1 Formulação do PLI

Iremos propor um PLI para o problema origem da redução, i.e., dado um grafo $G = (V, E)$, desejamos descobrir se existe um caminho hamiltoniano em G. Para isso, podemos modelar o problema como um PLI da seguinte forma:

Primeiro, crie um grafo direcionado $G' = (V \cup \{s, t\}, E')$, onde $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in V\} \cup \{(v, t) \mid v \in V\}$, i.e, dado $(u, v) \in E$, existem duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u) em G'. Além disso, s incide em todos os vértices de V, os quais, por sua vez, incidem em t.

É evidente que, se G' tiver um caminho hamiltoniano, ele deve iniciar em s e terminar em t. Portanto, se G' tiver um caminho hamiltoniano $P = (s, v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}, t)$, então G tem um caminho hamiltoniano $P' = (v_1, v_2, \ldots, v_{|V|})$.

Além disso, se G tiver um caminho hamiltoniano $P' = (v_1, v_2, \ldots, v_{|V|})$, então G' tem um caminho hamiltoniano $P = (s, v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}, t)$. Portanto, se G' não tiver um caminho hamiltoniano, G também não o tem. Assim, conclui-se que G tem um caminho hamiltoniano se, e somente se, G' tem um caminho hamiltoniano, então os problemas são equivalentes.

Diante disso, podemos modelar o problema de encontrar um caminho hamiltoniano em G como o seguinte PLI:

1.1 Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \in E' \text{ está no caminho,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1.2 PLI:

$$\max \sum_{(i,j) \in E'} x_{ij}$$

$$\text{s.a.:}$$

$$\sum_{(s,j) \in \delta^+(s)} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{(i,t) \in \delta^-(s)} x_{it} = 1$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1, \forall v \in V$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^-(i)} x_{ji} = 1, \forall v \in V$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq V, |S| \geq 2$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E'$$

1.3 Explicação

Desejamos maximizar o número de arestas no caminho, de forma que ele contenha o maior número de vértices possíveis. Para isso, a função objetivo é a soma de todas as variáveis x_{ij}, que representam as arestas que estão no caminho.

A primeira restrição garante que apenas uma aresta incide em s, ou seja, o caminho hamiltoniano começa em s. A segunda restrição garante que apenas uma aresta incide em t, ou seja, o caminho hamiltoniano termina em t.

Já a terceira e a quarta restrição garantem que cada vértice $v \in V$ tem exatamente uma aresta incidindo e uma aresta saindo dele, respectivamente. Ademais, a quinta restrição garante que o caminho hamiltoniano não possui subciclos (prevenção de subrotas), ou seja, não passa por um mesmo vértice mais de uma vez. Por fim, a última restrição garante que as variáveis são binárias.

1.4 Prova de corretude

Para demonstrar a correção, provaremos que um caminho P em G é hamiltoniano se, e somente se, existe uma solução viável do PLI com valor objetivo $|V|+1$.

($\Longrightarrow$) Dado um caminho hamiltoniano $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ em G, seja $P' = (s, v_1, v_2, \ldots, v_k, t)$ o caminho correspondente em G'. Construiremos uma solução para o PLI a partir de P':

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (v_i, v_j) \text{ é uma aresta em } P', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, em P', como s e t são as extremidades do caminho, apenas uma aresta "sai"de s e apenas uma incide em t, satisfazendo as duas primeiras restrições. Além disso, cada vértice $v_i \notin \{s, t\}$ deve ter arestas (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}) em P'. Como P' é um caminho, não há repetição de vértices, e portanto só existe uma aresta que incide em v_i e outra que sai de v_i, satisfazendo a terceira e a quarta restrições. Além disso, o caminho não possui subciclos, satisfazendo a quinta restrição.

O número de arestas dessa solução será:

$$\sum_{(i,j)\in P'} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in P'} x_{ij} + \sum_{(i,j)\notin P'} 0 = \sum_{(i,j)\in P'} x_{ij} + \sum_{(i,j)\notin P'} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in E'} x_{ij} = |V| + 1$$

O número de arestas é igual a $|V|+1$ pois P' passa por todos os $|V|+2$ vértices de G'. Portanto, a solução construída é viável.

($\Longleftarrow$) Dada uma solução viável X do PLI que aponta as arestas (v_i, v_j) selecionadas por $x_{ij} = 1$, construiremos um caminho hamiltoniano P em G a partir de X:

$$P' = (s, v_1, v_2, \ldots, v_k, t), \text{ onde } v_i, v_{i+1} \in P' \text{ se } x_{i(i+1)} = 1$$
$$P = P' - \{s, t\}$$

Para que P seja um caminho hamiltoniano, é necessário que P' seja um caminho em G' que comece em s e termine em t, visitando todos os vértices. Devido às restrições, sabemos que P' é um caminho, i.e., não há repetição de vértices (ciclos são impedidos devido à quinta restrição) e cada vértice que não é extremidade tem exatamente uma aresta incidindo e uma saindo dele. Em contrapartida, as extremidades s e t possuem apenas uma aresta saindo e incidindo nelas, respectivamente. Portanto, P' é um caminho hamiltoniano em G'.

Agora, é necessário provar que o número de arestas selecionadas é o mesmo:

$$\sum_{(i,j)\in E'} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in E' \wedge x_{ij}=1} 1 + \sum_{(i,j)\in E' \wedge x_{ij}=0} 0 = \sum_{(i,j)\in E' \wedge x_{ij}=1} 1 = \sum_{(i,j)\in P'} x_{ij} = |V| + 1$$

Como o caminho é hamiltoniano se e somente se o PLI tiver uma solução com valor objetivo $|V|+1$, finalizamos a demonstração de que o PLI é correto.

1.5 Solução para pequena instância