EE400 – Métodos da Engenharia Elétrica

Projeto B: Conjunto de Mandelbrot

Thiago Martins da Silva
t217036@dac.unicamp.br

Introdução

Fractais são imagens intrigantes que a geometria clássica não consegue descrever e que possuem um certo grau de autossemelhança, isto é, possuem cópias de si mesma em escalas menores, porém, não existe uma definição matemática que englobe todas essas figuras, apesar de ser possível classificá-las. Para evitar formalismos e definições mais específicas, podemos descrever fractais através de aspectos visuais, sendo aquelas figuras que possuem partes reduzidas de si mesma e que possuem complexidade e detalhamento infinitos, ou seja, quanto mais ampliarmos a imagem, mais detalhes serão visíveis, não havendo um fim para tal processo.

Um fractal bem conhecido é o conjunto de Mandelbrot, este é gerado a partir de uma dinâmica discreta sobre a função complexa $f_c(z) = z^2 + c$, estudando quais órbitas (**Def 2**) de $c \in \mathbb{C}$ se mantêm limitadas em torno de $z_0 = 0$. De maneira mais simples, para quais valores c as iterações (**Def 1**) $|f_c^n(z)|$ se mantêm limitadas para valores de n tão grandes quanto se queira, sempre considerando $z_0 = 0$. Após descobrir quais são esses c, marca-os no plano complexo, gerando a Figura 1, os pontos em preto é o conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$.

Apesar de não ser evidente, o conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$ possui um certo grau de autossemelhança, ao ampliar a imagem, é possível ver partes dela se replicando de forma não exata, há pequenas alterações em sua forma.

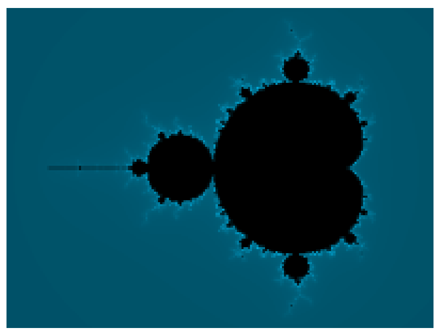

Figura 1: Conjunto de Mandelbrot
Fonte: https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html

Def 1 A iteração de uma função é definida da seguinte forma, $f_c^n(z) = f_c\left(f_c^{n-1}(z)\right)$, com $n = 1, 2, \ldots$ e $f_c^0(z) = z$.

Def 2 A órbita de um ponto $c \in \mathbb{C}$ (através de f_c) é dada por $\left\{z, f_c^1(z), f_c^2(z), f_c^3(z), \ldots\right\}$. Ou ainda, se definirmos $z_n := f_c^n(z)$, temos, de forma equivalente, a órbita $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\}$.

Exercícios Preparatórios

► **Exercício 1 (Entendendo o Fractal):** Considerando o conjunto de Mandelbrot como descrito na introdução, seja $\mathcal{M}$ o conjunto de pontos que o compõem, $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função geradora desses pontos, dada por $f_c(z) = z^2 + c$, para todo $c \in \mathbb{C}$, de forma que $|f_c^n(z)| < \infty$, quando $n \to \infty$. Em outras palavras, a órbita de c não diverge a ∞. No caso de $\mathcal{M}$, temos a condição inicial $z_0 = 0$, ou seja, todas as órbitas partem do mesmo ponto.

(a) Explicite os primeiros termos da órbita de f_c para um c fixo. Teste se os seguintes pontos estão em $\mathcal{M}$: $c_1 = -2$; $c_2 = -2i$; $c_3 = 0{,}35\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(b) Prove que $\mathcal{M}$ é simétrico em relação ao eixo x.

(c) O que acontece com a órbita de um ponto que está fora de $\mathcal{M}$?

(d) O que acontece com a órbita de um ponto que está dentro de $\mathcal{M}$?

(e) Classifique a região $\mathcal{M}$ em relação a ser aberta, fechada, limitada e compacta.
Curiosidade: A região também é simplesmente conexa, ou seja, não possui buracos (não precisa provar esse fato).

► **Exercício 2 (Estudando f_c e sua dinâmica):** Pontos periódicos de uma função são aqueles que os valores se repetem após um número finito de iterações, assim, existe um n (chamado de período) tal que $f_c^n(\hat{z}) = \hat{z}$, se $n = 1$, $\hat{z}$ é chamado de ponto fixo. Observe que, para cada c, os pontos periódicos de f_c serão diferente dos pontos de sua órbita. Porém, se a órbita é convergente, existirá um subconjunto dele que converge a cada $\hat{z}$. Nesse caso, ele é chamado de atrator e a seguinte desigualdade é válida: $|(f_c^n)'(\hat{z})| < 1$.

(a) A função f_c^n é holomorfa? Se sim, qual sua derivada complexa?

(b) Ache a região de $\mathcal{M}$ que contém os pontos c de forma que f_c possua um ponto fixo. Faça o mesmo para os c que fazem f_c ter um ponto de período igual a 2. Identifique essas duas regiões em um mesmo gráfico.
Dicas para achar a região relacionada aos pontos fixos:
- Ache o ponto fixo $\hat{z}$ para um c qualquer.
- Considere a substituição $1 - 4c = re^{i\theta}$, isso facilitará as contas.
- Ache quando $\hat{z}$ será atrator, ou seja, calcule $|(f_c)'(\hat{z})| < 1$.

Dicas para achar a região relacionada aos pontos de período 2:
- Prove que $f_c^2(\hat{z}) - \hat{z} = (\hat{z}^2 - \hat{z} + c)(\hat{z}^2 + c + \hat{z} + 1) = 0$, e ache os pontos de período 2.
- Prove que $(f_c^2)'(\hat{z}) = 4\hat{z}f(\hat{z})$.
- Ache quando $\hat{z}$ será atrator, ou seja, calcule $|(f_c^2)'(\hat{z})| < 1$.

(c) Prove que um ponto c pertence a $\mathcal{M}$ se $|z_n| \leqslant 2$, para todo $n = 1, 2, \ldots$
Dica: Veja o que acontece com a convergência de um ponto se $|z_n| > 2$, lembre-se de testar para ambos os casos $|c| \leqslant 2$ e $|c| > 2$.

(d) Prove que o intervalo de números reais puros que pertencem a $\mathcal{M}$ é $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$.
Dica: Abra a expressão $z_{n+1} - z_n$ para $c \in \mathbb{R}$.

Projeto

Utilizando como base a introdução, os exercícios acima e os direcionamentos abaixo, construa um algoritmo para gerar o conjunto de Mandelbrot, escreva o código na linguagem que tiver mais familiaridade.

Direcionamentos:

- Ao gerar digitalmente o conjunto $\mathcal{M}$, este deve ser tratado principalmente como uma imagem e a matemática deve ser utilizada para decidir a forma como colorir essa imagem. Assim, como relacionar o plano complexo com os píxeis da imagem e como diferenciar (visualmente) os pontos que estão em $\mathcal{M}$ dos que não estão? Lembre-se que é importante definir um tamanho para sua imagem.

- Qual teste deve ser feito para verificar se um ponto deve pertencem a $\mathcal{M}$ e quantas iterações são necessárias nesse teste?
Dica: Comece com um número baixo de iterações e com uma imagem pequena para aumentar gradativamente os valores até um número que seu computador leve um tempo aceitável para processar, ou até que fique tão detalhado quanto se queira.

Curiosidade: Por ser uma imagem digital, é interessante deixá-la mais colorida e bonita, e com isso ainda é possível trazer aspectos matemáticos às cores associadas a cada ponto. Uma maneira de introduzir novas cores à imagem é relacionando cores com a velocidade de divergência de um ponto. Por exemplo, temos dois pontos e sabemos que um deles diverge na quinta iteração e o outro só na centésima iteração, então o primeiro diverge bem mais rápido que o segundo e podemos atribuir cores diferentes a eles, nesse caso a velocidade está relacionada com a quantidade de iterações necessárias para garantir divergência. A escolha das cores é arbitrária, a mais comum é utilizar algum tipo de degradê. Não é necessário adicionar isso ao código, faça apenas se tiver interesse.

► **Exercício 3:** Antes de responder essas perguntas, realize o projeto, ou seja, construa graficamente o conjunto de Mandelbrot. Isso ajudará a entender as questões.

(a) Ao alterar o raio de convergência e o número de iterações no código, o que acontece com a velocidade de processamento, o detalhamento e a precisão da imagem? Para isso, teste valores no código e analise a diferença no resultado.

(b) Outros fractais podem ser gerados a partir do Mandelbrot, uma família de exemplos é obtida ao alterar a condição inicial $z_0 = 0$ para outros valores, gere alguns exemplos desses conjuntos.

(c) Pode-se também alterar a forma de olhar a dinâmica, ao invés de fixar a condição inicial z_0, escolha um valor fixo para c e estude as órbitas variando os valores de z_0, escolhendo aqueles que a função $f_c^n(z_0)$ não diverge para $n \to \infty$. Plote alguns exemplos desse novo fractal.

Os fractais gerados nessa questão e na anterior são exemplos dos conhecidos conjuntos de Julia.

(d) Uma terceira forma de alterar $\mathcal{M}$ é mudando o grau do polinômio f_c, coloque outros números positivos no lugar de d na função $f_c = z^d + c$ e veja o que acontece com a figura. Esses conjuntos são conhecidos como Multibrot, valores negativos também são possíveis, porém, é necessário utilizar outro algoritmo, por isso não vem ao caso os testar.