Autotransformador

Vinícius Lagrota Rodrigues da Costa

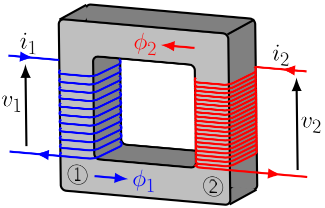
Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora

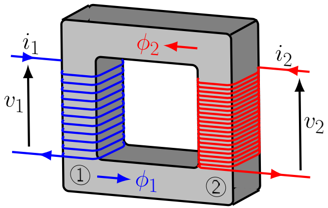
14 de Janeiro de 2018

Sumário

Conceito

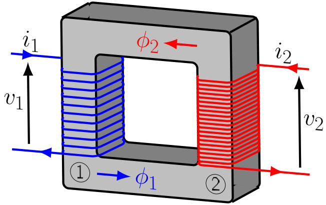
- Uma corrente variante circulando na bobina 1 gera um fluxo magnético que também enlaça a bobina 2 e gera nesta uma tensão.
- O inverso também é verdadeiro.
- Fenômeno conhecido como **indução mútua**.
- A tensão induzida é proporcional à taxa de variação do fluxo magnético.





Conceito

- Os fluxos produzidos (ϕ_1 e ϕ_2) estão ambos no sentido anti-horário $\Rightarrow$ acoplamento mútuo tende a aumentar a aumentar a intensidade das tensões induzidas.
- Os fluxos magnéticos são completamente compreendidos definidos pelas correntes i_1 e i_2 variáveis no tempo.

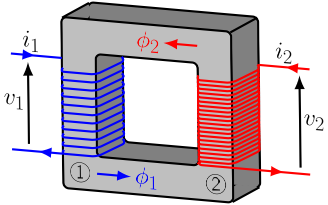


Conceito

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial i_2} di_2 = d\phi_1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial i_2} di_2 = d\phi_2 \end{cases} \tag{1}$$

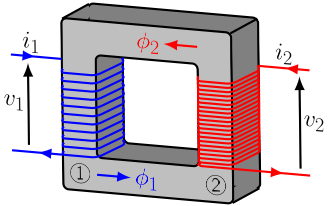
$$\begin{cases} \left(N_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial i_1}\right) \frac{di_1}{dt} + \left(N_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial i_2}\right) \frac{di_2}{dt} = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \\ \left(N_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial i_1}\right) \frac{di_1}{dt} + \left(N_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial i_2}\right) \frac{di_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \end{cases} \tag{2}$$



Conceito

$$\begin{cases} \left(N_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial i_1}\right) \frac{di_1}{dt} + \left(N_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial i_2}\right) \frac{di_2}{dt} = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \\ \left(N_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial i_1}\right) \frac{di_1}{dt} + \left(N_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial i_2}\right) \frac{di_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v_1 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = v_2 \end{cases} \tag{3}$$



Conceito

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v_1 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = v_2 \end{cases} \tag{3}$$

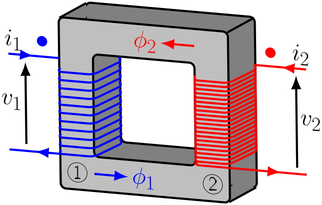
Na qual L_1 e L_2 são as indutâncias próprias das bobinas 1 e 2 e M é a indutância mútua. Note que:

$$M = N_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial i_2} = N_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial i_1} \tag{4}$$

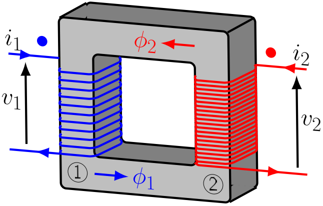
Sumário

Notação do ponto

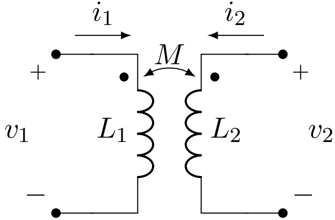
- Utilizado para determinar se as indutâncias próprias e mútuas são somadas ou subtraídas.
- Não é conveniente mostrar essas direções em circuitos elétricos $\Rightarrow$ utiliza-se a **notação do ponto**.



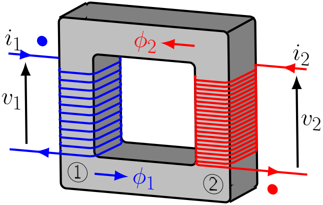
Correntes entram no ponto $\Rightarrow$ Fluxo magnéticos somadas.



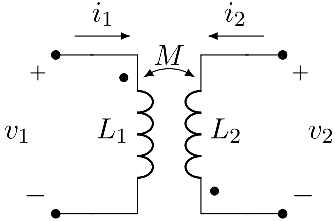
$\Rightarrow$



Uma das correntes não entra no ponto $\Rightarrow$ Fluxo magnéticos subtraídos.



$\Rightarrow$



Sumário

1. Recapitulação
   - Indução mútua
   - Notação do ponto
   - Transformador Real
   - Transformador Ideal
2. Autotransformador
3. Exercício

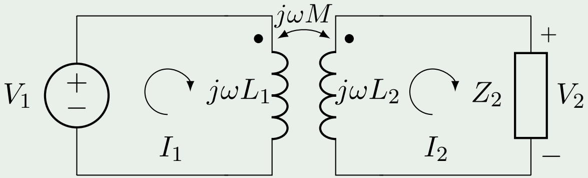
Recapitulação

Transformador Real

Transformador real

- Coeficiente de acoplamento do transformador real não é unitário.
- Indutâncias próprias das bobinas são valores finitos.

Exemplo - estado permanente senoidal

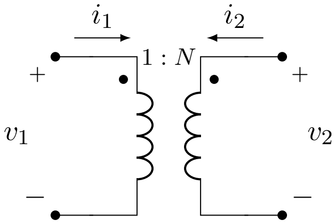


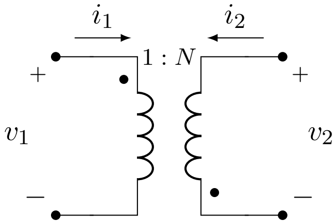
$$\begin{cases} j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 = V_1 \\ Z_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Sumário

Transformador Ideal

- Idealização do transformador real.
- Acoplamento magnético entre as bobinas é unitário.
- Indutâncias próprias e mútuas tendem ao infinito.





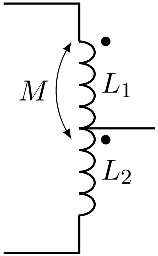
$$\begin{cases} \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{N_2}{N_1} = N \\ \dfrac{i_2}{i_1} = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{1}{N} \\ \dfrac{Z_2}{Z_1} = \left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2 = N^2 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{v_2}{v_1} = -\dfrac{N_2}{N_1} = -N \\ \dfrac{i_2}{i_1} = -\dfrac{N_1}{N_2} = -\dfrac{1}{N} \\ \dfrac{Z_2}{Z_1} = \left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2 = N^2 \end{cases} \tag{7}$$

Sumário

Autotransformador

- Possui um único enrolamento com um ponto de conexão, denominado ***tap***, entre o primário e secundário.
- O *tap* é ajustável $\Rightarrow$ fornece a relação de espiras desejadas para aumentar ou diminuir a tensão.



Autotransformador

Vantagens do autotransformador sobre o transformador

- Capaz de transferir uma quantidade maior de potência $\Rightarrow$ menor perda.
- Mais leve e possui um tamanho menor.

Desvantagem do autotransformador sobre o transformador

- Perda da isolação elétrica.

Aplicações

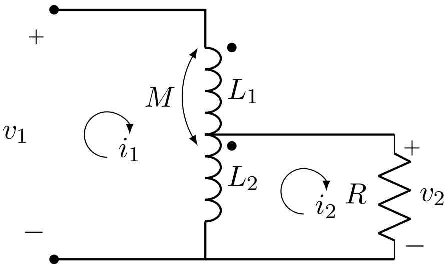
- Utilizado para aliviar a corrente de partida de motores.
- Usados em sistema de distribuição para interconectar duas redes com tensões distintas.
- Em zonas rurais, autotransformadores com mudança automática de *tap* são usados como reguladores de tensão para garantir a tensão correta no fim da linha.
- Em aplicação de áudio.

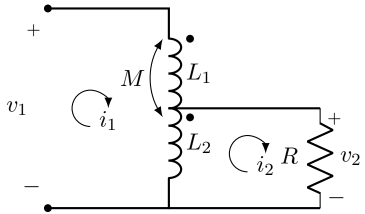
Autotransformador

Figura: Autotransformador trifásico.

Objetivos

- Escrever a equação diferencial relacionando a corrente de saída i_2 com a tensão de entrada v_1.
- Calcular as relações de tensão e corrente em estado permanente.
- Observação: as bobinas L_1 e L_2 possuem N_1 e N_2 espiras, respectivamente.



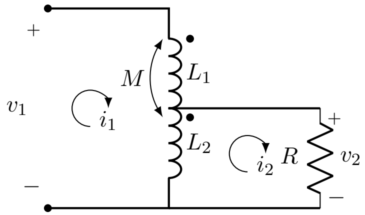


Equação diferencial

$$\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt} + M\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) + L_2\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) + M\frac{di_1}{dt} = v_1 \\ Ri_2 + L_2\left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt}\right) - M\frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Rearranjando,

$$\begin{cases} (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di_1}{dt} - (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} = v_1 \\ -(L_2 + M)\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

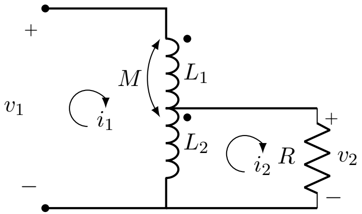


Equação diferencial

$$\begin{cases} (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di_1}{dt} - (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} = v_1 \\ -(L_2 + M)\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Isolando $\frac{di_1}{dt}$ na segunda equação em (9):

$$\begin{cases} (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di_1}{dt} - (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} = v_1 \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2}{(L_2 + M)} \end{cases} \tag{10}$$

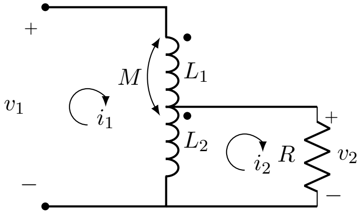


Equação diferencial

$$\begin{cases} (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di_1}{dt} - (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} = v_1 \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2}{(L_2+M)} \end{cases} \tag{10}$$

Substituindo a segunda equação de (10) na primeira:

$$\left(\frac{L_1 + L_2 + 2M}{L_2 + M}\right)\left(L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2\right) - (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} = v_1 \tag{11}$$

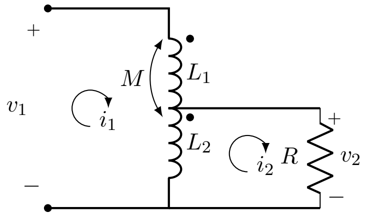


Equação diferencial

$$\left(\frac{L_1 + L_2 + 2M}{L_2 + M}\right)\left(L_2 \frac{di_2}{dt} + Ri_2\right) - (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} = v_1 \tag{11}$$

Rearranjando,

$$\left(L_1 L_2 - M^2\right)\frac{di_2}{dt} + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right) i_2 = \left(L_2 + M\right) v_1 \tag{12}$$

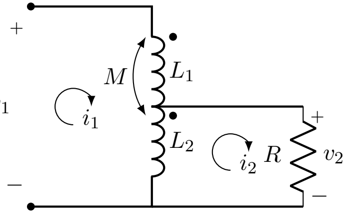


Equação diferencial

$$\left(L_1L_2 - M^2\right)\frac{di_2}{dt} + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)i_2 = \left(L_2 + M\right)v_1 \tag{12}$$

Considerando o coeficiente de acoplamento unitário ($k = 1$ em $M = k\sqrt{L_1L_2}$), a primeira parcela é anulada.

$$\left(L_1L_2 - M^2\right)\frac{di_2}{dt} + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)i_2 = \left(L_2 + M\right)v_1 \tag{13}$$

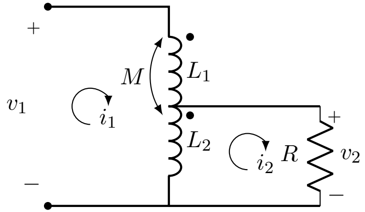


Equação diferencial

$$\left(L_1 L_2 - M^2\right) \frac{di_2}{dt} + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right) i_2 = \left(L_2 + M\right) v_1 \qquad (12)$$

Considerando o coeficiente de acoplamento unitário ($k = 1$ em $M = k\sqrt{L_1 L_2}$), a primeira parcela é anulada.

$$R\left(L_1 + L_2 + 2M\right) i_2 = \left(L_2 + M\right) v_1 \qquad (13)$$

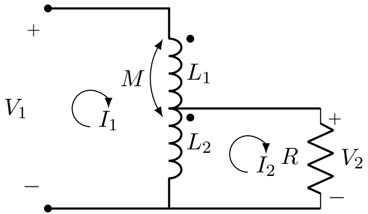


Equação diferencial

$$R\,(L_1 + L_2 + 2M)\,i_2 = (L_2 + M)\,v_1 \tag{13}$$

Portanto,

$$i_2 = \frac{(L_2 + M)}{R\,(L_1 + L_2 + 2M)} v_1 \tag{14}$$

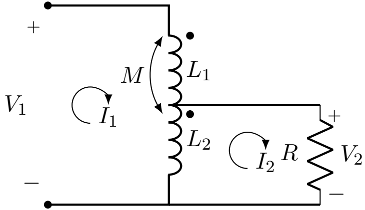


Em estado permanente senoidal

$$\left(L_1L_2 - M^2\right)\frac{di_2}{dt} + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)i_2 = \left(L_2 + M\right)v_1 \tag{12}$$

Em estado permanente senoidal,

$$j\omega\left(L_1L_2 - M^2\right)I_2 + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)I_2 = \left(L_2 + M\right)V_1 \tag{15}$$

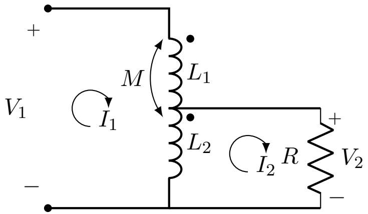


Em estado permanente senoidal

$$j\omega\left(L_1L_2 - M^2\right)I_2 + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)I_2 = \left(L_2 + M\right)V_1 \tag{15}$$

Rearranjando,

$$\frac{I_2}{V_1} = \frac{L_2 + M}{j\omega\left(L_1L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{16}$$

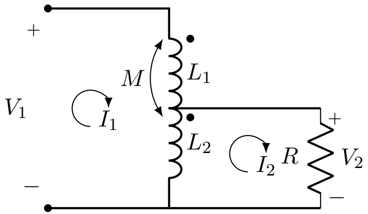


Em estado permanente senoidal

$$\begin{cases} (L_1 + L_2 + 2M)\,\frac{di_1}{dt} - (L_2 + M)\,\frac{di_2}{dt} = v_1 \\ -\,(L_2 + M)\,\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Da segunda equação de (9):

$$-\,j\omega\,(L_2 + M)\,I_1 + j\omega L_2 I_2 + RI_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega\,(L_2 + M)}{j\omega L_2 + R} \tag{17}$$

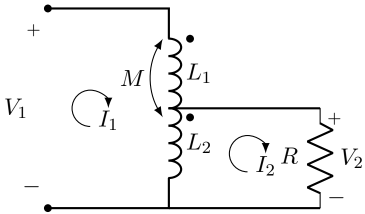


Em estado permanente senoidal

$$-j\omega\left(L_2+M\right)I_1+j\omega L_2 I_2+RI_2=0\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{j\omega\left(L_2+M\right)}{j\omega L_2+R}\qquad(17)$$

Geralmente, $j\omega L_2 \gg R$. Para um autotransformador ideal ($k=1$):

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{j\omega\left(L_2+M\right)}{j\omega L_2}=1+\frac{M}{L_2}=1+\frac{k\sqrt{L_1L_2}}{L_2}=1+\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=1+\frac{N_1}{N_2}\qquad(18)$$

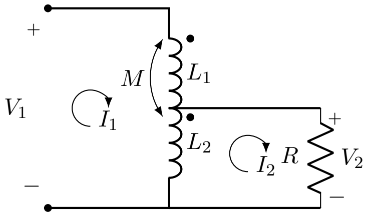


Em estado permanente senoidal

$$-j\omega\left(L_2+M\right)I_1+j\omega L_2 I_2+RI_2=0 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\frac{j\omega\left(L_2+M\right)}{j\omega L_2+R} \tag{17}$$

Geralmente, $j\omega L_2 \gg R$. Para um autotransformador ideal ($k=1$):

$$\frac{I_2}{I_1}=1+\frac{N_1}{N_2}=\frac{N_1+N_2}{N_2} \tag{18}$$



Em estado permanente senoidal

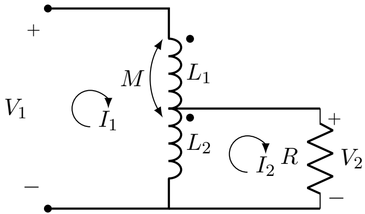
$$\frac{I_2}{V_1} = \frac{L_2 + M}{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{16}$$

A relação entre as tensões é dada por:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Autotransformador

Análise

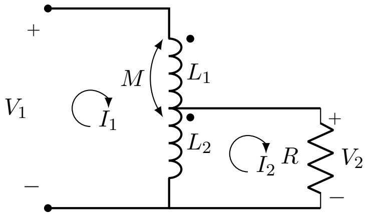


Em estado permanente senoidal

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Para um autotransformador ideal:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} = \frac{L_2 + M}{L_1 + L_2 + 2M} = \frac{L_2\left(1 + \frac{M}{L_2}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + \frac{2M}{2}\right)} \tag{20}$$

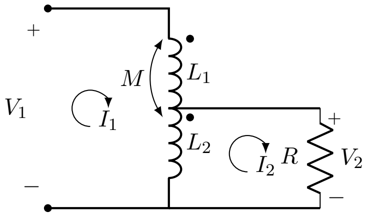


Em estado permanente senoidal

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Para um autotransformador ideal:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{L_2\left(1 + \frac{M}{L_2}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + \frac{2M}{L_2}\right)} = \frac{L_2\left(1 + \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_2}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + \frac{2\sqrt{L_1 L_2}}{L_2}\right)} \tag{20}$$

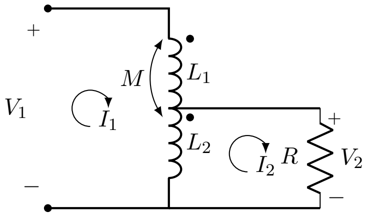


Em estado permanente senoidal

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Para um autotransformador ideal:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{L_2\left(1 + \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_2}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + \frac{2\sqrt{L_1 L_2}}{L_2}\right)} = \frac{L_2\left(1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + 2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\right)} \tag{20}$$

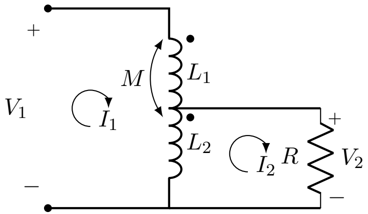


Em estado permanente senoidal

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Para um autotransformador ideal:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{L_2\left(1 + \frac{\sqrt{L_1L_2}}{L_2}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + \frac{2\sqrt{L_1L_2}}{L_2}\right)} = \frac{L_2\left(1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\right)}{L_2\left(1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\right)^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \tag{20}$$

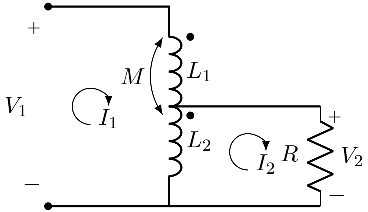


Em estado permanente senoidal

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Para um autotransformador ideal:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{L_2\left(1 + \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_2}\right)}{L_2\left(\frac{L_1}{L_2} + 1 + \frac{2\sqrt{L_1 L_2}}{L_2}\right)} = \frac{L_2\left(1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\right)}{L_2\left(1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\right)^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \tag{20}$$

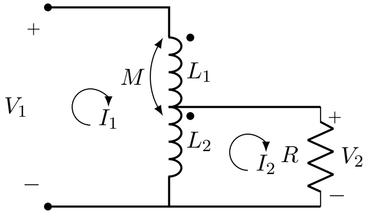


Em estado permanente senoidal

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{RI_2}{V_1} = \frac{R\left(L_2 + M\right)}{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right) + R\left(L_1 + L_2 + 2M\right)} \tag{19}$$

Para um autotransformador ideal:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{N_1}{N_2}} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \tag{20}$$

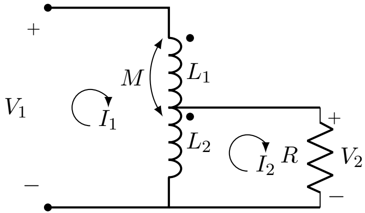


Em estado permanente senoidal

Relembrando:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \qquad I_1 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} I_2 \tag{18}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \qquad V_1 = \frac{N_1 + N_2}{N_2} V_2 \tag{20}$$



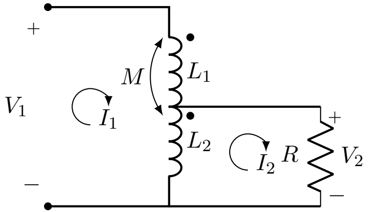
Em estado permanente senoidal

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} I_2 \qquad (18)$$

$$V_1 = \frac{N_1 + N_2}{N_2} V_2 \qquad (20)$$

Portanto,

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{N_1+N_2}{N_2} V_2}{\frac{N_2}{N_1+N_2} I_2} = \left(\frac{N_1 + N_2}{N_2}\right)^2 \frac{V_2}{I_2} = \left(\frac{N_1 + N_2}{N_2}\right)^2 R \qquad (21)$$



Em estado permanente senoidal

Resumindo,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \qquad (18)$$

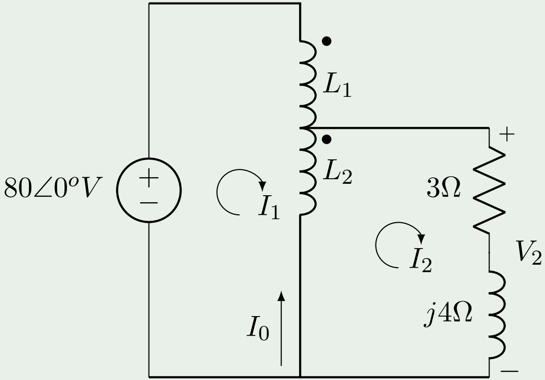
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \qquad (20)$$

$$\frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_1 + N_2}{N_2}\right)^2 R \qquad (21)$$

Sumário

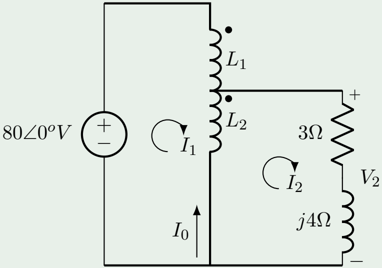
Exercício

Calcule I_1, I_2 e I_0, sendo que as bobinas L_1 e L_2 possuem $N_1 = 100$ e $N_2 = 60$.



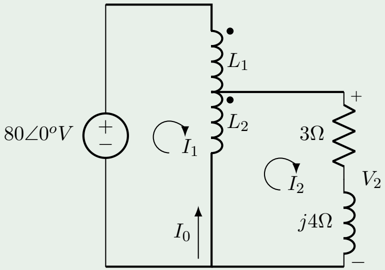
Exercício

Exercício



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \Rightarrow V_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} V_1 = \frac{60}{60 + 100} \cdot 80\angle 0^o = 30\angle 0^o \ V$$

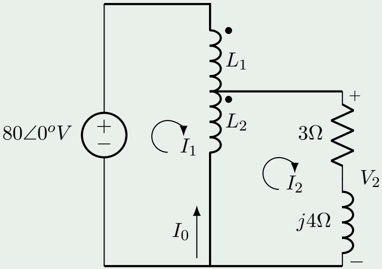
Exercício



$$V_2 = 30\angle 0^o \ V$$

$$I_2 = \frac{V_2}{3+j4} = \frac{30\angle 0^o}{5\angle 53,13^o} = 6\angle -53,13^o \ A$$

Exercício



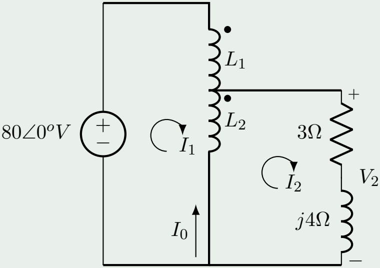
$$V_2 = 30\angle 0^o\ V$$

$$I_2 = 6\angle -53,13^o\ A$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \Rightarrow I_1 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} I_2 = \frac{60}{100+60} \cdot 6\angle -53,13^o\ A$$

Exercício

Exercício

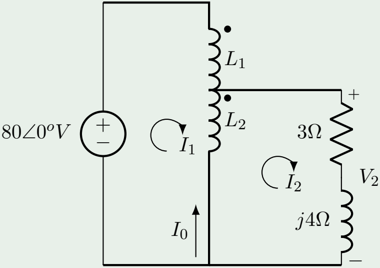


$$V_2 = 30\angle 0^o \ V$$

$$I_2 = 6\angle -53,13^o \ A$$

$$I_1 = 2,25\angle -53,13^o \ A$$

Exercício



$$V_2 = 30\angle 0^o \ V$$

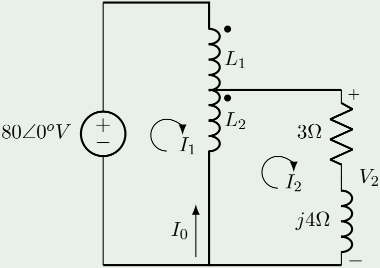
$$I_2 = 6\angle -53,13^o \ A$$

$$I_1 = 2,25\angle -53,13^o \ A$$

$$I_0 = I_2 - I_1 = 3,75\angle -53,13^o \ A$$

Exercício

Exercício



$$V_2 = 30\angle 0^o \ V$$

$$I_2 = 6\angle - 53,13^o \ A$$

$$I_1 = 2,25\angle - 53,13^o \ A$$

$$I_0 = 3,75\angle - 53,13^o \ A$$

References

Vander Menengoy da Costa (2013).
Circuitos elétricos lineares: enfoque teórico e prático.
Editora Interciência.

Charles M. Close (1975).
Circuitos Lineares.
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A..