EE400 – MÉTODOS DA ENGENHARIA ELÉTRICA

Projeto C: Sistemas Discretos e a Transformada $\mathcal{Z}$

Prof. Plínio S. Dester
pdester@unicamp.br

Introdução

Muitos sistemas discretos podem ser representados através de equações a diferenças, por exemplo,

$$y[n+2] - y[n+1] - 2\,y[n] = x[n], \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

onde $(\dots, x[-1], x[0], x[1], \dots)$ é a sequência de entrada do sistema, e $(\dots, y[-1], y[0], y[1], \dots)$ é a sequência de saída do sistema. Os colchetes são usados para deixar claro que tratam-se de funções a tempo discreto $x, y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Um exemplo mais palpável de sistema discreto é depositar uma quantia $x[n]$ em uma aplicação financeira no início do n-ésimo mês e acumular um montante $y[n]$ ao fim do n-ésimo mês. Esse sistema pode ser representado pela equação

$$y[n+1] = (1+r)(y[n] + x[n+1]), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

onde $r > 0$ é o rendimento da aplicação financeira.

Para estudar sistemas discretos é conveniente definir a transformada $\mathcal{Z}$, que é um operador que leva do espaço de funções a tempo discreto (sequências) para o espaço de funções complexas. Seja $(x[n])_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, então a transformada $\mathcal{Z}$ de $x[n]$ é definida como

$$\mathcal{Z}\{x[n]\}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\, z^{-n} = \left(x[0] + \frac{x[1]}{z} + \frac{x[2]}{z^2} + \cdots \right) + \left(x[-1]\, z + x[-2]\, z^2 + \cdots \right) \tag{3}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que a soma seja absolutamente convergente. O conjunto de números complexos que satisfazem a condição de convergência é denominado região de convergência da transformada e é denotado por $\mathrm{RoC}_x \subset \mathbb{C}$. Vale a pena fazer uma analogia com a transformada de Laplace, que é um operador que leva do espaço de funções reais ao espaço de funções complexas e é muito útil para resolver algumas equações diferenciais. Lembre que a transformada de Laplace também tem uma região de convergência associada.

Exercícios Preparatórios

► **Exercício 1:** Para realizarmos a análise de sistemas a tempo discreto, algumas transformadas $\mathcal{Z}$ são importantes.

(a) Mostre que a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $(\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ definida como

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

é $X_1(z) = 1,\ z \in \mathbb{C}$. *Dica:* Aplique a definição dada pela Equação (3). Note que $\mathrm{RoC}_{x_1} = \mathbb{C}$.

(b) Expanda a função $X_2(z) = \dfrac{z}{z-1}$ em série de Laurent ao redor de $z = 0$ na região $|z| > 1$. Em seguida, compare com a Equação (3) para concluir que a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $(\dots, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ definida como

$$x_2[n] = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

é $X_2(z)$ para $|z| > 1$. Logo, RoC_{x_2} é o complemento do disco fechado de raio unitário centrado na origem.

(c) A mesma função complexa que originou uma série de Laurent pode estar associada a outras sequências. Expanda a mesma função $X_2(z) = \dfrac{z}{z-1}$ em série de Laurent ao redor de $z = 0$, porém na região $|z| < 1$. Compare com a Equação (3) para concluir que a transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $(\dots, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ definida como

$$\tilde{x}_2[n] = \begin{cases} 0, & n \geqslant 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

é $X_2(z)$ para $|z| < 1$. Logo, $\mathrm{RoC}_{\tilde{x}_2}$ é o disco aberto de raio unitário centrado na origem.

(d) **(A transformada $\mathcal{Z}$ inversa)** Seja $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}(z)$, $z \in \text{RoC}_x$. Mostre que

$$x[k] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z)\, z^{k-1}\, dz, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

onde C é um caminho simples, fechado, positivamente orientado e contido no domínio de convergência.
Dica: Escreva $X(z)$ como a série da Equação (3) e invoque o teorema dos resíduos. Comece com $k = 0$ caso esteja difícil de ver o que está acontecendo.
Apesar desse resultado, são utilizadas tabelas e propriedades para determinar a transformada inversa.

► **Exercício 2:** A transformada $\mathcal{Z}$ pode ser aplicada nas equações a diferenças para resolvê-las.

(a) Sejam $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}(z), z \in \text{RoC}_x$ e $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}(z), z \in \text{RoC}_y$. Note que

$$\mathcal{Z}\{y[n+1]\}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n+1] z^{-n} = z \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n+1] z^{-(n+1)} = z\, Y(z).$$

Aplicando a propriedade acima duas vezes, é possível mostrar que $\mathcal{Z}\{y[n+2]\}(z) = z^2\, Y(z)$.
Utilize a propriedade apresentada acima em conjunto com a transformada $\mathcal{Z}$ ser um operador linear para mostrar que a Equação (1) pode ser transformada em

$$(z^2 - z - 2)Y(z) = X(z), \qquad z \in \text{RoC}_x \cap \text{RoC}_y. \tag{4}$$

(b) Se supusermos que $z \notin \{-1, 2\}$, então podemos escrever a Equação (4) como

$$Y(z) = \frac{X(z)}{z^2 - z - 2},$$

o que resolve formalmente a equação a diferenças, pois podemos encontrar a transformada inversa de Y.
Suponha que $X(z) = 1, z \in \mathbb{C}$, ou seja, estamos lidando com a sequência de entrada $x_1[n]$ definida no ► **Exercício 1:**.
Para esse caso, encontre todas as expansões em série de Laurent possíveis de $Y(z)$ ao redor da origem explicitando a região de convergência de cada uma delas. Em seguida, identifique as sequências resultantes $y[n]$ comparando com a definição em (3).

(c) Repita o item anterior com a sequência de entrada $x_2[n]$. Note que para esse caso não é necessário realizar todas as expansões em série de Laurent, apenas as expansões que estejam contidas em $\text{RoC}_{x_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Projeto

Este projeto tem por objetivo simular a solução $(y[n])_n$ da Equação (1) para diversas entradas $(x[n])_n$ e verificar se o resultado da simulação é compatível com o resultado teórico.

- Utilize uma linguagem de programação a sua escolha para desenvolver um programa que recebe como entrada um vetor de tamanho finito representando $(x[n])_n$ e retorna o vetor de saída que representa a solução $(y[n])_n$ da Equação (1). É conveniente re-escrever (1) no formato

$$y[n+2] = x[n] + y[n+1] + 2\, y[n].$$

  Faça as suposições e adaptações que forem necessárias.

- Teste o seu programa com as entradas $(x_1[n])_n$ e $(x_2[n])_n$. Para o primeiro caso obtivemos três soluções teóricas. A simulação só pode ser compatível com uma delas. Discuta sobre a região de convergência da solução teórica que foi compatível com a simulação.

- Faça uma análise semelhante para o sistema discreto dado pela equação a diferenças (2). Suponha um rendimento mensal $r = 0.01$. Analise os casos (i) em que o investidor faz um único aporte de dez mil reais e (ii) em que o investidor aporta mil reais todo mês.

Note que o seu programa deve ser robusto e genérico o suficiente para que possa ser utilizado corretamente com outras entradas $(x[n])_n$, $n \geqslant 0$.