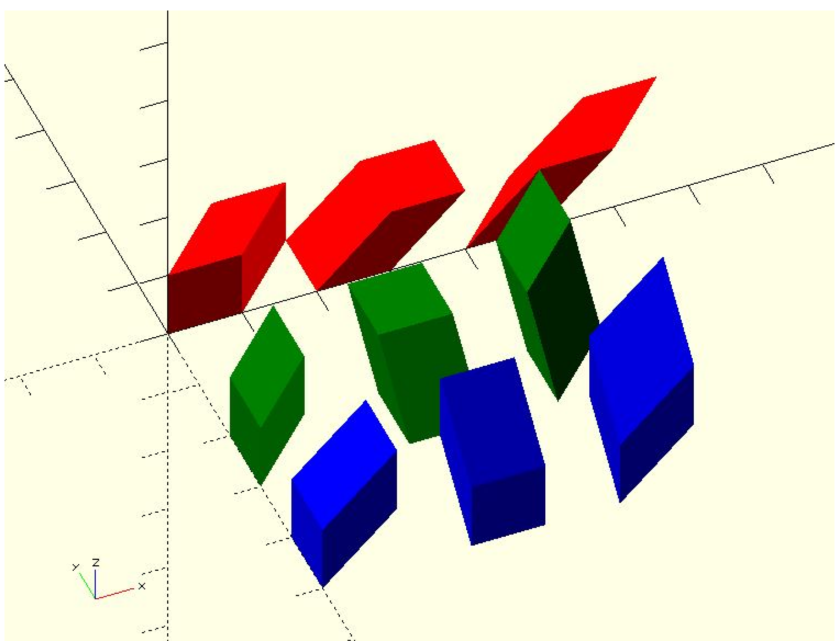
MC102QR - Algoritmos e Programação de Computadores

Lab 14 - Recursão Avançada

Prazo da atividade: 17 de Julho de 2022
Peso na nota: 5 (12,20%)

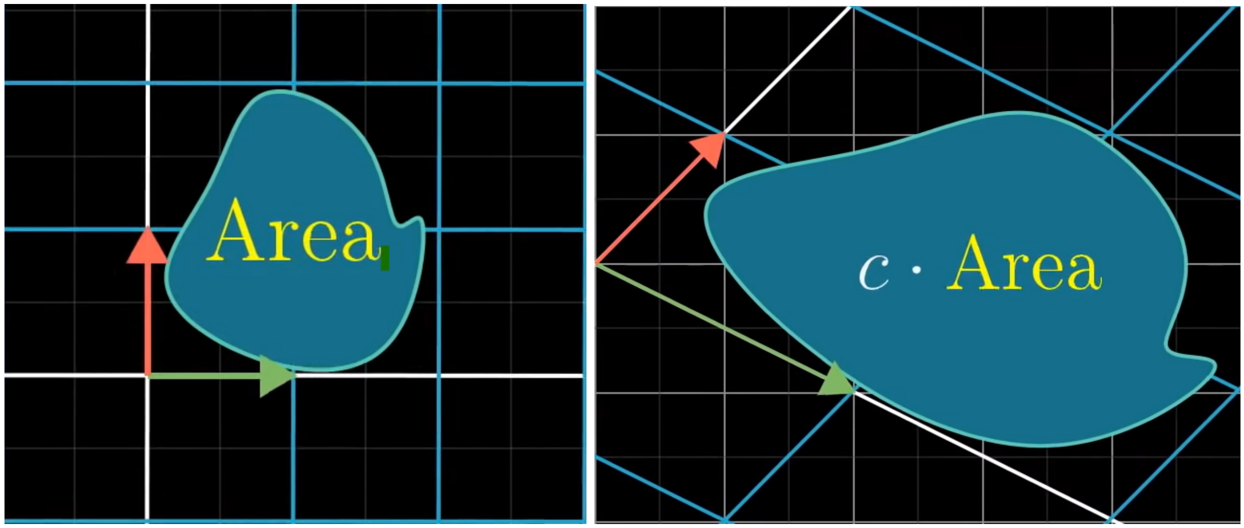
Maria é um animadora 3D que gosta muito de matemática e programar suas próprias soluções para problemas do dia-a-dia. Um problema que ela se deparou foi com o fato de testar várias transformações em um objeto 3D, mas não saber como ficará o aspecto desse objeto após essas várias transformações. Ela queria a priori saber quanto de volume o objeto que ela está animando mudou após essas transformações. Uma característica das transformações que Maria tem interesse no processo de animação são aquelas que preservam as linhas dos objetos, ou seja, uma transformação não transformaria o objeto em um círculo, por exemplo. Logo ela lembrou das aulas de uma das matérias preferidas dela na universidade, Álgebra Linear[1]. A Álgebra Linear estuda matematicamente essas e outros tipos de operações em diversas dimensões. Abaixo exemplos de transformações (lineares) em um cubo 3D.



Maria lembrou que transformações lineares podem ser representadas por matrizes e que a mudança de área em 2D, volume em 3D e assim por diante; após uma transformação é

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_linear

exatamente a interpretação geométrica do conceito de determinante de uma matriz em Álgebra Linear.



Exemplo de como uma transformação altera a área de um objeto, o valor de c neste caso é a determinante da matriz de transformação.

Maria sabe muito bem a fórmula para calcular a determinante para matrizes 2×2, a subtração da multiplicação. Como na fórmula abaixo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Além disso, ela lembra que tem um método para calcular a determinante de uma matriz a partir da determinante de submatrizes chamada Expansão de Laplace[2]. Esse método computa a determinante de uma matriz $n \times n$ da seguinte forma:

$$det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} B_{i,j} M_{i,j}$$

onde $B_{i,j}$ é a entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna de B, e $M_{i,j}$ é a determinante da submatriz obtida removendo a i-ésima linha e j-ésima coluna de B. Ou seja, é uma entrada de uma coluna (j) da matriz vezes a determinante da submatriz sem a linha (i) que estão as entradas e a coluna (j). Pela fórmula pode ser visto que a iteração é sobre a coluna j e i é fixo (isto é, a fórmula funciona para qualquer i). Abaixo um exemplo da aplicação da expansão para uma matriz 3×3 onde o i escolhido foi 1:

[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Laplace

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Apesar de saber tudo isso, Maria ficou com dúvida em como implementar em código Python esse método de calcular determinantes. Além disso, ela ficou na dúvida em como saber o resultado para várias transformações e não apenas uma, que o caso da determinante de uma matriz.

Maria esqueceu duas coisas importantes, uma que o resultado de um conjunto de transformações pode ser representado pela multiplicação de matrizes e que a determinante tem a propriedade multiplicativa, ou seja:

$$det(AB) \ = \ det(A) \times \ det(B)$$

Com isso é possível saber exatamente quanto um objeto mudou em "tamanho" após um conjunto de transformações lineares, mesmo que esse objeto esteja em dimensões além das 3 comuns.

Tarefa

Sua tarefa é resolver o problema de Maria, ou seja, encontrar a determinante da multiplicação de várias matrizes $n \times n$. Para isso, você terá que implementar o algoritmo recursivo da expansão de Laplace e utilizar a propriedade multiplicativa de determinantes.

Observações: É proibido utilizar bibliotecas que já calcule a determinante ou faça operações de matrizes.

Entrada

A entrada é composta dos seguintes itens:

- Quantidade m de matrizes.
- O valor do n, pois todas as matrizes são $n \times n$.
- Os valores das m matrizes, seguindo o padrão de n linhas com valores das colunas para cada matriz.

Saída

A saída esperada é o valor da determinante de todas as transformações lineares aplicadas. Então a saída deve seguir o padrão:

```
Após as m transformações, o objeto n-dimensional teve o volume
multiplicado no valor d.
```

onde m é a quantidade de matrizes, n é a dimensão das matrizes (espaço dimensional onde os objetos habitam), d é o valor da determinante após as transformações.

Exemplos

Exemplo 1:

Entrada

```
1
3
-3 8 3
5 6 6
1 -3 2
```

Saída

```
Após as 1 transformações, o objeto 3-dimensional teve o volume
multiplicado no valor -185.
```

Exemplo 2:

Entrada

```
2
3
8 8 5
2 7 6
8 2 9
-5 -4 3
-2 -4 2
-3 0 0
```

Saída

```
Após as 2 transformações, o objeto 3-dimensional teve o volume
multiplicado no valor -4656.
```

Exemplo 3:

Entrada

```
2
4
```

```
-5 -4 2 1
0 0 -5 9
3 4 8 1
8 -5 8 8
-2 1 4 6
8 -5 3 8
7 5 0 4
-2 1 4 6
```

Saída

```
Após as 2 transformações, o objeto 4-dimensional teve o volume multiplicado no valor 0.
```

Submissão

Você deverá submeter no CodePost, na tarefa Lab 14, um arquivo com o nome `lab14.py`, contendo todo o seu programa. Após o prazo estabelecido para a atividade, será aberta uma tarefa Lab 14 - Segunda Chance, com prazo de entrega até o fim do semestre.