Trabalho Computacional 05

Última Atualização: 19 de novembro de 2024

Objetivo: O propósito deste trabalho é projetar controladores e estimadores com modelos em espaço de estados. No primeiro exercício é desenvolvido um projeto de regulação com um controlador por realimentação de estados observados para um pêndulo invertido (o mesmo estudado no trabalho computacional 2). No segundo exercício realiza-se um projeto de rastreamento de trajetória para um sistema massa mola de quarta ordem.

Definição do Problema 1: Considere o pêndulo invertido mostrado na Figura 1. Adotando as seguintes escolhas de variáveis

- x_1: posição angular da haste θ;
- x_2: velocidade angular da haste $\dot{\theta}$;
- x_3: posição do carro x;
- x_4: velocidade do carro $\dot{x}$;

tem-se a seguinte representação de estados da dinâmica

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{u\cos(x_1) - (m+M)g\sin(x_1) + m\ell\cos(x_1)\sin(x_1)x_2^2}{m\ell\cos^2(x_1) - (m+M)\ell} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{u + m\ell\sin(x_1)x_2^2 - mg\cos(x_1)\sin(x_1)}{m + M - m\cos^2(x_1)} \end{aligned} \tag{1}$$

Para viabilizar um projeto de controle, em geral lineariza-se a planta. Por exemplo, adotando como ponto de linearização o ponto $x_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, é possível obter o seguinte modelo linear

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} u$$

Assumindo que nem todos os estados estão disponíveis para leitura, e que a equação de saída é dada por

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

é possível verificar que o modelo linearizado é observável, isto é, a matriz $\mathcal{O}$ tem posto completo (verifique). Embora não exista nenhuma garantia que um observador de estados construído a partir do modelo linear vai funcionar para uma planta não linear, neste

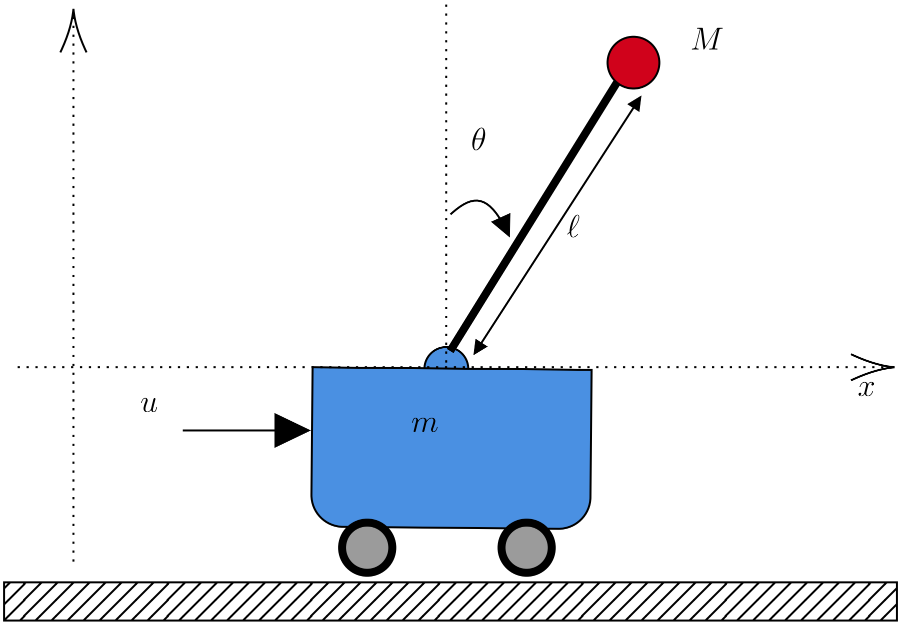

Figura 1: Pêndulo invertido sobre um carro.

exercício iremos verificar a possibilidade de regular a posição do pêndulo na vertical e os limites de operação da estratégia de controle projetada. O estimador de estados é construído com base no modelo linearizado dado acima.

Tarefa 1: A primeira tarefa é obter o ganho de observação $L \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ associado à dinâmica do estimador de estados

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) + Bu(t)\\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t)\\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + LCx(t) + Bu(t)\end{aligned} \tag{2}$$

e o ganho de realimentação $K \in \mathcal{R}^{1\times 4}$ associado à lei de controle

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

Aloque livremente os polos de $(A-BK)$ associados à dinâmica de malha fechada desejada, e depois aloque os polos da dinâmica do observador $(A - LC)$ de modo que a dinâmica seja mais rápida do que a dinâmica do controlador.

O código base para a implementação da simulação é dado no *script* `regulaPendulo_alunos.m`. Todas as implementações necessárias estão indicadas por comentários no código.

O código mostrado abaixo é utilizado pelo *script* `ode45` e concentra a maior parte da implementação que precisa ser realizada.

```
%_____________________________________________________________
function dX = penduloNaoLinear(t,x)

global m M ell g A B C L K sat umax;

xs=x(1:4); %estados da planta
```

```
xo=x(5:8); %estados do observador
%lei de controle (estados observados)
u=-K*xo;

%dinamica da planta
dXs(1,1) = % coloque aqui a primeira equação de (1)
dXs(2,1) = % coloque aqui a segunda equação de (1)
dXs(3,1) = % coloque aqui a terceira equação de (1)
dXs(4,1) = % coloque aqui a quarta equação de (1)

%dinamica do observador
dXo = %coloque aqui a dinâmica do observador (equação (2))
dX = [dXs;dXo];
```

Inicialmente simula-se o sistema considerando a condição inicial (transformar graus em radianos)

$$x(0) = \begin{bmatrix} 20^o & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com os dados gerados, deve-se fornecer:

- Uma figura contendo: *i)* os estados x_1 e x_3 ao longo tempo (são as saídas 1 e 2, respetivamente); *ii)* os estados x_2 e x_4 juntamente com os estados estimados $\hat{x}_2$ e $\hat{x}_4$; *iii)* o sinal de controle $u(t)$ ao longo do tempo. A Figura 2 mostra um modelo de resposta desejada.

- Um vídeo (ou alternativamente um conjunto de imagens) que mostra o movimento do pêndulo ao longo do tempo aos moldes do que foi feito no Experimento 2. O vídeo `videoPedulo_modelo.avi` disponível no Google Classroom mostra um modelo esperado de resposta.

Tarefa 2: A segunda tarefa é encontrar os limites de operação do esquema de controle projetado. Aumente o valor da primeira condição inicial de grau em grau até o sistema não mais estabilizar (ou até o *script* `ode45` não convergir). Para a condição inicial imediatamente anterior ao caso que instabilizou, que provavelmente apresentará um desempenho inferior à simulação feita anteriormente ($x_1(0) = 20^o$), forneça novamente uma figura e um vídeo de simulação, como feito na Tarefa 1. Aumente o tempo de simulação se necessário.

Formato de entrega da Exercício 1:

- Arquivo PDF (tarefa1.pdf) contendo a identificação da disciplina e dos alunos (nome e RA), e todos os códigos fontes utilizados. Este arquivo também deve conter as figuras solicitadas nas Tarefas 1 e 2, e os ganhos K e L projetados, bem como as alocações escolhidas.

- Vídeo da resposta do pêndulo (videoPendulo_caso1.avi) da Tarefa 1

- Vídeo da resposta do pêndulo (videoPendulo_caso2.avi) da Tarefa 2.

Definição do Problema 2: Considere o sistema massa/mola/atrito-viscoso mostrado na Figura 3. As equações diferenciais que regem o comportamento do sistema são:

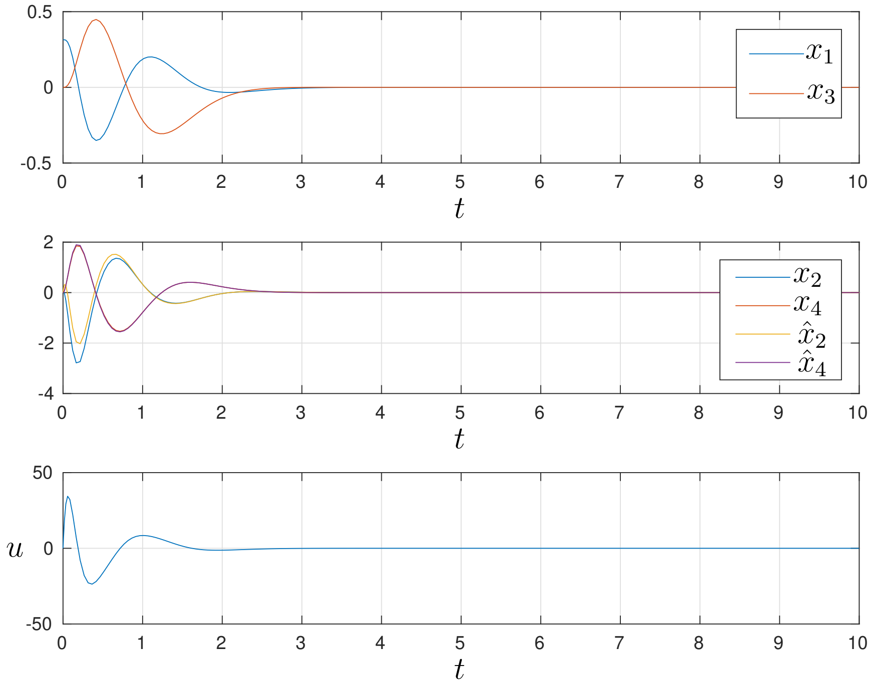

Figura 2: Resposta esperada na Tarefa 1 da simulação do pêndulo invertido.

$$m_1\ddot{x}_1(t) + c_1\dot{x}_1(t) + k_1x_1(t) + k_2\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = F(t) \tag{3}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) + c_2\dot{x}_2(t) + k_3x_2(t) + k_2\left(x_2(t) - x_1(t)\right) = 0 \tag{4}$$

com representação em espaço de estados dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

com $u(t) = F(t)$. Note que a saída é a posição da massa 2. Assumindo que os estados são medidos em tempo real, o objetivo é projetar uma lei de controle por realimentação de estados de modo que a saída rastreie sinais de referência constantes com erro nulo.

Adotando os seguintes valores para os parâmetros

$$m_1 = 0,5; \quad m_2 = 0,4; \quad k_1 = 20; \quad k_3 = 21; \quad k_2 = 15; \quad c_1 = 1,5; \quad c_2 = 1,5;$$

nota-se que a função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ não possui polo na origem (é tipo 0). Para garantir o rastreamento com o erro nulo, iremos adotar o controle integral, conforme discutido na Aula 23 da apostila (página 218). Incorporando um estado adicional associado à dinâmica do erro de rastreamento, tem-se o seguinte sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

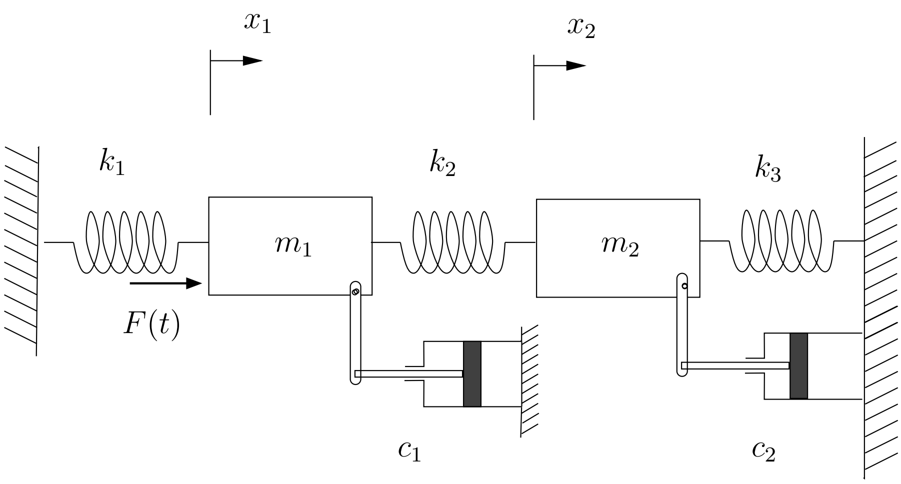

Figura 3: Sistema massa-mola-amortecedor com 2 massas, 3 molas e 2 amortecedores.

Adotando a lei de controle $u(t) = -Kx(t) + K_I\xi(t)$, tem-se a seguinte dinâmica de malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Tarefa 1: Proponha uma alocação de polos para o sistema em malha fechada de modo a garantir que as saída rastreie o degrau unitário com erro nulo em menos de 1 segundo. Note que

$$\begin{bmatrix} A - BK & BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix}$$

e portanto o comando `acker()` (ou `place()`) do Matlab pode ser utilizado com as matrizes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ para computar os ganhos K e K_I.

O *script* `rastreamentoMassaMola_alunos.m` deve ser utilizado como guia para realizar o exercício. Inicialmente será feita uma simulação com condições iniciais nulas, e com o sinal de referência constante alternando sua amplitude entre 1 e -1 algumas vezes.

Com os dados gerados, deve-se fornecer:

- Uma figura contendo: *i)* os estados x_1 e $\dot{x}_1$ ao longo tempo; *ii)* os estados x_2 e $\dot{x}_2$ juntamente o sinal de referência ao longo do tempo. O sinal de controle ao longo do tempo. A Figura 4 mostra um modelo de resposta desejada.
- Um vídeo (ou alternativamente um conjunto de imagens) que mostra o movimento do massa mola ao longo do tempo. No vídeo também deve ser mostrado o valor de x_2 ao longo do tempo, o tempo da simulação, e o ganho de controle utilizado. O vídeo `videoMassaMola_modelo.avi` disponível no Google Classroom mostra um modelo esperado de resposta.

Formato de entrega da Exercício 2:

- Arquivo PDF (tarefa2.pdf) contendo a identificação da disciplina e dos alunos (nome e RA), e todos os códigos fontes utilizados. Este arquivo também deve conter a figura solicitada na Tarefa 1, e o ganhos K e K_I projetados, bem como a alocação escolhida (valor dos polos).

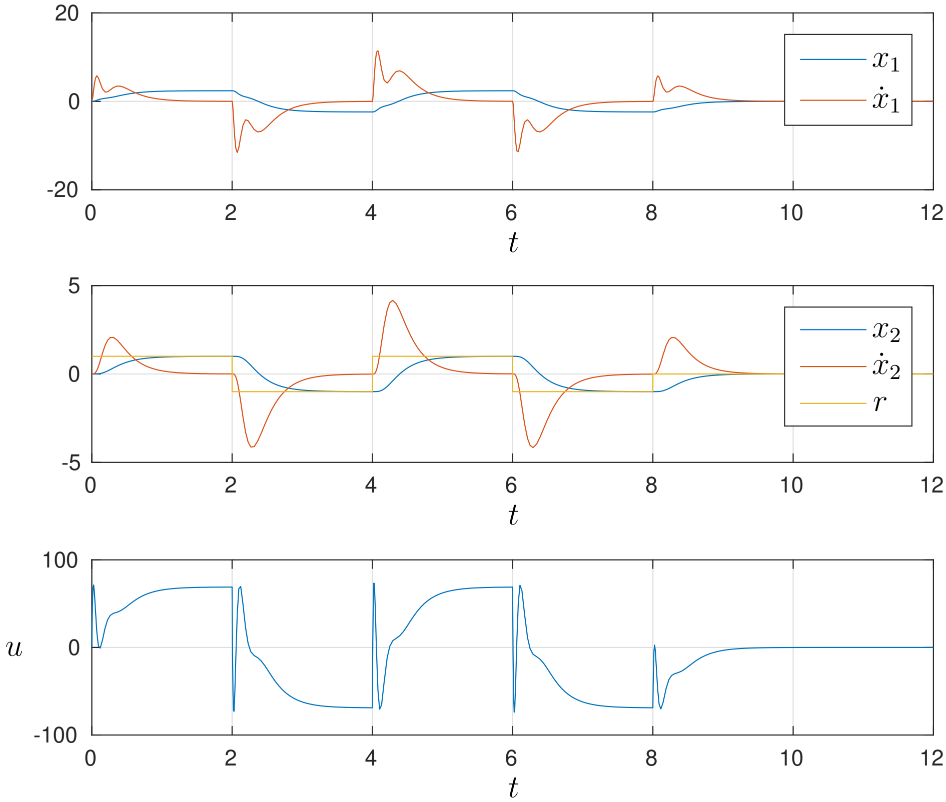

Figura 4: Resposta esperada da tarefa 1 para o sistema massa mola.

- Vídeo da resposta do massa mola (videoMassaMola.avi) da Tarefa 1.

Pontos Extras:

- Para o exercício 2, considere a possibilidade do sinal de controle saturar, um fenômeno inerente a toda aplicação prática. Determine o máximo valor em módulo do sinal de controle $\bar{u}$ obtido na Tarefa 1. No código, implemente a saturação do sinal de controle em $\bar{u}/2$, isto é, o sinal deve valer $\bar{u}/2$ se for maior que esse valor, ou deve valer $-\bar{u}/2$ se for menor que esse valor. Gere um novo vídeo como os mesmos ganhos de controle K e K_I determinados na Tarefa 1. O vídeo deve ser chamado de (videoMassaMola_saturado.avi). Valor da tarefa: 1,0 ponto.