{hw} = 17.57$ e $J_1 = 0.010786$) e resolvendo a equação, tiramos que $K_p \cong 0.097$.

**Item 6)**

Neste item, foi-nos pedido para determinar a frequência de oscilação exibida pelo sistema com o valor de $K_p$ estipulado ($K_P = 0.097$) e, em seguida, com o $K_p$ dobrado ($K_p = 0.194$). Os gráficos obtidos a partir dessas configurações estão exibidos logo abaixo:

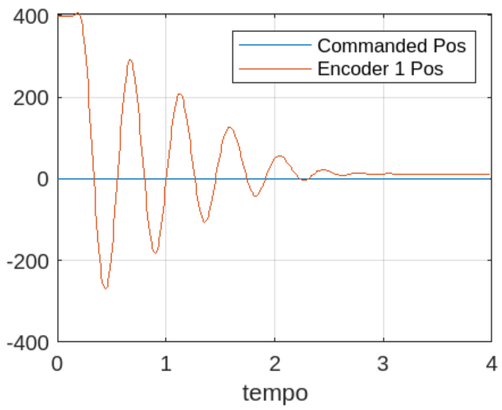



*Figura 5: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para $K_p$ = 0.097*

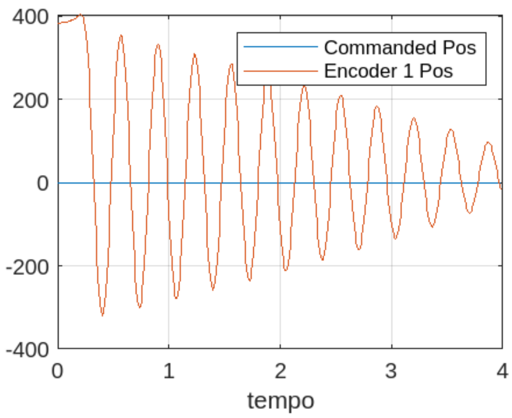



*Figura 6: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para $K_p$ = 2*0.097*

Observando os gráficos, é possível ver que, com o aumento do ganho potencial, a frequência de oscilação do sinal de saída se apresenta superior em relação ao sinal de saída do ganho $K_p$ inferior. Isso era esperado teoricamente: já que a relação entre a frequência de oscilação é dada pela fórmula em (1), vemos que, se $K_P$ cresce, então $\omega_n$ também cresce. No nosso caso, como dobramos $K_p$, multiplicamos o valor de $\omega_n$ em $\sqrt{2}$, em relação com o valor inicial de $K_p$. Desse modo, a frequência do sinal, para $K_p = 0.097$ é de, aproximadamente, 2 Hz, enquanto que, para $K_p = 0.194$, $\omega_n$ terá valor próximo a $2*\sqrt{2} \approx 2.83$ Hz.

**Item 7)**

É solicitado que calculemos o ganho $K_d$ a partir do $K_p$ encontrado anteriormente para que o amortecimento seja nulo, utilizando a fórmula abaixo

$$\xi := \frac{c_1 + k_{hw} K_d}{2 J_1 \omega_n} = \frac{c_1 + k_{hw} K_d}{2\sqrt{J_1 k_{hw} K_p}} \quad (2)$$

Substituindo os valores obtidos previamente na expressão destacada, incluindo os que foram calculados em experimentos anteriores para o sistema torcional, encontramos que $K_d \cong -0.0004$. Como podemos notar, o coeficiente de ganho diferencial encontrado é negativo, algo dificilmente obtido em um sistema real de controle, pois essa condição é propícia para a geração de instabilidades, sendo necessária “contê-la” por causa desse possível efeito. Tal efeito não é obtido na nossa situação, pelo baixo valor em módulo de $K_d$, e pelo fato de que o ganho proporcional positivo “domina” o ganho diferencial negativo.

A partir desses valores, foi traçado o seguinte gráfico a partir do resultado obtido a partir da máquina torcional:

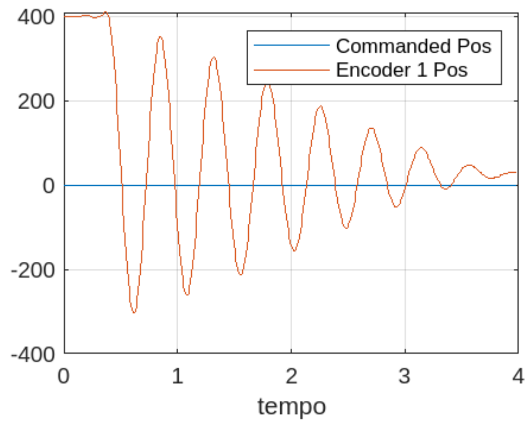



*Figura 7: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para Kd = -0.0004 (amortecimento nulo).*

Como era esperado, a configuração calculada faz com que o amortecimento seja, virtualmente, nulo. Desse modo, temos uma taxa de oscilação elevada, já que o valor zero do coeficiente de amortecimento faz com que a redução da amplitude aconteça de forma mais devagar ao longo do tempo, com a taxa de oscilação sendo reduzida apenas pela influência dos ganhos proporcional e derivativo do sistema, além de efeitos da viscosidade sobre o mesmo.

**Item 8)**

Neste item, foi feito o cálculo do valor de $K_d$ para $K_d * k_{hw} = 0.10$. Com isso, encontrou-se $K_d = 0.00569$, considerando o já conhecido valor de $k_{hw} = 17.57$.

**Item 9)**

Seguindo para este item, pode-se destacar que o aumento notado em relação à resistência do disco a rotações percebido ao movimentá-lo manualmente decorre do crescimento do coeficiente de amortecimento do sistema: como vimos anteriormente, a partir da expressão destaca em (2), o coeficiente de amortecimento $\xi$ é proporcional ao valor de $K_d$. Quando configuramos $K_d$ como sendo 0.00569 no último item, mantendo o resto dos valores mantidos anteriormente, temos um coeficiente de amortecimento de, aproximadamente, 0.4. Isso gera uma resistência maior contra o movimento do disco, se opondo, especialmente, a mudanças mais rápidas em termos de rotação.

**Item 10)**

Seguindo a mesma lógica do item anterior, foi possível perceber um aumento, sim, na resistência do disco em relação ao movimento rotativo aplicado sobre ele manualmente, uma vez que aumentar o coeficiente derivativo $K_d$ em 5 vezes produz aumento significativo no coeficiente de amortecimento do sistema, pelas razões já citadas.

### 4.1.2 Procedimento experimental - parte 2

**Item 11)**

No presente item, solicita-se, a partir de (1) e (2), a obtenção dos coeficientes $K_p$ e $K_d$, considerando a frequência de oscilação $\omega_n = 4\pi$. Mantendo os outros valores, já obtidos anteriormente, a partir da equação (1), verificamos que $K_p \cong 0.097$. Utilizando esse valor na equação (2), realizamos algumas contas 3 vezes para determinar os coeficientes $K_d$ para cada um dos coeficientes de amortecimento que foram determinados no enunciado. Para $\xi = 0.2$ (sistema sub-amortecido), temos $K_d = 0.002654$. Quando $\xi = 1.0$ (sistema criticamente amortecido), encontramos $K_d = 0.015$. Finalmente, quando determinados $\xi = 2.0$ (sistema sobre-amortecido), obtemos que $K_d = 0.03$.

**Item 13 e 14)**

Executando o experimento com os dados adquiridos do item 11, tem-se o que se encontra abaixo.

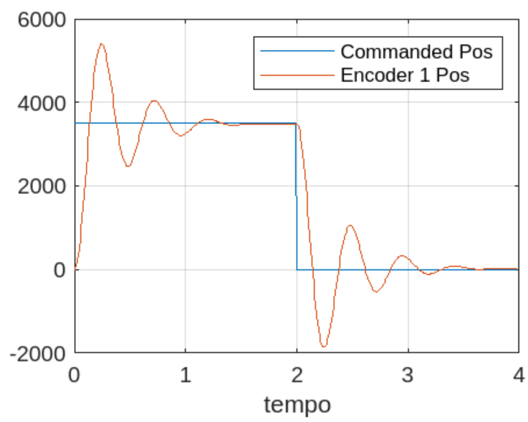



*Figura 8: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para o sistema subamortecido.*

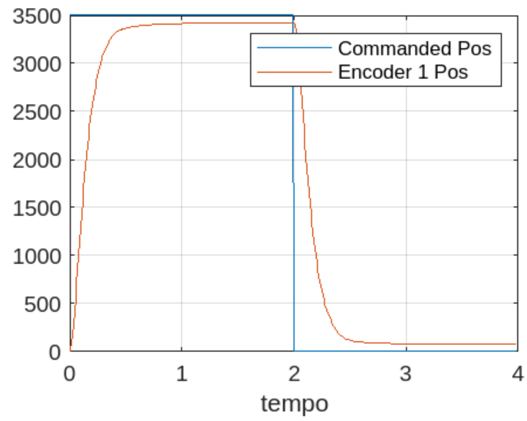


*Figura 9: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para o sistema criticamente amortecido.*

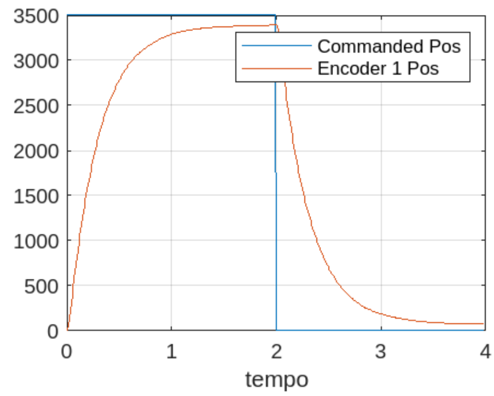


*Figura 10: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para o sistema sobre-amortecimento.*

**Item 15)**

Neste item, buscou-se projetar um controlador com valores distintos de MP, que variaram nos valores de 10, 15 e 20. Com isso, foi obtido o que se segue:

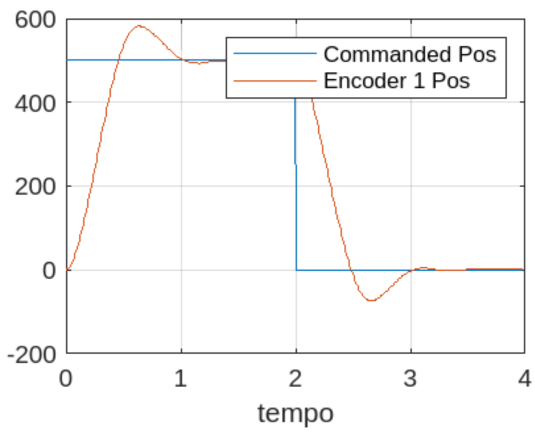


*Figura 11: Gráfico de posição do disco 1 em função do tempo para o sistema com controle projetado, Mp = 10. Para esse e os gráficos seguinte, os valores máximos de contagem inicial foram reduzidos para cerca de 500 contagens, uma vez que o sistema estava desarmando para valores superiores a esse durante a execução dos experimentos.*

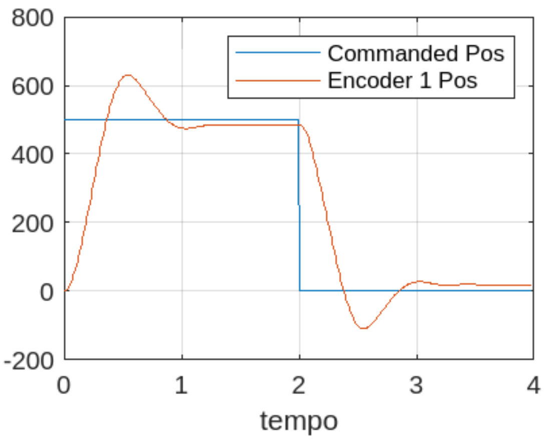



*Figura 12: Gráfico de posição do disco 1, com o sistema com controle projetado, Mp = 15.*

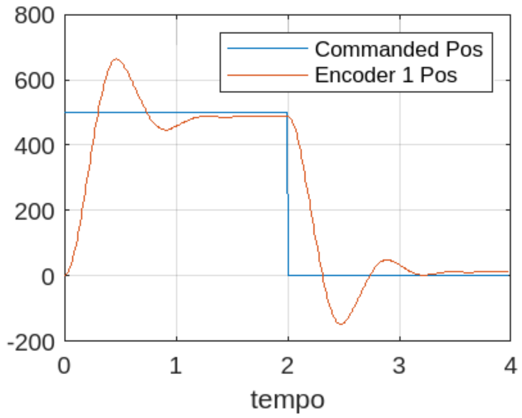



*Figura 13: Gráfico de posição do disco 1 para o sistema com controle projetado, Mp = 20.*

Destes gráficos, pode-se imaginar que a melhor solução é a que envolve Mp = 10, pois, embora sua resposta demore uma quantia irrisória de tempo a mais para convergir para o valor desejado, o overshooting neste caso é mais baixo e, o erro de regime é menor que nos demais casos. Porém, vale ressaltar que, usando-se as fórmulas apresentadas abaixo, é possível construir um controlador bastante satisfatório para a situação.

$$M_p = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \times 100 \ \ (\text{em }\%),$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\,\omega_n} \ \ (\text{critério de }5\%)\ ,$$

## Conclusão

Por fim, pode-se destacar que foi possível satisfazer os objetivos propostos. Isso porque, conseguiu-se analisar o sistema com controlador derivativo e proporcional com parâmetros sendo variados para estudo aprofundado. Com isso, pôde-se observar o efeito do uso da velocidade para controle do sistema, de modo que isso permitiu uma melhoria nas respostas, que foram mais coerentes com as posições comandadas.