Coloração de Vértices e Coloração de Arestas

Zenilton Patrocínio

Coloração de Vértices

Coloração de Vértices

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o problema de **coloração de vértices** consiste em atribuir cores aos vértices de G de maneira que vértices adjacentes possuam cores diferentes.

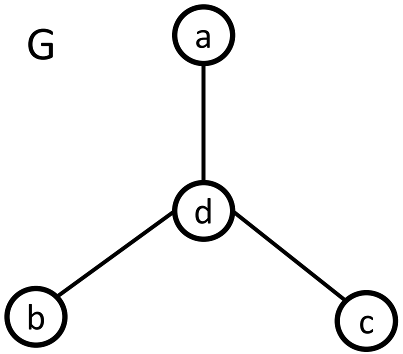
Formalmente, uma coloração consiste em **função *cor*** que associa cada vértice a um rótulo (número) tal que $cor(v) \neq cor(w)$, se v e w são vértices adjacentes.

Denomina-se um grafo como ***k*-colorível** se ele tem uma coloração de vértices válida com k cores.

O número mínimo de cores para colorir os vértices de um grafo G é o seu **número cromático** representado por $\chi(G)$, em que $1 \leq \chi(G) \leq |V|$.

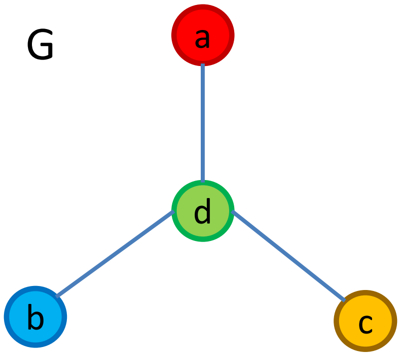
Coloração de Vértices – Exemplos

O número de vértices afeta a atribuição de cores.

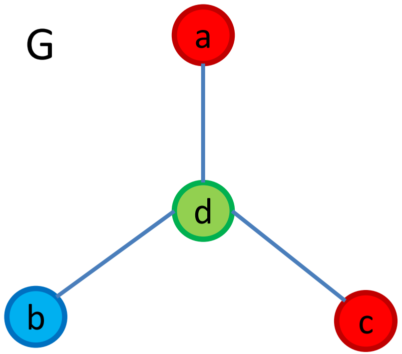


Coloração de Vértices – Exemplos

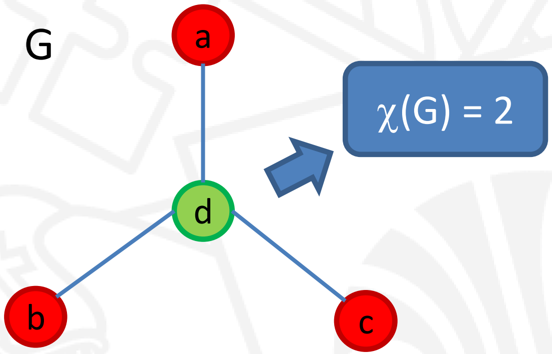
O número de vértices afeta a atribuição de cores.



4-coloração



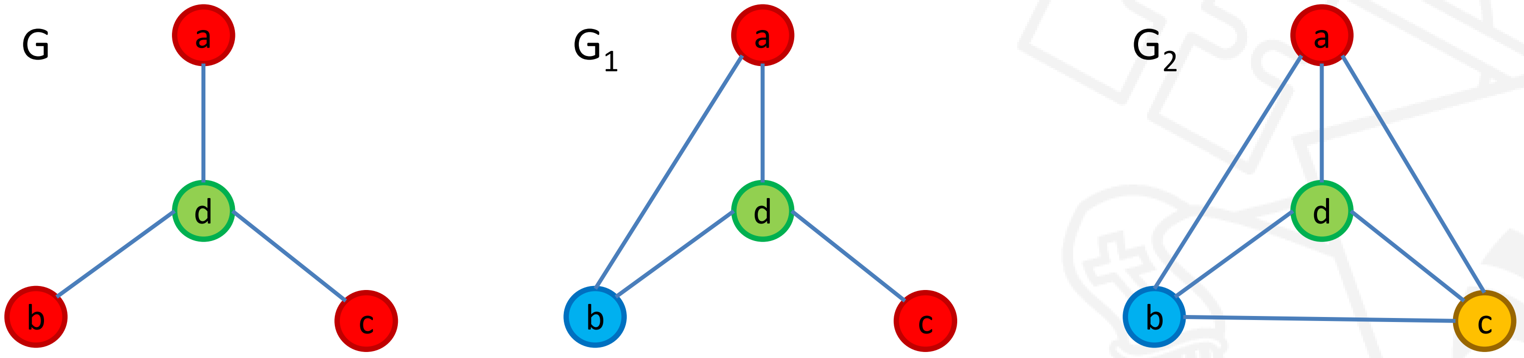
3-coloração



2-coloração

Coloração de Vértices – Exemplos

O grau dos vértices (e as arestas) também afeta a atribuição de cores.



$\chi(G) = 2$

$\chi(G_1) = 3$

$\chi(G_2) = 4$

Número Cromático – Propriedades

O **número de clique** $\omega(G)$ de um grafo G é igual ao número de vértices do maior clique possível de G, isto é, de seu maior subgrafo completo.

O número cromático de um grafo G observa as seguintes propriedades:

- $\chi(G) = 1$, se e somente se G for completamente desconexo;
- $\chi(G) = 2$, se G for bipartido;
- $\chi(G) \leq 4$, se G for planar; (Teorema das 4 cores)
- $\chi(G) = n$, se G for um grafo completo com n vértices;
- $\omega(G) \leq \chi(G)$

Número Cromático – Propriedades

O **número de clique** $\omega(G)$ de um grafo G é igual ao número de vértices do maior clique possível de G, isto é, de seu maior subgrafo completo.

O número cromático de um grafo G observa as seguintes propriedades:

- $\chi(G) = 1$, se e somente se G for completamente desconexo;
- $\chi(G) = 2$, se G for bipartido;
- $\chi(G) \leq 4$, se G for planar; (Teorema das 4 cores)
- $\chi(G) = n$, se G for um grafo completo com n vértices;
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

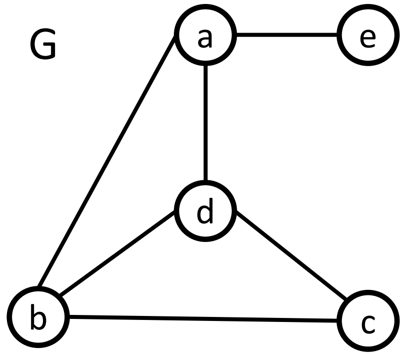
Número Cromático – Propriedades

O **número de clique** $\omega(G)$ de um grafo G é igual ao número de vértices do maior clique possível de G, isto é, de seu maior subgrafo completo.

O número cromático de um grafo G observa as seguintes propriedades:

- $\chi(G) = 1$, se e somente se G for completamente desconexo;
- $\chi(G) = 2$, se G for bipartido;
- $\chi(G) \leq 4$, se G for planar; (Teorema das 4 cores)
- $\chi(G) = n$, se G for um grafo completo com n vértices;
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)$, se G for simples e G não for completo nem ciclo ímpar. (Teorema de Brooks)

Número Cromático – Propriedades



G não é desconexo

G não é bipartido

G não é completo

G é planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Então $3 \leq \chi(G) \leq 4$

Porém $\chi(G) = 3$ (lembrar do Teorema de Brooks)

Método Guloso

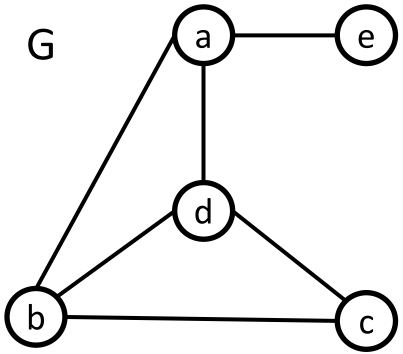
Método Guloso – Algoritmo

Infelizmente não há método eficiente para obtenção da coloração mínima de um grafo, porém é possível se obter uma coloração aproximada rapidamente.

Eis uma abordagem gulosa para obtenção de uma coloração de vértices:

1. Considerar os vértices do grafo em uma ordem qualquer $v_1, v_2, . . ., v_n$;
2. Identificar as cores com índices, adicionando mais cores quando necessário;
3. Colorir v_1 com a primeira cor; e
4. A cada iteração, atribuir ao vértice corrente a cor de menor índice não utilizada por nenhum de seus vizinhos.

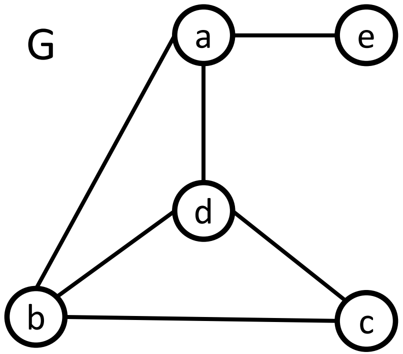
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: c e a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

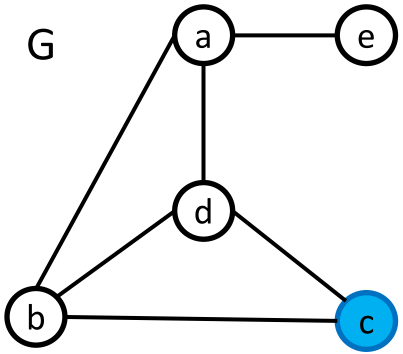
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: c e a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

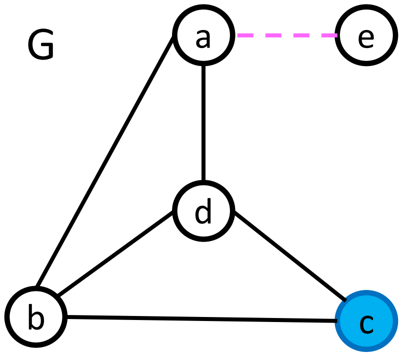
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ e a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

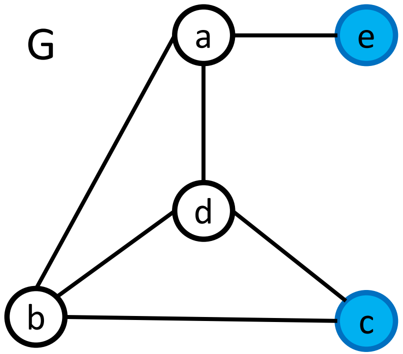
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ e a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

Método Guloso – Exemplo

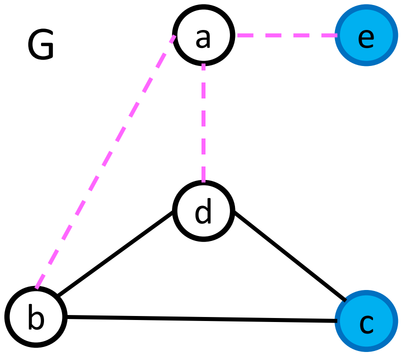


Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

Método Guloso – Exemplo

G

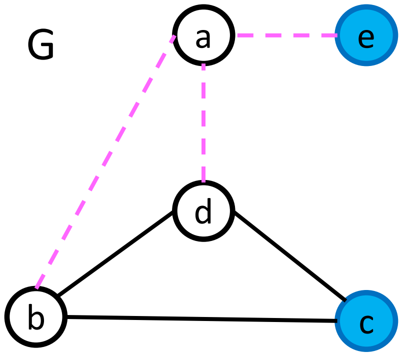


Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

Método Guloso – Exemplo

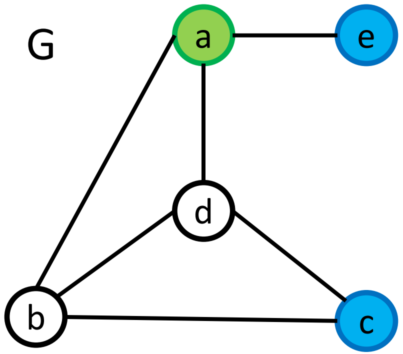
G



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ a d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

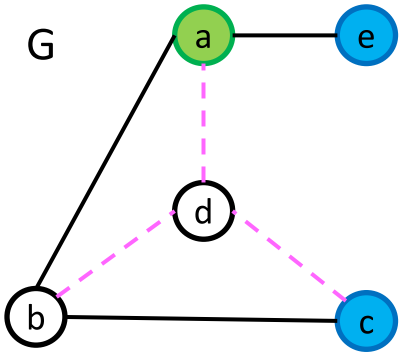
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

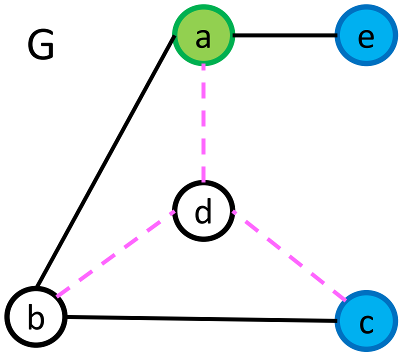
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

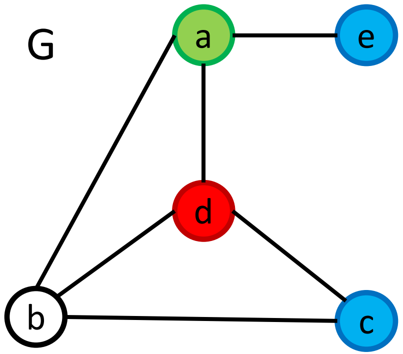
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ d b

Índice	1	2	3	4
Cor				

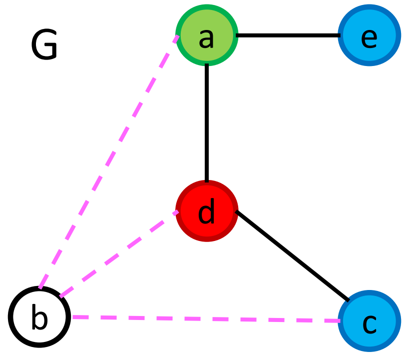
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ b

Índice	1	2	3	4
Cor				

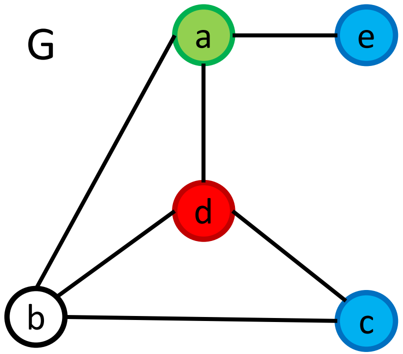
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ b

Índice	1	2	3	4
Cor				

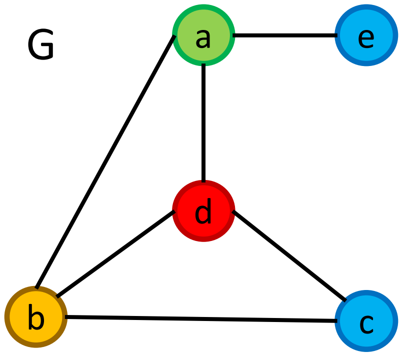
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ b

Índice	1	2	3	4
Cor				

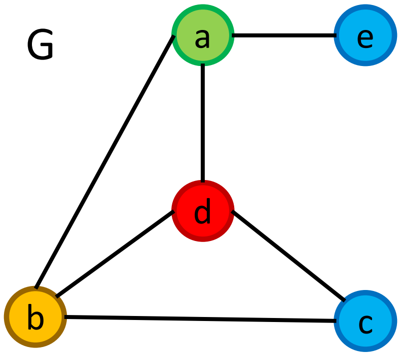
Método Guloso – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ ~~b~~

Índice	1	2	3	4
Cor				

Método Guloso – Exemplo

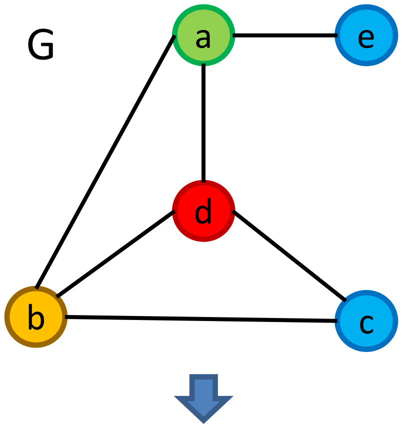


4-coloração

Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ ~~b~~

Índice	1	2	3	4
Cor				

Método Guloso – Exemplo



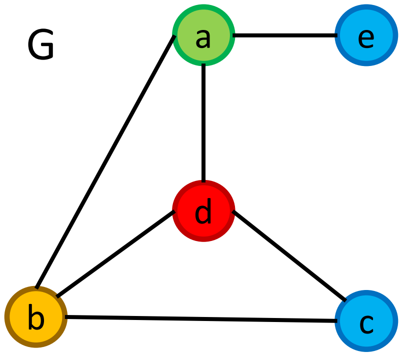
4-coloração

Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ ~~b~~

Índice	1	2	3	4
Cor				

Resultado depende da ordenação de vértices !

Método Guloso – Exemplo



4-coloração

Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~e~~ ~~a~~ ~~d~~ ~~b~~

Índice	1	2	3	4
Cor				

Resultado depende da ordenação de vértices !

Análise do resultado

G não é desconexo

G não é bipartido

G não é completo

G é planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Então $3 \leq \chi(G) \leq 4$

Porém $\chi(G) = 3$

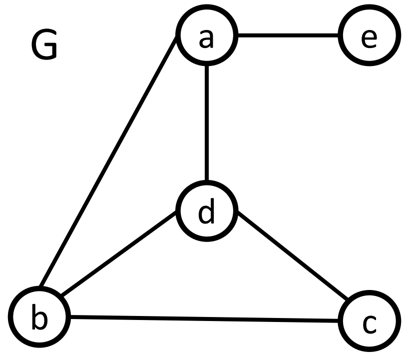
(Teorema de Brooks)

Método de Welsh-Powell

Método de Welsh-Powell – Algoritmo

1. Ordenar os vértices em ordem não crescente de graus $v_1, v_2, \ldots, v_n$;
2. Identificar as cores com índices, adicionando mais cores quando necessário;
3. Colorir v_1 com a primeira cor;
4. Seguir pela lista de vértices colorindo todos os vértices não conectados a um vértice já colorido usando sempre a mesma cor; e
5. Repetir o passo 4 para todos os vértices não coloridos usando uma nova cor, sempre respeitando a ordem não crescente de graus até que todos estejam coloridos.

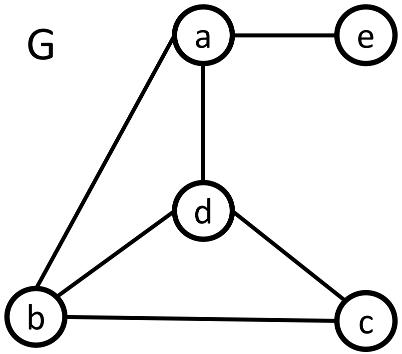
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: b d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

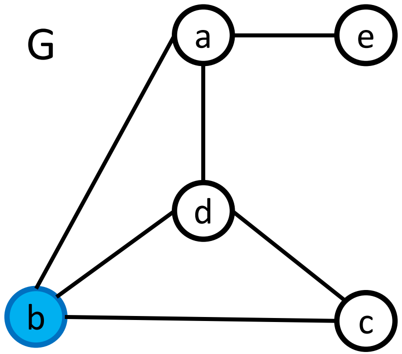
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: b d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

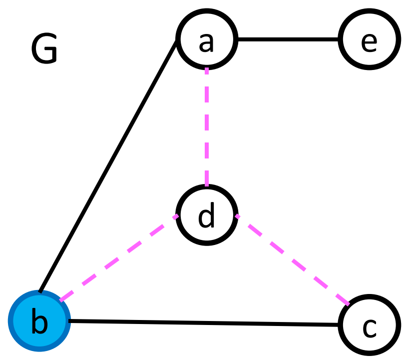
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

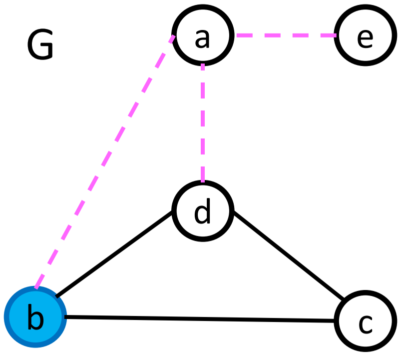
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

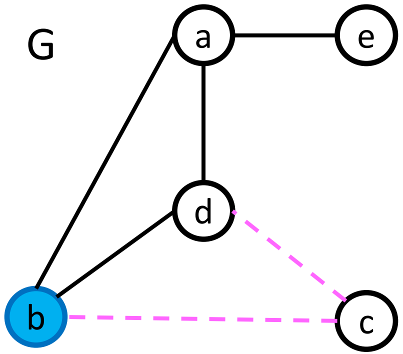
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

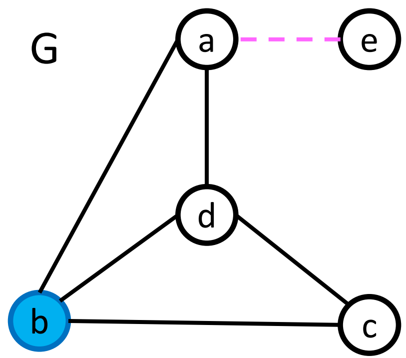
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

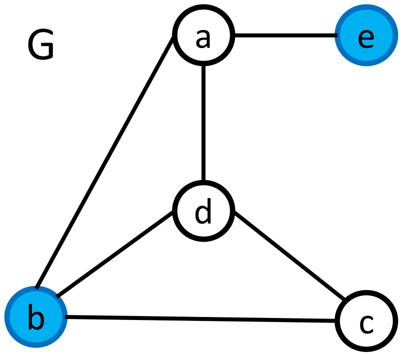
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c e

Índice	1	2	3
Cor			

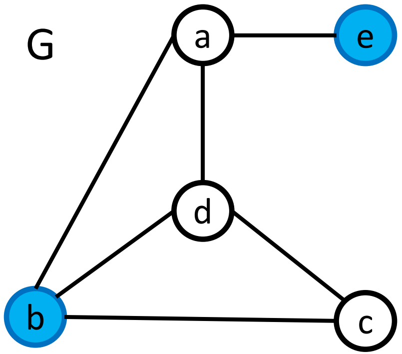
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

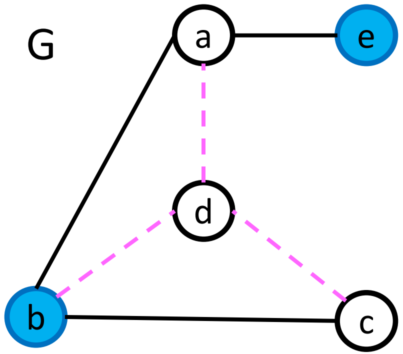
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

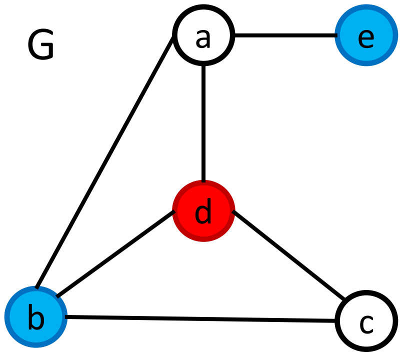
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ d a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Exemplo

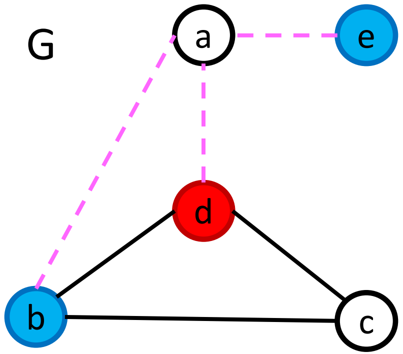


Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Exemplo

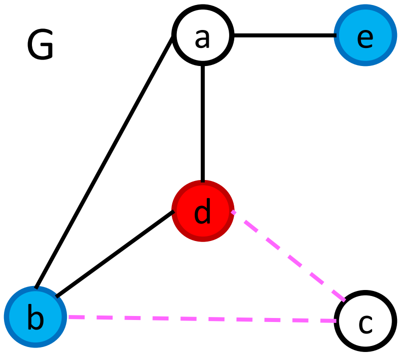
G



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

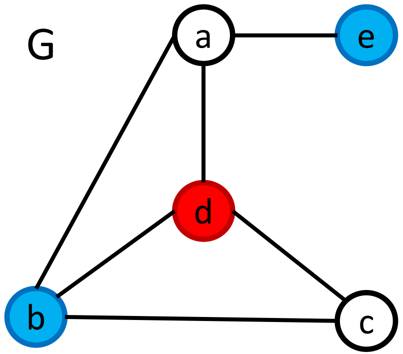
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

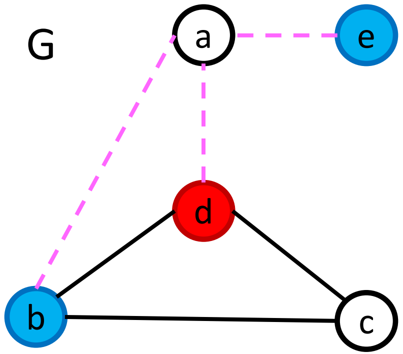
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

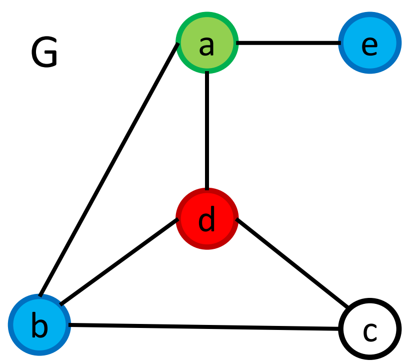
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ a c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

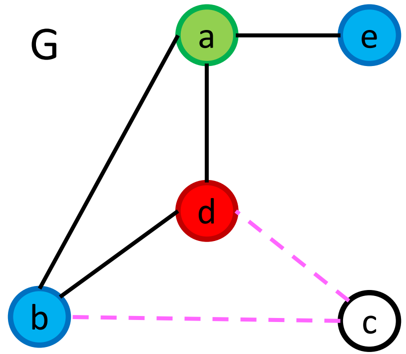
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ ~~a~~ c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

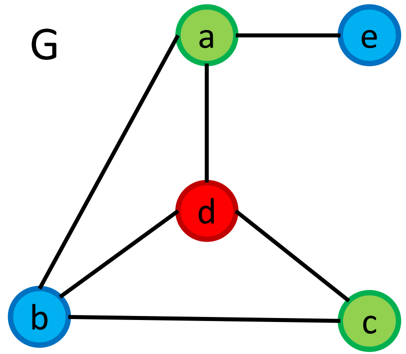
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ ~~a~~ c ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

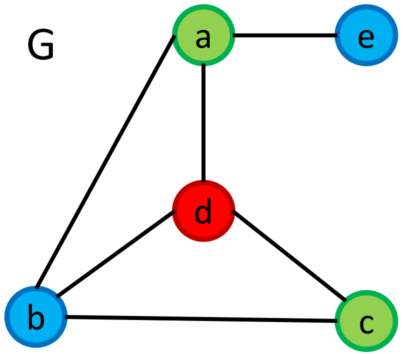
Método de Welsh-Powell – Exemplo



Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~c~~ ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Exemplo



3-coloração

Ordem dos vértices: ~~b~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~c~~ ~~e~~

Índice	1	2	3
Cor			

Resultado melhor que o do método guloso !

Análise do resultado

G não é desconexo

G não é bipartido

G não é completo

G é planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

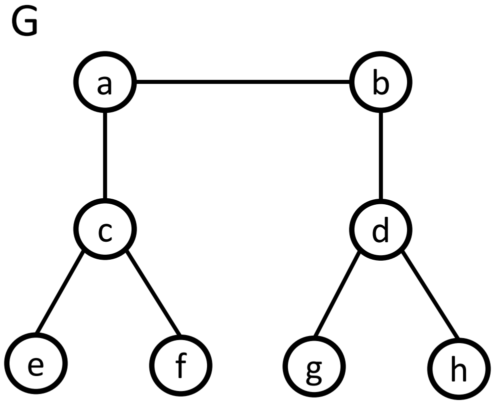
$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)$

(Teorema de Brooks)

Então $3 \leq \chi(G) \leq 3$

$\chi(G) = 3$

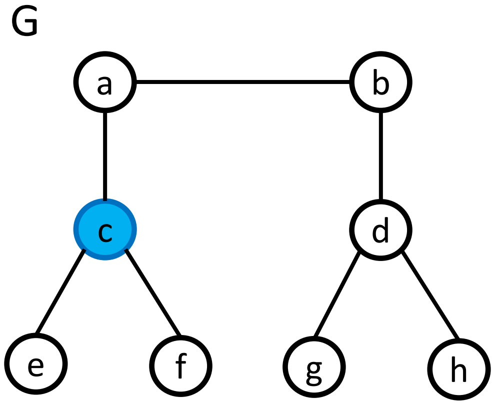
Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo



Ordem dos vértices: c d a b e f g h

Índice	1	2	3
Cor			

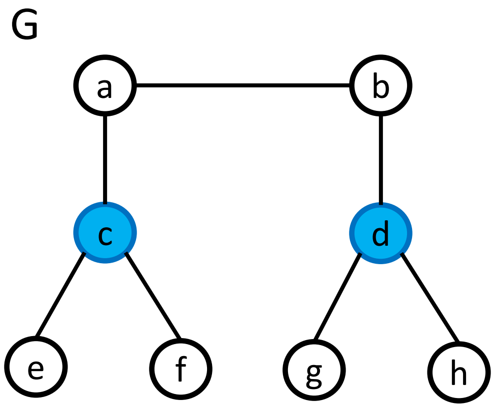
Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ d a b e f g h

Índice	1	2	3
Cor			

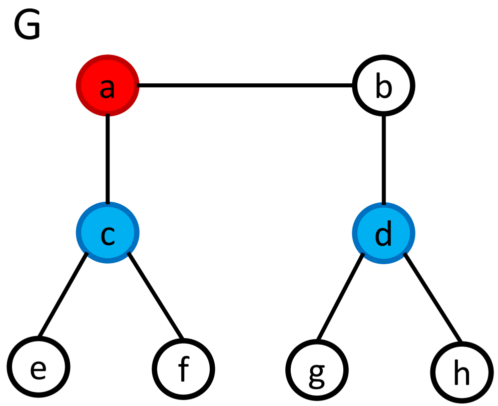
Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ a b e f g h

Índice	1	2	3
Cor			

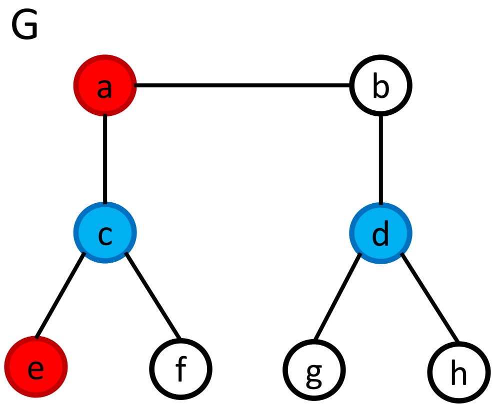
Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ b e f g h

Índice	1	2	3
Cor			

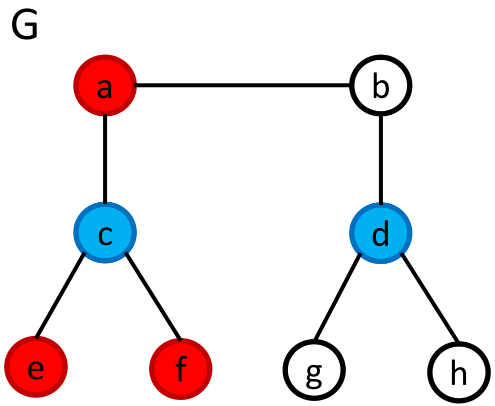
Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ b ~~e~~ f g h

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo

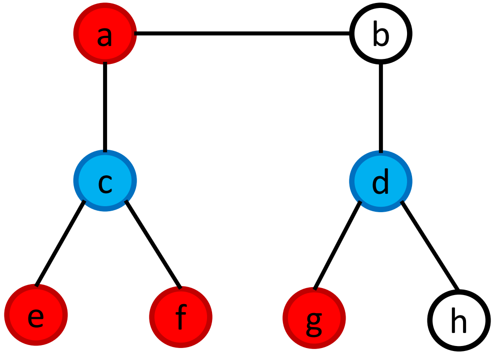


Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ b ~~e~~ ~~f~~ g h

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo

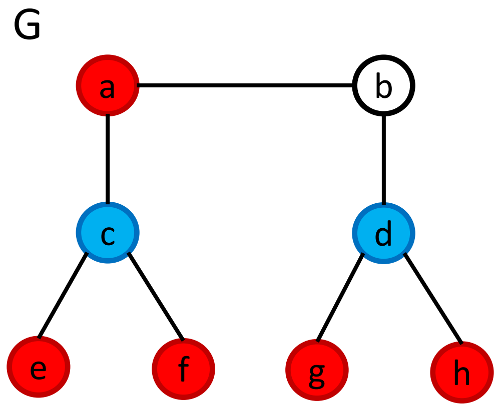
G



Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ b ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ h

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo

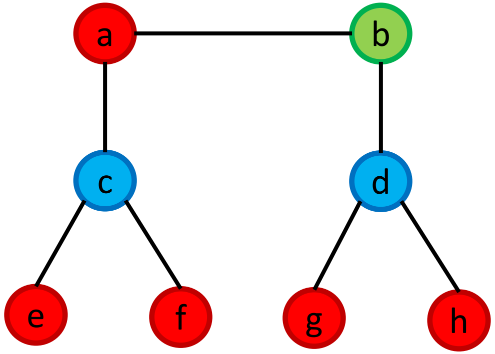


Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ b ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ ~~h~~

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo

G

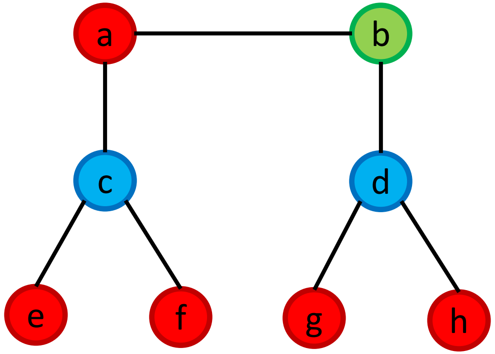


Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~b~~ ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ ~~h~~

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo

G

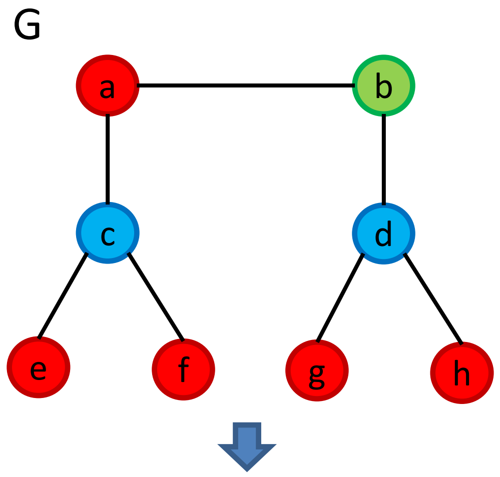


3-coloração

Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~b~~ ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ ~~h~~

Índice	1	2	3
Cor			

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo



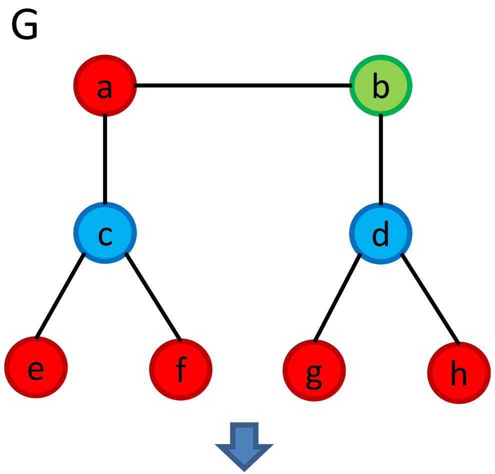
3-coloração

Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~b~~ ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ ~~h~~

Índice	1	2	3
Cor			

Porém G é bipartido
logo $\chi(G) = 2$

Método de Welsh-Powell – Contra-Exemplo

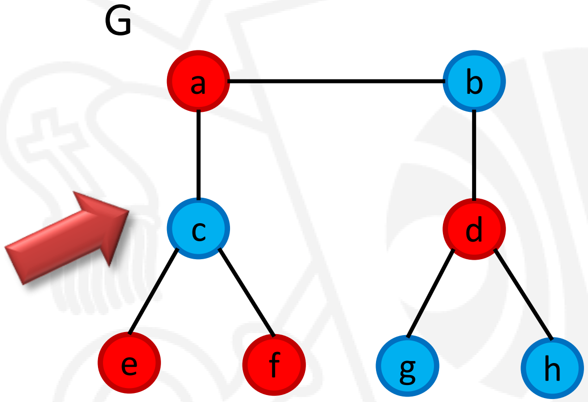


3-coloração

Ordem dos vértices: ~~c~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~b~~ ~~e~~ ~~f~~ ~~g~~ ~~h~~

Índice	1	2	3
Cor			

Porém G é bipartido
logo $\chi(G) = 2$



Coloração de Arestas

Coloração de Arestas

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o problema de coloração de arestas consiste em atribuir cores às arestas de G de maneira que arestas adjacentes possuam cores diferentes.

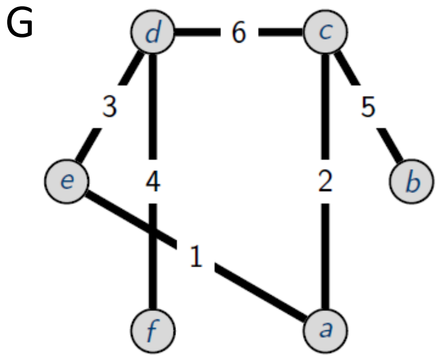
Formalmente, uma coloração consiste em função *cor* que associa cada aresta a um rótulo (número) tal que $cor(e_1) \neq cor(e_2)$, se e_1 e e_2 são arestas adjacentes.

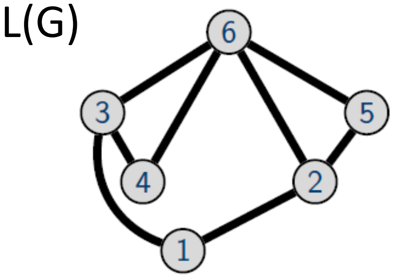
Denomina-se um grafo como *k*-aresta-colorível se ele tem uma coloração de arestas válida com *k* cores.

O número mínimo de cores para colorir as arestas de um grafo G é o seu índice cromático representado por $\chi'(G)$, em que $1 \leq \chi'(G) \leq |E|$.

Grafo Adjunto (ou Grafo de Linha)

O grafo de linha ou grafo adjunto, notação L(G), é o grafo cujos vértices estão em correspondência 1 a 1 com as arestas de G e cujas arestas ligam vértices que correspondem a arestas incidentes em G.





$\chi'(G) = \chi(L(G))$

Índice Cromático – Propriedades

O índice cromático de um grafo G observa as seguintes propriedades:

- $\chi'(G) = 1$, se e somente se G for um acoplamento;
- $\omega(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. (Teorema de Vizing)