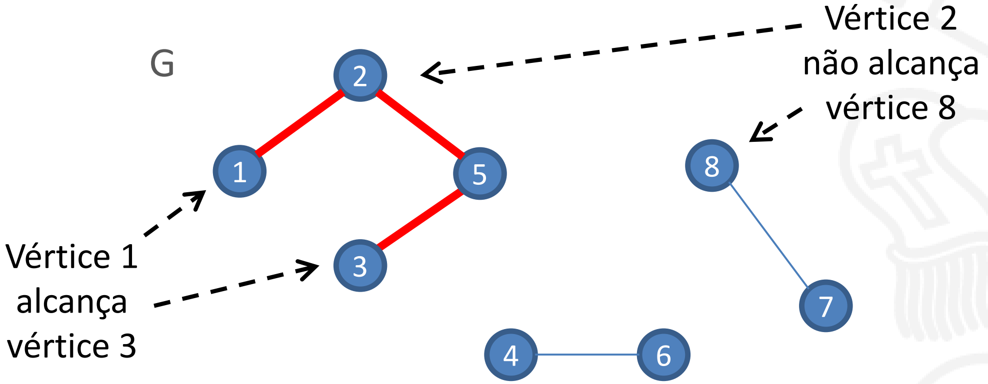
Conectividade - Separabilidade

Zenilton Patrocínio

Fecho Transitivo

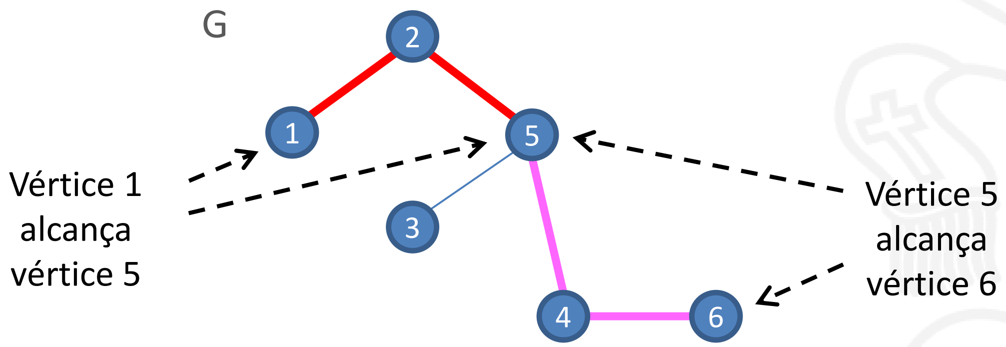
Alcançabilidade

Se existe caminho de um vértice *v* para um vértice *w* em um grafo G, então se diz que ***v* alcança *w***, ou ainda, que *w* está ao alcance de *v* (ou então que *w* é acessível a partir de *v*).



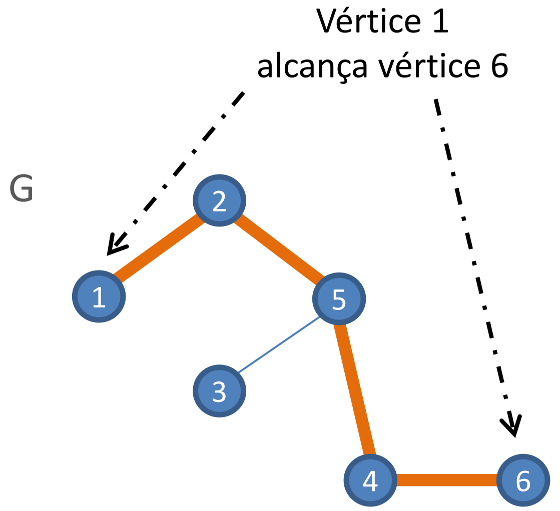
Alcançabilidade – Transitividade

A relação de alcançabilidade é **transitiva**, isto é, se *v* alcança *w* e *w* alcança *x* então *v* alcança *x*.



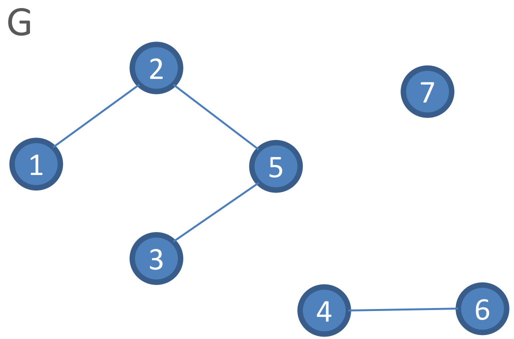
Alcançabilidade – Transitividade

A relação de alcançabilidade é **transitiva**, isto é, se *v* alcança *w* e *w* alcança *x* então *v* alcança *x*.



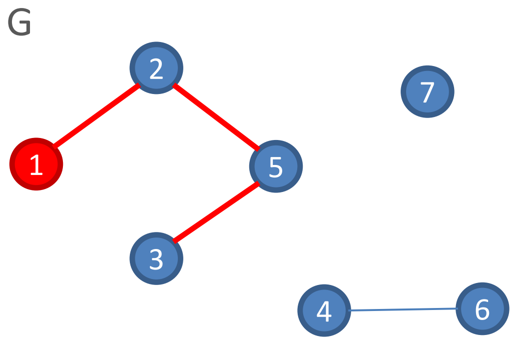
Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

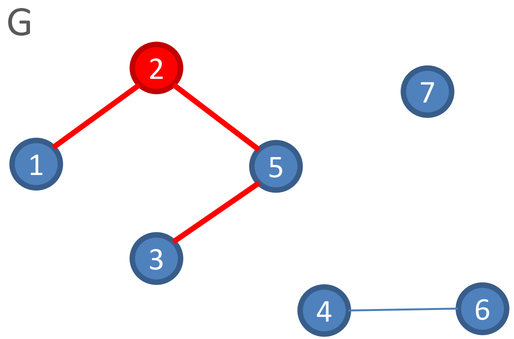
O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



$$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

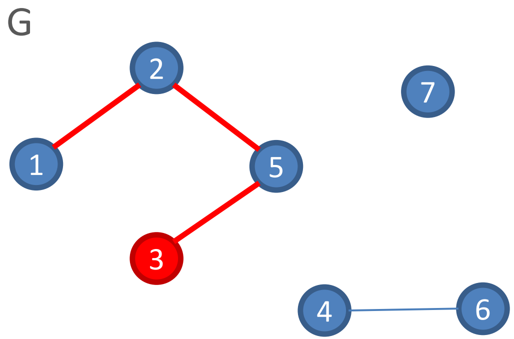
O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



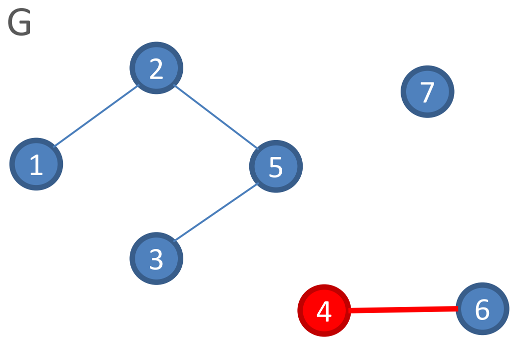
$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$

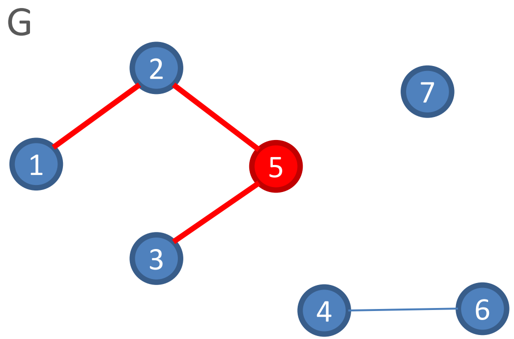
$\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(4) = \{4, 6\}$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

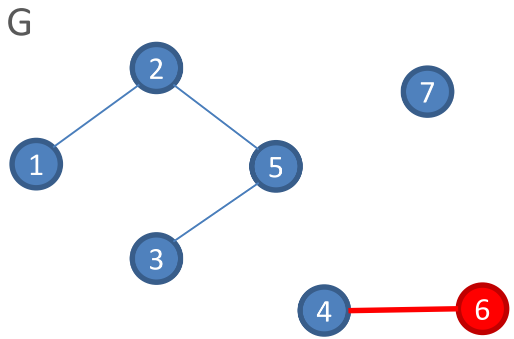
$\hat{\Gamma}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(4) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



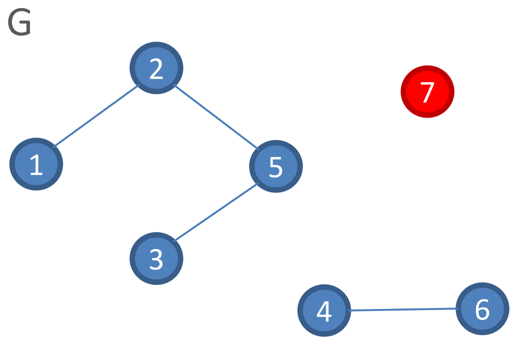
$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}(4) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}(6) = \{4, 6\}$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

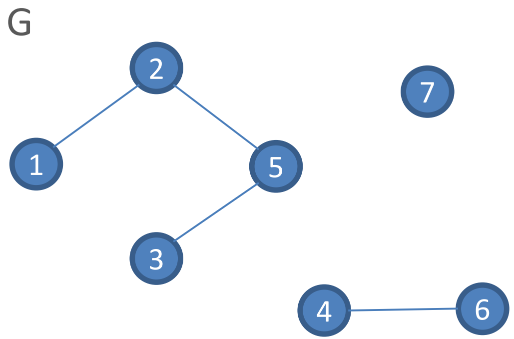
$\hat{\Gamma}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}(4) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}(6) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}(7) = \{7\}$

Fecho Transitivo – Grafo Não Direcionado

O fecho transitivo de um vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}(v)$, pois v alcança v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}(2) = \{1, 2, 3, 5\}$

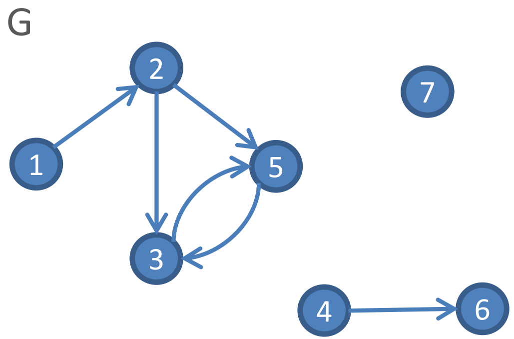
$\hat{\Gamma}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}(4) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}(6) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}(7) = \{7\}$

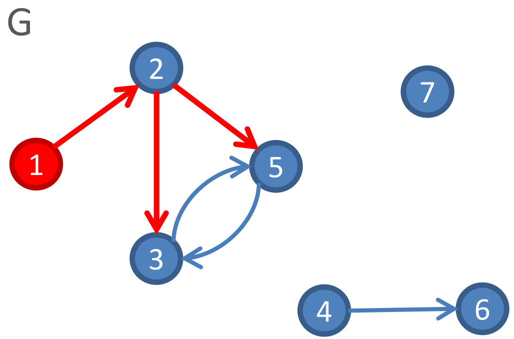
Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.



Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

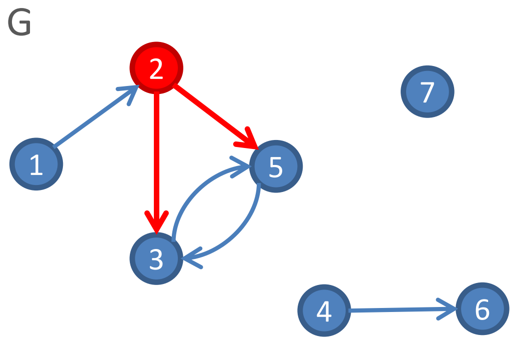
O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.



$$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

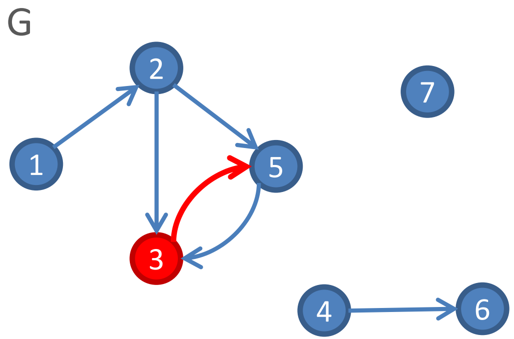
O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}^{+}(2) = \{2, 3, 5\}$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.

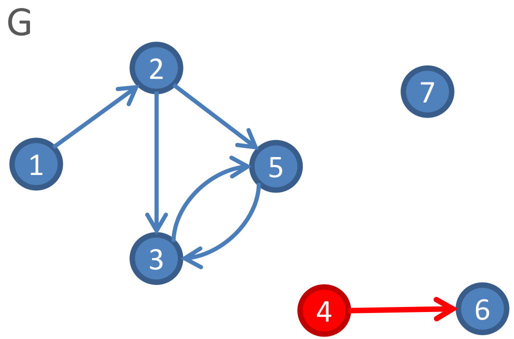


$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}^{+}(2) = \{2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(3) = \{3, 5\}$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^+(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que $v \in \hat{\Gamma}^+(v)$.

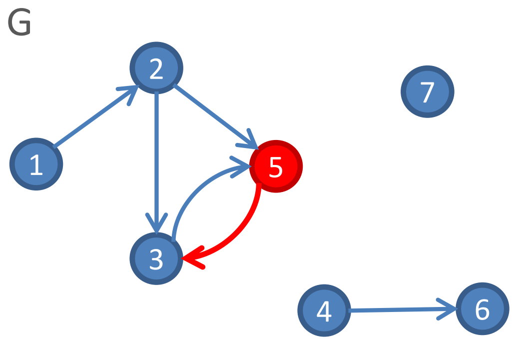


$\hat{\Gamma}^+(1) = \{1, 2, 3, 5\}$ $\hat{\Gamma}^+(2) = \{2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^+(3) = \{3, 5\}$ $\hat{\Gamma}^+(4) = \{4, 6\}$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^+(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que $v \in \hat{\Gamma}^+(v)$.



$\hat{\Gamma}^+(1) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^+(2) = \{2, 3, 5\}$

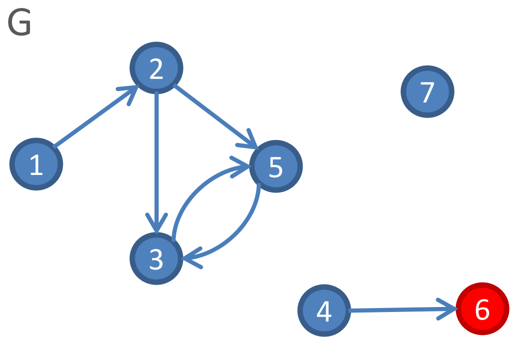
$\hat{\Gamma}^+(3) = \{3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^+(4) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}^+(5) = \{3, 5\}$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.



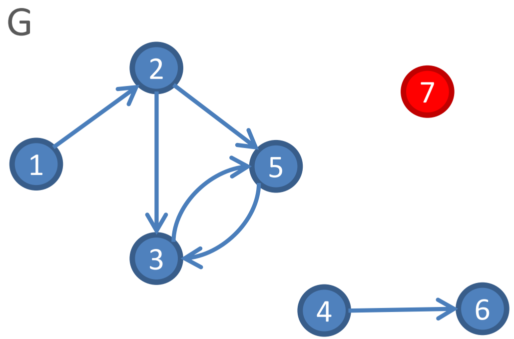
$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{1,2,3,5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}^{+}(2) = \{2,3,5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(3) = \{3,5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}^{+}(4) = \{4,6\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(5) = \{3,5\}$ $\quad$ $\hat{\Gamma}^{+}(6) = \{6\}$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que $v \in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(2) = \{2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(3) = \{3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(4) = \{4, 6\}$

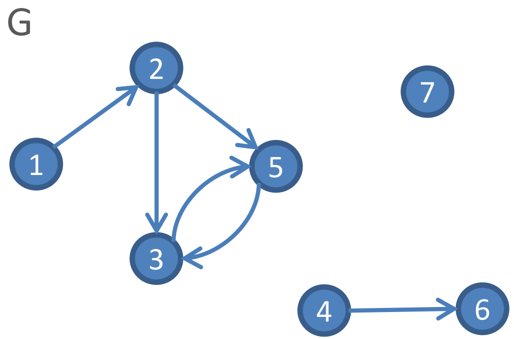
$\hat{\Gamma}^{+}(5) = \{3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(6) = \{6\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(7) = \{7\}$

Fecho Transitivo Direto – Grafo Direcionado

O fecho transitivo direto do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{+}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(2) = \{2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(3) = \{3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(4) = \{4, 6\}$

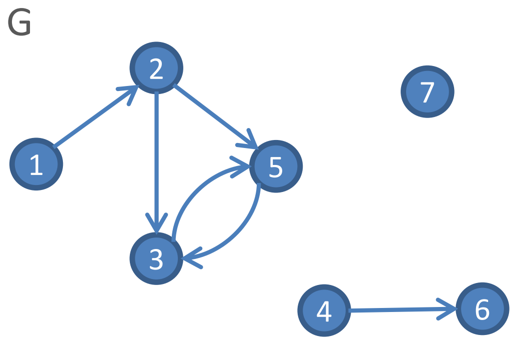
$\hat{\Gamma}^{+}(5) = \{3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(6) = \{6\}$

$\hat{\Gamma}^{+}(7) = \{7\}$

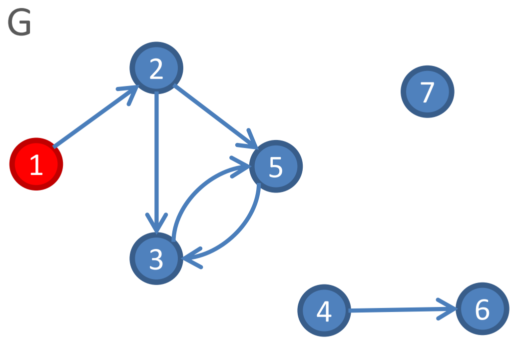
Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

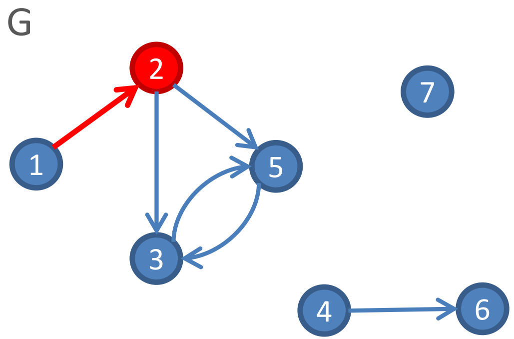
O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



$$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.

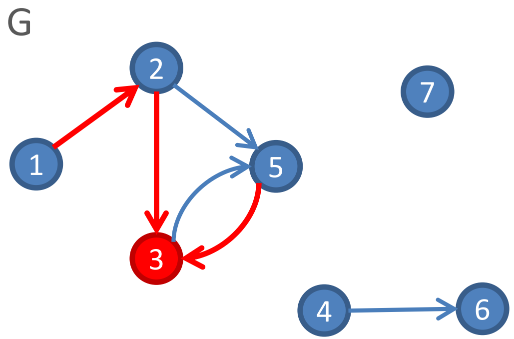


$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(2) = \{1, 2\}$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^-(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^-(v)$.



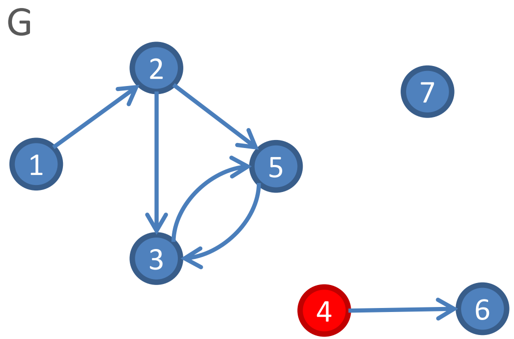
$\hat{\Gamma}^-(1) = \{1\}$

$\hat{\Gamma}^-(2) = \{1, 2\}$

$\hat{\Gamma}^-(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$

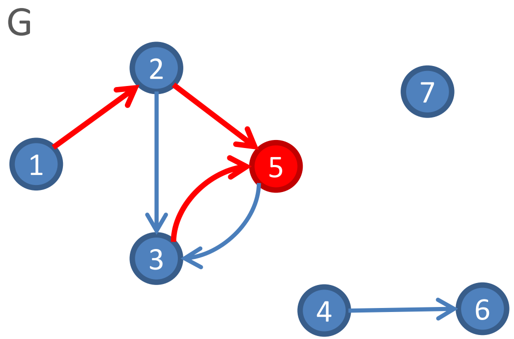
$\hat{\Gamma}^{-}(2) = \{1, 2\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(4) = \{4\}$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(2) = \{1, 2\}$

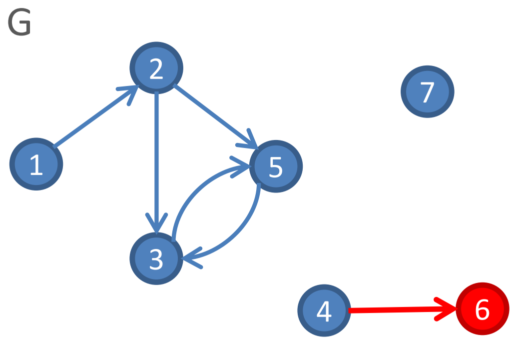
$\hat{\Gamma}^{-}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(4) = \{4\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que $v \in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(2) = \{1,2\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(3) = \{1,2,3,5\}$

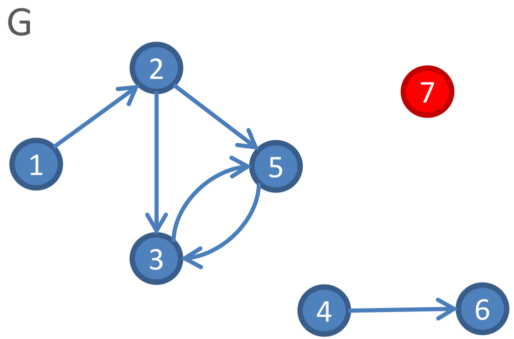
$\hat{\Gamma}^{-}(4) = \{4\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(5) = \{1,2,3,5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(6) = \{4,6\}$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que $v \in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(2) = \{1, 2\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(4) = \{4\}$

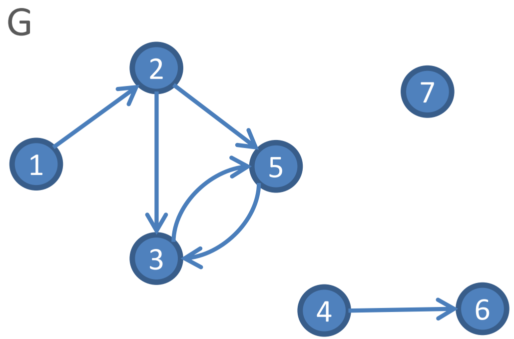
$\hat{\Gamma}^{-}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(6) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(7) = \{7\}$

Fecho Transitivo Inverso – Grafo Direcionado

O fecho transitivo inverso do vértice *v*, representado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices que alcançam *v*. Vale notar que v $\in \hat{\Gamma}^{-}(v)$.



$\hat{\Gamma}^{-}(1) = \{1\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(2) = \{1, 2\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(3) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(4) = \{4\}$

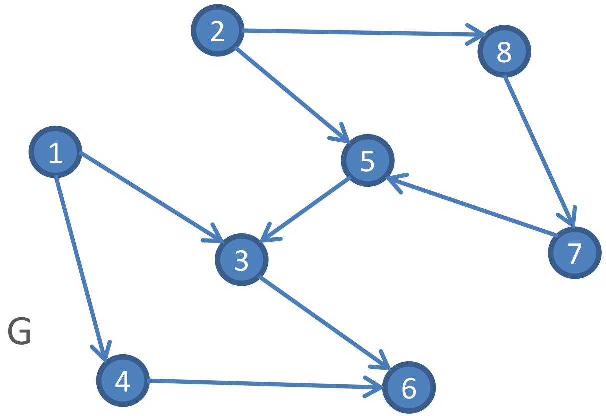
$\hat{\Gamma}^{-}(5) = \{1, 2, 3, 5\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(6) = \{4, 6\}$

$\hat{\Gamma}^{-}(7) = \{7\}$

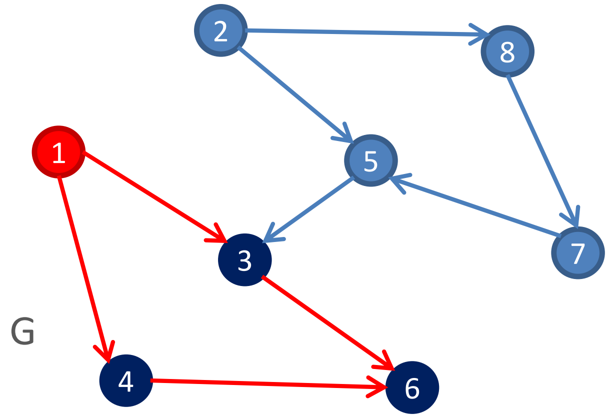
Base

Dado um grafo direcionado $G = (V, E)$, uma base de G é um subconjunto $B \subseteq V$ tal que não há caminhos entre elementos de B e todo vértice não pertencente a B pode ser alcançado por algum vértice de B.



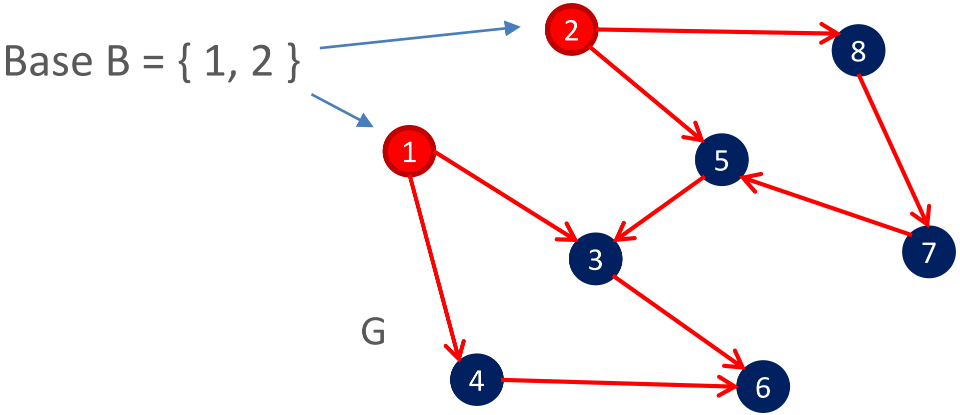
Base

Dado um grafo direcionado G = (V, E), uma base de G é um subconjunto B $\subseteq$ V tal que não há caminhos entre elementos de B e todo vértice não pertencente a B pode ser alcançado por algum vértice de B.



Base

Dado um grafo direcionado G = (V, E), uma base de G é um subconjunto B $\subseteq$ V tal que não há caminhos entre elementos de B e todo vértice não pertencente a B pode ser alcançado por algum vértice de B.



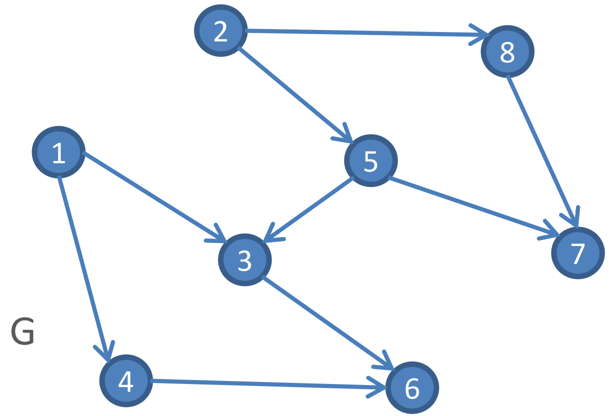
Usando Fecho Transitivo Direto

Se $v, w \in$ B então
$v \notin \hat{\Gamma}^{+}(w)$ e $w \notin \hat{\Gamma}^{+}(v)$

Se $w \in V - B$ então
$\exists v \in B$ tal que $w \in \hat{\Gamma}^{+}(v)$

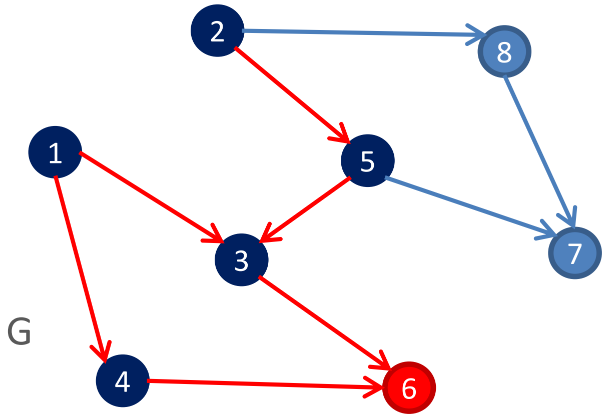
Antibase

Dado um grafo direcionado G = (V, E), uma antibase é um subconjunto $A \subseteq V$ tal que não há caminhos entre elementos de A e todo vértice não pertencente a A pode alcançar por algum vértice de A.



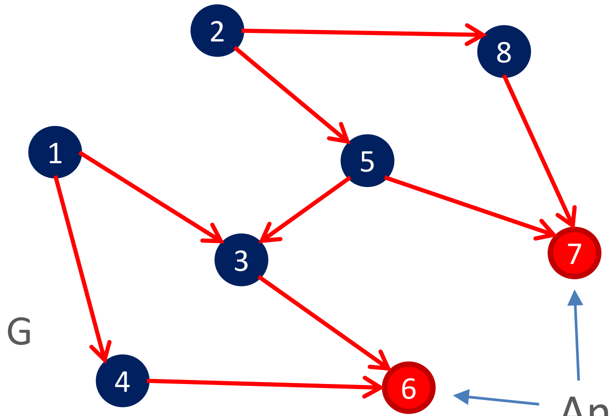
Antibase

Dado um grafo direcionado G = (V, E), uma **antibase** é um subconjunto $A \subseteq V$ tal que não há caminhos entre elementos de A e todo vértice não pertencente a A pode alcançar por algum vértice de A.



Antibase

Dado um grafo direcionado G = (V, E), uma **antibase** é um subconjunto $A \subseteq V$ tal que não há caminhos entre elementos de A e todo vértice não pertencente a A pode alcançar por algum vértice de A.



Usando Fecho Transitivo Inverso

Se $v, w \in A$ então

$$v \notin \hat{\Gamma}^{-}(w) \text{ e } w \notin \hat{\Gamma}^{-}(v)$$

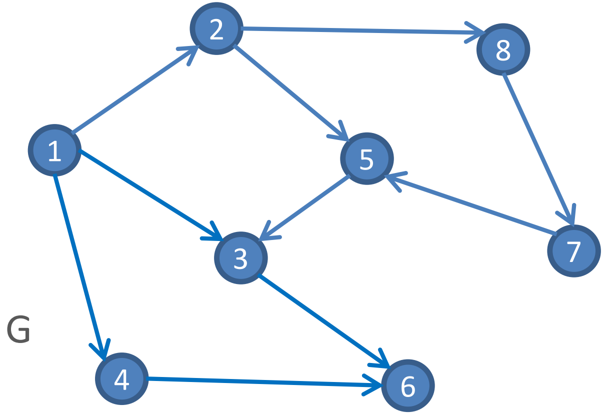
Se $w \in V - A$ então

$$\exists v \in A \text{ tal que } w \in \hat{\Gamma}^{-}(v)$$

Antibase B = { 6, 7 }

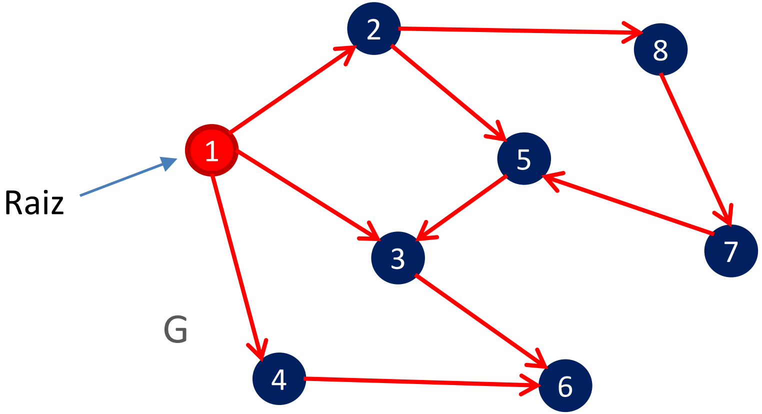
Raiz / Antirraiz

Se a base de um grafo G for um conjunto unitário, então ela é dita raiz de G.



Raiz / Antirraiz

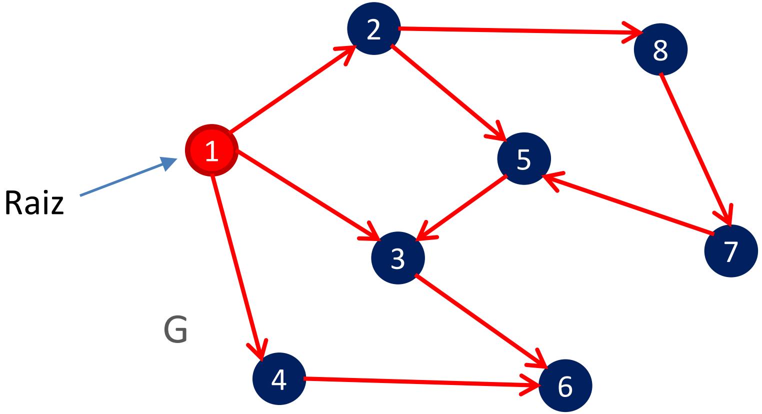
Se a base de um grafo G for um conjunto unitário, então ela é dita raiz de G.

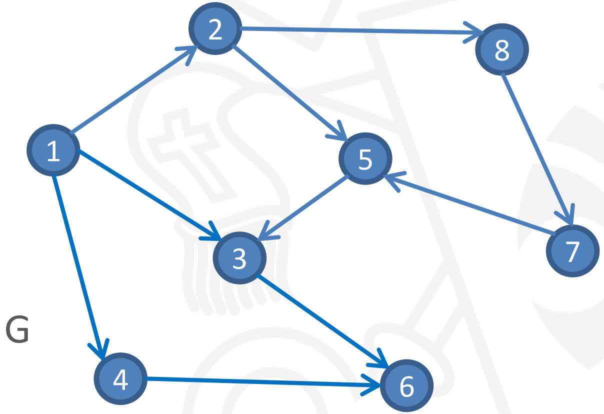


Raiz / Antirraiz

Se a base de um grafo G for um conjunto unitário, então ela é dita raiz de G.

Se a antibase de um grafo G for um conjunto unitário, então ela é dita antirraiz de G.

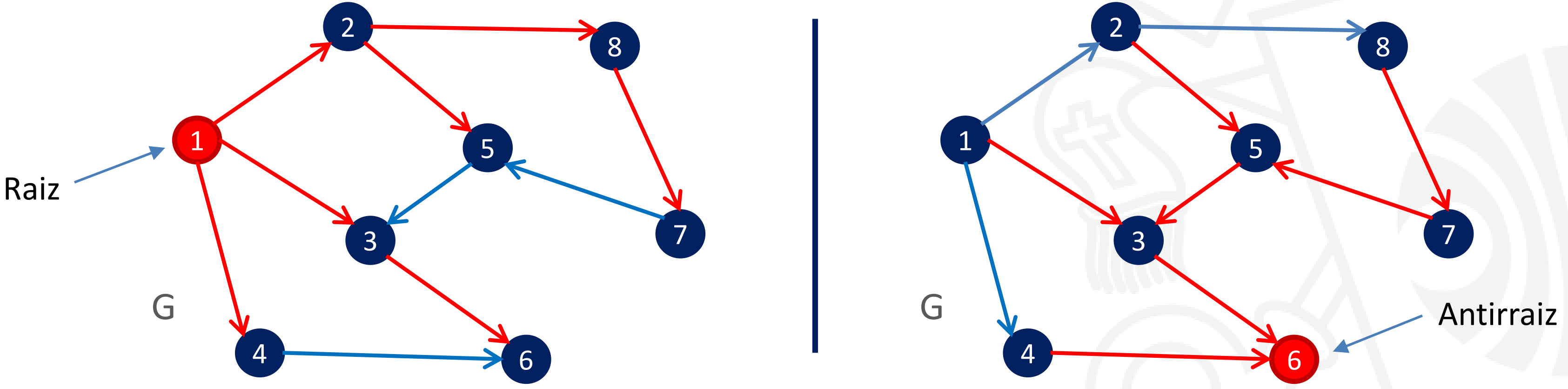




Raiz / Antirraiz

Se a base de um grafo G for um conjunto unitário, então ela é dita raiz de G.

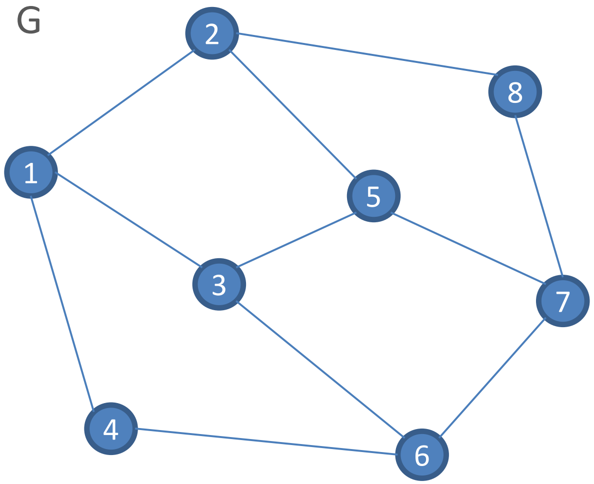
Se a antibase de um grafo G for um conjunto unitário, então ela é dita antirraiz de G.



Conectividade

Conectividade – Grafo Não Direcionado

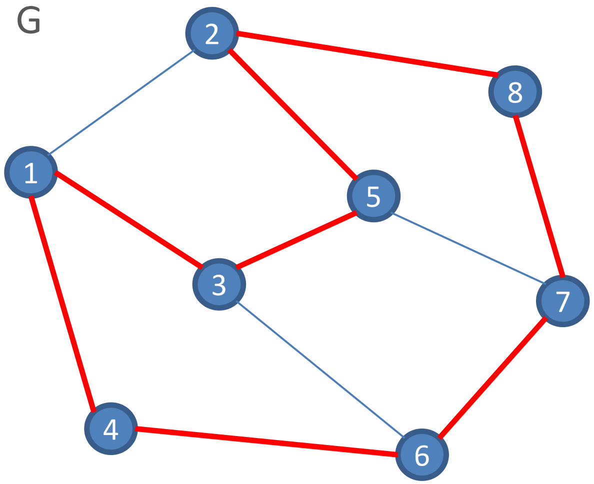
Em um grafo não direcionado conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.



Ou ainda, o fecho transitivo de qualquer vértice é igual ao conjunto de vértices, isto é, $\hat{\Gamma}(v) = V$, para todo $v \in V(G)$.

Conectividade – Grafo Não Direcionado

Em um grafo não direcionado conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.



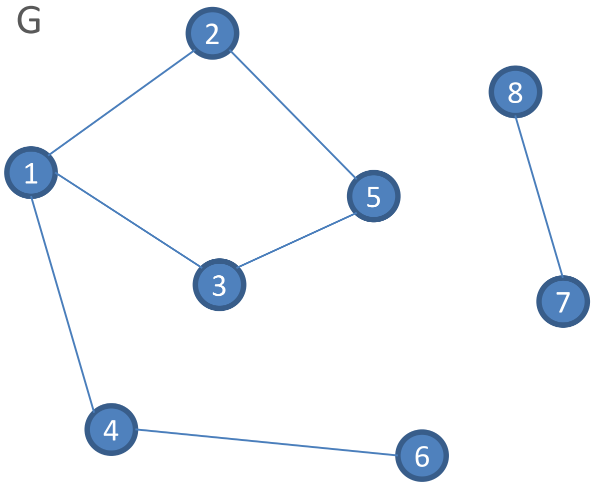
Ou ainda, o fecho transitivo de qualquer vértice é igual ao conjunto de vértices, isto é, $\hat{\Gamma}(v) = V$, para todo $v \in V(G)$.

Em um grafo não direcionado conexo, é sempre possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.

Por exemplo: 3 1 4 6 7 8 2 5 3

Conectividade – Grafo Não Direcionado

Um grafo não direcionado é desconexo quando não existir um caminho entre algum par de vértices.



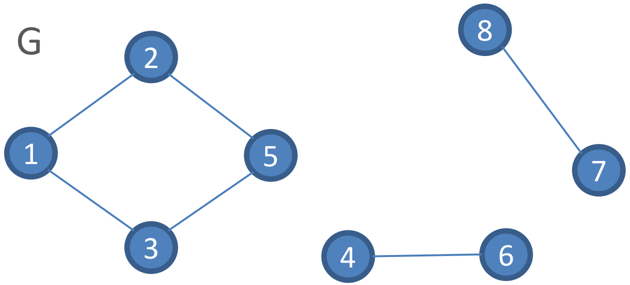
Ou ainda, o fecho transitivo de algum vértice for diferente ao conjunto de vértices, isto é, $\hat{\Gamma}(v) \neq V$, para algum $v \in V(G)$.

Por exemplo, $\hat{\Gamma}(7) = \{7, 8\} \neq V$

Componente Conexo

Dado um grafo não direcionado, seus componentes conexos são os subgrafos maximais que são conexos.

Um subgrafo maximal conexo é um dos maiores subgrafos (em número de vértices e arestas) que também seja conexo.

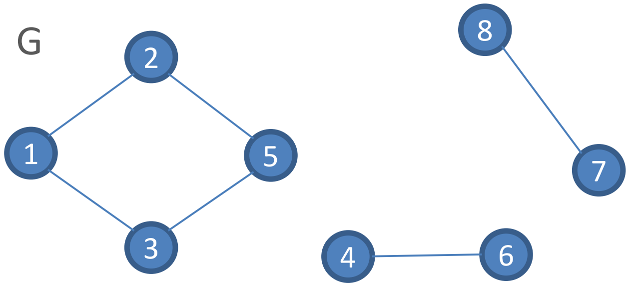


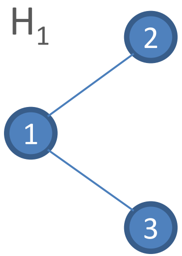
Subgrafo mas não é conexo

Componente Conexo

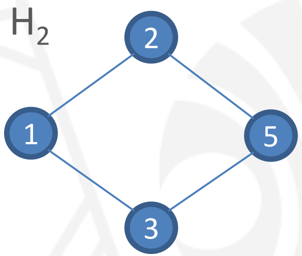
Dado um grafo não direcionado, seus componentes conexos são os subgrafos maximais que são conexos.

Um subgrafo maximal conexo é um dos maiores subgrafos (em número de vértices e arestas) que também seja conexo.





Subgrafo conexo mas não maximal

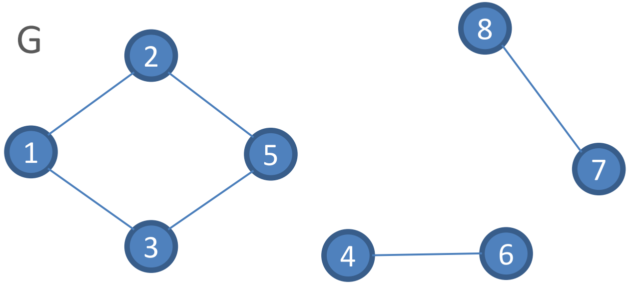


Subgrafo conexo maximal

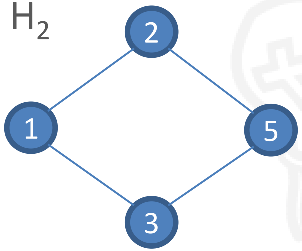
Componente Conexo

Dado um grafo não direcionado, seus componentes conexos são os subgrafos maximais que são conexos.

Um subgrafo maximal conexo é um dos maiores subgrafos (em número de vértices e arestas) que também seja conexo.

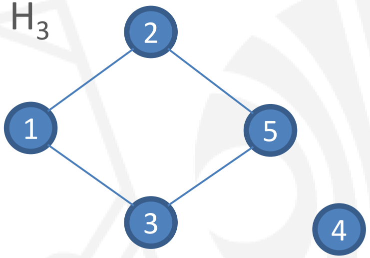


H_2



Subgrafo conexo maximal

H_3

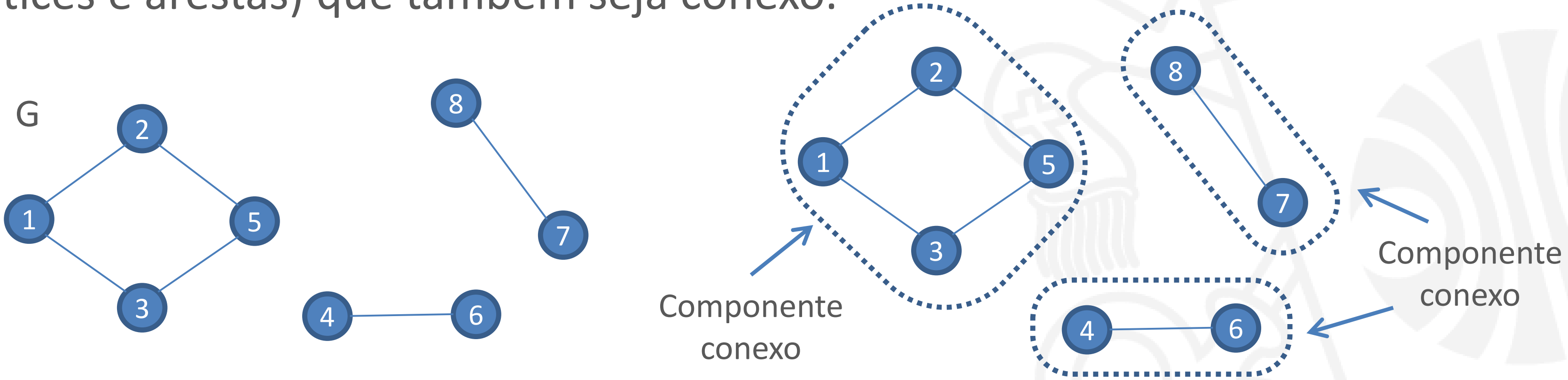


Subgrafo não conexo

Componente Conexo

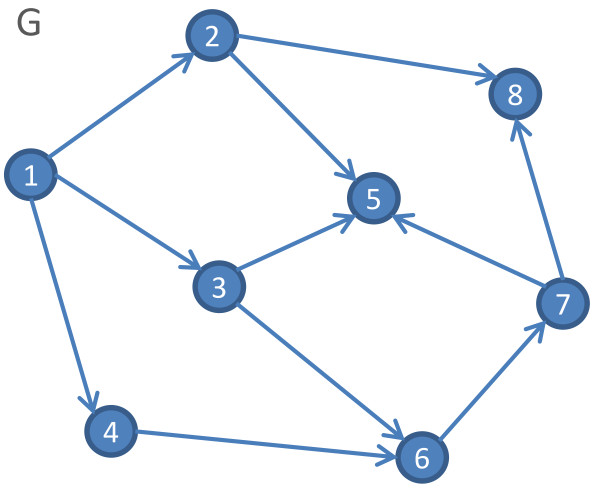
Dado um grafo não direcionado, seus componentes conexos são os subgrafos maximais que são conexos.

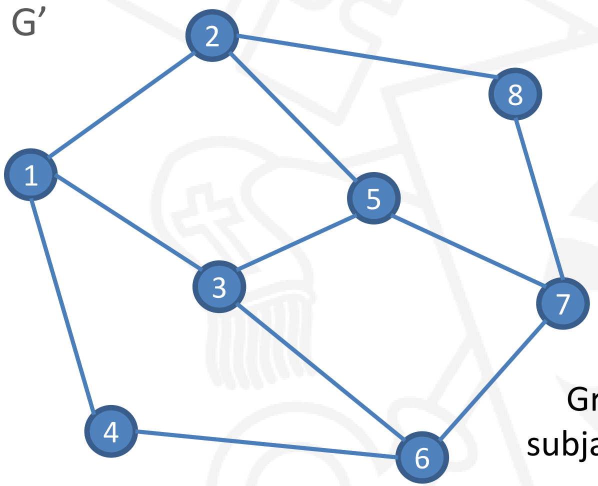
Um subgrafo maximal conexo é um dos maiores subgrafos (em número de vértices e arestas) que também seja conexo.



Grafo Subjacente

Dado um grafo direcionado G = (V, E), seu **grafo subjacente** G’ = (V, E’) é grafo não direcionado obtido pela troca de cada aresta por outra não direcionada.

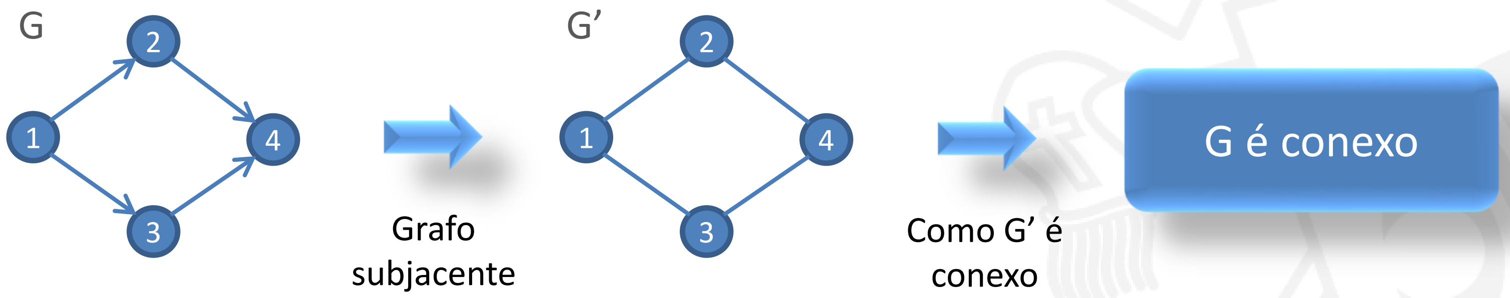




Grafo subjacente

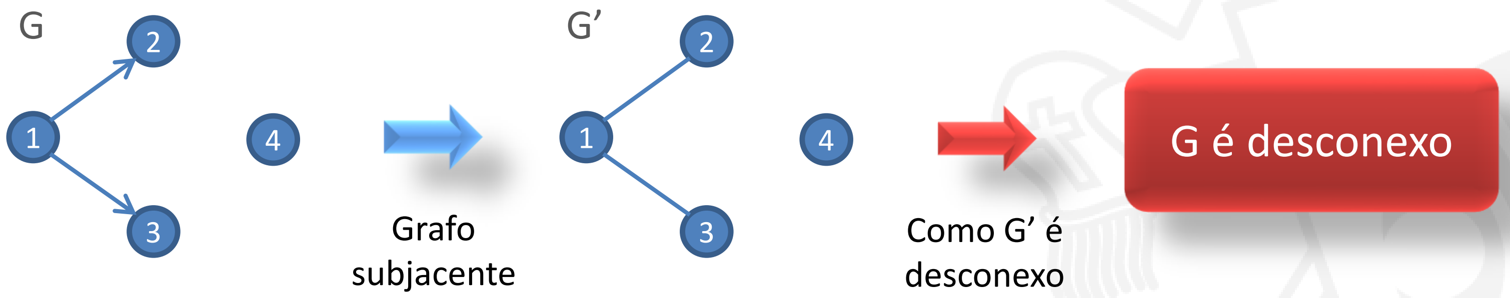
Conectividade – Grafo Direcionado

Dado um grafo direcionado G = (V, E), ele é considerado **conexo** quando seu grafo subjacente G' for conexo.



Conectividade – Grafo Direcionado

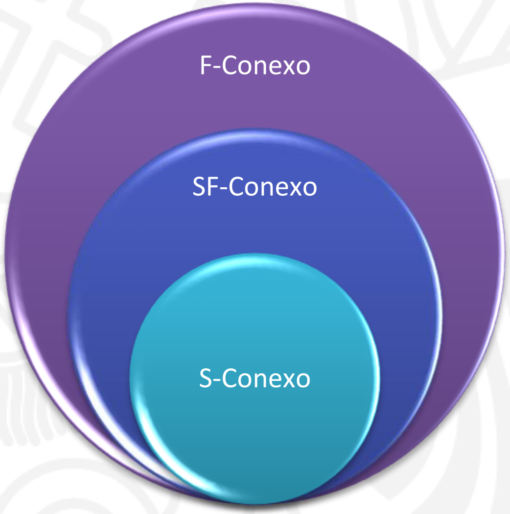
Dado um grafo direcionado G = (V, E), ele é considerado desconexo quando seu grafo subjacente G’ for desconexo.



Conectividade – Grafo Direcionado

Dado um grafo direcionado conexo pode ser ainda classificado como:

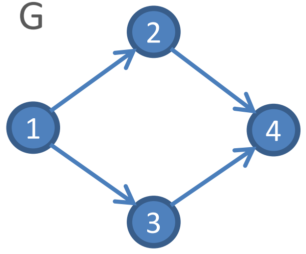
- Simplesmente Conexo (S-Conexo): quando o grafo subjacente for conexo
- Semifortemente Conexo (SF-Conexo): quando para todo par de vértices pelo menos um deles é alcançável a partir do outro
- Fortemente Conexo (F-Conexo): quando todos os vértices são mutuamente alcançáveis



Conectividade – Grafo Direcionado

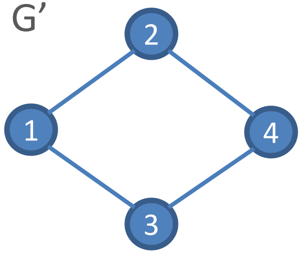
Dado um grafo direcionado conexo pode ser s-conexo mas não ser sf-conexo.

G



Grafo subjacente

G’



Como G’ é conexo

G é s-conexo

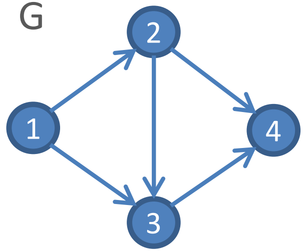
Vértice 2 não alcança o vértice 3 nem o vértice 3 alcança o vértice 2

G não é sf-conexo

Conectividade – Grafo Direcionado

Dado um grafo direcionado conexo pode ser sf-conexo mas não ser f-conexo.

G



Pares de vértices

(1,2) (1,3)
(1,4) (2,3)
(2,4) (3,4)

Pelo menos um dos vértices alcança o outro

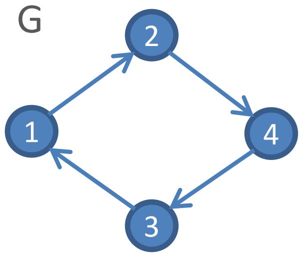
G é sf-conexo

Vértice 2 não alcança o vértice 1
nem o vértice 3 alcança os vértices 1 e 2
nem vértice 4 alcança os vértices 1, 2 e 3

G não é f-conexo

Conectividade – Grafo Direcionado

Dado um grafo direcionado conexo pode ser f-conexo.



Pares de vértices

(1,2) (1,3)
(1,4) (2,3)
(2,4) (3,4)

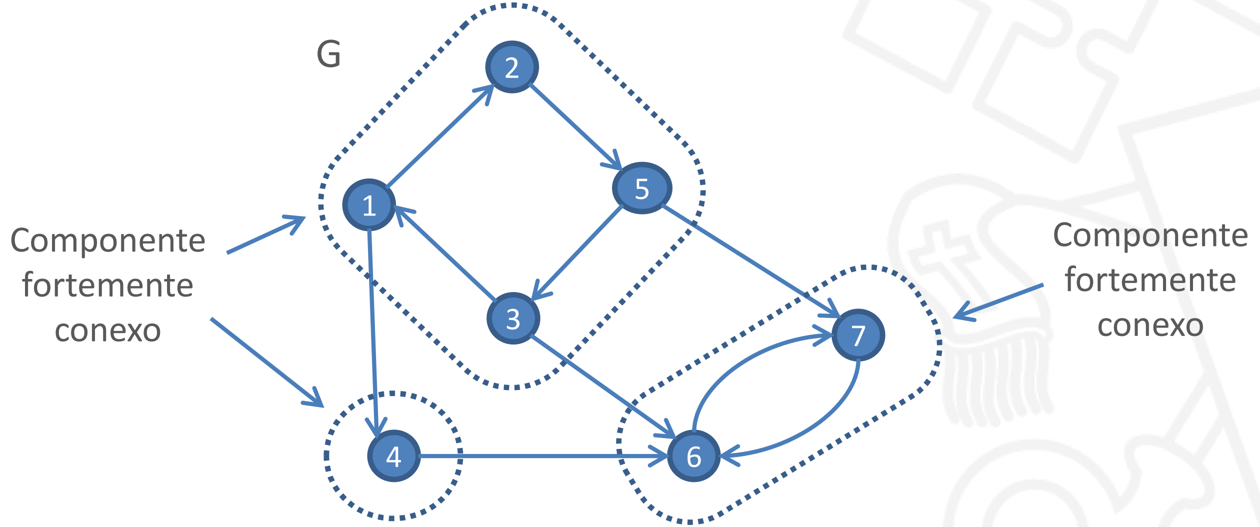
Todos os vértices alcançam todos os outros

G é f-conexo

G é f-conexo → G é sf-conexo → G é s-conexo

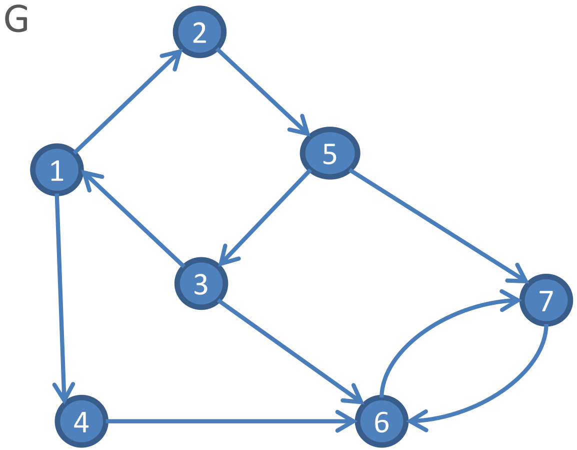
Componente Fortemente Conexo

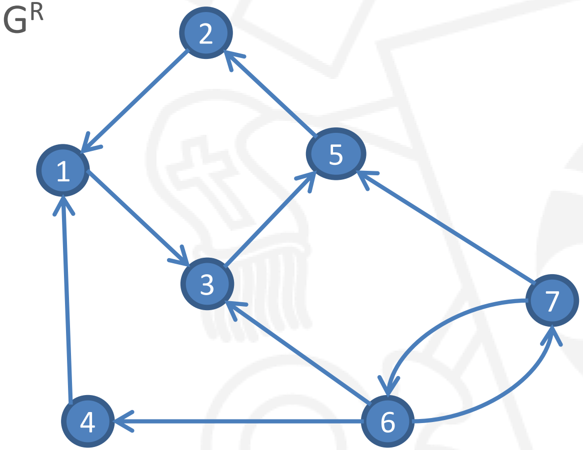
Dado um grafo direcionado, seus componentes fortemente conexos são os seus subgrafos maximais que são fortemente conexos.



Grafo Reverso (ou Transposto)

Dado um grafo direcionado G, o **reverso do grafo** G (ou grafo transposto de G) – representado por G^R – é o resultado da reversão de todas as suas arestas, isto é se a aresta $(v, w) \in E(G)$ então a aresta $(w, v) \in E(G^R)$.





Método de Kosaraju – Algoritmo

1. Fazer busca em profundidade em G // Salvar tempos de término (TT)
2. Construir o grafo G^R // Gerar reverso do grafo G
3. Fazer busca em profundidade em G^R em ordem decrescente de TT

Cada árvore da floresta de profundidade corresponde a um componente f-conexo

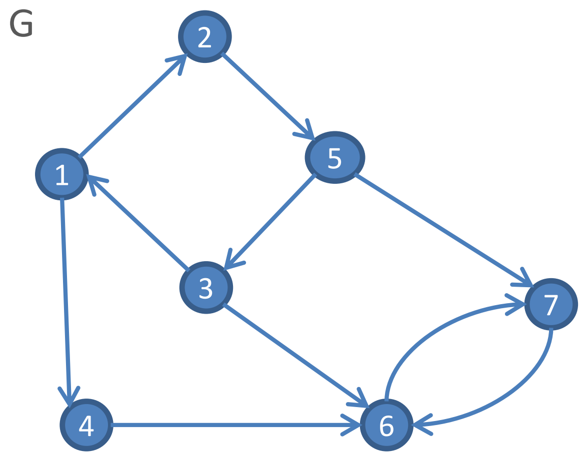
Método de Kosaraju – Algoritmo

1. Fazer busca em profundidade em G // Salvar tempos de término (TT)
2. Construir o grafo G^R // Gerar reverso do grafo G
3. Fazer busca em profundidade em G^R em ordem decrescente de TT

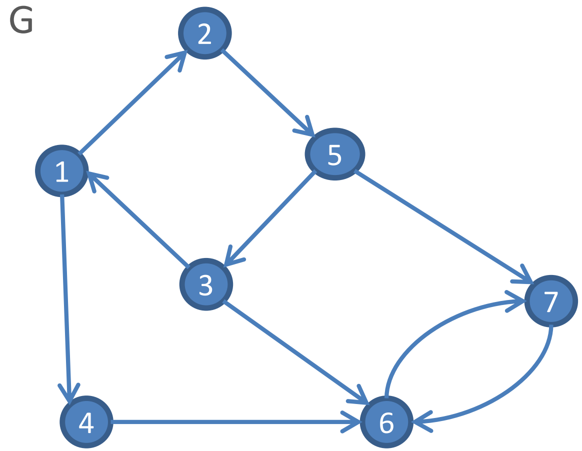
Podem ser realizados de forma paralela

Cada árvore da floresta de profundidade corresponde a um componente f-conexo

Método de Kosaraju – Exemplo



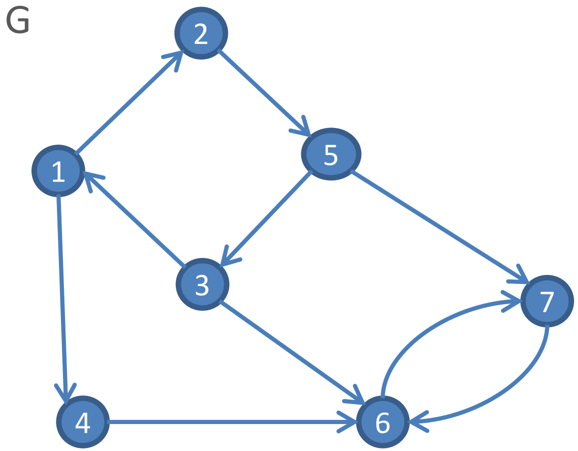
Método de Kosaraju – Exemplo



Busca em profundidade em G

	1	2	3	4	5	6	7
TD	1	2	8	12	3	5	4
TT	14	11	9	13	10	6	7
pai	∅	1	5	1	2	7	5

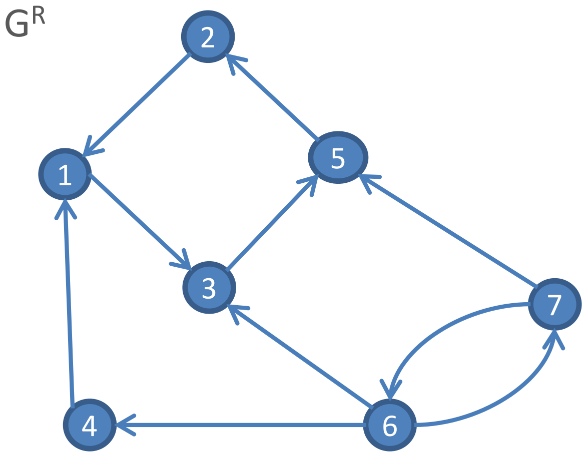
Método de Kosaraju – Exemplo



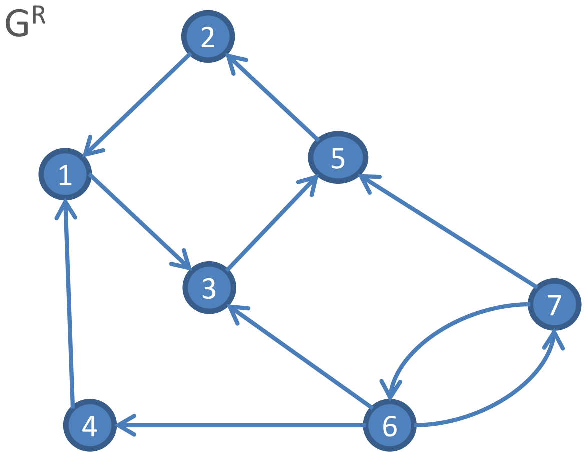
Busca em profundidade em G

	1	2	3	4	5	6	7
TD	1	2	8	12	3	5	4
TT	14	11	9	13	10	6	7
pai	∅	1	5	1	2	7	5

Método de Kosaraju – Exemplo



Método de Kosaraju – Exemplo



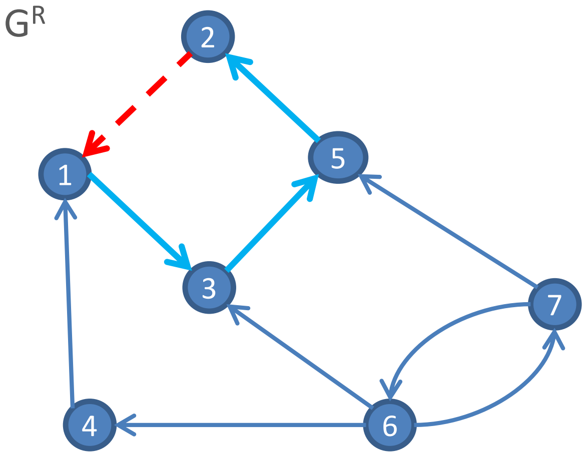
Busca em profundidade em G

	1	2	3	4	5	6	7
TT	14	11	9	13	10	6	7

Busca em profundidade em G^R

	1	2	3	4	5	6	7
TD							
TT							
pai							

Método de Kosaraju – Exemplo



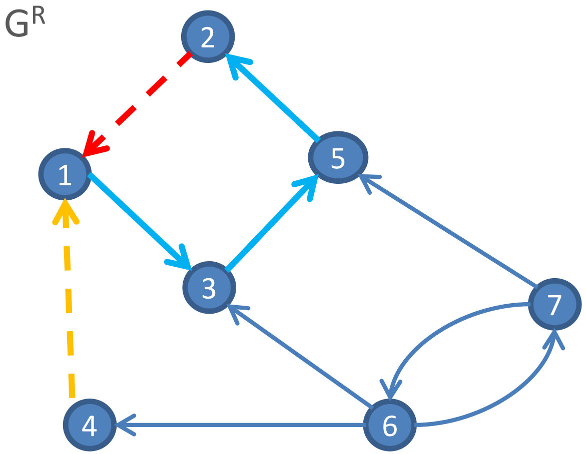
Busca em profundidade em G

	1	2	3	4	5	6	7
TT	14	11	9	13	10	6	7

Busca em profundidade em G^R

	1	2	3	4	5	6	7
TD	1	4	2		3		
TT	8	5	7		6		
pai	∅	5	1		3		

Método de Kosaraju – Exemplo



Busca em profundidade em G

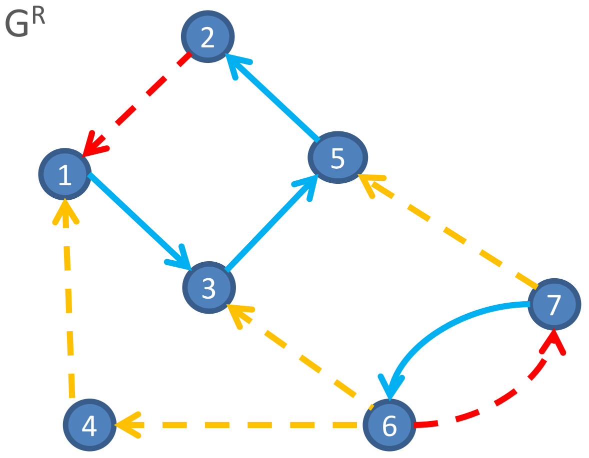
	1	2	3	4	5	6	7
TT	14	11	9	13	10	6	7

	1	2	3	4	5	6	7
TD	1	4	2	9	3		
TT	8	5	7	10	6		
pai	∅	5	1	∅	3		

Aresta de árvore   Aresta de retorno

Aresta de avanço   Aresta de cruzamento

Método de Kosaraju – Exemplo



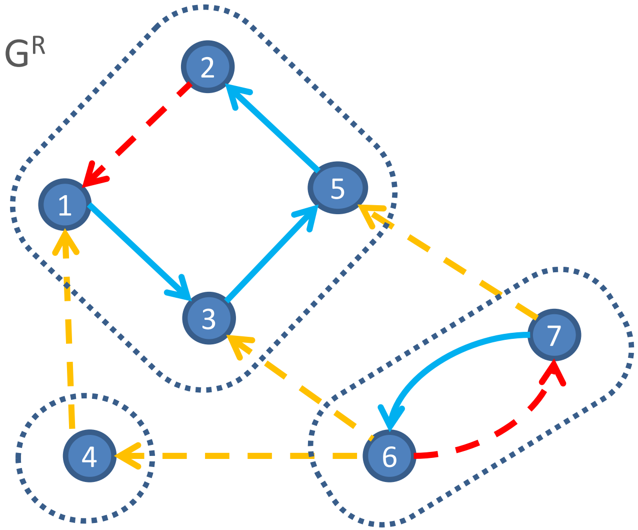
Busca em profundidade em G

	1	2	3	4	5	6	7
TT	14	11	9	13	10	6	7

	1	2	3	4	5	6	7
TD	1	4	2	9	3	12	11
TT	8	5	7	10	6	13	14
pai	∅	5	1	∅	3	7	∅

Aresta de árvore
Aresta de retorno
Aresta de avanço
Aresta de cruzamento

Método de Kosaraju – Exemplo



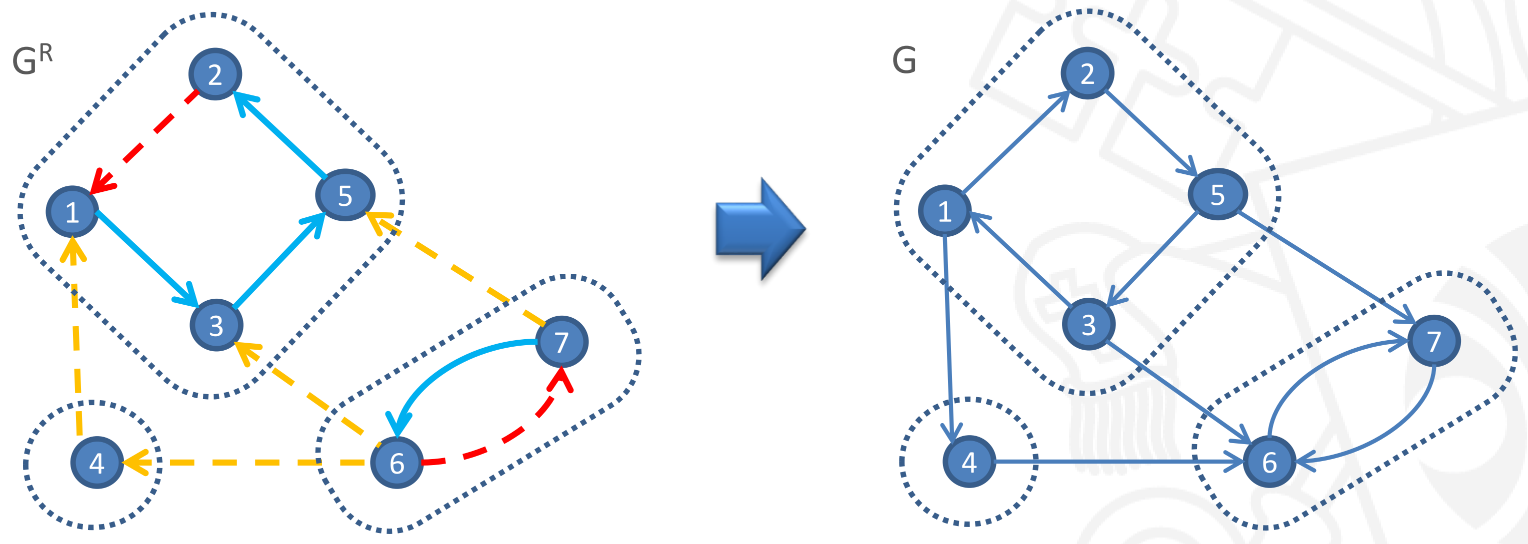
Busca em profundidade em G

	1	2	3	4	5	6	7
TT	14	11	9	13	10	6	7

	1	2	3	4	5	6	7
TD	1	4	2	9	3	12	11
TT	8	5	7	10	6	13	14
pai	∅	5	1	∅	3	7	∅

Aresta de árvore
Aresta de retorno
Aresta de avanço
Aresta de cruzamento

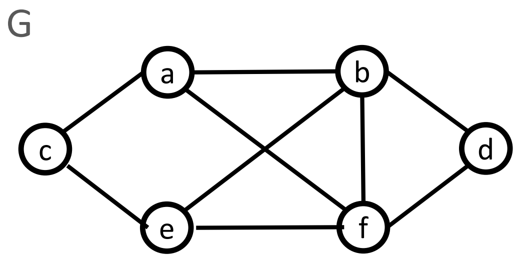
Método de Kosaraju – Exemplo



Separabilidade

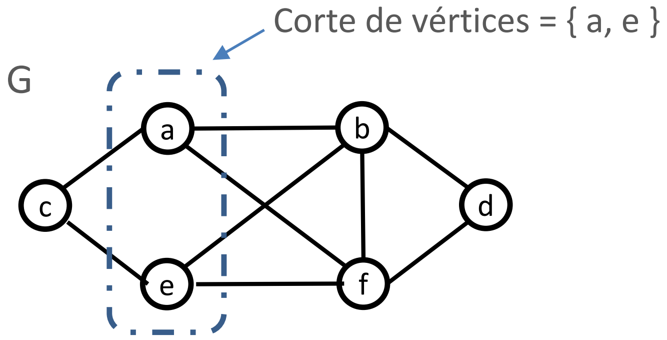
Corte de Vértices

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um **corte de vértices** de G é um subconjunto minimal de vértices V’ $\subseteq$ V cuja remoção transforma G em um grafo desconexo ou trivial (isto é, com apenas um vértice).



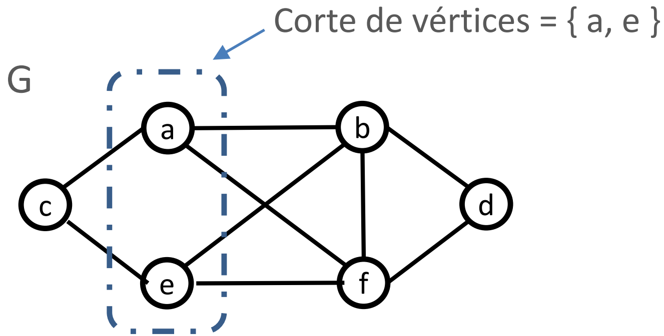
Corte de Vértices

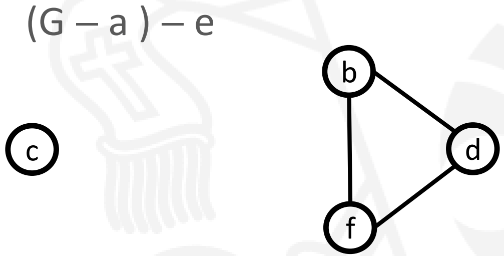
Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de vértices de G é um <u>subconjunto minimal de vértices</u> V’ $\subseteq$ V cuja remoção transforma G em um grafo desconexo ou trivial (isto é, com apenas um vértice).



Corte de Vértices

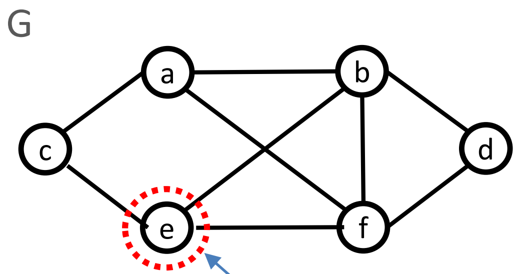
Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de vértices de G é um subconjunto minimal de vértices V' $\subseteq$ V cuja remoção transforma G em um grafo desconexo ou trivial (isto é, com apenas um vértice).



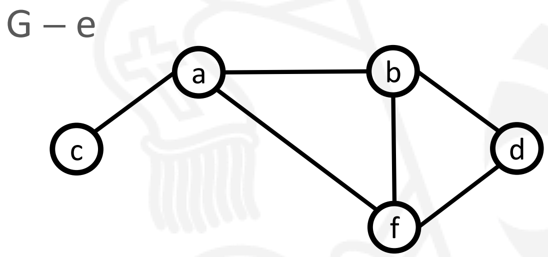


Corte de Vértices

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de vértices de G é um subconjunto minimal de vértices V' $\subseteq$ V cuja remoção transforma G em um grafo desconexo ou trivial (isto é, com apenas um vértice).

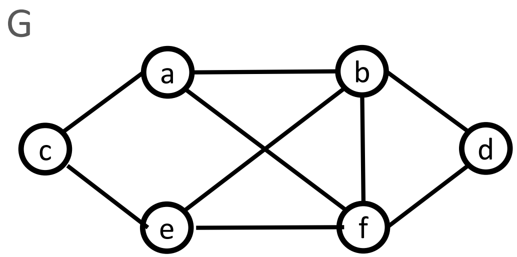


Conjunto { e } não é um corte de vértices



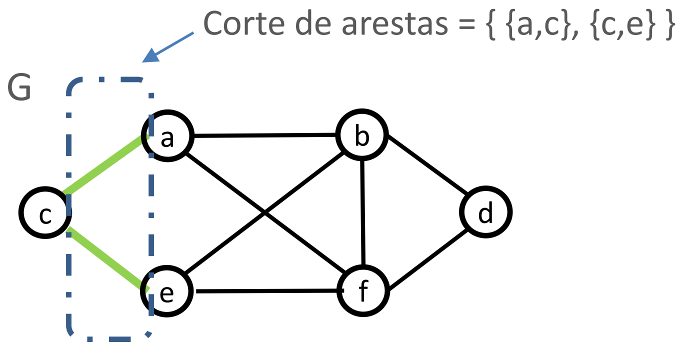
Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de arestas de G é um subconjunto minimal de arestas E' $\subseteq$ E cuja remoção transforma G em um grafo desconexo.



Corte de Arestas

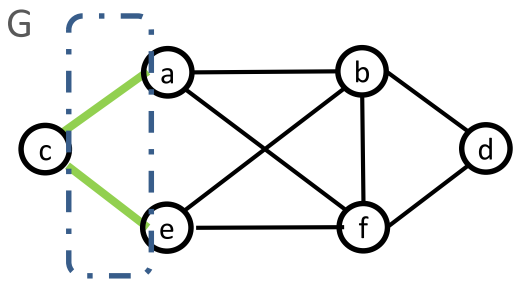
Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de arestas de G é um subconjunto minimal de arestas E’ $\subseteq$ E cuja remoção transforma G em um grafo desconexo.



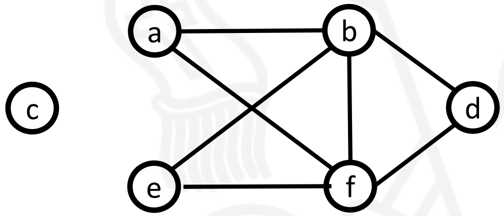
Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de arestas de G é um subconjunto minimal de arestas $E' \subseteq E$ cuja remoção transforma G em um grafo desconexo.

Corte de arestas = { {a,c}, {c,e} }



(G – {a,c}) – {c,e}



Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E), um corte de arestas de G é um subconjunto minimal de arestas E' $\subseteq$ E cuja remoção transforma G em um grafo desconexo.

Conjunto { {c,e} } não é um corte de arestas

Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado $G = (V, E)$ e um subconjunto de seus vértice $S \subset V$, um corte de arestas pode ser construído selecionando-as as arestas com um extremo em S e o outro não:

$$\text{corte}(S) = \{\, \{v, w\} \in E \mid v \in S,\, w \notin S \,\}.$$

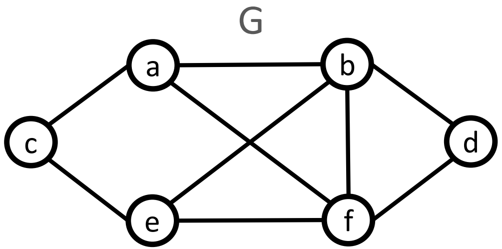
O conjunto de vértices S não pode ser vazio nem conter todos os vértices.

Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E) e um subconjunto de seus vértice $S \subset V$, um **corte de arestas** pode ser construído selecionando-as as arestas com um extremo em S e o outro não:

$$\text{corte}(S) = \{ \{v, w\} \in E \mid v \in S, w \notin S \}.$$

O conjunto de vértices S não pode ser vazio nem conter todos os vértices.

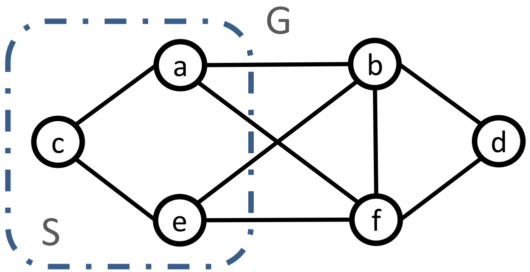


Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E) e um subconjunto de seus vértice $S \subset V$, um corte de arestas pode ser construído selecionando-as as arestas com um extremo em S e o outro não:

$$\text{corte}(S) = \{ \{v, w\} \in E \mid v \in S, w \notin S \}.$$

O conjunto de vértices S não pode ser vazio nem conter todos os vértices.



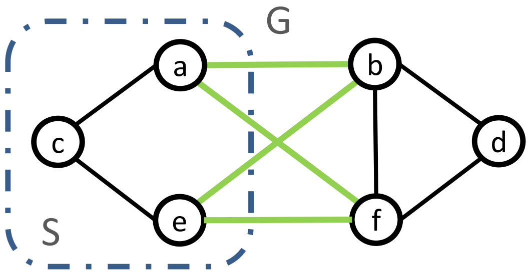
Seja S = {a, c, e}

Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E) e um subconjunto de seus vértice $S \subset V$, um corte de arestas pode ser construído selecionando-as as arestas com um extremo em S e o outro não:

$$\text{corte}(S) = \{\ \{v, w\} \in E \mid v \in S, w \notin S\ \}.$$

O conjunto de vértices S não pode ser vazio nem conter todos os vértices.



Seja S = {a, c, e}

Então corte(S) = {{a,b},{a,f},{e,b},{e,f}}

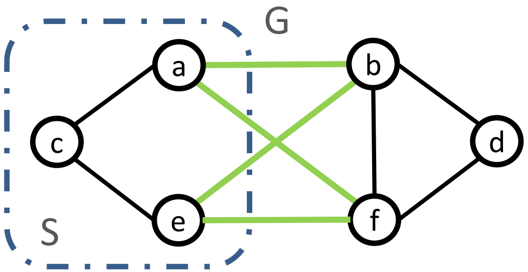
Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E) e um subconjunto de seus vértice $S \subset V$, um **corte de arestas** pode ser construído selecionando-as as arestas com um extremo em S e o outro não:

$$\text{corte}(S) = \{\ \{v, w\} \in E \mid v \in S,\ w \notin S\ \}.$$

O conjunto de vértices S não pode ser vazio nem conter todos os vértices.

A remoção das arestas do corte(S) elimina os todos caminhos entre os vértices pertencentes a S e os demais.



Seja S = {a, c, e}

Então corte(S) = {{a,b},{a,f},{e,b},{e,f}}

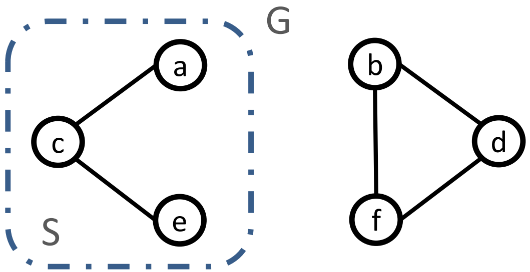
Corte de Arestas

Dado um grafo conexo não direcionado G = (V, E) e um subconjunto de seus vértice $S \subset V$, um **corte de arestas** pode ser construído selecionando-as as arestas com um extremo em S e o outro não:

$$\text{corte}(S) = \{ \{v, w\} \in E \mid v \in S, w \notin S \}.$$

O conjunto de vértices S não pode ser vazio nem conter todos os vértices.

A remoção das arestas do corte(S) elimina os todos caminhos entre os vértices pertencentes a S e os demais.



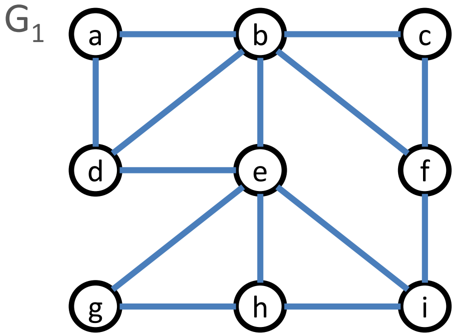
Seja S = {a, c, e}

Então corte(S) = {{a,b},{a,f},{e,b},{e,f}}

Conectividade de Vértices e Arestas

Denomina-se conectividade de vértices de G ou $\kappa(G)$ à cardinalidade do menor corte de vértices de G.

Analogamente, a conectividade de arestas de G ou $\lambda(G)$ é igual à cardinalidade do menor corte de arestas de G.



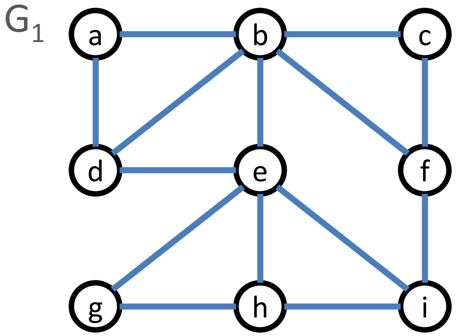
$\kappa(G_1) = 2$

$\lambda(G_1) = 2$

Conectividade de Vértices e Arestas

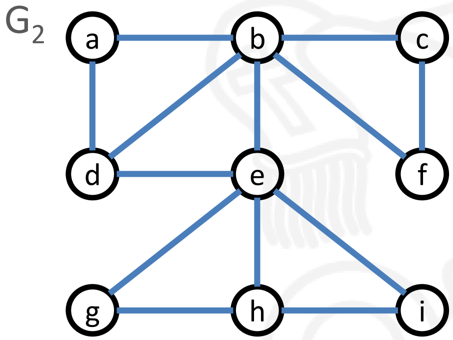
Denomina-se **conectividade de vértices** de G ou $\kappa(G)$ à cardinalidade do menor corte de vértices de G.

Analogamente, a **conectividade de arestas** de G ou $\lambda(G)$ é igual à cardinalidade do menor corte de arestas de G.



$\kappa(G_1) = 2$

$\lambda(G_1) = 2$



$\kappa(G_2) = 1$

$\lambda(G_2) = 2$

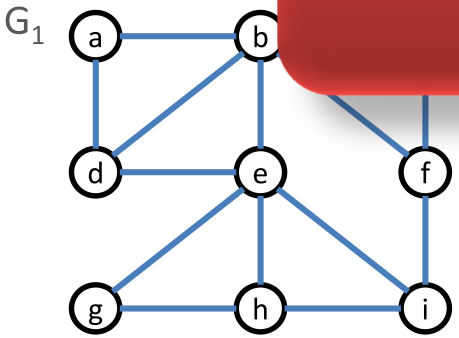
Conectividade de Vértices e Arestas

Denomina-se **conectividade de vértices** de G ou $\kappa(G)$ à cardinalidade do menor corte de vértices

Analogamente, ... cardinalidade do menor corte

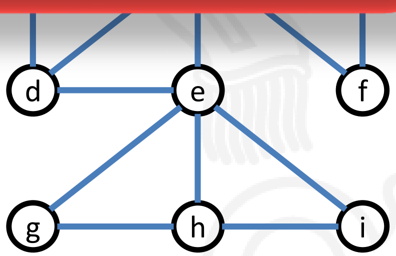
Para todo grafo: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$,

em que $\delta(G) = \min\{\, d(v) \mid v \in V(G)\}$



$\kappa(G_1) = 2$

$\lambda(G_1) = 2$



$\kappa(G_2) = 1$

$\lambda(G_2) = 2$

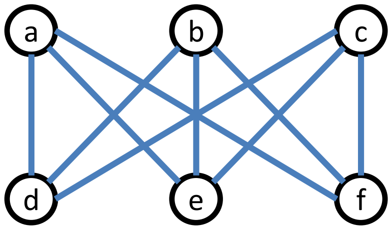
Grafo Separável / Grafo *k*-Conexo

Um grafo conexo G é separável se $\kappa(G)$ é igual a 1.

Um grafo G é *k*-conexo em arestas (ou vértices) quando sua conectividade de arestas (ou vértices) é maior ou igual a *k*.

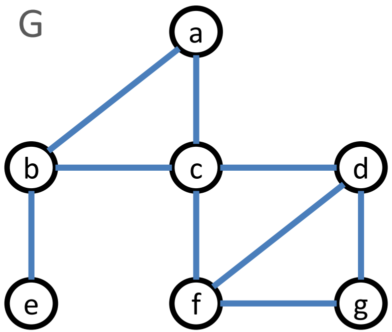
Por exemplo, como $K_{3,3}$ possui conectividade de vértices $\kappa(K_{3,3}) = 3$, então ele é 1-conexo, 2-conexo 3-conexo. Porém, ele não é 4-conexo.

$K_{3,3}$



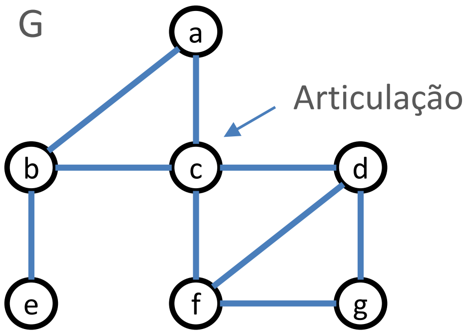
Articulação

Dado um grafo conexo G = (V, E), um vértice $v \in V$ é denominado articulação, se a remoção do vértice v tornar G desconexo.



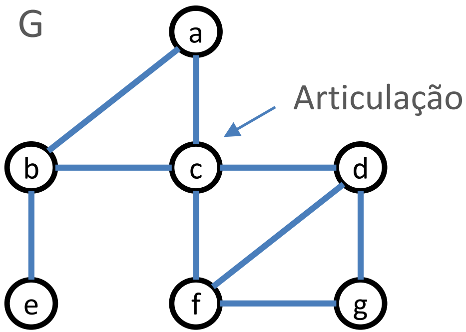
Articulação

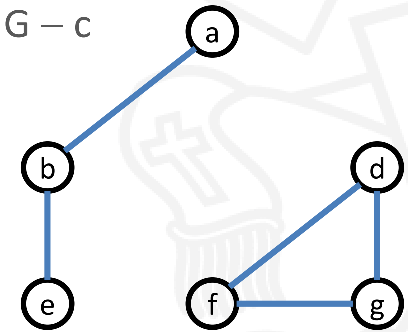
Dado um grafo conexo G = (V, E), um vértice $v \in V$ é denominado articulação, se a remoção do vértice v tornar G desconexo.



Articulação

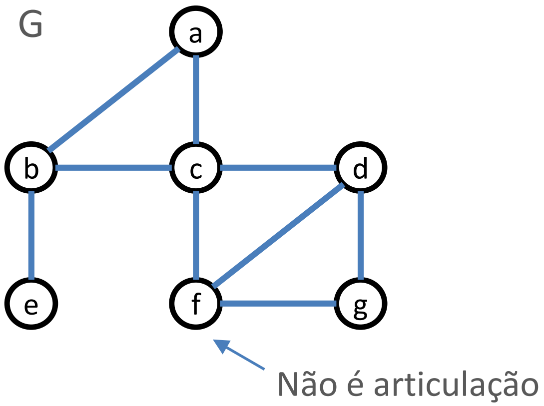
Dado um grafo conexo G = (V, E), um vértice $v \in V$ é denominado articulação, se a remoção do vértice v tornar G desconexo.

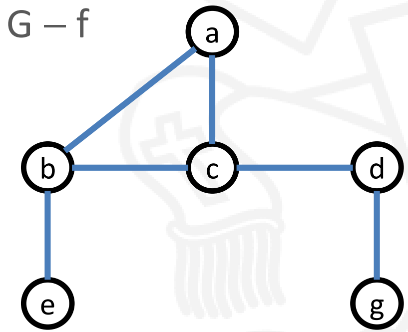




Articulação

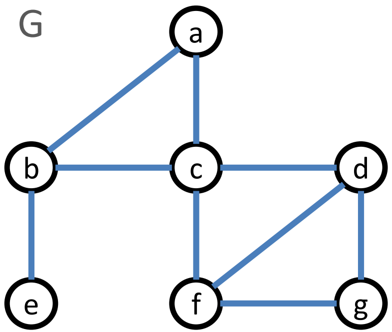
Dado um grafo conexo G = (V, E), um vértice $v \in V$ é denominado articulação, se a remoção do vértice v tornar G desconexo.





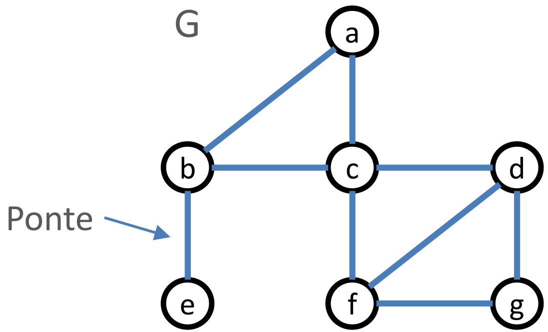
Ponte

Dado um grafo conexo G = (V, E), uma aresta $\{v, w\} \in E$ é chamada ponte, se a remoção da aresta $\{v, w\}$ tornar G desconexo.



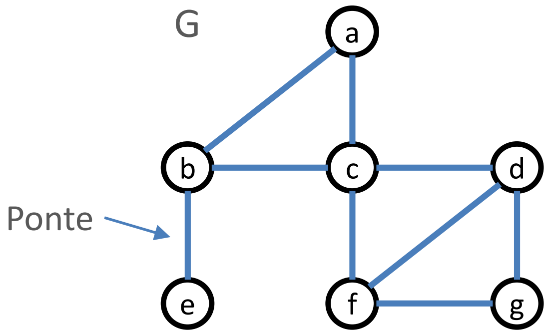
Ponte

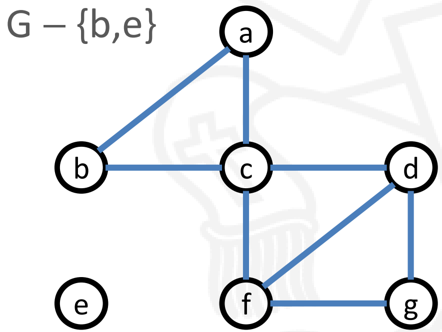
Dado um grafo conexo G = (V, E), uma aresta $\{v, w\} \in E$ é chamada ponte, se a remoção da aresta $\{v, w\}$ tornar G desconexo.



Ponte

Dado um grafo conexo G = (V, E), uma aresta $\{v, w\} \in E$ é chamada ponte, se a remoção da aresta $\{v, w\}$ tornar G desconexo.





Ponte

Dado um grafo conexo G = (V, E), uma aresta $\{v, w\} \in E$ é chamada ponte, se a remoção da aresta $\{v, w\}$ tornar G desconexo.