Análise da Complexidade do jogo UNO

Henrique Parede de Souza
Pedro Brasil Barroso
Pedro Damasceno Vasconcellos
Vinicius Patriarca Miranda Miguel - RA260721

3 de dezembro de 2024

Sumário

1 Introdução

Para essa análise nos restringiremos a analisar apenas o uno com uma pessoa, que iremos modelar como um grafo bipartido. Um grafo bipartido é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos, de modo que não há arestas entre vértices do mesmo conjunto.

Para isso iremos primeiro definir uma notação matemática para o jogo.

1.1 Notação

Cartas

No jogo cada carta é representada por um par ordenado (c, t), onde c é a cor da carta e t é o tipo da carta. Onde $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, onde 0 é a cor vermelha, 1 é a cor amarela, 2 é a cor verde e 3 é a cor azul. E 0 é a carta 1, 1 é a carta 2, 2 é a carta 3, ..., onde 9 é a carta de bloqueio, 10 é a carta pular, 11 é a carta inverter, e 12 é a carta +2.

Jogada

Em uma determinada jogada, o jogador pode jogar uma carta que seja igual à carta que está na mesa, ou seja, que tenha a mesma cor ou o mesmo tipo. Caso contrário, ele pode comprar uma carta do monte e, se a carta comprada puder ser jogada, ele pode jogá-la.

Descarte

Quando um jogador descarta uma carta, ele deve colocá-la no topo da pilha de descarte. A carta no topo da pilha de descarte determina as regras para a próxima jogada. Se a pilha de descarte estiver vazia, qualquer carta pode ser jogada para iniciar a pilha.

Em outras palavras, uma carta $x_i = (c, t)$ pode ser jogada se a carta $x_{i-1} = (c', t')$ no topo da pilha de descarte satisfizer uma das seguintes condições:

- $(c = c') \vee (t = t')$

Regras

Vamos definir as regras do jogo usando a seguinte notação matemática:

- Seja C o conjunto de todas as cartas, onde $C = \{(c, t) \mid c \in \{0, 1, 2, 3\}, t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}$.
- Seja D a pilha de descarte, onde $D = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$ e $d_i \in C$ para todo i.
- Seja M o monte de compra, onde $M = [m_1, m_2, \ldots, m_k]$ e $m_i \in C$ para todo i.
- Seja P o conjunto de jogadores, onde $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$.
- Seja $H(p)$ a mão de cartas do jogador p, onde $H(p) \subseteq C$.

As regras do jogo podem ser descritas da seguinte forma:

1. Um jogador $p \in P$ pode jogar uma carta $c \in H(p)$ se $c = (c_1, t_1)$ e a carta no topo da pilha de descarte $d_n = (c_2, t_2)$, **se uma carta corresponde à outra**, em outra palabres, satisfaz uma das seguintes condições:
$$c_1 = c_2 \vee t_1 = t_2 \tag{1}$$
2. Se o jogador não puder jogar uma carta, ele deve comprar uma carta do monte M. Se a carta comprada puder ser jogada, ele pode jogá-la imediatamente.
3. Quando um jogador joga uma carta, essa carta é adicionada ao topo da pilha de descarte D.

2 UNO-1 Grafo (p=1)

Quando o número de jogadores é $p = 1$, uma carta t' corresponde a t se, e somente se, t corresponde a t'. Isso torna a relação de "correspondência" simétrica, e o grafo UNO-1 pode ser visto como não direcionado. Para esse problema não consideramos o monte de compra e a pilha de descarte, basicamente queremos saber se existe uma sequencia de cartas que o jogador possa jogar de modo que não sobre nenhuma carta em sua mão.

2.1 Detalhamento

Para entender melhor, considere as seguintes definições e propriedades:

- **Carta:** Uma carta t é um elemento do conjunto de cartas disponíveis no jogo UNO.
- **Correspondência:** Dizemos que uma carta t' corresponde a uma carta t se elas podem ser jogadas uma após a outra de acordo com as regras do jogo.
- **Simetria:** A relação de correspondência é simétrica, ou seja, se t' corresponde a t, então t também corresponde a t'.
- **Grafo UNO-1:** Um grafo onde os vértices representam as cartas e as arestas representam a relação de correspondência entre as cartas.

2.2 Propriedades do Grafo UNO-1

- **Não direcionado:** Devido à simetria da relação de correspondência, o grafo UNO-1 é não direcionado. Isso significa que se existe uma aresta entre t e t', então também existe uma aresta entre t' e t.
- **Conectividade:** O grafo pode ser analisado em termos de componentes conectados, onde cada componente representa um conjunto de cartas que podem ser jogadas em sequência.

2.3 Exemplo

Considere o seguinte exemplo de jogo de UNO de apenas uma pessoa, com $C = \{(1,3),(2,2),(2,3),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

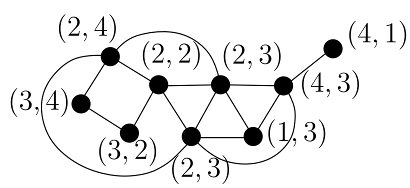
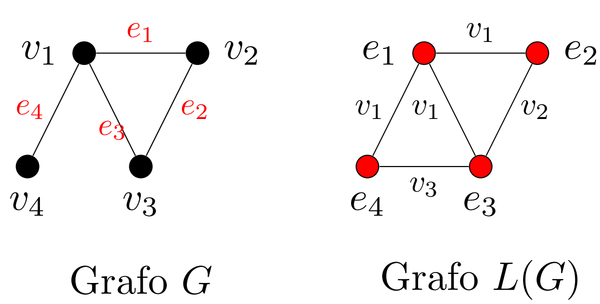


Figura 1: Um exemplo de grafo UNO-1

Aqui investigamos algumas propriedades básicas dos grafos UNO-1. Em grafos UNO-1, todos os vértices cujas cartas correspondentes possuem a mesma cor ou o mesmo número formam uma clique[1], em outra palavras, todos os vértices de mesma cor ou número estão conectados.

O grafo de linha $L(G)$ de um grafo dado G é o grafo cujos vértices são as arestas de G, e $\{e, e'\} \in E(L(G))$ para $e, e' \in V(L(G)) = E(G)$ se e somente se e e e' compartilham um vértice em G.



foi colocado rótulos para facilitar a visualização, mas não é necessários para a definição do grafo.

Como uma carta de uno é um par ordenado de uma cor e um número, as cartas de UNO correspondem ao conjunto de arestas de um grafo bipartido, cujos conjuntos partites são cores e números. Assim, um grafo UNO-1 representa a adjacência de arestas (correspondentes às cartas) de um grafo bipartido. Esses argumentos levam ao seguinte fato.

[1]Uma clique em um grafo é um subconjunto de seus vértices tal que todos os vértices do subconjunto são adjacentes entre si. Em outras palavras, é um grafo completo induzido pelo subconjunto de vértices.

Lema 1

se g é um grafo bipartido, então $l(g)$ é um grafo de linha.

Prova do Lema 1

Demonstração. seja $g = (v, e)$ um grafo bipartido com partições V_1 e V_2. O grafo de linha $L(G)$ é definido como o grafo cujos vértices são as arestas de G e duas arestas em $L(G)$ são adjacentes se e somente se compartilham um vértice em G.
como g é bipartido, cada aresta $e \in E$ conecta um vértice de V_1 a um vértice de V_2. Portanto, duas arestas e_1 e e_2 em G compartilham um vértice se e somente se uma extremidade de e_1 está em V_1 e a outra extremidade está em V_2, e o mesmo vale para e_2.
assim, $l(g)$ é um grafo onde os vértices representam as arestas de G e duas arestas são adjacentes se compartilham um vértice em G. Portanto, $L(G)$ é um grafo de linha. □

Corolário 1

Corollary 1. *se g é um grafo bipartido, então o problema do Caminho Hamiltoniano em $L(G)$ é NP-completo.*

Prova do Corolário 1

Demonstração. segue diretamente do teorema 1, que afirma que o problema do Caminho Hamiltoniano para grafos de linha de grafos bipartidos é NP-completo. □

Teorema 1

o problema do caminho hamiltoniano para grafos de linha de grafos bipartidos é NP-completo.

portanto, como corolário deste teorema, vemos que UNO é um problema difícil mesmo para um único jogador.

Teorema 2

uno-1 é np-completo.

melhor essa prova... ponto IMPORTANTE DO TRABALHO
não sei se vale a pena colOCAR AS PROVAS EM ANEXOS

para fins de completude, fornecemos uma prova direta e concisa do Teorema 2. Em contraste, a prova em [2] depende adicionalmente de [1].

demostração. um grafo cúbico é um grafo no qual todo vértice tem grau 3. Reduzimos do problema do Caminho Hamiltoniano para grafos cúbicos (HP-C), que é conhecido por ser NP-completo [3].
considere uma instância g de hp-c. transformamos G em um grafo G', onde:

$$v(g') = \{(x, e) \mid x \in v(g), e = \{x, y\} \in E(G)\}$$

$$e(g') = \{((x, e), (y, e)) \mid e = \{x, y\} \in E(G)\} \cup \{((x, e_i), (x, e_j)) \mid e_i \neq e_j\}$$

essa transformação divide qualquer vértice $x \in V(G)$ em três novos vértices $(x, e_1), (x, e_2), (x, e_3)$ para formar uma clique (triângulo), enquanto cada aresta e_i (i=1,2,3) incidente a x torna-se incidente a um novo vértice (x, e_i). A Figura 2 ilustra este "gadget"de nó.

em seguida, preparamos o conjunto de cartas C do jogador de Uno-1 como o conjunto $V(G')$, onde a cor e o número de (x, e) são x e e, respectivamente. Podemos facilmente confirmar que existe uma aresta $e = (t, t')$ em G' se e somente se t e t' correspondem. Assim, G' é o grafo UNO-1 correspondente ao conjunto de cartas C.

agora basta mostrar que existe um caminho hamiltoniano em G se, e somente se, existe um caminho Hamiltoniano em G'. □

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

O problema do Caminho Hamiltoniano (HP-C) consiste em encontrar um caminho em um grafo que passe por todos os vértices exatamente uma vez. Este problema é bem conhecido por ser NP-completo em diversos tipos de grafos, e será o ponto de partida para a redução que será feita no caso do Uno-1, já que os probelmas são bem semelhante, já que queremos descartar todas as cartas exatamente uma vez.

O objetivo dessa redução é provar que Uno-1 é NP-completo. A ideia principal é reduzir o Problema do Caminho Hamiltoniano para grafos cúbicos (HP-C) para o problema Uno-1, ou seja, mostrar que, dado um grafo cúbico G (onde cada vértice tem grau 3), podemos transformá-lo em um grafo G' tal que a existência de um caminho Hamiltoniano em G é equivalente à existência de um caminho Hamiltoniano em G'. Se conseguirmos isso, então sabemos que o problema de encontrar um caminho Hamiltoniano em Uno-1 é tão difícil quanto o problema do Caminho Hamiltoniano em grafos cúbicos, que é NP-completo, ou seja, depois basta provar que existe dado um conjunto de vétices é possível verificar em tempo polinimial se esses vértices forma um caminho hamiltoniano e demostramos que o problema do Uno-1 é NP-completo.

Transformação de G em G'(De um grafo cubico para de Uno-1):

Agora vamos mostrar como é feita a transformação do grafo G (um grafo cúbico) para o grafo G' (o grafo correspondente ao jogo Uno-1). A transformação que é feita tem como objetivo alterar a estrutura de G de modo que cada vértice x de G seja substituído por três vértices em G', formando um clique (ou triângulo). Para faciliar o entendimento queremos fazer o que é mostrado na Figura 2. Vamos ver como isso é feito:

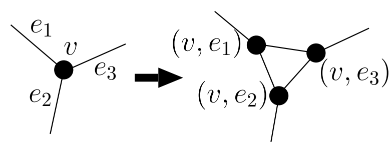


Figura 2: um "gadget"de nó divide um vértice em três vértices para formar um triângulo.

- Para cada vértice $v \in G$ e para cada aresta $e = \{v, y\} \in E(G)$, criamos um vértice (v, e) em G'. Ou seja, cada aresta e de G gera um vértice no grafo G'.
- As arestas de G' são formadas de duas maneiras:
  - Para cada aresta $e = \{x, y\} \in E(G)$, adiciona-se uma aresta entre (x, e) e (y, e) em G'.
  - Para cada vértice $v \in V(G)$, criam-se arestas entre os vértices $(v, e_1), (v, e_2), (v, e_3)$ para todas as arestas e_i incidentes a v. Como G é cúbico, ou seja, cada vértice tem grau 3, então v será substituído por três vértices em G', formando um triângulo, com arestas entre $(v, e_1), (v, e_2), (v, e_3)$.

Construção do Conjunto de Cartas de Uno-1:

Depois de criar o grafo G', é necessário preparar o conjunto de *cartas de Uno-1*, que é composto pelos vértices do grafo G'. Cada carta de Uno-1 tem:

- O **número** da carta que corresponde ao **x** do vértice (x, e).
- A **cor** da carta que corresponde á aresta **e** ou seja, a cor é associada ao vértice original x de G.

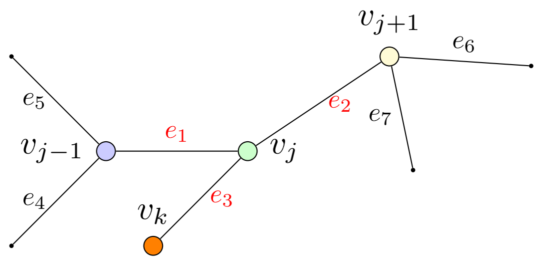
Podemos confirmar facilmente que existe uma aresta $e = (t, t')$ em G' se, e somente se, t e t' combinam, já que só existem duas possibilidades, para a aresta e, ou ela está em uma clique ou ela está ligando duas cliques. Caso ela pertença a mesma clique, isso siginica que elas possuem a mesmo número e se elas estão entre clique significa que elas possuema mesma cor. Dois vértices t, t' em G' combinam se eles representam cartas que podem ser jogadas consecutivamente no Uno-1, ou seja, compartilham ao menos um atributo (cor ou número). Em expreções matemáticas isso é garantido e expresso pelas seguintes condições:

- $t = (x, e)$ e $t' = (y, e)$, onde ambos os vértices estão associados à mesma aresta e de G, ou
- $t = (x, e_i)$ e $t' = (x, e_j)$, onde t e t' pertencem ao triângulo criado para o vértice x em G.

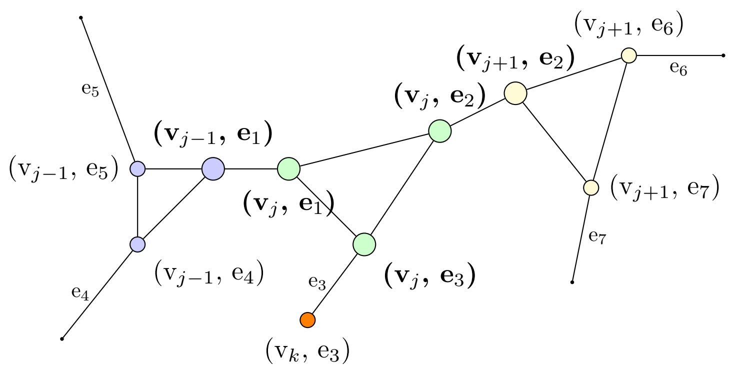
Assim, G' é o grafo correspondente ao conjunto de cartas C, onde cada vértice (v, e) em G' representa uma carta associada ao vértice v e à aresta e de G, e as arestas em G' modelam as combinações válidas de cartas jogáveis.

Correlacionando os Caminhos Hamiltonianos:

Agora, iremos mostrar a relação entre os caminhos Hamiltonianos em G e G'. Primeiro, suponha que existe um Caminho Hamiltoniano $P = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ em G. Construímos um Caminho Hamiltoniano P' em G' com base em P da seguinte forma:



Grafo G



Transformação de v_{j-1}, v_j, v_{j+1} em G'

Pode-se verificar que o caminho P' em G' assim formado é Hamiltoniano.

Agora, para o caso inverso, suponha que existe um Caminho Hamiltoniano P' no grafo G'. Se P' visita os vértices (v, e_i) $(i = 1, 2, 3)$ consecutivamente em qualquer ordem, como mostrado em Figura 3 (a1) ou (a2), então P' pode ser diretamente transformado em um Caminho Hamiltoniano P em G, bastando mapear (v, e_i) para v.

Se P' não visitar (v, e_i) consecutivamente, existem dois casos, como ilustrado em Figura 3 (b') e (c'). Nesses casos, pelo menos uma extremidade de P' é da forma (v, e_i). Podemos reorganizar P' para garantir que os vértices $(v, e_i), (v, e_j), (v, e_k)$ sejam visitados consecutivamente, como mostrado em Figura 3 (b) e (c), sem afetar a Hamiltonicidade do caminho.

Assim, demonstramos que P' pode ser transformado em um Caminho Hamiltoniano em G, concluindo a equivalência entre os dois problemas.

Com esses argumentos, mostramos que a existência de um caminho Hamiltoniano em G é equivalente à existência de um caminho Hamiltoniano em G'. Como o problema do Caminho Hamiltoniano em grafos cúbicos é NP-completo, isso implica que o problema Uno-1 também é NP-completo. Portanto, Uno-1 é NP-completo.

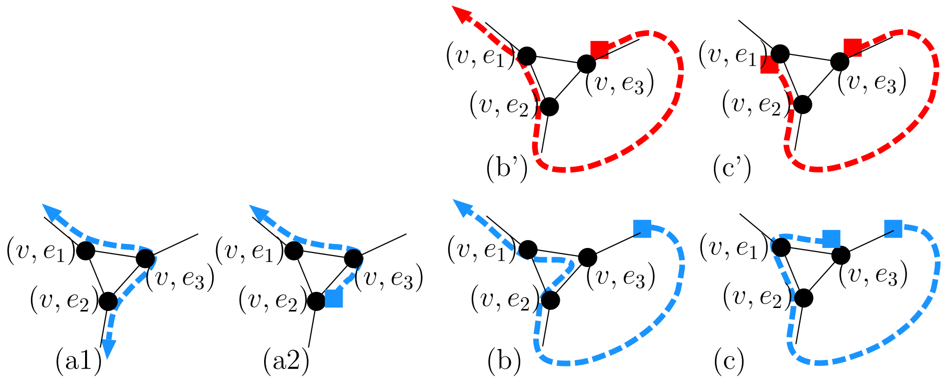


Figura 3: Possibilidade de caminhos passando por cada nó ”gadget”.

Referências

[1] A. A. Bertossi. The edge hamiltonian path problem is np-complete. *Information Processing Letters*, 13:157–159, 1981.

[2] A. S. Fraenkel, E. R. Scheinerman, and D. Ullman. Undirected edge geography. *Theoretical Computer Science*, 112:371–381, 1993.

[3] M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan. The planar hamiltonian circuit is np-complete. *SIAM Journal of Computing*, 5:704–714, 1976.