

Análise da Complexidade do jogo UNO

Henrique Parede de Souza

Pedro Brasil Barroso

Pedro Damasceno Vasconcellos

Vinicius Patriarca Miranda Miguel - RA260721

3 de dezembro de 2024

Sumário

| | | |
|----------|---------------------------------------|----------|
| 1 | Introdução | 2 |
| 1.1 | Notação | 2 |
| 2 | UNO-1 Grafo (p=1) | 3 |
| 2.1 | Detalhamento | 3 |
| 2.2 | Propriedades do Grafo UNO-1 | 3 |
| 2.3 | Exemplo | 3 |

1 Introdução

Para essa análise nos restringiremos a analisar apenas o UNO com uma pessoa, que iremos modelar a partir de um grafo bipartido. Para facilitar o entendimento, iremos dar uma visão geral do passo a passo da prova da NP-completude do UNO-1. Partiremos de um grafo bipartido (cor e número), onde as arestas representam as cartas. Transformaremos esse grafo em um grafo de linha (assim, as arestas passam a ser representadas por vértices).

No grafo de linha, os vértices correspondem às cartas do jogo, e duas cartas serão conectadas por uma aresta caso sejam jogáveis consecutivamente de acordo com as regras do UNO (mesma cor ou mesmo número). Em seguida, mostraremos como a resolução do problema UNO-1 está relacionada a encontrar um caminho hamiltoniano nesse grafo de linha.

A partir daí, provaremos que o problema de decidir se existe uma sequência válida de cartas para vencer o UNO-1 é NP-completo, utilizando uma redução de um problema clássico já conhecido como NP-completo.

Para isso iremos primeiro definir uma notação matemática para o jogo, que permitirá essa modelagem.

1.1 Notação

Cartas

No jogo cada carta é representada por um par ordenado (c, n) , onde c é a cor da carta e n é o número da carta. Onde $c \in \{0, 1, 2, 3\}$, onde 0 é a cor vermelha, 1 é a cor amarela, 2 é a cor verde e 3 é a cor azul, e $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, tal que 0 é a carta 1, 1 é a carta 2, 2 é a carta 3, ... e 8 e 9.

Jogada

Em uma determinada jogada, o jogador pode jogar uma carta que seja igual à carta que está na mesa, ou seja, que tenha a mesma cor ou o mesmo tipo. Caso contrário, ele pode comprar uma carta do monte e, se a carta comprada puder ser jogada, ele pode jogá-la.

Descarte

Quando um jogador descarta uma carta, ele deve colocá-la no topo da pilha de descarte. A carta no topo da pilha de descarte determina as regras para a próxima jogada. Se a pilha de descarte estiver vazia, qualquer carta pode ser jogada para iniciar a pilha.

Em outras palavras, uma carta $x_i = (c, n)$ pode ser jogada se a carta $x_{i-1} = (c', n')$ no topo da pilha de descarte satisfizer uma das seguintes condições:

- $(c = c') \vee (n = n')$

Regras

Vamos definir as regras do jogo usando a seguinte notação matemática:

- Seja C o conjunto de todas as cartas, onde $C = \{(c, n) \mid c \in \{0, 1, 2, 3\}, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$.
- Seja D a pilha de descarte, onde $D = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ e $d_i \in C$ para todo i .
- Seja M o monte de compra, onde $M = [m_1, m_2, \dots, m_k]$ e $m_i \in C$ para todo i .
- Seja P o conjunto de jogadores, onde $P = \{p_1, p_2, \dots, p_j\}$.
- Seja $H(p)$ a mão de cartas do jogador p , onde $H(p) \subseteq C$.

As regras do jogo podem ser descritas da seguinte forma:

1. Um jogador $p \in P$ pode jogar uma carta $c \in H(p)$ se $c = (c_1, t_1)$ e a carta no topo da pilha de descarte $d_n = (c_2, t_2)$, **se uma carta corresponde à outra**, em outras palavras, satisfaz uma das seguintes condições:

$$c_1 = c_2 \vee t_1 = t_2 \tag{1}$$

2. Se o jogador não puder jogar uma carta, ele deve comprar uma carta do monte M . Se a carta comprada puder ser jogada, ele pode jogá-la imediatamente.
3. Quando um jogador joga uma carta, essa carta é adicionada ao topo da pilha de descarte D .

2 UNO-1 Grafo ($p=1$)

Quando o número de jogadores é $p = 1$, uma carta t' corresponde a t se, e somente se, t corresponde a t' . Isso torna a relação de “correspondência” simétrica, e o grafo UNO-1 pode ser visto como não direcionado. Para esse problema não consideramos o monte de compra e a pilha de descarte, basicamente queremos saber se existe uma sequencia de cartas que o jogador possa jogar de modo que não sobre nenhuma carta em sua mão.

2.1 Detalhamento

Para entender melhor, considere as seguintes definições e propriedades:

- **Carta:** Uma carta t é um elemento do conjunto de cartas disponíveis no jogo UNO.
- **Correspondência:** Dizemos que uma carta t' corresponde a uma carta t se elas podem ser jogadas uma após a outra de acordo com as regras do jogo.
- **Simetria:** A relação de correspondência é simétrica, ou seja, se t' corresponde a t , então t também corresponde a t' .
- **Grafo UNO-1:** Um grafo onde os vértices representam as cartas e as arestas representam a relação de correspondência entre as cartas.

2.2 Propriedades do Grafo UNO-1

- **Não direcionado:** Devido à simetria da relação de correspondência, o grafo UNO-1 é não direcionado. Isso significa que se existe uma aresta entre t e t' , então também existe uma aresta entre t' e t .
- **Conectividade:** O grafo pode ser analisado em termos de componentes conectados, onde cada componente representa um conjunto de cartas que podem ser jogadas em sequência.

2.3 Exemplo

Considere o seguinte exemplo de jogo de UNO de apenas uma pessoa, com $C = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$

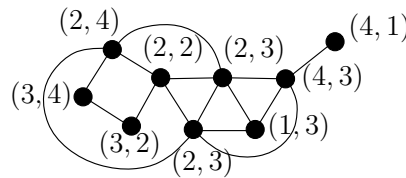


Figura 1: Um exemplo de grafo UNO-1

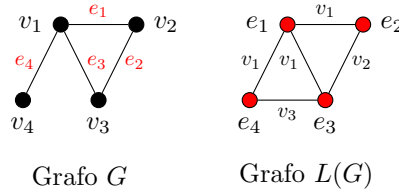
Aqui investigamos algumas propriedades básicas dos grafos UNO-1. Em grafos UNO-1, todos os vértices cujas cartas correspondentes possuem a mesma cor ou o mesmo número formam uma clique¹, em outras palavras, todos os vértices de mesma cor ou número estão conectados.

O *grafo de linha* $L(G)$ de um grafo dado G é definido como o grafo cujos vértices correspondem às arestas de G . Formalmente:

- Os vértices de $L(G)$ são as arestas de G , ou seja, $V(L(G)) = E(G)$.

¹Uma clique em um grafo é um subconjunto de seus vértices tal que todos os vértices do subconjunto são adjacentes entre si. Em outras palavras, é um grafo completo induzido pelo subconjunto de vértices.

- Duas arestas $e, e' \in E(G)$ formam uma aresta $\{e, e'\} \in E(L(G))$ se, e somente se, e e e' compartilham um vértice em G .



foi colocado rótulos para facilitar a visualização, mas não é necessários para a definição do grafo.

Como uma carta de UNO é definida como um par ordenado de uma **cor** c e um **número** n , podemos modelar o conjunto de todas as cartas de UNO como um grafo bipartido G , onde os dois conjuntos partites representam as **cores** e os **números** disponíveis no baralho.

- Cada carta (c, n) pode ser interpretada como uma **aresta** que conecta um vértice do conjunto de cores ao vértice correspondente no conjunto de números.
- O grafo bipartido G então possui como vértices todos os elementos possíveis de cores e números, e suas arestas representam todas as combinações válidas de cor e número.

Um grafo UNO-1 é, portanto, um modelo para representar a adjacência entre essas arestas (as cartas) no grafo bipartido G . Isso significa que duas cartas são adjacentes no grafo UNO-1 se elas compartilham a mesma cor ou o mesmo número. Em outras palavras:

- O grafo UNO-1 não é o próprio grafo bipartido G , mas sim o **grafo de linha** $L(G)$ do grafo bipartido.
- No grafo de linha $L(G)$, os vértices correspondem às arestas do grafo bipartido G , e duas arestas de G são conectadas por uma aresta em $L(G)$ se compartilharem um vértice em G .

Essa construção nos permite mapear o problema de encontrar uma sequência válida de jogadas no UNO-1 para o problema de encontrar um caminho hamiltoniano no grafo UNO-1. Assim, o problema se traduz em encontrar uma ordem para visitar todas as cartas (vértices do grafo UNO-1), respeitando as regras de adjacência do UNO (mesma cor ou número).

Esses argumentos estabelecem o seguinte fato fundamental:

Fato: Um grafo é UNO-1 se, e somente se, ele é um grafo de linha de um grafo bipartido.

Lema 1

Se G é um grafo bipartido, então $L(G)$ é um grafo de linha.

Prova do Lema 1

Demonstração. seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com partições V_1 e V_2 . O grafo de linha $L(G)$ é definido como o grafo cujos vértices são as arestas de G e duas arestas em $L(G)$ são adjacentes se e somente se compartilham um vértice em G .

como G é bipartido, cada aresta $e \in E$ conecta um vértice de V_1 a um vértice de V_2 . Portanto, duas arestas e_1 e e_2 em G compartilham um vértice se e somente se uma extremidade de e_1 está em V_1 e a outra extremidade está em V_2 , e o mesmo vale para e_2 .

assim, $L(G)$ é um grafo onde os vértices representam as arestas de G e duas arestas são adjacentes se compartilham um vértice em G . Portanto, $L(G)$ é um grafo de linha. \square

Corolário 1

Corollary 1. Se G é um grafo bipartido, então o problema do Caminho Hamiltoniano em $L(G)$ é NP-completo.

Prova do Corolário 1

Demonstração. segue diretamente do Teorema 1, que afirma que o problema do Caminho Hamiltoniano para grafos de linha de grafos bipartidos é NP-completo. \square

Teorema 1

O problema do caminho hamiltoniano para grafos de linha de grafos bipartidos é NP-completo.

O problema do Caminho Hamiltoniano (HP-C) consiste em encontrar um caminho em um grafo que passe por todos os vértices exatamente uma vez. Este problema é bem conhecido por ser NP-completo em diversos tipos de grafos, e será o ponto de partida para a redução que será feita no caso do Uno-1, já que os problemas são bem semelhantes, já que queremos descartar todas as cartas exatamente uma vez.

O objetivo dessa redução é provar que Uno-1 é NP-completo. A ideia principal é reduzir o Problema do Caminho Hamiltoniano para grafos cúbicos (HP-C) para o problema Uno-1, ou seja, mostrar que, dado um grafo cúbico G (onde cada vértice tem grau 3), podemos transformá-lo em um grafo G' tal que a existência de um caminho Hamiltoniano em G é equivalente à existência de um caminho Hamiltoniano em G' . Se conseguirmos isso, então sabemos que o problema de encontrar um caminho Hamiltoniano em Uno-1 é tão difícil quanto o problema do Caminho Hamiltoniano em grafos cúbicos, que é NP-completo, ou seja, depois basta provar que existe dado um conjunto de vértices é possível verificar em tempo polinomial se esses vértices forma um caminho hamiltoniano e demostramos que o problema do Uno-1 é NP-completo.

Transformação de G em G' (De um grafo cubico para de Uno-1):

Agora vamos mostrar como é feita a transformação do grafo G (um grafo cúbico) para o grafo G' (o grafo correspondente ao jogo Uno-1). A transformação que é feita tem como objetivo alterar a estrutura de G de modo que cada vértice x de G seja substituído por três vértices em G' , formando um clique (ou triângulo). Para facilitar o entendimento queremos fazer o que é mostrado na Figura 2. Vamos ver como isso é feito:

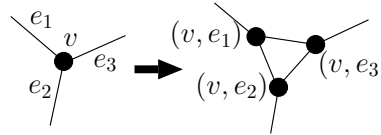


Figura 2: um "gadget" de nó divide um vértice em três vértices para formar um triângulo.

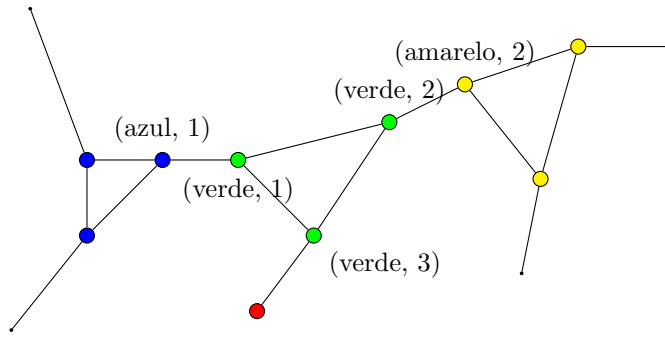
- Para cada vértice $v \in G$ e para cada aresta $e = \{v, y\} \in E(G)$, criamos um vértice (v, e) em G' . Ou seja, cada aresta e de G gera um vértice no grafo G' .
- As arestas de G' são formadas de duas maneiras:
 - Para cada aresta $e = \{x, y\} \in E(G)$, adiciona-se uma aresta entre (x, e) e (y, e) em G' .
 - Para cada vértice $v \in V(G)$, criam-se arestas entre os vértices $(v, e_1), (v, e_2), (v, e_3)$ para todas as arestas e_i incidentes a v . Como G é cúbico, ou seja, cada vértice tem grau 3, então v será substituído por três vértices em G' , formando um triângulo, com arestas entre $(v, e_1), (v, e_2), (v, e_3)$.

Construção do Conjunto de Cartas de Uno-1:

Depois de criar o grafo G' , é necessário preparar o conjunto de *cartas de Uno-1*, que é composto pelos vértices do grafo G' . Cada carta de Uno-1 tem:

- A **cor** da carta que corresponde ao **x** do vértice (x, e) .
- O **numero** da carta que corresponde á aresta **e**.

Para exemplificar essa construção, olhe o grafo da Figura 2.3:



Uma possível interpretação de G' para facilitar o entendimento

Podemos confirmar facilmente que existe uma aresta $e = (t, t')$ em G' se, e somente se, t e t' combinam, já que só existem duas possibilidades, para a aresta e , ou ela está em uma clique ou ela está ligando duas cliques. Caso ela pertença a mesma clique, isso significa que elas possuem a mesma cor e se elas estão entre cliques significa que elas possuem a mesma cor. Dois vértices t, t' em G' combinam se eles representam cartas que podem ser jogadas consecutivamente no Uno-1, ou seja, compartilham ao menos um atributo (cor ou número). Em expressões matemáticas isso é garantido e expresso pelas seguintes condições:

- $t = (x, e)$ e $t' = (y, e)$, onde ambos os vértices estão associados à mesma aresta e de G , ou
- $t = (x, e_i)$ e $t' = (x, e_j)$, onde t e t' pertencem ao triângulo criado para o vértice x em G .

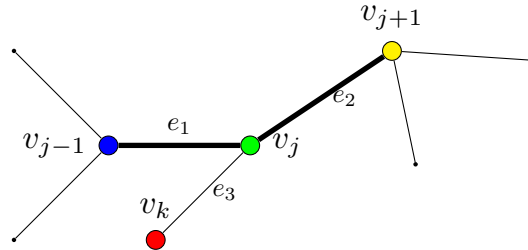
Assim, G' é o grafo correspondente ao conjunto de cartas C , onde cada vértice (v, e) em G' representa uma carta associada ao vértice v e à aresta e de G , e as arestas em G' modelam as combinações válidas de cartas jogáveis.

Correlacionando os Caminhos Hamiltonianos:

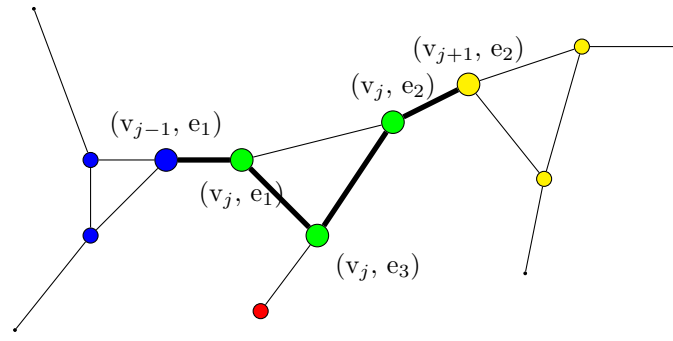
Agora, iremos mostrar a relação entre os caminhos Hamiltonianos em G e G' . Primeiro, suponha que existe um Caminho Hamiltoniano $P = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ em G . Construímos um Caminho Hamiltoniano P' em G' com base em P da seguinte forma:

Se há um Caminho Hamiltoniano em G , então há um Caminho Hamiltoniano em G' :

- Se existe um caminho Hamiltoniano em G , vamos construir um caminho Hamiltoniano correspondente em G' .
- Para cada aresta $e = \{v_{i-1}, v_i\}$ no caminho Hamiltoniano P de G , criamos uma sequência de vértices em G' . A sequência de vértices será formada pelos vértices $(v_{i-1}, e1), (v_i, e1), (v_i, e2), (v_i, e3), (v_{i+1}, e2)$.
- O caminho Hamiltoniano em G' é formado pela sequência dos vértices que correspondem a cada aresta de G .



Grafo G



Transformação de v_{j-1}, v_j, v_{j+1} em G'

Pode-se verificar que o caminho P' em G' assim formado é Hamiltoniano.

Agora, para o caso inverso, suponha que existe um Caminho Hamiltoniano P' no grafo G' . Se P' visita os vértices (v, e_i) ($i = 1, 2, 3$) consecutivamente em qualquer ordem, como mostrado em Figura 3 (a1) ou (a2), então P' pode ser diretamente transformado em um Caminho Hamiltoniano P em G , bastando mapear (v, e_i) para v .

Se P' não visitar (v, e_i) consecutivamente, existem dois casos, como ilustrado em Figura 3 (b') e (c'). Nesses casos, pelo menos uma extremidade de P' é da forma (v, e_i) . Podemos reorganizar P' para garantir que os vértices $(v, e_i), (v, e_j), (v, e_k)$ sejam visitados consecutivamente, como mostrado em Figura 3 (b) e (c), sem afetar a Hamiltonicidade do caminho.

Assim, demonstramos que P' pode ser transformado em um Caminho Hamiltoniano em G , concluindo a equivalência entre os dois problemas.

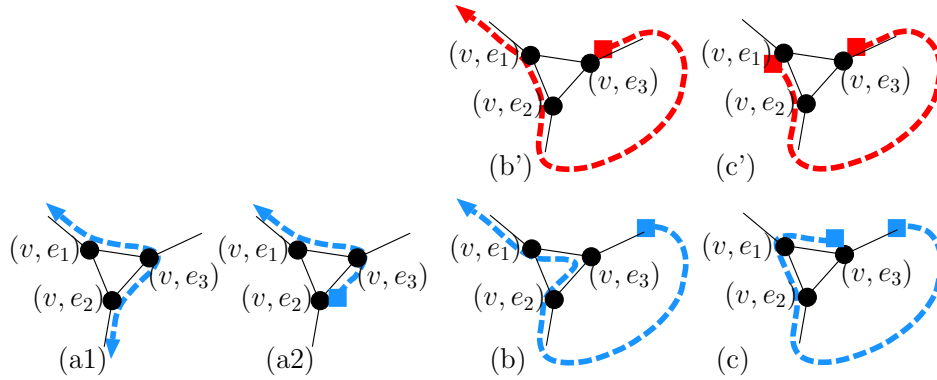


Figura 3: Possibilidade de caminhos passando por cada nó "gadget".

Com esses argumentos, mostramos que a existência de um caminho Hamiltoniano em G é equivalente à existência de um caminho Hamiltoniano em G' . Como o problema do Caminho Hamiltoniano em grafos cúbicos é NP-completo, isso implica que o problema Uno-1 também é NP-completo. Portanto, Uno-1 é NP-completo.