Projeto B: Conjunto de Mandelbrot

Vinicius Patriarca Miranda Miguel RA: 260731

15 de junho de 2025

Sumário

1 Introdução

O conjunto de Mandelbrot é um dos exemplos mais conhecidos de fractais. Ele é definido matematicamente como o conjunto de números complexos $c \in \mathbb{C}$ para os quais a sequência definida por:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0$$

permanece limitada, ou seja, não diverge para o infinito.

Em termos de órbitas, cada ponto c no plano complexo gera uma órbita, que é a sequência de valores $\{z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ obtida pela iteração da fórmula acima. Se a órbita permanece confinada dentro de uma região finita do plano complexo, dizemos que o ponto c pertence ao conjunto de Mandelbrot. Caso contrário, se a órbita diverge para o infinito, o ponto não pertence ao conjunto.

Visualmente, o conjunto de Mandelbrot é representado no plano complexo, onde cada ponto c é colorido de acordo com o comportamento de sua órbita. Se a órbita não diverge, o ponto pertence ao conjunto e é geralmente colorido de preto. Caso contrário, o ponto é colorido de acordo com a rapidez com que a órbita diverge.

1.1 Representação Visual do Conjunto de Mandelbrot

Abaixo está uma representação visual do conjunto de Mandelbrot. Para gerar essa imagem, utilizamos um algoritmo que verifica se cada ponto no plano complexo pertence ao conjunto, iterando a fórmula acima e analisando o comportamento da órbita até um número máximo de iterações.

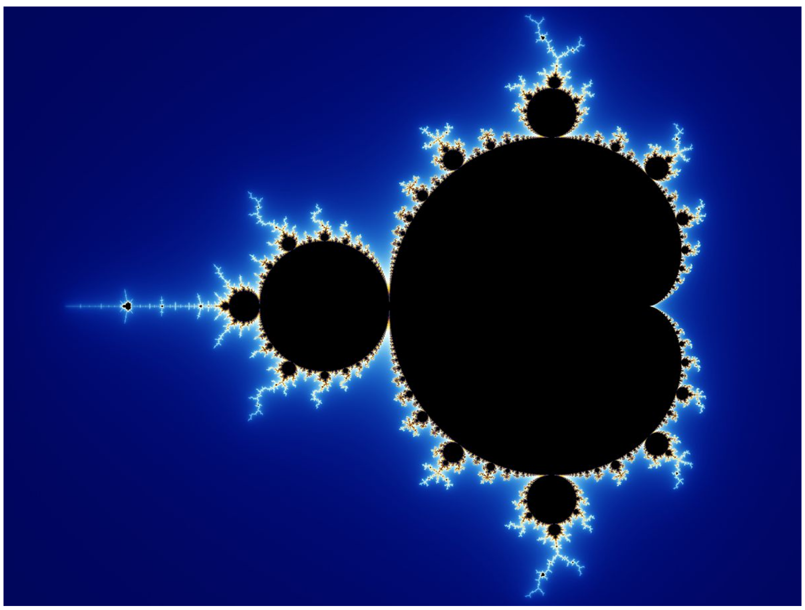

Figura 1: Representação visual do conjunto de Mandelbrot.

1.2 Algoritmo para Gerar o Conjunto de Mandelbrot

O algoritmo básico para gerar o conjunto de Mandelbrot pode ser descrito como:

1. Para cada ponto c em uma grade do plano complexo:
   (a) Inicialize $z_0 = 0$.
   (b) Itere a fórmula $z_{n+1} = z_n^2 + c$ até um número máximo de iterações ou até $|z_n| > 2$.
   (c) Se $|z_n| \leq 2$ após o número máximo de iterações, considere o ponto como pertencente ao conjunto.
2. Atribua cores aos pontos com base no número de iterações necessárias para divergir.

Essa abordagem permite criar imagens detalhadas e coloridas do conjunto de Mandelbrot, revelando sua estrutura fractal fascinante.

2 Exercícios

2.1 Exercício 1: Exploração do Conjunto de Mandelbrot

Considerando o conjunto de Mandelbrot como descrito na introdução, seja M o conjunto de pontos que o compõem, $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função geradora desses pontos, dada por $f_c(z) = z^2 + c$, para todo $c \in \mathbb{C}$, de forma que $|f_c^n(z)| < \infty$, quando $n \to \infty$. Em outras palavras, a órbita de c não diverge a ∞. No caso de M, temos a condição inicial $z_0 = 0$, ou seja, todas as órbitas partem do mesmo ponto.

(a) **Explicite os primeiros termos da órbita de f_c para um c fixo. Teste se os seguintes pontos estão em M: $c_1 = -2$, $c_2 = -2i$, $c_3 = 0.35e^{i\pi/4}$.**

Para $c_1 = -2$, temos $z_0 = -2$, $z_1 = 2$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2$, $z_4 = 2$, $z_5 = 2$, $z_6 = 2$, $z_7 = 2$, $z_8 = 2$ e $z_9 = 2$. Conclusão: A órbita não diverge, mas não está em M pois não satisfaz a condição de convergência.

Para $c_2 = -2i$, temos $z_0 = -2i$ e $z_1 = -4 - 2i$. Conclusão: A órbita diverge para ∞. $c_2 \notin M$.

Para $c_3 = 0.35e^{i\pi/4}$ (aproximado como $c_3 = 0.247487 + 0.247487i$), temos $z_0 = 0.247487 + 0.247487i$, $z_1 = 0.247487 + 0.369987i$, $z_2 = 0.171847 + 0.430622i$, $z_3 = 0.091584 + 0.395489i$, $z_4 = 0.099463 + 0.319928i$, $z_5 = 0.155026 + 0.311129i$, $z_6 = 0.174719 + 0.343954i$, $z_7 = 0.159710 + 0.367678i$, $z_8 = 0.137808 + 0.364931i$ e $z_9 = 0.133304 + 0.348068i$. Conclusão: A órbita não diverge e parece convergir. $c_3 \in M$.

(b) **Prove que M é simétrico em relação ao eixo x.**

Para provar que M é simétrico em relação ao eixo x, considere um ponto $c \in \mathbb{C}$ tal que $c = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. O conjugado complexo de c é dado por $\overline{c} = a - bi$.

Queremos provar, por indução matemática, que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{z_n} = w_n,$$

onde:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = f_{\overline{c}}(w_n) = w_n^2 + \overline{c}. \end{cases}$$

Base da indução: Para $n = 0$,

$$\overline{z_0} = \overline{0} = 0 = w_0.$$

Portanto, a propriedade vale para $n = 0$.

Hipótese: Suponha que para algum $n \geq 0$,

$$\overline{z_n} = w_n.$$

Passo: Vamos mostrar que então

$$\overline{z_{n+1}} = w_{n+1}.$$

Calculando z_{n+1}:

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c.$$

Tomando o conjugado:

$$\overline{z_{n+1}} = \overline{z_n^2 + c} = \overline{z_n}^2 + \overline{c}.$$

Pela hipótese de indução, $\overline{z_n} = w_n$, então:

$$\overline{z_{n+1}} = w_n^2 + \overline{c} = f_{\overline{c}}(w_n) = w_{n+1}.$$

Conclusão: Por indução matemática, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z_n} = w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Implicação geométrica: Isso significa que a sequência de iterações de f_c, partindo de 0, tem comportamento simétrico em relação ao eixo real (eixo x) quando comparamos c e $\bar{c}$.

(c) **O que acontece com a órbita de um ponto que está fora de M?**

Se um ponto está fora de M, sua órbita diverge para ∞. Isso ocorre porque, por definição, os pontos em M são aqueles cujas órbitas permanecem limitadas. Para pontos fora de M, a sequência $\{z_n\}$ gerada por f_c cresce indefinidamente em magnitude, ou seja, $|z_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Geometricamente, isso significa que esses pontos não pertencem ao conjunto de Mandelbrot.

(d) **O que acontece com a órbita de um ponto que está dentro de M?**

Se um ponto está dentro de M, sua órbita não diverge para ∞. Em vez disso, ela permanece limitada e pode exibir diferentes comportamentos dinâmicos, dependendo do ponto c:

- **Convergência a um ponto fixo ou periódico:** A órbita pode convergir para um ponto fixo ou para um ciclo periódico. Nesse caso, o ponto fixo ou o ciclo periódico é chamado de atrator.
- **Comportamento caótico:** Em algumas regiões de M, a órbita pode exibir comportamento caótico, sem convergir para um ponto fixo ou ciclo periódico, mas ainda assim permanecendo limitada.

Geometricamente, isso significa que os pontos dentro de M estão associados a dinâmicas estáveis ou limitadas da função f_c.

2.2 Exercício 2: Estudando f_c e sua dinâmica

Pontos periódicos de uma função são aqueles cujos valores se repetem após um número finito de iterações, assim, existe um n (chamado de período) tal que $f_c^n(\hat{z}) = \hat{z}$. Se $n = 1$, $\hat{z}$ é chamado de ponto fixo. Observe que, para cada c, os pontos periódicos de f_c serão diferentes dos pontos de sua órbita. Porém, se a órbita é convergente, existirá um subconjunto dela que converge a cada $\hat{z}$. Nesse caso, ele é chamado de atrator e a seguinte desigualdade é válida: $|(f_c^n)'(\hat{z})| < 1$.

(a) A função f_c^n é holomorfa? Se sim, qual sua derivada complexa?
Resposta:

(b) Ache a região de M que contém os pontos c de forma que f_c possua um ponto fixo. Faça o mesmo para os c que fazem f_c ter um ponto de período igual a 2. Identifique essas duas regiões em um mesmo gráfico.
Resposta:

(c) Prove que um ponto c pertence a M se $|z_n| \leq 2$, para todo $n = 1, 2, \ldots$.
Resposta:

(d) Prove que o intervalo de números reais puros que pertencem a M é $[-2, 0.25]$.
Resposta:

3 Projeto

Referências