Funções Singulares e suas aplicações

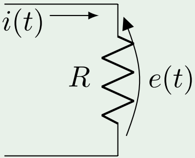
Vinícius Lagrota Rodrigues da Costa

Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora

10 de Janeiro de 2018

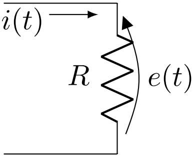
Sumário

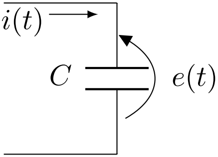
Resistores



$$e(t) = Ri(t) \tag{1}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}e(t) \tag{2}$$





$$e(t) = Ri(t) \tag{3}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}e(t) \tag{4}$$

$$e(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt \tag{5}$$

$$i(t) = C\frac{de(t)}{dt} \tag{6}$$

Recapitulação

Energia armazenada -> pag. 133.

- Utilizados para representarem sinais em circuitos com operações chaveadas.
- Auxiliam na descrição de alguns fenômenos que ocorrem na análise de transitórios.
- Por definição, são funções descontínuas ou que possuem derivadas descontínuas.
- Funções singulares mais importante: **degrau**, **rampa** e **impulso**.

Sumário

- Utilizada para representar uma variação instantânea na tensão ou na corrente;

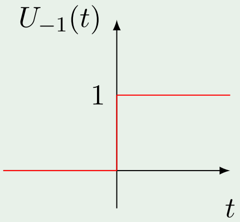
- Possíveis aplicações: circuito de controles e sistemas digitais.

Função degrau unitária

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Que é denotada por:

$$v(t) = U_{-1}(t) \qquad (10)$$

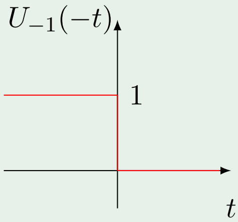


Função degrau unitária inversa

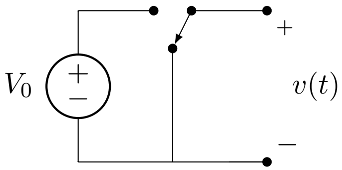
$$v(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \qquad (11)$$

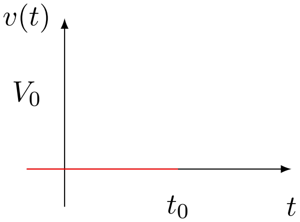
Que é denotada por:

$$v(t) = U_{-1}(-t) \qquad (12)$$

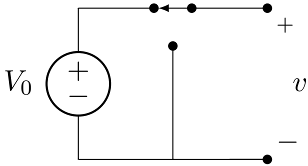


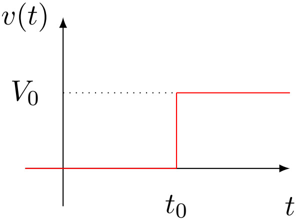
para $t < t_0$

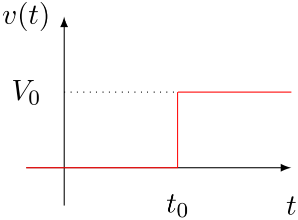




para $t > t_0$







Função degrau deslocada

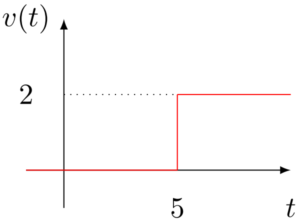
$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ V_0, & t > t_0 \end{cases} \tag{13}$$

Ou, utilizando a função degrau deslocada:

$$v(t) = V_0 U_{-1}(t - t_0) \tag{14}$$

Dica!

Para verificar em que posição do eixo x o degrau ocorre, basta igualar o valor dentro dos parenteses a zero. Exemplo, em $v(t) = 2U_{-1}(t-5)$, deve-se fazer $t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5$.



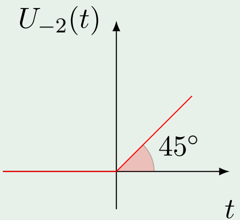
Sumário

Função rampa unitária

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases} \tag{15}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = U_{-2}(t) \tag{16}$$

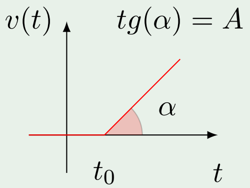


Função rampa genérica

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ At, & t > t_0 \end{cases} \tag{17}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = AU_{-2}(t - t_0) \tag{18}$$



Relação entre função rampa e função degrau

Note que:

$$U_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-1}(t)dt \tag{19}$$

Ou ainda:

$$U_{-1}(t) = \frac{dU_{-2}(t)}{dt} \tag{20}$$

Sumário

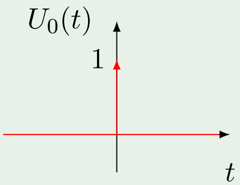
1. Recapitulação
2. Funções Singulares
   - Função Degrau
   - Função Rampa
   - Função Impulso
3. Resposta às Funções Singulares

Função impulso unitário

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = U_0(t) \tag{22}$$

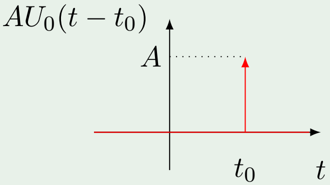


Função impulso genérico

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ A, & t = t_0 \end{cases} \tag{23}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = AU_0(t - t_0) \tag{24}$$



Relação entre função degrau e função impulso

Note que:

$$U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(t)dt \tag{25}$$

Ou ainda:

$$U_0(t) = \frac{dU_{-1}(t)}{dt} \tag{26}$$

Sumário

Resposta às Funções Singulares

Teorema

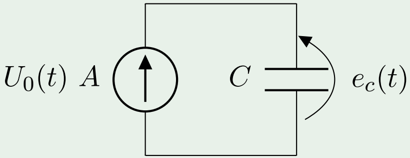
Se todas as correntes e tensões permanecerem finitas, a tensão nos terminais de uma capacitância e a corrente passando por uma indutância não podem alterar instantaneamente.

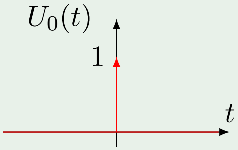
- Tal teorema é válido para circuitos elétricos excitados pelas funções **degrau** e **rampa**.
- A adição de uma função **impulso** faz com que considerações adicionais sejam observadas.

Teorema

Um impulso unitário de corrente entrando em uma capacitância descarregada altera a sua tensão de $\frac{1}{C}V$ *e a energia de* $\frac{1}{2C}J$ *instantaneamente.*

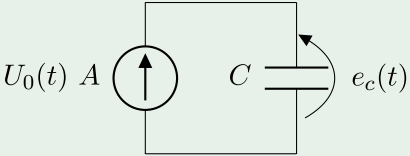
Teorema (Demonstração)

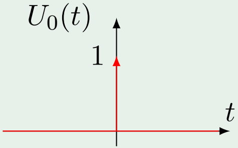




$$e_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} U_0(t)dt \quad (27)$$

Teorema (Demonstração)

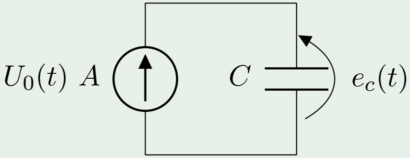


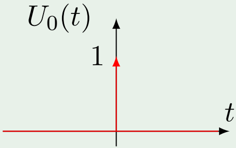


$$e_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} U_0(t)dt \qquad (27)$$

Componente nula, já que o impulso ocorreu anteriormente.

Teorema (Demonstração)

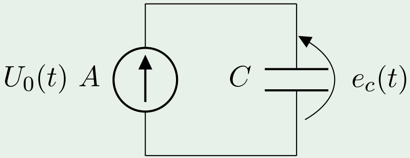


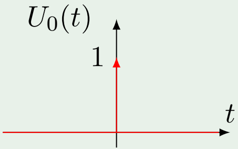


$$e_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + 0 \tag{27}$$

Componente que representa a energia inicial armazenada do capacitor.
Componente nula se o capacitor for considerado inicialmente descarregado.

Teorema (Demonstração)





$$e_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = 0 + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + 0 = \frac{1}{C}U_{-1}(t) = \frac{1}{C}\ V \tag{27}$$

e

$$W(t) = \frac{1}{2}Ce_c^2(t) = \frac{1}{2}C\left(\frac{1}{C}U_{-1}(t)\right)^2 = \frac{1}{2C}U_{-1}(t) = \frac{1}{2C}\ J \tag{28}$$

Para $t > 0$.

Thank you!