Vinícius Esperança Mantovani, 247395
MS211 -> Turma C
Atividade 2;

Atenção!

1º) Todos os gráficos e códigos estão na pasta enviada junto com este arquivo!

2º) Os códigos devem ser compilados com GCC pelo comando:

gcc -o <nome> <nome.c> -lm

E executados pelo comando:

./<nome>

Vinícius Esperança Mantovani, 247395

Atividade 2 de MS211 -> Turma C

Exercício 1) Conforme pedido no enunciado, usam-se as funções e suas derivadas para determinar o número de interseções existentes, conforme se segue:

1º) Calculemos as derivadas:

$$\frac{d\,g(x)}{dx} = 3x^2 = g'(x) \quad \text{(I)}$$

$$\frac{d\,h(x)}{dx} = -2x + 3\cos(x) = h'(x) \quad \text{(II)}$$

De (I), temos que $g'(x)$ é crescente para $x \geq 0$ e decrescente para $x < 0$ e, é positivo para x qualquer $(\forall x)$; Ou seja, $g(x)$ é estritamente crescente ou constante, nunca decrescente!

2º) É fácil notar que ambas cruzam o eixo Y no ponto $Y = 2$, pois ambas as funções contém o termo constante 2 e, em ambas, os demais termos são 0 para $x = 0$ $(0^3 = 0, 0^2 = 0$ e $\operatorname{sen}(0) = 0)$

Continuação exercício 1)

Temos, portanto, ao menos uma interseção no ponto (0, 2)!

3º) Notemos que, para $x < 0$, ambas as funções são crescentes, então, ~~dado~~ como não são paralelas por causa dos termos x^3 e $-x^2$ em suas expressões, temos que elas se intersecam antes do $x = 0$, conforme se pode mostrar a seguir:

$g(-5) = -125 + 2 = -123$ e $g(-1) = -1 + 2 = 1$

$h(-5) \cong -20{,}123$ $\quad$ $h(-1) \cong -1{,}524$

Onde $h(-5) > g(-5)$ e $h(-1) < g(-1)$, o que implica que existe ao menos uma interseção neste intervalo $[-5, -1]$ e, como $g'(x) > 0 \ \forall x < 0$ e $h'(x) > 0 \ \forall x < 0$, temos apenas uma interseção entre as curvas de $-\infty$ até 0 em x;

Vale provar que $h'(x) > 0 \ \forall x < 0$, para tanto, basta ver que:

- $2x > 3$~~xxxx~~ para todo $x \leq -1{,}5$, então, de $-\infty$ a $-1{,}5$, a derivada é positiva;

Para o intervalo $[-1{,}5; 0[$, temos:

De $-1{,}5$ até 0 (não incluso), ~~B~~ $\cos(x)$ assume valores positivos, pois está incluso, o x, no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, para o qual $\cos(x)$ é sempre maior que 0.

↳ Assim, ~~[illegible]~~ em $[-1{,}5\ ;\ 0[$, a derivada é maior que 0;

4º) Então, temos 2 interseções até o momento, mas, existe mais uma para $x > 0$, conforme se mostra a seguir:

→ Como $g'(x)$ é sempre maior ou igual a zero e $h'(x) > 0$ para $x = 0$ ($h'(0) = 3$), temos que ambas as funções são crescentes para alguns valores de x maiores que 0.

→ No entanto, $h'(x) < 0$ a partir de algum valor entre 0 e 1,5, pois se $x = 1{,}5$, então $-2x = -3 = -3 \cdot \text{máx}(\cos(x))$ $= -3$; E, temos que, para valores próximos de $0 = x$, $h'(x) \geq g'(x)$ e para $x = 0$, $h(x) = g(x)$.

↳ Portanto, a partir de $x = 0$, $h(x)$ cresce mais rápido que $g(x)$ até um valor e para valores próximos de 0 maiores que 0,

Logo: Eventualmente $h(x)$ e $g(x)$ se interse-

Continuação Exercício 1)...com no intervalo $]0, +\infty[$ e isso ocorre em um único valor de x.

↳ assim, temos, por fim, que as duas funções se intersecam 3 vezes.

O plot das funções se encontra em um gráfico enviado em ficheiro separado com nome "grafico_ex1". png".

Exercício 2)

Para usarmos os métodos apresentados, precisamos de um problema de zeros de uma função, para tanto:

$$g(x) = x^3 + 2 = -x^2 + 3\,\text{sen}(x) + 2 = h(x)$$

↳ $x^3 + x^2 - 3\,\text{sen}(x) = 0$ (I)

↳ a equação acima (I) é o problema que queremos resolver; seja $f(x) = x^3 + x^2 - 3\,\text{sen}(x)$

<u>Então</u>, analisemos a possibilidade de usarmos os métodos apresentados e se suas iterações convergem:

1º) <u>Bissecção</u>:

Pois polinomial e seno são contínuas;

(i) Como $f(x)$ é contínua, o método pode ser aplicado, basta que concluamos, então, se converge ou não. Para isso, usamos o teorema da Convergência do método da Bissecção, conforme se segue:

Tomando como base o plot do exercício 1, podemos escolher três intervalos a serem analisados: $[-2; -1{,}5]$, $[-0{,}2; 0{,}2]$ e $[1; 1{,}4]$;

Continuação Exercício 2)

Para cada intervalo, temos:

$[-2; -1,5] \rightarrow f(-2)\, f(-1,5) \cong -1,272 \cdot 1,867 \cong -2,375$

↳ $f(-2)\, f(-1,5) < 0$

↳ E, para este intervalo, $f'(x) > 0$ estritamente, pois:

de $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3\cos(x)$, para $x = -1,5$, temos que: $3x^2 + 2x = 3,75 > 3$, logo; mesmo que $\cos(x)$ seja 1, o valor $f'(x) > 0$ no intervalo

↳ Portanto, o método converge para este intervalo, uma vez que, para valores $x < -1,5$, $3x^2 + 2x$ é maior que 3 porque é decrescente e em $x = 1,5$ é maior que três.

$[-0,2; 0,2] \rightarrow f(-0,2) \cdot f(0,2) \cong 0,628(-0,548)$
$\cong -0,344 < 0$

↳ E, para este intervalo, $f'(x) < 0$ estritamente, pois $\cos(x)$ para valores próximos de 0 é próximo de 1 e, $3x^2 + 2x$ neste intervalo é muito pequeno, logo: $3x^2 + 2x < 3\cos(x)$, então:
O método converge para esse intervalo.

Continuação exercício 2)

$[1;\ 1,4] \rightarrow f(1) \cdot f(1,4) \cong -0,524 \cdot 1,748 \cong -0,916$

$\hookrightarrow f(1) \cdot f(1,4) < 0$

$\hookrightarrow$ E, para este intervalo, $f'(x) > 0$ estritamente, pois os valores de x neste intervalo são próximos de $\pi/2$, o que implica que $\cos(x)$ é pequeno, Logo: $3x^2 + 2x > 3\cos(x)$ neste intervalo;

Portanto, o método converge para este intervalo, também!

ii) assim, seguindo as condições expressas no enunciado, foi implementado o código "bissec.c" em C e, os resultados para cada um dos intervalos foram:

$[-2;\ -1,5] \rightarrow x_k \cong -1,848$

$[-0,2;\ 0,2] \rightarrow x_k \cong 0$

$[1;\ 1,4] \rightarrow x_k \cong 1,128$

* x_k é o valor aproximado do zero z da função. Escrevi x_k aqui e nos demais métodos pois é assim que nomeei o float retornado pelas funções dos programas.

a seguir, apresenta-se uma tabela com os ~~duas primeiras iterações e as duas~~ últimas iterações:

CamScanner

Continuação Exercício 2) (iii)

$[-2; -1,5]$ Começo: $x_k = -1,75$, $a = -2$, $b = -1,5$

x_k	a (min)	b (máx)
$-1,875$	-2	$-1,75$ → inicial
$-1,813$	$-1,875$	$-1,75$
$-1,844$	$-1,875$	$-1,813$
$-1,859$	$-1,875$	$-1,844$
$-1,852$	$-1,859$	$-1,844$
$-1,848$	$-1,852$	$-1,844$

↳ analisando as duas primeiras iterações, notamos que o chute inicial para o valor de x_k foi menor que o valor verdadeiro de z; Por isso, na segunda iteração, o valor de a é aumentado, para que x_k fosse aumentado também.

Por fim, nas duas últimas iterações, percebemos que a mudança no valor de x_k de uma iteração para outra já é bem pequena, do mesmo modo que a mudança de a;

* atenção: O que se diz "chute inicial de x_k" é sempre o valor de x_k após a primeira iteração, não o valor $x_k = \frac{l+u}{2}$ onde $[l, u]$ é o intervalo analisado!

Continuação Exercício 2)

$[-0,2 ; 0,2]$ ↳

Não há iterações, uma vez que o valor inicial de $X_K = \frac{-0,2+0,2}{2} = 0$ coincide com o zero (z) da função!

$[1 ; 1,4]$ ↳ Começo: $X_K = 1,2$, $a = 1$, $b = 1,4$

X_K	a (mín)	b (máx)
1,1	1	1,2 → inicial
1,15	1,1	1,2
1,125	1,1	1,15
1,138	1,125	1,15
1,131	1,125	1,138
1,128	1,125	1,131

↳ analisando as duas primeiras iterações percebe-se que o valor inicial de X_K é menor que o valor real de Z (zero da função)!

Ademais, analisando as duas últimas iterações nos mostram uma variação pequena de X_K entre uma e outra e, uma alteração também pequena de b;

Continuação Exercício 2)

Vale ressaltar que o valor final de x_k e $f(x_k)$ seguem os critérios:

$|x_k - z| < 10^{-2}$ e $|f(x_k)| < 10^{-2}$!

2º) <u>Falsa Posição</u>:

(i) Conforme analisamos para a Bissecção, para os intervalos usados, temos que:

$[a, b] \to f(a) f(b) < 0$;

E, temos, também, que f é contínua.

<u>Logo</u>: o método da Falsa Posição pode ser aplicado.

Além disso, como mostrado, no caso da Bissecção, também, sabemos que a derivada de $f(x)$ é estritamente maior ou estritamente menor que 0 nos intervalos analisados.

<u>Portanto</u>: Temos que em cada um dos intervalos existe apenas um zero e o método pode ser aplicado e converge nas iterações!

Continuação exercício 2)

(ii) Para este método, foi escrito o código "falsapos.C" em C, seguindo as requisições do enunciado. E, os resultados para cada um dos intervalos foram:

$[-2; -1,5] \to x_k \cong -1,846$

$[-0,2; 0,2] \to x_k \cong 0$ (0,000626)

$[1; 1,4] \to x_k \cong 1,128$

(iii) a seguir, estão as tabelas para cada um dos intervalos:

Começo: $x_k = -1,797$, $a = -2$, $b = -1,5$

$[-2; -1,5]$

x_k	a(mín)	b(máx)
-1,841	-2	-1,797 → inicial
-1,846	-2	-1,8401

↳ as duas primeiras e as duas últimas iterações são coincidentes, pois ocorrem apenas duas. Assim, podemos notar que o chute inicial do algoritmo, depois de

$$x_1 = \frac{|f(máx)|a + f(mín)b}{|f(máx)| + |f(mín)|}$$

, é maior que o zero real da função.

Continuação Exercício 2)

$[-0,2; 0,2] \rightarrow$ Começa: $X_k = 0,013605$, $a = -0,2$, $b = 0,2$

X_K	a (min)	b (máx)
0,000626	-0,2	0,01361

aqui, bastou chegarmos a X_1 para satisfazermos o critério de paragem!

$[1; 1,4] \rightarrow$ Começa: $X_K = 1,092$, $a = 1$, $b = 1,4$

X_K	a (min)	b (max)
1,119	1,092	1,4
1,126	1,119	1,4
1,128	1,126	1,4

aqui, foram necessárias mais iterações para chegarmos a um valor mais satisfatório de X_K cuja proximidade ao zero fosse boa o bastante para satisfazer o critério de paragem!

Continuação Exercício 2)

3º) Secante:

(i) Como já mostramos na análise do método da bissecção, f tem um zero em cada um dos intervalos escolhidos e, sabemos, também que nesses intervalos $f'(x)$ tem sinal positivo estritamente ou negativo estritamente, então, $f'(x) \neq 0$ nesses intervalos.

Logo: Como, também, $f''(x) = 6x + 2 + 3\operatorname{sen}(x)$ é contínua, se escolhermos x_0 e x_1 próximos o suficiente do zero ($\overline{x}$) da função, temos que o método converge e é possível de ser usado!

Portanto, para executarmos o método, chutamos dois valores, x_0 e x_1, dentro dos intervalos a serem analisados, conforme se segue:

- Para $[-2; -1{,}5] \rightarrow x_0 = -1{,}75$ e $x_1 = -1{,}80$, pois sabemos, pelo plot do exercício 1, que o zero da função $f(x)$ neste intervalo está mais próximo de -2 que de $1{,}5$;
- Para $[-0{,}2; 0{,}2] \rightarrow x_0 = -0{,}1$ e $x_1 = -0{,}05$, pois

Continuação exercício 2) sabemos que o zero real neste intervalo é $z=0$;

• Para $[1; 1{,}4] \to x_0 = 1{,}05$ e $x_1 = 1{,}1$, pois sabemos, pelo plot, que o zero (z) neste intervalo está mais próximo de 1 que de 1,4;

Logo:

(ii) O código escrito foi "secante.c" e, os valores usados foram os descritos acima. E, os resultados obtidos foram:

$[-2; -1{,}5] \to x_0 = -1{,}75,\ x_1 = -1{,}80 \to x_K \cong -1{,}846$

$[-0{,}2; 0{,}2] \to x_0 = -0{,}1,\ x_1 = -0{,}05 \to x_K \cong -0{,}001241$

$[1; 1{,}4] \to x_0 = 1{,}05,\ x_1 = 1{,}1 \to x_K \cong 1{,}1285$

(iii) a seguir, estão as tabelas para cada intervalo:

$[-2; -1{,}5] \to$

x_K	x_{K-1}	x_{K+1}
-1,8	-1,75	-1,851 → Y inicial
-1,851	-1,8	$\boxed{-1{,}846}$.

Como existem apenas duas iterações, as duas primeiras e últimas são coincidentes, E, é possível

Continuação exercício 2) notar que os valores chutados de x_0 e x_1 foram satisfatórios e que o x_k inicial foi ~~decrementado~~ por incrementado, ou seja, x_k inicial (x_2), primeiro chute do algoritmo, vale menos que o z.

[-0,2; 0,2] ↴

x_k	x_{k-1}	x_{k+1}
-0,05	-0,1	-0,001241

↳ Com apenas uma iteração, obtemos o valor de retorno ≃ -0,001241 < 10^{-2} e cujo $f(x_{k+1})$ é também < 10^{-2}, logo, temos um valor satisfatório.

[1; 1,4] ↴

x_k	x_{k-1}	x_{k+1}
1,1	1,05	1,132
1,132	1,1	1,129

Mais uma vez, apenas duas iterações; notamos que o valor de retorno (1,129) é bastante satisfatório, do mesmo modo que aqueles valores obtidos anteriormente.

Continuação do exercício 2)

4º) <u>Newton</u>:

i) É possível usar o método de Newton, pois, conforme a análise para o método da bissecção, a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente para os intervalos que estamos avaliando, <u>Logo</u>: os valores de $f'(\xi) \neq 0$ para cada zero da função!

Precisamos, no entanto, determinar ainda se o método converge para tais intervalos.

Para tanto, ~~precisamos~~ desenvolvamos:

~~AMAX~~ * Conforme analisado anteriormente, f, f' e f'' são contínuas nos intervalos analisados.

* ① $f'(\xi) \neq 0$ conforme afirmado acima;

* ② precisamos achar M tal que:

$0 < M < 1$ e $\forall X \in$ intervalo: $\left|\frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}\right| = |\varphi'(x)| \leq M < 1$, então, <u>analisemos</u>:

$$\left|\frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}\right| = \left|\frac{(X^3 + X^2 - 3\,\text{sen}X)(6X + 2 + 3\,\text{sen}X)}{(3X^2 + 2X - 3\cos X)^2}\right| =$$

$$\left|\frac{9X^4 + 2X^3 + 3X^3\,\text{sen}X + 6X^3 + 2X^2 + 3X^2\,\text{sen}X - 18X\,\text{sen}X - 6\,\text{sen}X - 9\,\text{sen}^2X}{9X^4 + 6X^3 - 9X^2\cos X + 6X^3 + 4X^2 - 6\cos X - 9X^2\cos X - 6X\cos X + 9\cos^2 X}\right| =$$

Continuação Exercício 2)

$$= \left| \frac{9x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 3\,\text{sen}\,x\,(x^3 + x^2 - 6x - 2) - 9\,\text{sen}^2 x}{9x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 3\cos x\,(-6x^2 - 4x) + 9\cos^2 x} \right|$$

Plotando o gráfico da função ~~[illegible]~~ expressa acima (gráfico "graph_ex2_newton.png"), notamos que a proposição:

$\exists\ 0 < M < 1$ tal que $\forall x \in$ intervalo $\left|\frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq M < 1$

é válido, pois $\left|\frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1$ conforme se vê no gráfico para os intervalos $[-2; -1{,}5]$, $[-0{,}2; 0{,}2]$ e $[1; 1{,}4]$.

Então: O método de Newton converge para o zero ξ de cada intervalo!

(ii) Assim, seguindo as especificações do enunciado, foi escrito o código "newton.c" e os resultados para cada intervalo e os valores de x_0 usados (chutados) foram:

$[-2; -1{,}5] \to x_0 = -1{,}75 \to -1{,}847 \cong x_k$

$[-0{,}2; 0{,}2] \to x_0 = 0{,}05 \to -0{,}000995 \cong x_k$

$[1; 1{,}4] \to x_0 = 1{,}2 \to 1{,}1287 \cong x_k$

A seguir, estão as tabelas para cada

Continuação Exercício 2) intervalo:

[-2; -1,5] → Começo: $x_0 = -1,75$

x_k	x_{k-1}
-1,855	-1,75
-1,847	-1,855 → inicial

assim, notamos que em apenas uma iteração, o valor x_k já é muito próximo do zero e, já na segunda, o resultado já é suficientemente bom, dentro da tolerância!

[-0,2; 0,2] →

x_k	x_{k-1}
-0,000995	0,05

aqui, diretamente do cálculo do primeiro valor de x_k (x_1), já temos o valor dentro da tolerância.

[1; 1,4] →

x_k	x_{k-1}
1,134	1,2
1,129	1,134

→ aqui, notamos algo semelhante ao caso do intervalo [-2; -1,5], em que após termos x_1, bastou uma única iteração para termos x_2 satisfatório e dentro da tolerância!

Continuação Exercício 2)

iv) Enfim, notamos que o algoritmo mais lento, embora mais simples, foi o do método da bissecção, que precisou chegar a X_6 para satisfazer o critério de parada em ~~dua~~ dois dos três intervalos. Nota-se ainda, que esse método, apesar de mais lento, precisou apenas de uma iteração para encontrar o zero em $X=0$, mas isso se deve à média de $-0,2$ e $0,2$ ser igual a 0.

Em sequência, vemos que o método da falsaposição já ganha em velocidade do método da bissecção, precisando iterar apenas até X_3 no intervalo com maior número de iterações.

Em seguida, temos o método da secante ganhando dos dois anteriores, necessitando apenas de duas iterações. Apesar de também precisar chegar ao X_3, o método da secante ganha em uma iteração do método da Falsa Posição!

Por fim, o método de Newton empata com o método da Secante em minha análise, sem

Continuação Exercício 2) ~~a~~ apesar de chegar apenas até X_2, ao contrário do método da secante, que chega até X_3, o método de Newton também precisa de duas iterações. Logo, tem um tempo computacional próximo ao do Secante para os intervalos que analisamos;

Finalmente, quanto ao tempo, temos:

Bissecção < ~~B~~ Falsa Posição < Secante $\simeq$ Newton;

Quanto aos resultados, notamos que todos satisfazem ao critério de parada, sendo, portanto, bons resultados para o que precisamos.

Exercício 3)

Vamos analisar o método do ponto fixo para $\varphi(x) = x - f(x) = x - x^3 - x^2 + 3\,\text{sen}\,x$

↳ $\varphi(x) = -x^3 - x^2 + x + 3\,\text{sen}\,x$

Como temos que $\varphi(x) = x - f(x)$, então:

$$\varphi(x) = x \iff f(x) = 0$$

Essa função tem como solução, de fato, as soluções de $f(x)$, porém, precisamos verificar se o método do ponto fixo converge para essa função.

Desenvolvendo:

Temos três condições para que ~~Afunção~~ o método ~~sempre~~ convirja:

(i) Que φ e φ' sejam funções contínuas no intervalo.

↳ Sabemos que são, pois ambas são compostas por uma parte polinomial e uma senoidal ou cossenoidal, que são, todas, contínuas e, uma soma de funções contínuas é sempre contínua, Logo: φ e φ' são contínuas

Continuação Exercício 3)

(ii) precisamos que $\exists M > 0$ tal que

$|\varphi'(x)| \leq M < 1 \ \forall x \in$ intervalo.

<u>Conferindo</u>:

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x - x^3 - x^2 + 3\operatorname{sen} x) = -3x^2 - 2x + 1 + 3\cos x$$

↳ Para analisar $|\varphi'(x)|$, plotou-se o gráfico exposto em "graph_pF_ex3°.png".

Por meio do gráfico, percebemos que essa condição não é satisfeita, conforme se formaliza a seguir:

$|\varphi'(0)| = 1 + 3\cos(0) = 4$; logo, não existe $M < 1$ que esteja entre 4 e 1, é impossível!

<u>Logo</u>: Já não seria possível usar o método do ponto fixo com $\varphi(x) = x - f(x)$ para encontrar os zeros da função $f(x)$, pois o valor de x_k não convergiria. Isso porque, a segunda condição do teorema de convergência do método do ponto fixo não é satisfeito, ou seja:

$\nexists M > 0$ tal que $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$, onde I é o intervalo que contém $x = 0$.