EE400 – Métodos da Engenharia Elétrica

Projeto A: Polinômios e Estabilidade

Prof. Matheus Souza
matsouza@unicamp.br

Introdução

Sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo (LTIs) a tempo contínuo tipicamente são modelados por meio de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares e com coeficientes constantes da forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t),$$

sendo $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a <u>saída</u> do sistema e $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a sua <u>entrada</u>; os coeficientes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ são reais e n é a *ordem* do sistema. Quando a entrada u é identicamente nula, podemos analisar a *dinâmica autônoma* do sistema observando o comportamento da saída y para um dado vetor de n condições iniciais:

$$Y_0 = \left(y(0), \dot{y}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)\right).$$

Uma pergunta fundamental neste problema é a seguinte: sob que condições a saída y é convergente a zero, ou seja, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ para qualquer vetor de condições iniciais Y_0? Como um exemplo, veja a dinâmica ilustrada na Figura 1. São ilustradas as trajetórias definidas pelos pontos $(y(t), \dot{y}(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, para condições iniciais Y_0 sobre o círculo unitário. Todas as trajetórias convergem à origem.

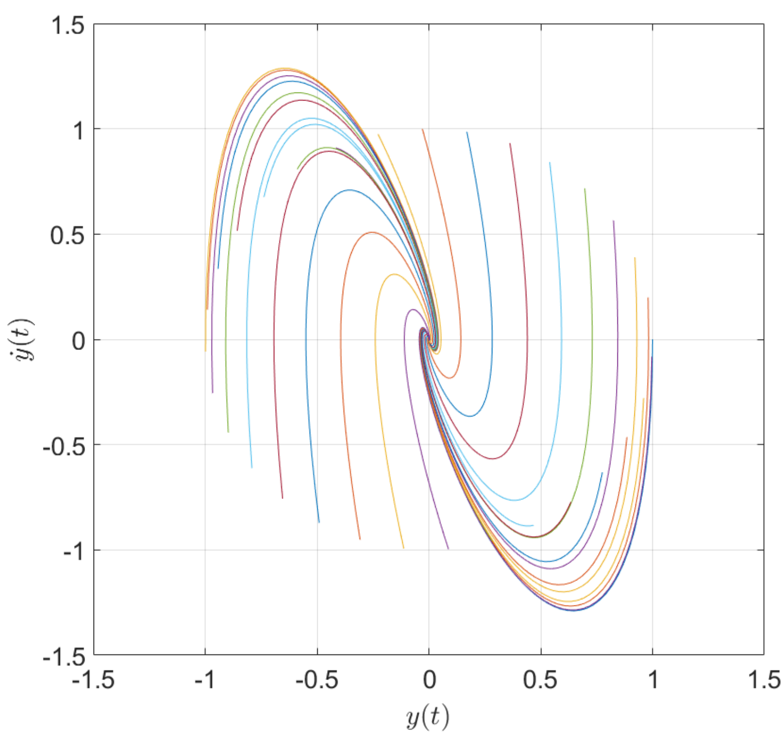

Figura 1: Evolução temporal do ponto $(y(t), \dot{y}(t))$ para um sistema dinâmico de segunda ordem estável. Todas as trajetórias convergem à origem.

Sistemas LTI em que a convergência das suas soluções à origem ocorrem para qualquer condição inicial são (assintoticamente) <u>estáveis</u>. Podemos aproveitar a estrutura particular das EDOs lineares e com coeficientes constantes para obter condições de estabilidade de sistemas LTI que sejam verificáveis e que dependam apenas dos coeficientes $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Para tanto, procedemos como tipicamente é feito em cursos básicos de resolução de equações diferenciais e buscamos uma solução do tipo exponencial $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ dada por $f(t) = ce^{\lambda t}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Realizando a substituição $y = f$ na

EDO acima, temos que f é solução da EDO homogênea associada se, e apenas se, $\lambda \in \mathbb{C}$ for raiz do polinômio característico

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0.$$

Note que, se $\lambda \notin \mathbb{R}$, então a solução f obtida não é real e estamos buscando apenas soluções reais para uma EDO com coeficientes reais e sujeita a condições iniciais reais. Neste caso, no entanto, $\overline{\lambda}$ também é raiz de p e a função

$$g(t) = ce^{\lambda t} + \overline{c}e^{\overline{\lambda}t}$$

também é solução e esta é real. De fato, pode-se mostrar que, se $\lambda = \sigma + i\omega$, com $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, então g pode ser expressa como

$$g(t) = e^{\sigma t}\Big(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\Big),$$

para $a, b \in \mathbb{R}$. Essas constantes são dependentes de condições iniciais. Um resultado fundamental da análise de sistemas dinâmicos assegura que basta que tornemos estas exponenciais estáveis (convergentes para zero) para que qualquer solução da EDO acima seja estável. Assim, para que $e^{\lambda t} \to 0$ para $t \to \infty$, é necessário e suficiente que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Como esta propriedade deve ser verificada para todas as raízes do polinômio característico p, estabelecemos a definição a seguir.

Definição 1 (Estabilidade) *Um polinômio mônico $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é estável se todas as suas raízes estiverem contidas no semiplano esquerdo aberto, isto é, na região*

$$\mathbb{D} = \Big\{ s \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(s) < 0 \Big\}.$$

Neste projeto, nosso objetivo é estudar um *critério de estabilidade*, que permite testar a estabilidade de um polinômio sem determinar as suas raízes explicitamente. Note que esta tarefa era praticamente impossível para polinômios de grau elevado até o advento dos computadores.

Exercícios Preparatórios

▶ **Exercício 1:** Verifique que, de fato,

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$$

se, e apenas se, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Dica: mostre que $|e^{\lambda t}| \to 0$.

▶ **Exercício 2:** Verifique que, de fato, dados $c = x + iy$ e $\lambda = \sigma + i\omega$, $x, y, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$ce^{\lambda t} + \overline{c}e^{\overline{\lambda}t} = e^{\sigma t}\Big(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\Big)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

▶ **Exercício 3:** Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio com coeficientes reais. Mostre que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ for raiz de p, então $\overline{\lambda}$ também é raiz de p.

▶ **Exercício 4:** Considere o polinômio de segundo grau

$$p(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2,$$

com $\xi, \omega_n \in \mathbb{R}_+$.

(a) Determine as raízes de $p(s)$ em função de ξ e $\omega_d = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$.

(b) Discuta a natureza (reais/imaginárias) das raízes de p em função de $\xi \in \mathbb{R}_+$.

(c) Mostre que todo polinômio de segundo grau mônico e estável pode ser expresso dessa forma.

Projeto

▶ **Parte 1: (Condição Necessária de Estabilidade)** Nosso primeiro resultado estabelece uma *condição necessária* para a estabilidade de um polinômio (mônico); isto é, a estabilidade de qualquer polinômio que não satisfizer esta condição pode ser descartada.

(a) Justifique por que qualquer polinômio mônico estável p com n_r raízes reais e n_c raízes imaginárias (contando multiplicidades) pode ser expresso como

$$p(s) = \prod_{i=1}^{n_r}(s + z_i)\prod_{i=1}^{n_c}(s^2 + 2\xi_i\omega_{n_i}s + \omega_{n_i}^2).$$

(b) Use a expansão anterior para provar o seguinte resultado.

Teorema 1 (Condição Necessária de Estabilidade) *Seja* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *um polinômio mônico dado por*

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \qquad a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Se o polinômio p *for estável, então* $a_0, \cdots, a_{n-1} > 0$

▶ **Parte 2: (Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz I – A Tabela de Routh)** A condição apresentada na parte anterior fornece um ótimo resultado para descartar polinômios instáveis, mas não é conclusiva quanto à estabilidade de polinômios com coeficientes positivos. Por exemplo, não podemos afirmar nada quanto à estabilidade dos polinômios

$$p_1(s) = s^3 + s^2 + 4s + 30 \quad \text{e} \quad p_2(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

mas podemos afirmar com certeza que o polinômio

$$p_3(s) = s^3 + s^2 - 4s + 6$$

é instável. Apenas para fins ilustrativos: p_1 é instável e p_2 é estável neste exemplo. Essas conclusões podem ser obtidas, por exemplo, calculando-se numericamente as raízes de p_1 e p_2 usando um *software* como o MATLAB.

O **critério de estabilidade de Routh-Hurwitz** está baseado na Tabela de Routh associada a um polinômio com coeficientes positivos. A Tabela de Routh associada ao polinômio p dado por

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

com $a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n > 0$, é dada por

$$\begin{array}{r|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & \\
s^{n-3} & r_{4,1} & r_{4,2} & r_{4,3} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^1 & r_{n,1} & & & \\
s^0 & r_{n+1,1} & & &
\end{array} \tag{1}$$

Nesta tabela, as duas primeiras linhas são obtidas a partir do polinômio p por simples inspeção, selecionando os seus elementos de forma alternada. As demais linhas são construídas uma a uma, de cima para baixo, usando as duas anteriores da seguinte forma:

$$r_{i,j} = \frac{r_{i-1,1}r_{i-2,j+1} - r_{i-2,1}r_{i-1,j+1}}{r_{i-1,1}} = -\frac{1}{r_{i-1,1}}\begin{vmatrix} r_{i-2,1} & r_{i-2,j+1} \\ r_{i-1,1} & r_{i-1,j+1} \end{vmatrix}$$

A tabela possui um formato triangular quando zeros são omitidos. Para o polinômio estável p_2, por exemplo, temos a seguinte Tabela de Routh:

$$\begin{array}{r|cc}
s^3 & 1 & 8 \\
s^2 & 5 & 6 \\
s^1 & 6.8 & \\
s^0 & 6 &
\end{array} \tag{2}$$

Com a tabela construída, o Teste de Routh-Hurwitz pode ser feito, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema 2 (Critério de Routh-Hurwitz) *O polinômio*

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \qquad a_i > 0,$$

é estável se, e apenas se, os $n+1$ *elementos da primeira coluna da sua Tabela de Routh forem positivos.*

A partir do resultado acima, concluímos que p_2 é estável. Agora, se construirmos a tabela para p_1, temos

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 1 & 30 \\ s^1 & -24 & \\ s^0 & 30 & \end{array} \tag{3}$$

Como temos um elemento negativo na primeira coluna da Tabela, temos que p_1 é instável.

(a) Use a Tabela de Routh para obter condições de estabilidade dos seguintes polinômios com coeficientes reais:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= s^2 + as + b, \\ p_2(s) &= s^3 + cs^2 + ds + e, \\ p_3(s) &= s^4 + fs^3 + gs^2 + hs + k. \end{aligned}$$

(b) Implemente, em uma linguagem de programação de interesse, um programa que monte a Tabela de Routh associada a um polinômio mônico com coeficientes positivos. Seu programa também deve fornecer como saída a conclusão sobre a estabilidade do polinômio fornecido. Suponha que a entrada de dados do seu programa seja um vetor da forma

$$[\mathtt{a(n)}, \mathtt{a(n-1)}, \mathtt{a(n-2)}, \cdots, \mathtt{a(1)}, \mathtt{a(0)}]$$

que contenha os coeficientes (positivos) de um polinômio $p(s) = a(n)s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$. Caso haja divisão por 0 em algum passo na montagem da Tabela, retorne o erro. O que podemos concluir sobre a estabilidade do polinômio de entrada neste caso?

(c) Teste o seu programa com ao menos 6 polinômios estáveis e instáveis de graus 4, 5 e 6 (dois de cada grau, um de cada classe por grau). Deixe claro como os exemplos foram gerados.

► **Parte 3: (Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz II – Demonstração)** Nosso objetivo agora é provar o Teorema de Routh-Hurwitz, que pode ser expresso de forma recursiva como:

Teorema 3 (Routh-Hurwitz) *O polinômio* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dado por*

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

com $a_0, \cdots, a_n > 0$ *é* <u>*estável*</u> *se, e apenas se,*

$$q(s) = p(s) - \frac{a_n}{a_{n-1}}\Big(a^{n-1}s^n + a_{n-3}s^{n-2} + \cdots\Big)$$

for estável.

Note que, nesta formulação, estamos afirmando que o polinômio p é estável se, e apenas se, o polinômio gerado pelas linhas associadas a s^{n-1} e s^{n-2} da sua Tabela de Routh forem estáveis. De fato, o polinômio gerado, pela mesma lei de formação das duas primeiras linhas da Tabela, por essas duas linhas é dado por

$$g(s) = \Big(a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots\Big) + \Big(r_{3,1}s^{n-2} + r_{3,2}s^{n-4} + \cdots\Big)$$

Rearranjando os seus coeficientes, temos

$$g(s) = a_{n-1}s^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}}a_{n-3}\right)s^{n-2} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots = p(s) - p(s) - \frac{a_n}{a_{n-1}}\Big(a^{n-1}s^n + a_{n-3}s^{n-2} + \cdots\Big) = q(s).$$

Observe que este raciocínio pode ser aplicado recursivamente para chegar à conclusão de que todos os polinômios envolvidos na Tabela de Routh de um polinômio estável com coeficientes positivos são estáveis. Isto implica que não apenas os coeficientes da primeira coluna devem ser positivos, mas sim todos os coeficientes da Tabela.

Para provar este resultado, definiremos a família de polinômios

$$q_\alpha(s) = p(s) - \alpha s\Big(a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots\Big) = \begin{cases} p(s) - \alpha s p_{impar}(s), & \text{se } n \text{ ímpar}, \\ p(s) - \alpha s p_{par}(s), & \text{se } n \text{ par}, \end{cases}$$

sendo p_{par} e p_{impar} os polinômios formados apenas pelos monômios de graus pares ou ímpares de p, respectivamente. Denotaremos esta família de polinômios por $\mathcal{Q}$.

(a) Mostre que $p, q \in \mathcal{Q}$ encontrando valores particulares de α para os quais $q_\alpha \equiv p$ e $q_\alpha \equiv q$.

(b) Neste item, provaremos o seguinte resultado auxiliar:

Proposição 1 *Todos os polinômios da família $\mathcal{Q}$ têm as mesmas raízes imaginárias puras.*

Para tanto, suponha primeiramente que n seja par e escreva q_α como a soma de um polinômio de grau par com um de grau ímpar:

$$q_\alpha(s) = \Big(p_{par}(s) - \alpha s p_{impar}(s)\Big) + p_{impar}(s).$$

Use essa decomposição para provar que, se $q_\alpha(i\omega) = 0$ para algum $\omega \in \mathbb{R}$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então $q_\alpha(i\omega) = 0$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Adapte o raciocínio para o grau ímpar e complete a prova.

(c) Usando o resultado do item anterior, podemos argumentar, por continuidade, que as raízes de q_α não cruzam o eixo imaginário conforme $\alpha \in \mathbb{R}$ varia, a não ser que q_α tenha uma redução de grau. Justifique este argumento.

(d) Para que valor de α o polinômio q_α tem uma redução de grau?

(e) Se denotarmos o valor de α do item anterior por $\alpha^\star$, temos que

$$q_\alpha(s) = (a_n - \alpha a_{n-1})s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots$$

tem suas raízes contidas no mesmo semiplano para qualquer $\alpha \in (0, \alpha^\star)$. Conforme $\alpha \to \alpha^{\star -}$, $n-1$ raízes de q_α tendem às raízes de $q_{\alpha^\star}$; a raiz faltante tende ao infinito, pois, para $\alpha \to \alpha^{\star -}$ e $|s| \to \infty$,

$$q_\alpha(s) \approx s^{n-1}\left((a_n - \alpha a_{n-1})s + a_{n-1}\right).$$

Isto implica que esta raiz é tal que

$$s \to -\frac{a_{n-1}}{a_n - \alpha a_{n-1}},$$

conforme $\alpha \to \alpha^\star$. Esta raiz é estável?

(f) Conclua que a estabilidade de p ocorre se, e somente se, a estabilidade de q também ocorre.

▶ **Parte 4: (Aplicações e Extensões)** Neste problema, apresentamos algumas extensões elementares do Teste de Estabilidade de Routh-Hurwitz.

(a) **(Estabilidade com Taxa de Convergência Garantida)** Suponha que, em vez de exigir apenas que $e^{\lambda t} \to 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ raiz de um polinômio p dado, desejemos que $e^{\lambda t}$ vá para zero pelo menos tão rápido quanto $e^{-\alpha t}$, para algum $\alpha > 0$ dado. Neste caso, podemos exigir, portanto, que $e^{(\lambda+\alpha)t} \to 0$ conforme $t \to \infty$.

i. Mostre que esta condição é satisfeita se toda raiz do polinômio p estiver na região

$$\mathbb{D}_\alpha = \Big\{s \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(s) < -\alpha\Big\}.$$

ii. Use a região acima para mostrar o seguinte resultado:

Proposição 2 *Sejam p um polinômio com coeficientes reais e positivos e $\alpha > 0$ dados. As raízes do polinômio p estão na região $\mathbb{D}_\alpha$ definida acima se, e somente se, o polinômio g dado por*

$$g(z) = p(z - \alpha)$$

for estável.

iii. A <u>raiz dominante</u> de um polinômio estável é a raiz mais à direita deste polinômio. Por exemplo, o polinômio

$$g(s) = (s+1)(s^2 + 4s + 8)$$

tem como raiz dominante $s = -1$ (quais são as outras raízes?). Discuta como o seu programa que implementa a Tabela de Routh pode ser combinado com uma estratégia busca binária para estimar a parte real da raiz dominante de um polinômio dado. Construa testes para validar seu código e ilustrar esta aplicação.

(b) **(Estabilidade de Sistemas Discretos)** Um sistema LTI a tempo discreto tipicamente é modelado por meio de uma recorrência linear com coeficientes constantes da forma

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \cdots + a_1 y[k-(n-1)] + a_0 y[k-n] = u[k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

De forma análoga ao caso contínuo, a estabilidade destes sistemas é assegurada analisando-se as raízes do em polinômio característico

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

para $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. No caso discreto, a região de estabilidade é

$$\mathbb{D}_d = \Big\{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z| < 1 \Big\},$$

isto é, a região de estabilidade é o interior do disco unitário. Portanto, para avaliarmos se o polinômio dado acima é estável sob a ótica discreta, precisamos ver se todas as suas raízes têm módulo menor do que 1. Esta motivação vem da busca por soluções da forma $f[k] = c\rho^k$ para a recorrência dada acima; soluções desta forma convergem para zero se, e apenas se, $|\rho| < 1$.

i. Mostre que a transformação bilinear

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

transforma o semiplano esquerdo aberto no interior do disco unitário. Em que curva o eixo imaginário é levado? Em que ponto o ponto $s = 0$ é levado?

ii. Use a transformação acima para provar o seguinte resultado:

Proposição 3 *Seja* p *um polinômio dado por*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. *Este polinômio tem todas as suas raízes na região* $\mathbb{D}_d$ *se, e apenas se, o numerador da função racional*

$$q(s) = p\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$$

for um polinômio estável (sob a ótica contínua).

Adapte o seu programa que implementa a Tabela de Routh para testar a estabilidade discreta de um polinômio dado. Use manipuladores algébricos ou convolução discreta para realizar as operações polinomiais. Gere exemplos para validar seu código e ilustrar esta aplicação.