Trabalho Prático 2 de Geometria Analítica

Retas

Escreva um programa que execute os seguintes problemas:

1) Dados um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ escreva
a) a equação vetorial da reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

b) as equações paramétricas da reta

$$r = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

2) Verifique a posição relativa de duas retas:

Se

$$Paralelas \begin{cases} \text{distintas} \\ \text{coincidentes} \end{cases}$$

Dadas as retas
r_1: Ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e vtor $\vec{v} = (a, b, c)$
r_2: Ponto $B = (x_1, y_1, z_1)$ e vtor $\vec{u} = (d, e, f)$
dizemos que r_1 e r_2 são paralelas se

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Caso $A \in r_2$, dizemos que as retas são paralelas coincidentes. Caso contrário, paralelas distintas.Ou seja

$$r = \begin{cases} x_0 = x_1 + dt \\ y_0 = y_1 + et \\ z_0 = z_1 + ft \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (x_0 - x_1)/d & (1) \\ t = (y_0 - y_1)/e & (2) \\ t = (z_0 - z_1)/f & (3) \end{cases}$$

e se o t for o mesmo em 1, 2 e 3 então elas são paralelas coincidentes.

Se

$$Concorrentes \begin{cases} \text{ponto de interseção} \\ \text{ângulo} \end{cases}$$

Dadas

$$r_1 = \begin{cases} x = x_0 + ah \\ y = y_0 + bh \\ z = z_0 + ch \end{cases} \qquad e \qquad r_2 = \begin{cases} x = x_1 + dt \\ y = y_1 + et \\ z = z_1 + ft \end{cases}$$

daí

$$\begin{cases} x = x_0 + ah \\ x = x_1 + dt \end{cases} \Rightarrow x_0 + ah = x_1 + dt \Rightarrow ah - dt = x_1 - x_0$$

e

$$\begin{cases} y = y_0 + bh \\ y = y_1 + et \end{cases} \Rightarrow y_0 + bh = y_1 + et \Rightarrow bh - et = y_1 - y_0$$

Resolva então o sistema

$$\begin{cases} ah - dt = x_1 - x_0 \\ bh - et = y_1 - y_0 \end{cases}$$

e determine o valor de h e t. Em seguida com esses valores, verifique se os valores de z

$$z = z_0 + ch \quad e \quad z = z_1 + ft$$

são iguais. Caso sejam, as retas são concorrentes e assim calcule o seu ângulo

$$\theta = cos^{-1}(\frac{|u\ .\ v|}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|})$$

Caso as retas não sejam paralelas e não sejam concorrentes, as retas são

$$Reversas$$

Observação:

As retas serão dadas por um ponto por onde passa e por um vetor diretor.

Planos

Dados um ponto $C = (x_2, y_2, z_2)$ e um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ escreva

a) a equação do plano $ax + by + cz + d = 0$;

b) Dada uma reta qualquer, determinar o ponto de interseção da reta com o plano e o ângulo.

$$r = \begin{cases} x = x_0 + dt \\ y = y_0 + et \\ z = z_0 + ft \end{cases} \qquad e \qquad ax + by + cz + d = 0$$

ou seja

$$a(x_0 + dt) + b(y_0 + et) + c(z_0 + ft) + d = 0$$

Determine o valor de t e substitua na equação da reta para achar o ponto de interseção.

O ângulo α entre a reta e plano pode ser determinado por

$$\theta = cos^{-1}(\frac{|u\ .\ n|}{|\vec{u}|\ |\vec{n}|})$$

usando o vetor $\vec{u} = (d, e, f)$ e por $\vec{n} = (a, b, c)$ e em seguida fazendo

$$\alpha = 90 - \theta$$