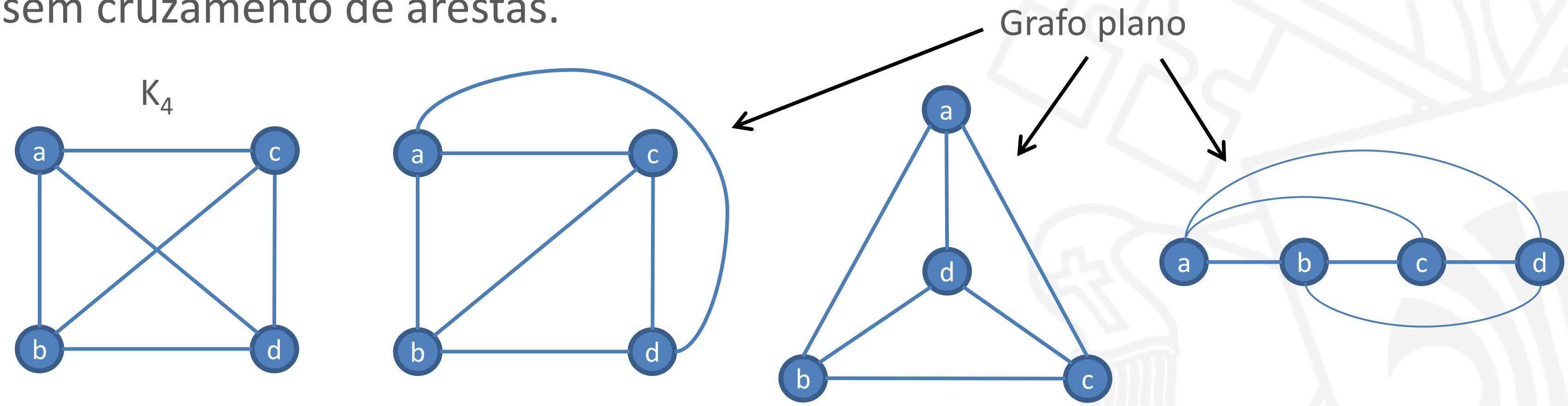
Planaridade em Grafos

Zenilton Patrocínio

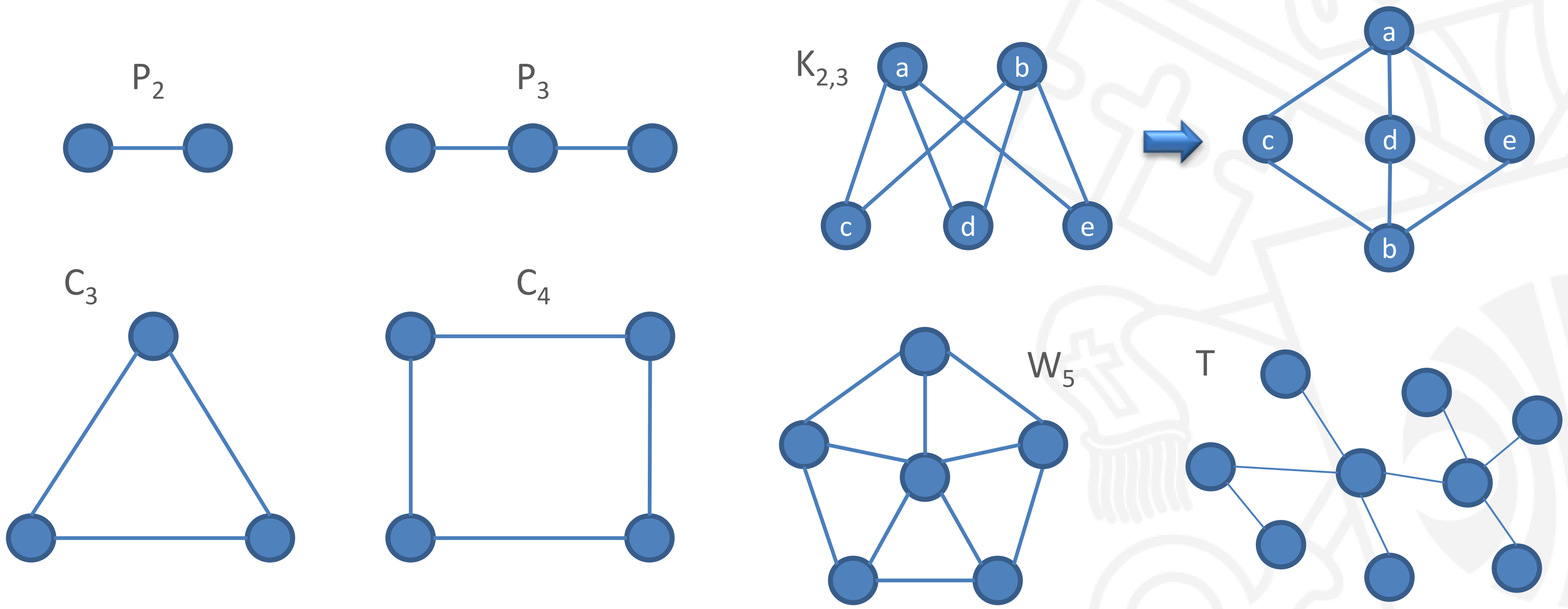
Grafo Planar

Um grafo G = (V, E) é dito planar quando existir uma representação gráfica de G sem cruzamento de arestas.



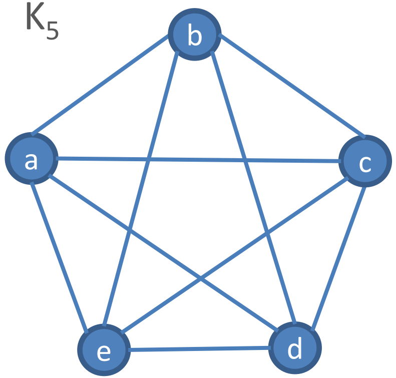
Costuma-se usar o termo grafo plano para se referir a representação planar de um grafo planar.

Grafo Planar – Exemplos

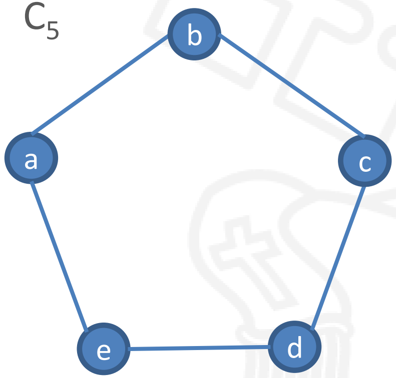


Grafo Não Planar – Exemplos

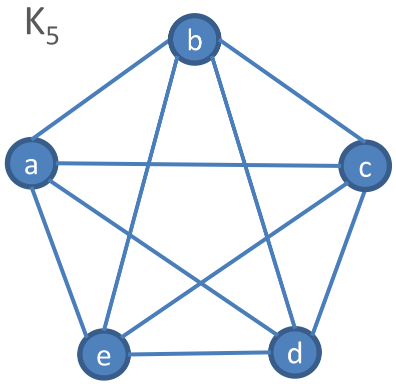
K_5

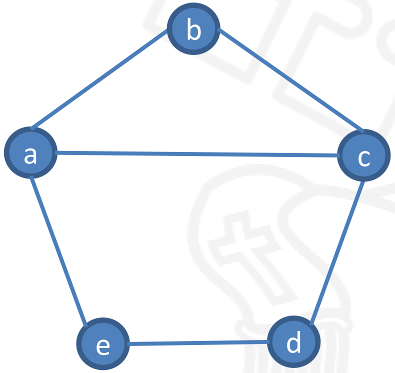


C_5

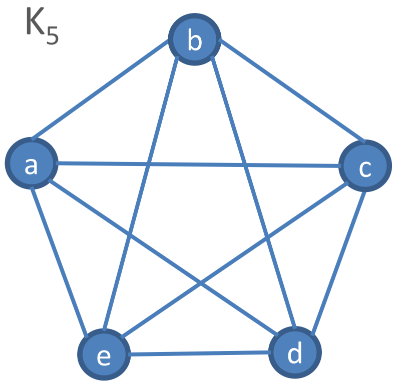


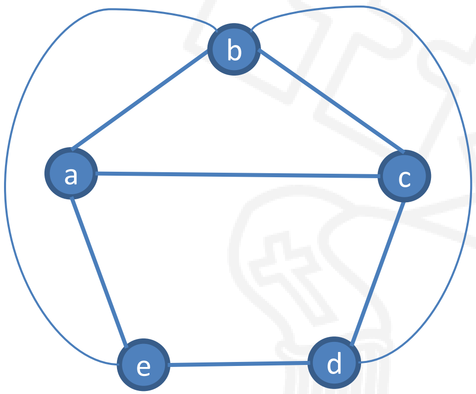
Grafo Não Planar – Exemplos





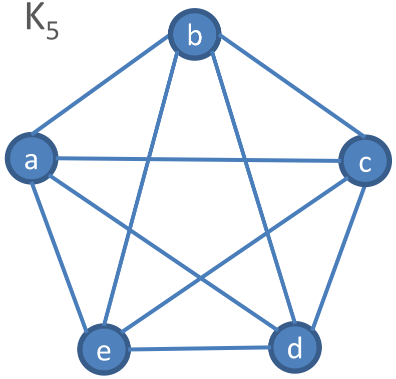
Grafo Não Planar – Exemplos

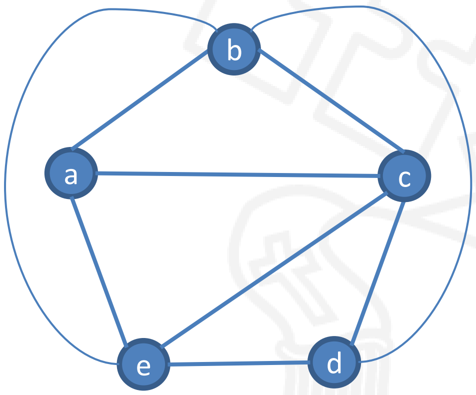




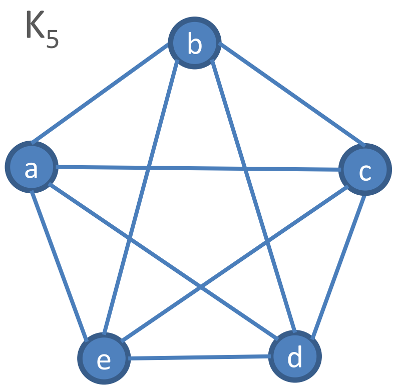
Grafo Não Planar – Exemplos

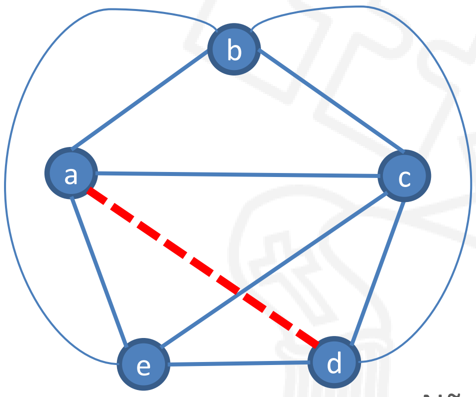
K_5





Grafo Não Planar – Exemplos

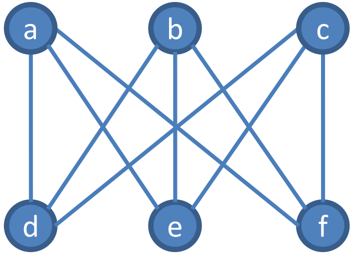


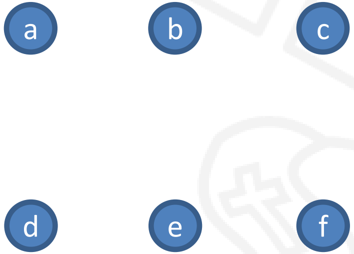


Não há forma de conectar os vértices a e d sem cruzamento de arestas

Grafo Não Planar – Exemplos

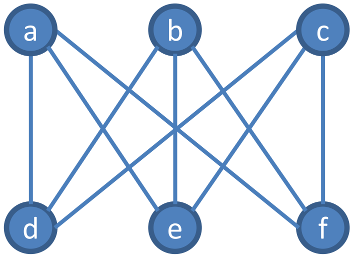
$K_{3,3}$

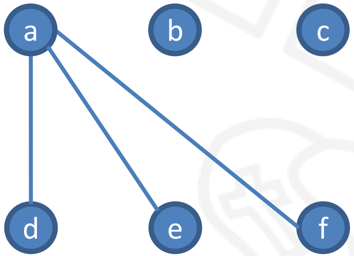




Grafo Não Planar – Exemplos

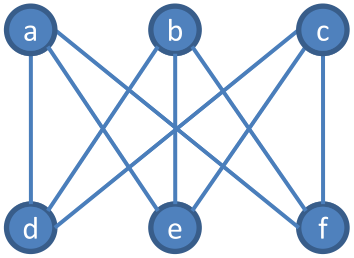
$K_{3,3}$

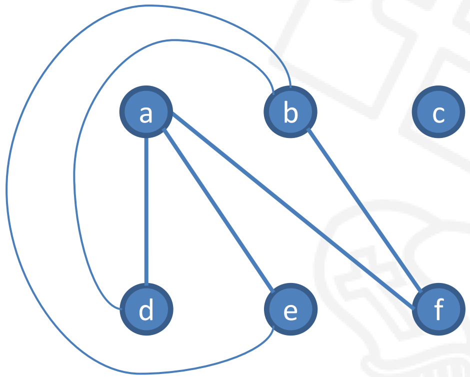




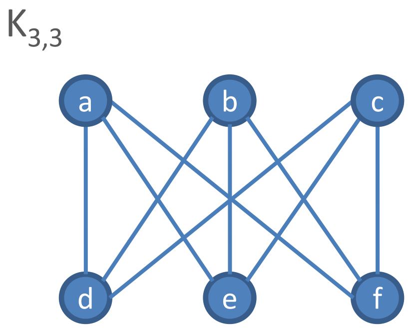
Grafo Não Planar – Exemplos

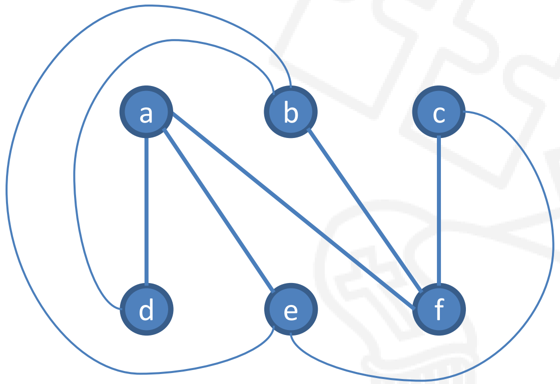
$K_{3,3}$





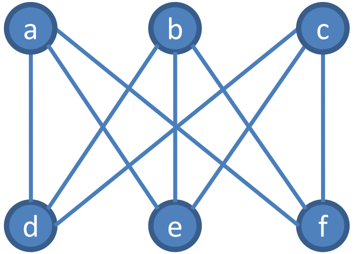
Grafo Não Planar – Exemplos

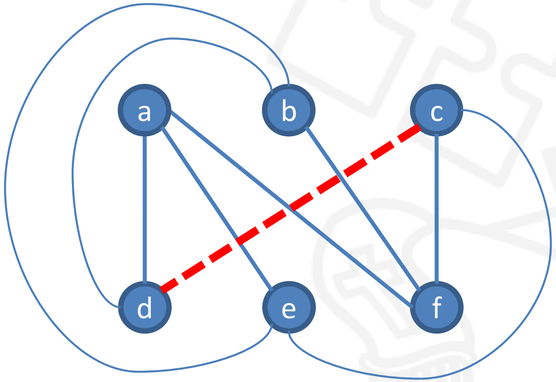




Grafo Não Planar – Exemplos

$K_{3,3}$

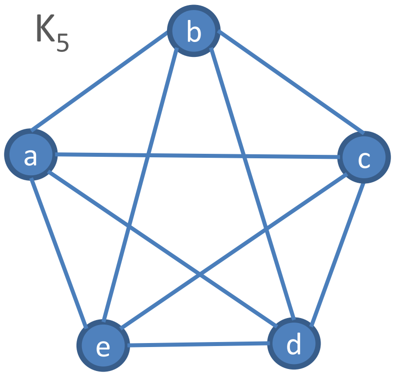




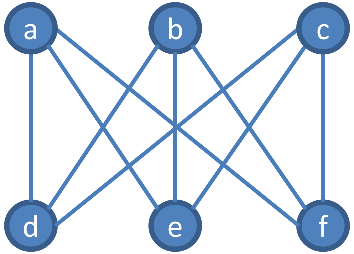
Não há forma de conectar os vértices c e d sem cruzamento de arestas

Grafo Não Planar – Exemplos

K_5



$K_{3,3}$



São conhecidos como grafos de Kuratowski.

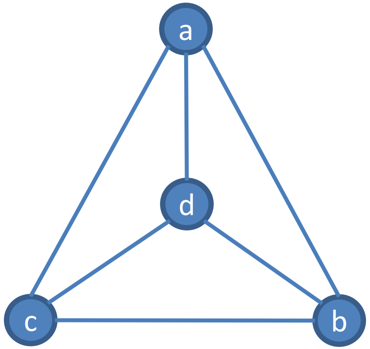
Ambos são regulares e não planares.

A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar.

K_5 é o grafo não planar com menor número de vértices e $K_{3,3}$ é o grafo não planar com menor número de arestas.

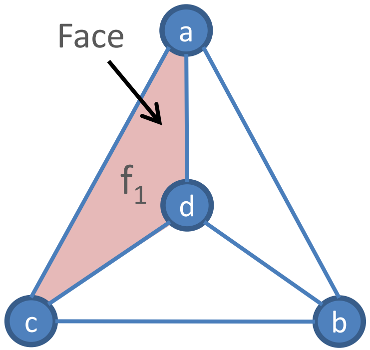
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.



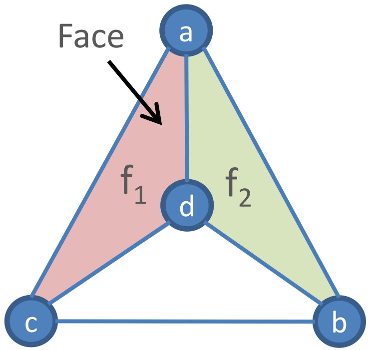
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.



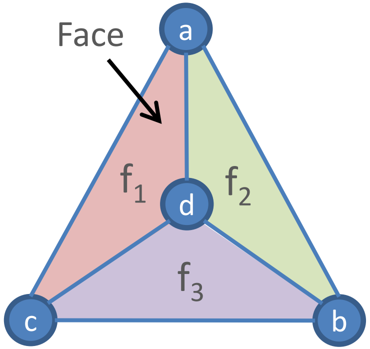
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.



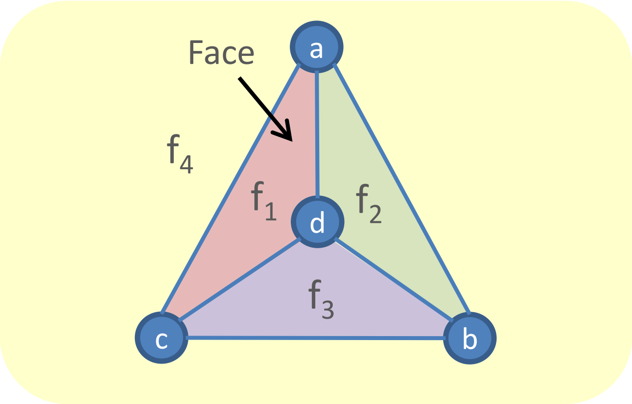
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.



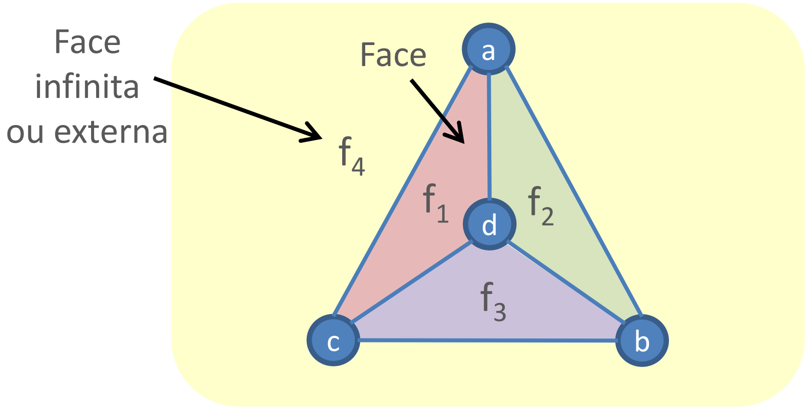
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.



Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.

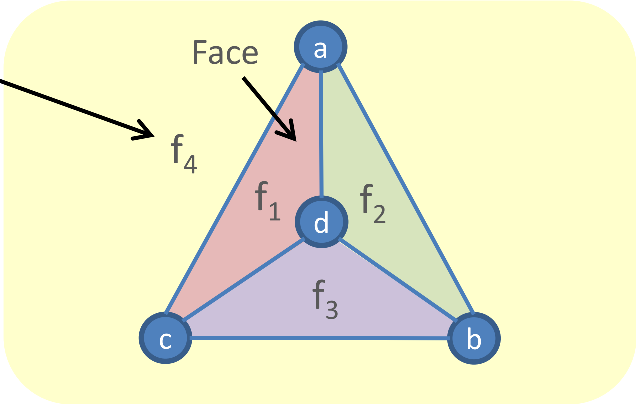


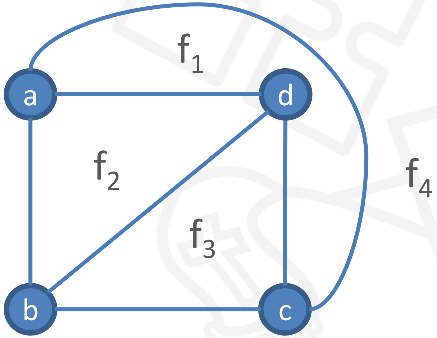
Uma das faces é ilimitada e chamada de face infinita ou externa.

Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas faces.

Face infinita ou externa



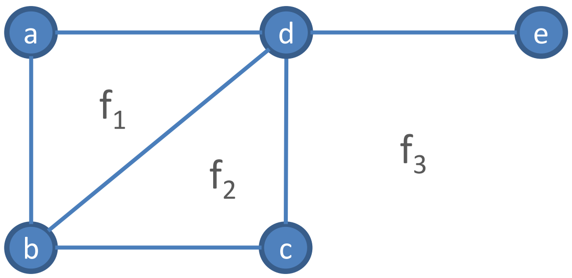


Número de faces de um grafo planar é constante para toda representação planar dele.

Uma das faces é ilimitada e chamada de face infinita ou externa.

Grau de Face

Seja G um grafo planar e **f** uma das faces de uma representação planar de G, o grau da face **f** é o número de arestas no passeio fechado que define a região correspondente a **f**.



Face f_1 $\longrightarrow$ a b d a $\longrightarrow$ $d(f_1) = 3$

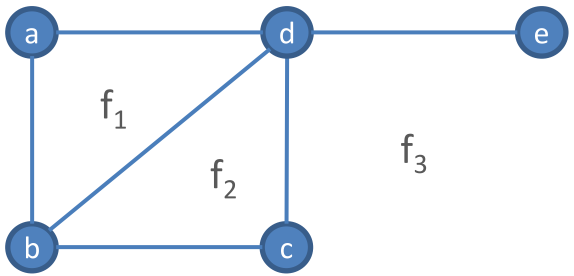
Face f_2 $\longrightarrow$ b c d b $\longrightarrow$ $d(f_2) = 3$

Face f_3 $\longrightarrow$ a b c d e d a $\longrightarrow$ $d(f_3) = 6$

Aresta {d, e} é
contada duas vezes

Grau de Face

Seja G um grafo planar e f uma das faces de uma representação planar de G, o **grau da face** f é o número de arestas no passeio fechado que define a região correspondente a f.



Face f_1 ⟶ a b d a ⟶ $d(f_1) = 3$

Face f_2 ⟶ b c d b ⟶ $d(f_2) = 3$

Face f_3 ⟶ a b c d e d a ⟶ $d(f_3) = 6$

A soma dos graus de todas as faces é sempre par e igual ao dobro do número de arestas.

Fórmula de Euler

Para um grafo conexo planar G com *m* arestas, *n* vértices e *f* faces, a seguinte relação é sempre válida

$$n - m + f = 2$$

Dessa forma, para um grafo conexo planar G com *m* arestas e *n* vértices, então qualquer representação planar de G possui $f = m - n + 2$ faces.

Isso reforça o caráter invariante do número de faces visto que os número de vértices e de arestas de um grafo não mudam.

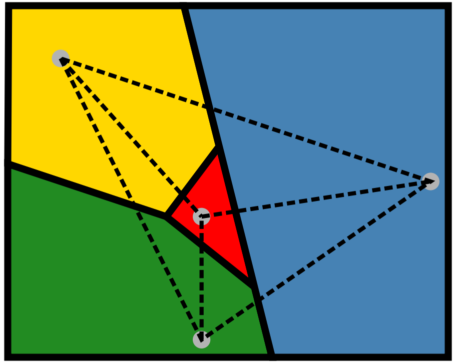
Coloração de Faces

Seja G um grafo planar, uma coloração de faces consiste em atribuir cores as faces de G de maneira que regiões adjacentes possuam cores diferentes.

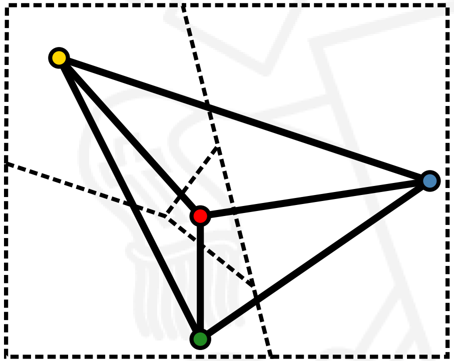
O uso de cores se origina de colorir os países em um mapa, onde cada região (correspondendo a uma face) é literalmente colorida. Daí pode se generalizar para se colorir as faces de um grafo planar qualquer.

Dualidade Geométrica

Um grafo dual de um grafo planar G é aquele em que um vértice corresponde a uma região de G e toda aresta relaciona vértices que representam regiões adjacentes em G.



Coloração de faces



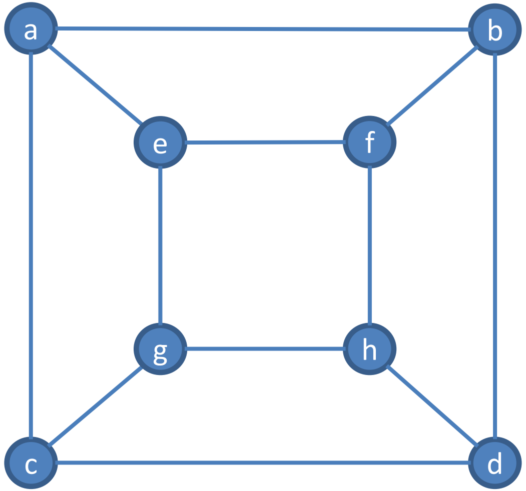
Coloração de vértices

Teorema das 04 Cores

Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Apesar de se ter prova da suficiência de cinco cores desde 1800, o teorema das quatro cores foi provado apenas em 1976 por Appel e Haken.

Para dissipar quaisquer dúvidas remanescentes sobre a prova Appel-Haken, uma prova mais simples usando as mesmas idéias e ainda contando com computadores foi publicada em 1997 por Robertson, Sanders, Seymour e Thomas.


a
b
e
f
g
h
c
d