

Introdução

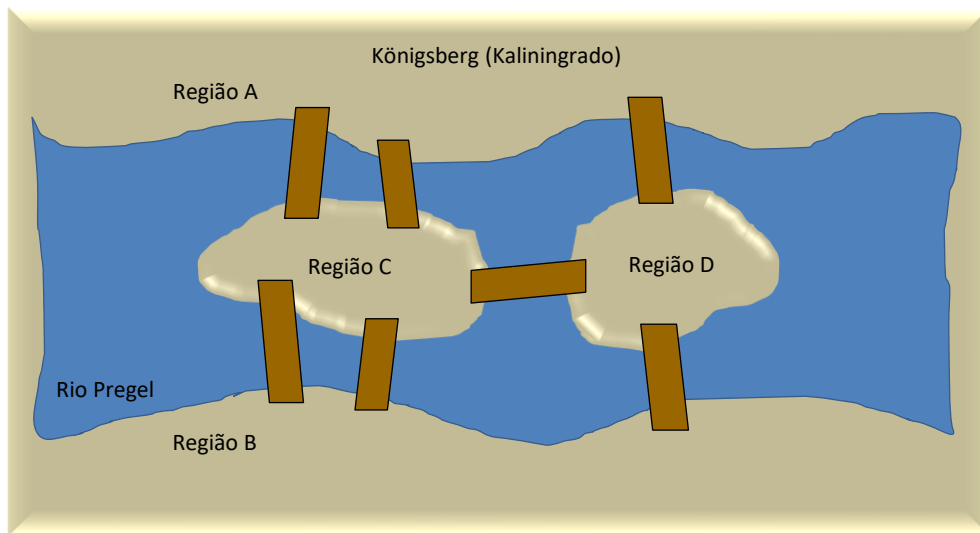
Zenilton Patrocínio

Histórico



Teoria dos Grafos – Origem

Euler soluciona o problema das pontes de Königsberg em 1736.



Problema:

Determinar um trajeto pelas pontes segundo o qual se possa retornar à região de partida, após atravessar cada ponte exatamente uma vez

⇒ **Não existe esse trajeto !**

Teoria dos Grafos – Evolução

Após o trabalho de Euler pouco foi realizado até meados do século XIX.

Três desenvolvimentos contribuem para despertar o interesse em Teoria dos Grafos em meados do século XIX:

- Formulação do problema das quatro cores
- Formulação do problema do ciclo hamiltoniano
- Desenvolvimento da teoria das árvores

Teoria dos Grafos – Evolução

Problema das quatro cores

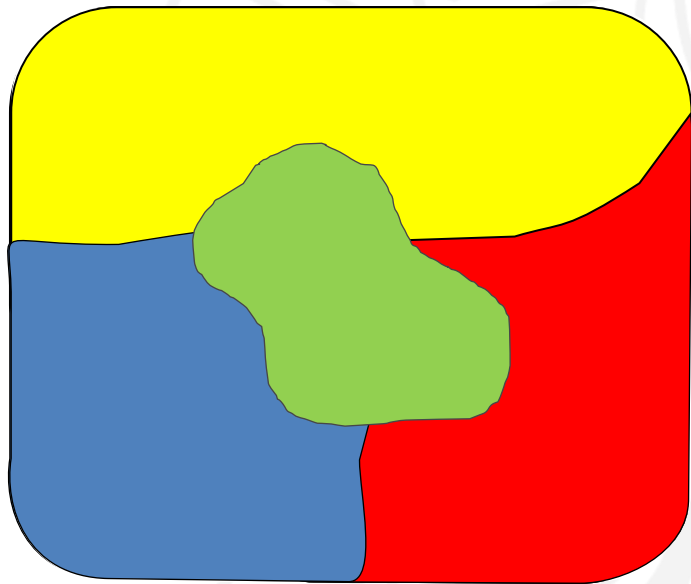
- Em 1852, Francis Guthrie teria proposto o problema ao irmão Frederick que, por sua vez, era estudante e comunicou ao matemático De Morgan.
- De Morgan inicia a investigação da questão.



Teoria dos Grafos – Evolução

Problema das quatro cores

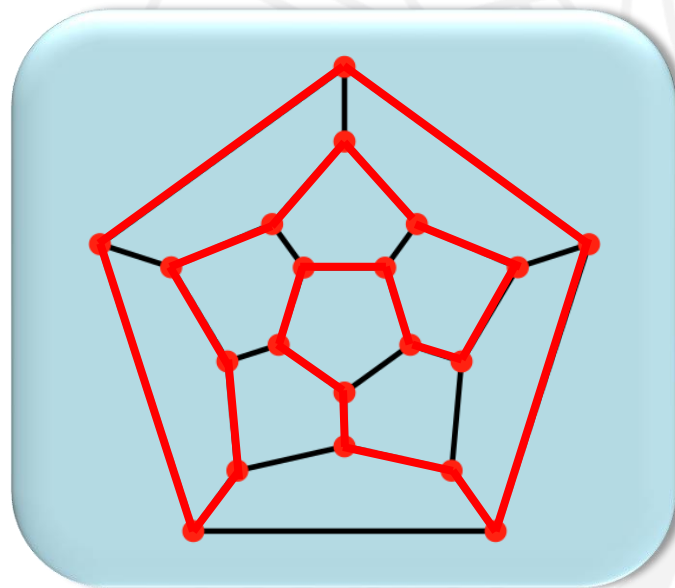
- Colorir os países de um mapa arbitrário utilizando no máximo 04 cores, de tal forma que países fronteiriços possuam cores diferentes.
- Appel e Haken produziram a prova apenas em 1977.



Teoria dos Grafos – Evolução

Problema do ciclo hamiltoniano

- Matemático Hamilton inventou um jogo que envolve um dodecaedro (sólido regular com 20 vértices).
- Cada vértice representa uma cidade e o objetivo do jogo era que o jogador viajasse “ao redor do mundo” passando por cada cidade exatamente uma vez.

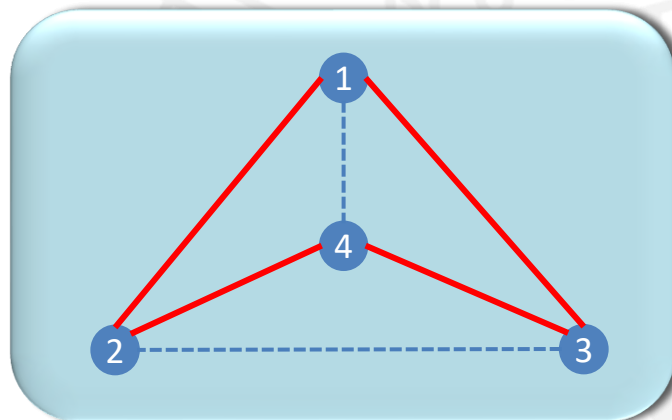


Teoria dos Grafos – Evolução

Problema do ciclo hamiltoniano

- Dadas n cidades, determinar rota que passe por cada cidade uma vez e retorne ao ponto de partida.
- Para $n = 4$ cidades são 6 rotas possíveis e 24 testes ($4! = 24$)
- Porém para n grande torna-se inviável!

Para $n = 50 \rightarrow 10^{64}$ testes $\rightarrow > 10^{40}$ séculos



1-2-3-4-1

1-3-2-4-1

1-4-2-3-1

1-2-4-3-1

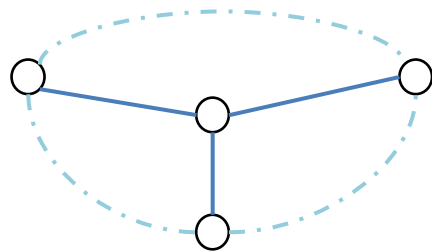
1-3-4-2-1

1-4-3-2-1

Teoria dos Grafos – Evolução

Desenvolvimento da teoria das árvores

- Kirchhoff → circuitos elétricos (física / engenharia)
- Cayley → hidrocarbonetos (química)
- Árvores são uma classe especial de grafos com aplicações em diversas áreas.



Teoria dos Grafos – Evolução

Aumento pelo interesse em grafos no século XX

Por volta da década de 1930, resultados fundamentais foram obtidos

- Menger → Conectividade
- Kuratowski → Planaridade
- König → 1º livro sobre teoria de grafos
- ...

Desenvolvimento impulsionado pela aplicação em otimização e pelo uso de computadores na implementação dessas aplicações.

Motivação



Teoria dos Grafos – Motivação

Principal motivação: Grafo representa relações entre um conjunto de objetos

Portanto, é fácil se encontrar grafos nas mais diferentes situações!

Objetos ↔ Relações

Teoria dos Grafos – Motivação

Malha rodoviária nacional

- Cidades (objetos)
- Rodovias entre elas (relações)



Fonte: <https://www.gov.br/infraestrutura/pt-br/centrais-de-conteudo/mapa1-png/view>

Fonte: <https://www.metrocptm.com.br/veja-o-mapa-de-estacoes-do-metro-e-cptm/>

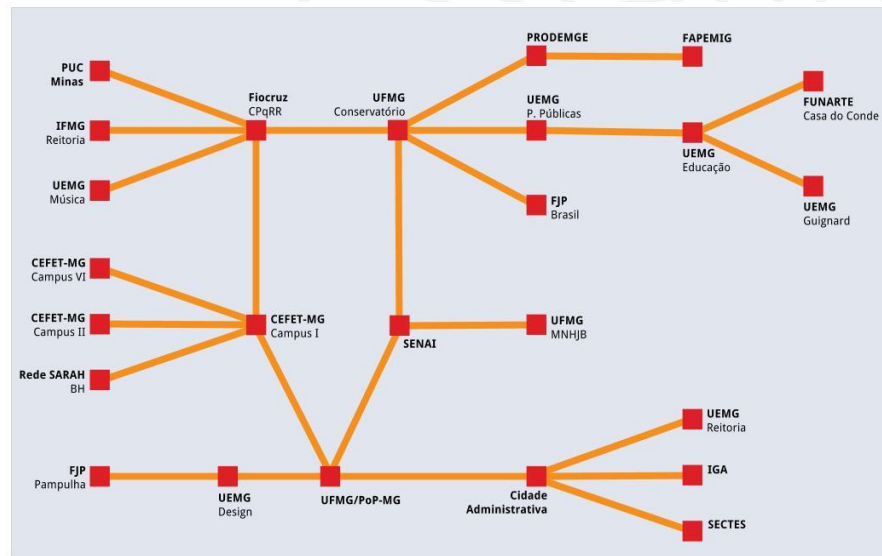
Teoria dos Grafos – Motivação

Rede de computadores

REDECOMEP BH

Rede Comunitária Metropolitana
de Ensino e Pesquisa BH

- Instituição de Ensino (objetos)
- Conexão via fibra óptica entre elas (relações)



Fonte: <https://www.pop-mg.rnp.br/redecomep/about/start>

Teoria dos Grafos – Motivação

Rede Social

- Contas dos usuários (objetos)
- Interações deles (relações)

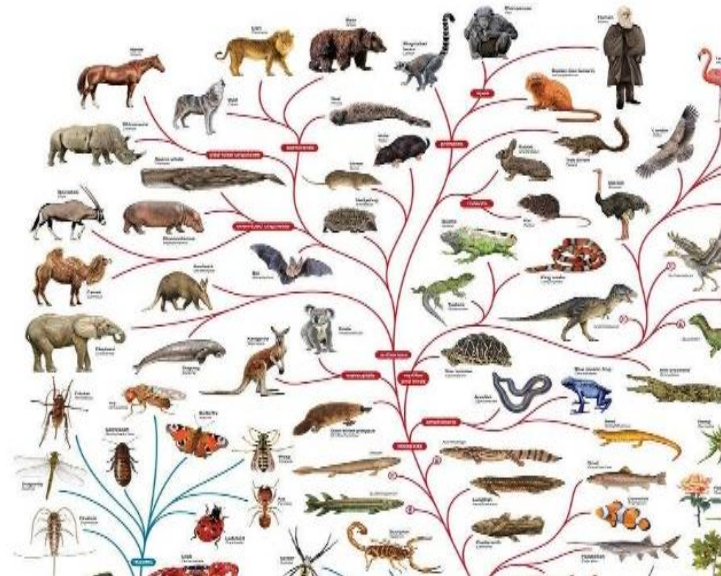


Fonte: <https://medium.com/analytics-vidhya/social-network-analytics-f082f4e21b16>

Teoria dos Grafos – Motivação

Rede filogenética

- Espécies (objetos)
- Evolução, hibridação, transferência de genes e recombinação (relações)



Fonte: <https://www.phylos.net/2020-05-14/imagem-arvore-da-vida/>

Modelos baseados em Grafos



Modelagem – Aspectos Fundamentais



Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza
dos elementos

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza
dos elementos



Verificar a existência de diferentes
tipos elementos

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza
dos elementos



Verificar a existência de diferentes
tipos elementos

Identificar as relações

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos



Verificar se os relacionamentos são unidirecionais ou bidirecionais

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos



Verificar se os relacionamentos são unidirecionais ou bidirecionais

Construir um grafo

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos



Verificar se os relacionamentos são unidirecionais ou bidirecionais

Construir um grafo



Gerar o conjunto de vértices

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos



Verificar se os relacionamentos são unidirecionais ou bidirecionais

Construir um grafo



Gerar o conjunto de vértices



Gerar o conjunto de arestas

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos



Verificar se os relacionamentos são unidirecionais ou bidirecionais

Construir um grafo



Gerar o conjunto de vértices



Gerar o conjunto de arestas

Solucionar o problema

Modelagem – Aspectos Fundamentais

Identificar os elementos



Levantar a quantidade e natureza dos elementos



Verificar a existência de diferentes tipos elementos

Identificar as relações



Levantar a quantidade e natureza dos relacionamentos



Verificar se os relacionamentos são unidirecionais ou bidirecionais

Construir um grafo



Gerar o conjunto de vértices



Gerar o conjunto de arestas

Solucionar o problema



Usar métodos já existentes ou desenvolvendo novos

Modelagem – Exemplo



Água



Eletricidade



Esgoto

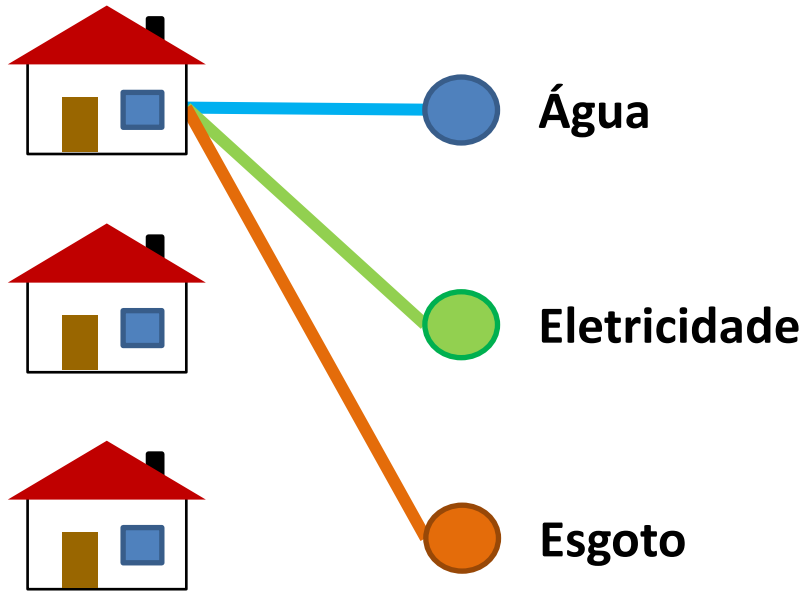
Suponha a existência de:

- 03 casas; e
- 03 serviços públicos.

Deve ser feita a ligação de todas as casas a cada um dos serviços de preferência sem cruzamento de tubulações.

É possível realizar tais conexões sem o cruzamento das tubulações?

Modelagem – Exemplo



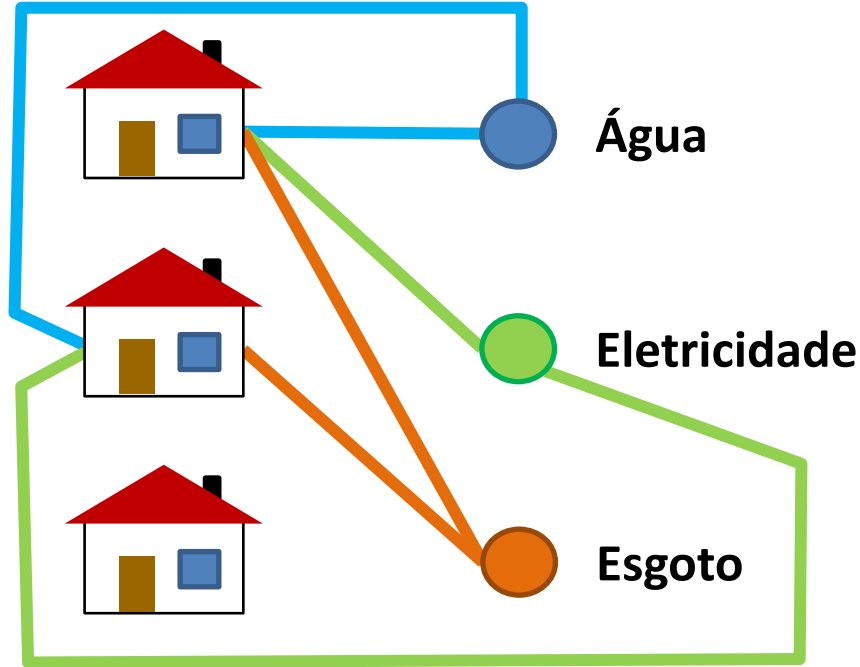
Suponha a existência de:

- 03 casas; e
- 03 serviços públicos.

Deve ser feita a ligação de todas as casas a cada um dos serviços de preferência sem cruzamento de tubulações.

É possível realizar tais conexões sem o cruzamento das tubulações?

Modelagem – Exemplo



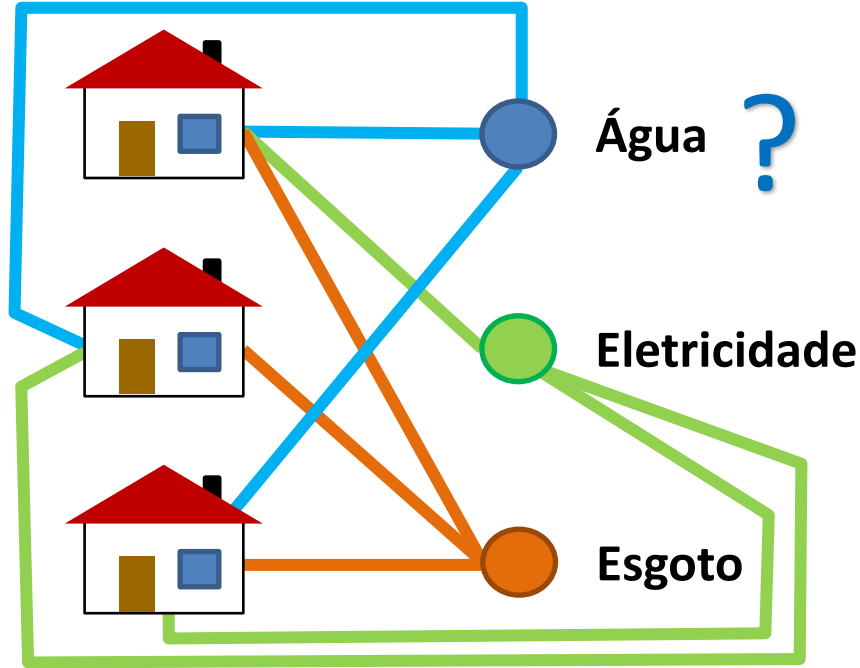
Suponha a existência de:

- 03 casas; e
- 03 serviços públicos.

Deve ser feita a ligação de todas as casas a cada um dos serviços de preferência sem cruzamento de tubulações.

É possível realizar tais conexões sem o cruzamento das tubulações?

Modelagem – Exemplo



Suponha a existência de:

- 03 casas; e
- 03 serviços públicos.

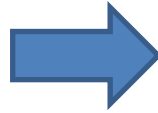
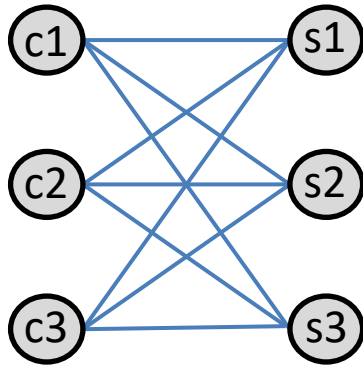
Deve ser feita a ligação de todas as casas a cada um dos serviços de preferência sem cruzamento de tubulações.

É possível realizar tais conexões sem o cruzamento das tubulações?

Modelagem – Exemplo

Modelo

- Vértices: casas e serviços
- Arestas: ligações entre casas e serviços



Determinar se o grafo é
possui uma representação
sem cruzamento de arestas



PLANARIDADE !

