Funções Singulares e suas aplicações

Vinícius Lagrota Rodrigues da Costa

Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora

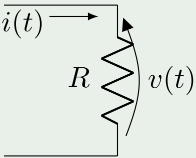
11 de Janeiro de 2018

Sumário

Recapitulação

Resistores, capacitores e indutores

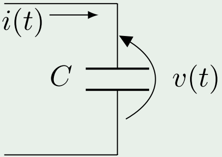
Resistores



$$v(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$$

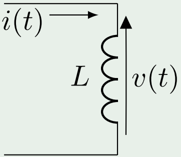
Capacitores



$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Indutores



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt$$

Energia armazenada no capacitor

$$\begin{cases} p(t) = v(t)i(t) = v(t)C\frac{dv(t)}{dt} \\ w(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} p(t)dt \end{cases}$$

Logo,

$$w(t) = C\int\limits_{-\infty}^{t} v(t)\frac{dv(t)}{dt}dt$$

$$w(t) = C\int\limits_{-\infty}^{t} v(t)dv(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

Energia armazenada no indutor

$$\begin{cases} p(t) = v(t)i(t) = i(t)L\frac{di(t)}{dt} \\ w(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} p(t)dt \end{cases}$$

Logo,

$$w(t) = L\int\limits_{-\infty}^{t} i(t)\frac{di(t)}{dt}dt$$

$$w(t) = L\int\limits_{-\infty}^{t} i(t)di(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Sumário

Funções Singulares

- Utilizados para representarem sinais em circuitos com **operações chaveadas**.
- Auxiliam na descrição de alguns fenômenos que ocorrem na **análise de transitórios**.
- Por definição, são **funções descontínuas** ou que possuem derivadas descontínuas.
- Funções singulares mais importante: **degrau**, **rampa** e **impulso**.

Sumário

- Utilizada para representar uma variação instantânea na tensão ou na corrente;

- Possíveis aplicações: circuito de controles e sistemas digitais.

Funções Singulares

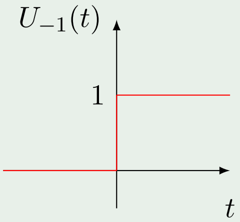
Função Degrau

Função degrau unitária

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \qquad (1)$$

e é denotada por:

$$v(t) = U_{-1}(t) \qquad (2)$$

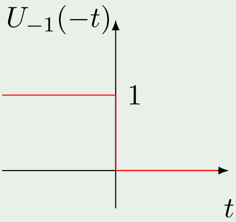


Função degrau unitária inversa

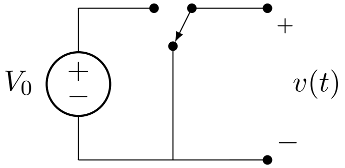
$$v(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

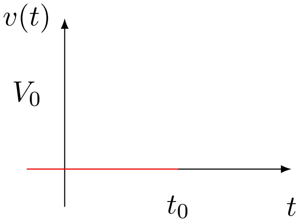
e é denotada por:

$$v(t) = U_{-1}(-t) \qquad (4)$$

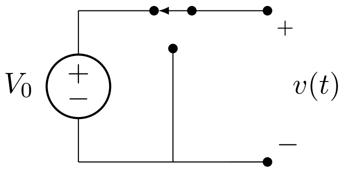


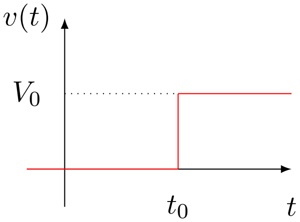
para $t < t_0$

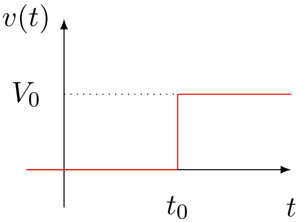




para $t > t_0$







Função degrau deslocada

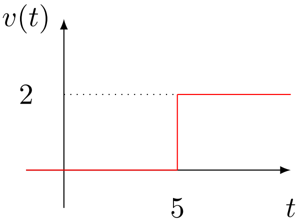
$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ V_0, & t > t_0 \end{cases} \tag{5}$$

Ou, utilizando a função degrau deslocada:

$$v(t) = V_0 U_{-1}(t - t_0) \tag{6}$$

Dica!

Para verificar em que posição do eixo x o degrau ocorre, basta igualar o valor dentro dos parenteses a zero. Exemplo, em $v(t) = 2U_{-1}(t-5)$, deve-se fazer $t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5$.



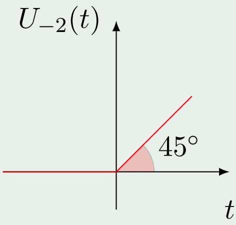
Sumário

Função rampa unitária

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = U_{-2}(t) \tag{8}$$

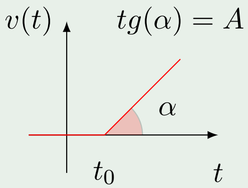


Função rampa genérica

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ At, & t > t_0 \end{cases} \tag{9}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = AU_{-2}(t - t_0) \tag{10}$$



Relação entre função rampa e função degrau

Note que:

$$U_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-1}(t)dt \tag{11}$$

Ou ainda:

$$U_{-1}(t) = \frac{dU_{-2}(t)}{dt} \tag{12}$$

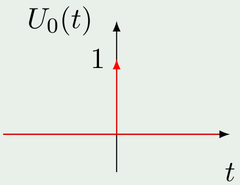
Sumário

Função impulso unitária

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = U_0(t) \tag{14}$$

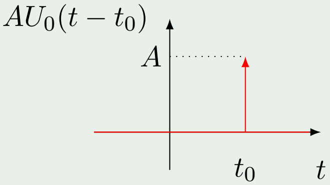


Função impulso genérica

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ A, & t = t_0 \end{cases} \tag{15}$$

Que é denotada por:

$$v(t) = AU_0(t - t_0) \tag{16}$$



Relação entre função degrau e função impulso

Note que:

$$U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_0(t)dt \tag{17}$$

Ou ainda:

$$U_0(t) = \frac{dU_{-1}(t)}{dt} \tag{18}$$

Sumário

Resposta às Funções Singulares

Teorema

Se todas as correntes e tensões permanecerem finitas, a tensão nos terminais de uma capacitância e a corrente passando por uma indutância não podem alterar instantaneamente.

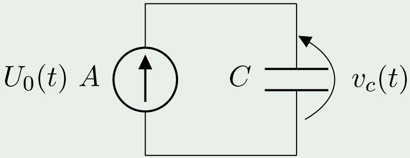
- Tal teorema é válido para circuitos elétricos excitados pelas funções **degrau** e **rampa**.
- A adição de uma função **impulso** faz com que considerações adicionais sejam observadas.

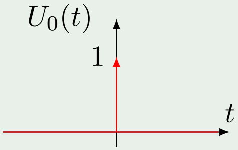
Teorema

Um impulso unitário de corrente entrando em uma capacitância descarregada altera a sua tensão de $\frac{1}{C}V$ *e a energia de* $\frac{1}{2C}J$ *instantaneamente.*

Resposta às Funções Singulares

Teorema (Demonstração)

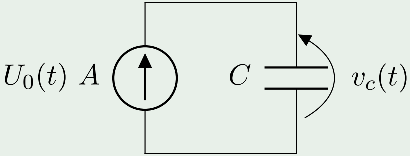


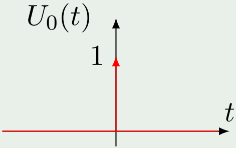


$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} U_0(t)dt \quad (19)$$

Resposta às Funções Singulares

Teorema (Demonstração)

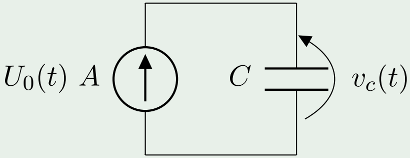


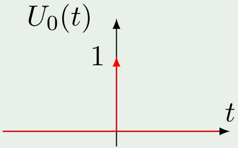


$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} U_0(t)dt \quad (19)$$

Componente nula, já que o impulso ocorreu anteriormente.

Teorema (Demonstração)

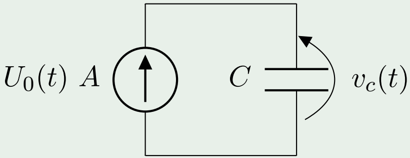


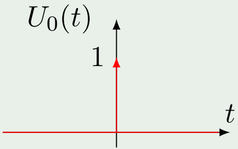


$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} U_0(t)dt + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + 0 \qquad (19)$$

Componente que representa a energia inicial armazenada do capacitor.
Componente nula se o capacitor for considerado inicialmente descarregado.

Teorema (Demonstração)





$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = 0 + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} U_0(t)dt + 0 = \frac{1}{C}U_{-1}(t) = \frac{1}{C}\ V \qquad (19)$$

e

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv_c^2(t) = \frac{1}{2}C\left(\frac{1}{C}U_{-1}(t)\right)^2 = \frac{1}{2C}U_{-1}(t) = \frac{1}{2C}\ J \qquad (20)$$

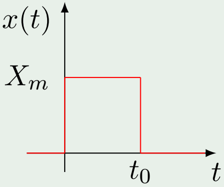
Para $t > 0$.

Sumário

- Uma forma de onda de tensão ou corrente, constituída por segmentos de reta, pode ser **decomposta em finitas funções degraus ou rampa**.

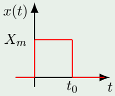
- Utilização do **teorema da superposição**.

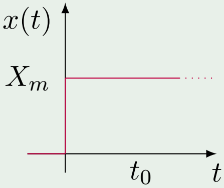
Exemplo 1



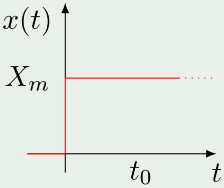
Decomposição de Sinais em Funções Singulares

Exemplo 1



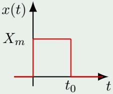


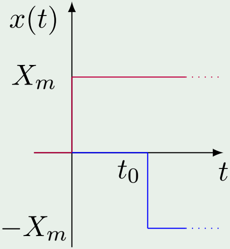
$\Rightarrow$



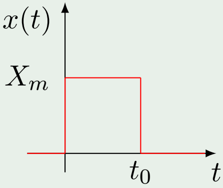
$$x(t) = X_m U_{-1}(t)$$

Exemplo 1



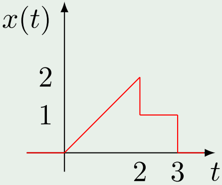


$\Rightarrow$

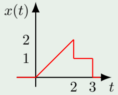


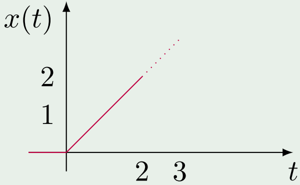
$$x(t) = X_m U_{-1}(t) - X_m U_{-1}(t - t_0)$$

Exemplo 2

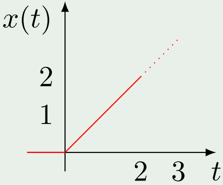


Exemplo 2



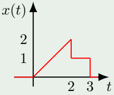


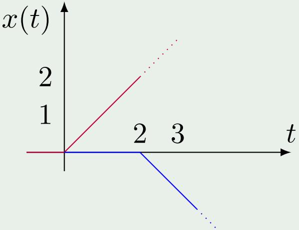
$\Rightarrow$



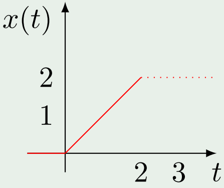
$$x(t) = U_{-2}(t)$$

Exemplo 2



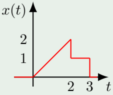


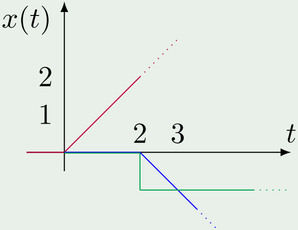
$\Rightarrow$



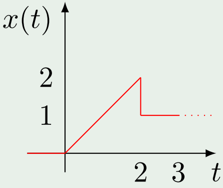
$$x(t) = U_{-2}(t) - U_{-2}(t-2)$$

Exemplo 2





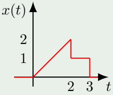
$\Rightarrow$

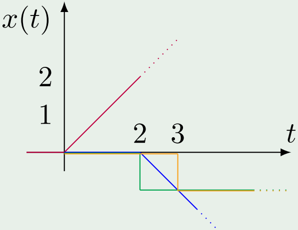


$$x(t) = U_{-2}(t) - U_{-2}(t-2) - U_{-1}(t-2)$$

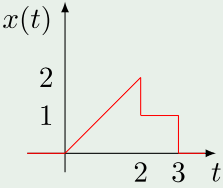
Decomposição de Sinais em Funções Singulares

Exemplo 2





$\Rightarrow$



$$x(t) = U_{-2}(t) - U_{-2}(t-2) - U_{-1}(t-2) - U_{-1}(t-3)$$

References

Vander Menengoy da Costa (2013).
Circuitos elétricos lineares: enfoque teórico e prático.
Editora Interciência.

Charles M. Close (1975).
Circuitos Lineares.
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A..