

# Projeto B: Conjunto de Mandelbrot

Vinicius Patriarca Miranda Miguel RA: 260731

16 de junho de 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Representação Visual do Conjunto de Mandelbrot . . . . .	2
1.2	Algoritmo para Gerar o Conjunto de Mandelbrot . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Exercícios</b>	<b>3</b>
2.1	Exercício 1: Exploração do Conjunto de Mandelbrot . . . . .	3
2.2	Exercício 2: Estudando $f_c$ e sua dinâmica . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Projeto</b>	<b>5</b>

# 1 Introdução

O conjunto de Mandelbrot é um dos exemplos mais conhecidos de fractais. Ele é definido matematicamente como o conjunto de números complexos  $c \in \mathbb{C}$  para os quais a sequência definida por:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0$$

permanece limitada, ou seja, não diverge para o infinito.

Em termos de órbitas, cada ponto  $c$  no plano complexo gera uma órbita, que é a sequência de valores  $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$  obtida pela iteração da fórmula acima[1]. Se a órbita permanece confinada dentro de uma região finita do plano complexo, dizemos que o ponto  $c$  pertence ao conjunto de Mandelbrot. Caso contrário, se a órbita diverge para o infinito, o ponto não pertence ao conjunto.

Visualmente, o conjunto de Mandelbrot é representado no plano complexo, onde cada ponto  $c$  é colorido de acordo com o comportamento de sua órbita. Se a órbita não diverge, o ponto pertence ao conjunto e é geralmente colorido de preto. Caso contrário, o ponto é colorido de acordo com a rapidez com que a órbita diverge.

## 1.1 Representação Visual do Conjunto de Mandelbrot

Abaixo está uma representação visual do conjunto de Mandelbrot. Para gerar essa imagem, utilizamos um algoritmo que verifica se cada ponto no plano complexo pertence ao conjunto, iterando a fórmula acima e analisando o comportamento da órbita até um número máximo de iterações.

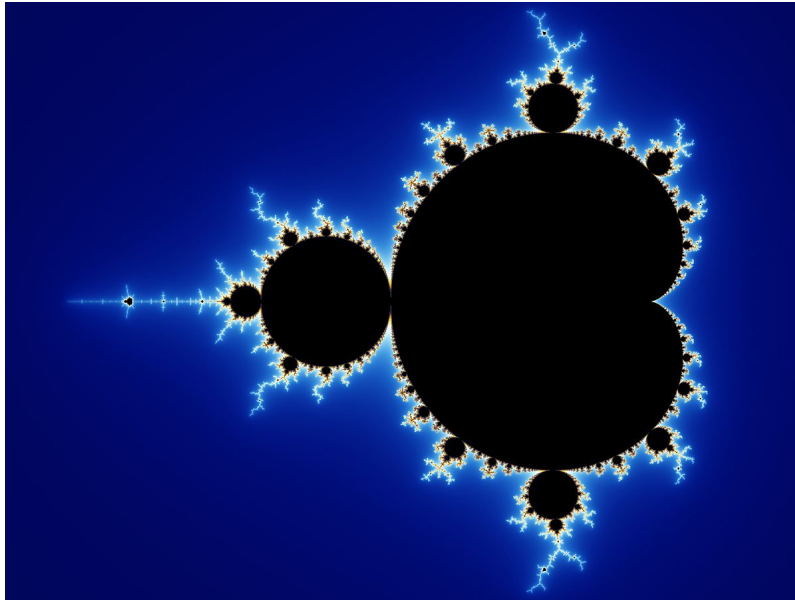


Figura 1: Representação visual do conjunto de Mandelbrot.

## 1.2 Algoritmo para Gerar o Conjunto de Mandelbrot

O algoritmo básico para gerar o conjunto de Mandelbrot pode ser descrito como:

1. Para cada ponto  $c$  em uma grade do plano complexo:
  - (a) Inicialize  $z_0 = 0$ .
  - (b) Itere a fórmula  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  até um número máximo de iterações ou até  $|z_n| > 2$ .
  - (c) Se  $|z_n| \leq 2$  após o número máximo de iterações, considere o ponto como pertencente ao conjunto.
2. Atribua cores aos pontos com base no número de iterações necessárias para divergir.

Essa abordagem permite criar imagens detalhadas e coloridas do conjunto de Mandelbrot, revelando sua estrutura fractal fascinante.

## 2 Exercícios

### 2.1 Exercício 1: Exploração do Conjunto de Mandelbrot

Considerando o conjunto de Mandelbrot como descrito na introdução, seja  $M$  o conjunto de pontos que o compõem,  $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a função geradora desses pontos, dada por  $f_c(z) = z^2 + c$ , para todo  $c \in \mathbb{C}$ , de forma que  $|f_c^n(z)| < \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, a órbita de  $c$  não diverge a  $\infty$ . No caso de  $M$ , temos a condição inicial  $z_0 = 0$ , ou seja, todas as órbitas partem do mesmo ponto.

- (a) **Explicitar os primeiros termos da órbita de  $f_c$  para um  $c$  fixo. Teste se os seguintes pontos estão em  $M$ :**  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = -2i$ ,  $c_3 = 0.35e^{i\pi/4}$ .

Para  $c_1 = -2$ , temos  $z_0 = -2$ ,  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 2$ ,  $z_3 = 2$ ,  $z_4 = 2$ ,  $z_5 = 2$ ,  $z_6 = 2$ ,  $z_7 = 2$ ,  $z_8 = 2$  e  $z_9 = 2$ . Conclusão: A órbita não diverge, mas não está em  $M$  pois não satisfaz a condição de convergência.

Para  $c_2 = -2i$ , temos  $z_0 = -2i$  e  $z_1 = -4 - 2i$ . Conclusão: A órbita diverge para  $\infty$ .  $c_2 \notin M$ .

Para  $c_3 = 0.35e^{i\pi/4}$  (aproximado como  $c_3 = 0.247487 + 0.247487i$ ), temos  $z_0 = 0.247487 + 0.247487i$ ,  $z_1 = 0.247487 + 0.369987i$ ,  $z_2 = 0.171847 + 0.430622i$ ,  $z_3 = 0.091584 + 0.395489i$ ,  $z_4 = 0.099463 + 0.319928i$ ,  $z_5 = 0.155026 + 0.311129i$ ,  $z_6 = 0.174719 + 0.343954i$ ,  $z_7 = 0.159710 + 0.367678i$ ,  $z_8 = 0.137808 + 0.364931i$  e  $z_9 = 0.133304 + 0.348068i$ . Conclusão: A órbita não diverge e parece convergir.  $c_3 \in M$ .

- (b) **Prove que  $M$  é simétrico em relação ao eixo  $x$ .**

Para provar que  $M$  é simétrico em relação ao eixo  $x$ , considere um ponto  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $c = a + bi$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . O conjugado complexo de  $c$  é dado por  $\bar{c} = a - bi$ .

Queremos provar, por indução matemática, que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\overline{z_n} = w_n,$$

onde:

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = f_{\bar{c}}(w_n) = w_n^2 + \bar{c}. \end{cases}$$

**Base da indução:** Para  $n = 0$ ,

$$\overline{z_0} = \bar{0} = 0 = w_0.$$

Portanto, a propriedade vale para  $n = 0$ .

**Hipótese:** Suponha que para algum  $n \geq 0$ ,

$$\overline{z_n} = w_n.$$

**Passo:** Vamos mostrar que então

$$\overline{z_{n+1}} = w_{n+1}.$$

Calculando  $z_{n+1}$ :

$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c.$$

Tomando o conjugado:

$$\overline{z_{n+1}} = \overline{z_n^2 + c} = \overline{z_n}^2 + \bar{c}.$$

Pela hipótese de indução,  $\overline{z_n} = w_n$ , então:

$$\overline{z_{n+1}} = w_n^2 + \bar{c} = f_{\bar{c}}(w_n) = w_{n+1}.$$

**Conclusão:** Por indução matemática, a propriedade vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\overline{z_n} = w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Implicação geométrica:** Isso significa que a sequência de iterações de  $f_c$ , partindo de 0, tem comportamento simétrico em relação ao eixo real (eixo  $x$ ) quando comparamos  $c$  e  $\bar{c}$ .

- (c) **O que acontece com a órbita de um ponto que está fora de  $M$ ?**

Se um ponto está fora de  $M$ , sua órbita diverge para  $\infty$ . Isso ocorre porque, por definição, os pontos em  $M$  são aqueles cujas órbitas permanecem limitadas. Para pontos fora de  $M$ , a sequência  $\{z_n\}$  gerada por  $f_c$  cresce indefinidamente em magnitude, ou seja,  $|z_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Geometricamente, isso significa que esses pontos não pertencem ao conjunto de Mandelbrot.

- (d) **O que acontece com a órbita de um ponto que está dentro de  $M$ ?**

Se um ponto está dentro de  $M$ , sua órbita não diverge para  $\infty$ . Em vez disso, ela permanece limitada e pode exibir diferentes comportamentos dinâmicos, dependendo do ponto  $c$ :

- **Convergência a um ponto fixo ou periódico:** A órbita pode convergir para um ponto fixo ou para um ciclo periódico. Nesse caso, o ponto fixo ou o ciclo periódico é chamado de atrator.
- **Comportamento caótico:** Em algumas regiões de  $M$ , a órbita pode exibir comportamento caótico, sem convergir para um ponto fixo ou ciclo periódico, mas ainda assim permanecendo limitada.

Geometricamente, isso significa que os pontos dentro de  $M$  estão associados a dinâmicas estáveis ou limitadas da função  $f_c$ .

## 2.2 Exercício 2: Estudando $f_c$ e sua dinâmica

Pontos periódicos de uma função são aqueles cujos valores se repetem após um número finito de iterações, assim, existe um  $n$  (chamado de período) tal que  $f_c^n(\hat{z}) = \hat{z}$ . Se  $n = 1$ ,  $\hat{z}$  é chamado de ponto fixo. Observe que, para cada  $c$ , os pontos periódicos de  $f_c$  serão diferentes dos pontos de sua órbita. Porém, se a órbita é convergente, existirá um subconjunto dela que converge a cada  $\hat{z}$ . Nesse caso, ele é chamado de atrator e a seguinte desigualdade é válida:  $|(f_c^n)'(\hat{z})| < 1$ .

- (a) **A função  $f_c^n$  é holomorfa? Se sim, qual sua derivada complexa?**

Sim, a função  $f_c^n$  é holomorfa para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f_c(z) = z^2 + c$  é um polinômio, ela é holomorfa em todo o plano complexo  $\mathbb{C}$ . Além disso, a composição de funções holomorfas também é holomorfa, logo a função iterada  $f_c^n(z) = \underbrace{f_c \circ f_c \circ \dots \circ f_c}_n(z)$  é holomorfa.

A derivada de  $f_c^n$  é obtida aplicando a regra da cadeia sucessivas vezes. Assim, temos:

$$(f_c^n)'(z) = f_c'(f_c^{n-1}(z)) \cdot f_c'(f_c^{n-2}(z)) \cdots f_c'(z) = \prod_{k=0}^{n-1} f_c'(f_c^k(z))$$

Como  $f_c(z) = z^2 + c$ , sua derivada é  $f_c'(z) = 2z$ . Substituindo:

$$(f_c^n)'(z) = \prod_{k=0}^{n-1} 2f_c^k(z) = 2^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_c^k(z)$$

Portanto,  $f_c^n$  é holomorfa e sua derivada é dada pelo produto acima.

- (b) **Ache a região de  $M$  que contém os pontos  $c$  de forma que  $f_c$  possua um ponto fixo. Faça o mesmo para os  $c$  que fazem  $f_c$  ter um ponto de período igual a 2. Identifique essas duas regiões em um mesmo gráfico.**  
*Resposta:*

(c) **Prove que um ponto  $c$  pertence a  $M$  se  $|z_n| \leq 2$ , para todo  $n = 1, 2, \dots$**

Suponha, por contraposição, que  $|z_n| > 2$  para algum  $n \geq 1$ . Vamos mostrar que, nesse caso, a sequência  $\{z_n\}$  diverge, ou seja,  $|z_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Sabemos que  $f_c(z) = z^2 + c$ . Assim, para  $|z_n| > 2$ , temos:

$$|z_{n+1}| = |f_c(z_n)| = |z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c|.$$

Como  $|z_n| > 2$ , temos  $|z_n|^2 > 4$ . Além disso,  $|c|$  é finito, então:

$$|z_{n+1}| > |z_n|^2 - |c| > 4 - |c|.$$

Portanto,  $|z_{n+1}| > |z_n|$  para  $|z_n| > 2$ , o que implica que a sequência  $\{|z_n|\}$  é estritamente crescente para  $|z_n| > 2$ . Como  $|z_n|$  cresce indefinidamente, concluímos que  $|z_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por contraposição, se  $|z_n| \leq 2$  para todo  $n \geq 1$ , então a sequência  $\{z_n\}$  não diverge, ou seja,  $c \in M$ .

(d) **Prove que o intervalo de números reais puros que pertencem a  $M$  é  $[-2, 0.25]$ .**

Para provar que o intervalo de números reais puros que pertencem a  $M$  é  $[-2, 0.25]$ , iremos fazer o limite de  $n$  indo a  $\infty$  e analisar o comportamento da função  $f_c(z) = z^2 + c$ .

Para isso, consideramos a condição de que o módulo da derivada da função iterada deve ser menor que 1 para garantir que a órbita permaneça limitada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_n^2 + c}{z_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n^2 + c| < \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n^2 - z_n + c| < 0$$

Como  $z_n$  tende a  $\infty$ , podemos analisar o comportamento da função quadrática  $z_n^2 - z_n + c$ . Para que essa função tenha raízes reais, o discriminante deve ser não negativo:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 1 - 4c \geq 0$$

Resolvendo a desigualdade:

$$1 - 4c \geq 0 \implies c \leq 0.25$$

Pelo resultado do item anterior, sabemos que  $c$  deve ser maior ou igual a  $-2$  para que a órbita não diverja. Assim, temos:

$$-2 \leq c \leq 0.25$$

### 3 Projeto

### Referências

- [1] M. V. d. S. Pereira, “Uma abordagem elementar do fractal árvore pitagórica.” Disponível em: <https://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/15695>. Acesso em: jun. 2025., 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém.