

Andrey Gonçalves
Vinicius Luz Souza

Projeto de Filtros Digitais IIR e FIR

Brasil
2019, Junho

Introdução

O projeto aqui apresentado surgiu relativamente à disciplina de Processamento de Sinais Digitais ministrada pelo Professor Marcos Moecke do curso de Engenharia de Telecomunicações. O mesmo abrange o desenvolvimento de filtros IIR (Infinite Impulse Response) e FIR (Finite Impulse Response), com diferentes aproximações para determinar a eficiência de cada filtro. Serão desenvolvidos quatro filtros. Como primeiro, foi escolhido utilizar um filtro passa-baixas com duas implementações: IIR do tipo Eliptico e FIR com janela fixa. Como segundo filtro, apresentaremos um passa-altas do tipo IIR com o algoritmo de otimização Butterworth e FIR de janela ajustável. Em seguida será demonstrado um filtro passa-faixa IIR com uso do algoritmo Chebyshev II e um filtro FIR com aproximação de Parks-McClellan. Por fim, demonstraremos o projeto de um filtro rejeita-faixa IIR com algoritmo Chebyshev I e um filtro FIR com aproximação o Parks-McClellan.

Iremos analisar cada filtro e demonstrar as vantagens de cada estrutura, considerando o aspecto de tamanho de hardware e os resultados obtidos em cada implementação. Tais análises serão realizadas através do software MATLAB¹.

¹ MATLAB (MATrix LABoratory) trata-se de um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

1 Metodologia

1.1 Filtros IIR

O projeto de filtros do tipo IIR baseou-se na seguinte metodologia: primeiramente é realizado o desenvolvimento de um filtro protótipo passa-baixas analógico, $H(p)$. Em seguida, como segundo passo, é realizada a transformação de frequência ($H(p) \rightarrow H(s)$), convertendo o filtro no tipo desejado (passa-baixas, passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa). Por fim, o filtro é convertido para digital, transformando $H(s) \rightarrow H(z)$.

Para todos os filtros IIR projetados, utilizamos a transformação bilinear, calculando λ de acordo com a seguinte equação:

$$\lambda = 2 \tan\left(\frac{\theta\pi}{2}\right), \text{ onde } \theta = \frac{\omega}{\omega_a/2} \quad (1.1)$$

1.2 Filtros FIR

Para realização dos projetos de filtros FIR, foi utilizada a seguinte metodologia: primeiramente, escolhemos a janela que mais se adequa ao filtro a ser desenvolvido, ou seja, a que possui os valores mais adequados de atenuação de lóbulo lateral e atenuação na banda passante. Em seguida, estimamos a ordem do filtro e calculamos os coeficientes através de funções já implementadas no MATLAB. Por fim, são realizados os ajustes nas bandas de passagem e rejeição, bem como os ajustes de deslocamento e ganho do filtro, se necessário.

1.3 Comparação

Ao final de cada seção, após serem descritos os filtros IIR e FIR desenvolvidos, faremos uma tabela comparativa entre os dois tipos de filtro, com o intuito de verificar a eficiência e a aplicabilidade de ambos. Para realização desta análise, basearemos-nos nos seguintes critérios: resposta em frequência do filtro, resposta em fase, estabilidade e ordem final do filtro gerado.

2 Desenvolvimento

2.1 Filtro Passa-Baixas

No primeiro projeto será desenvolvido um filtro passa-baixas IIR com aproximação do tipo Elíptico, em seguida um FIR com Janela Fixa, de acordo com as especificações da tabela abaixo.

Frequência de amostragem	10000 Hz
Frequência de passagem	2800 Hz
Frequência de rejeição	3200 Hz
Atenuação máxima na banda de passagem	1 dB
Atenuação máxima na banda de rejeição	40 dB
Ganho	0 dB

Tabela 1 – Especificação do filtro passa baixas

2.1.1 Filtro IIR do tipo Eliptico

Para desenvolvimento do protótipo IIR Elíptico passa-baixas, foi utilizada a função *ellipord* para estimar a ordem do filtro, com base nas especificações normalizadas. Em seguida, foi utilizada a função *ellip* para calcular os coeficientes do filtro, tendo como base a ordem gerada na função anterior e os valores de banda de passagem e rejeição que foram especificados para este filtro. Como resultado, a função de transferência gerada foi a seguinte:

$$H(p) = \frac{0.047 p^4 - 6.84 \cdot 10^{-18} p^3 + 0.22 p^2 - 1.58 \cdot 10^{-17} p + 0.23}{p^5 + 0.923 p^4 + 1.85 p^3 + 1.13 p^2 + 0.788 p + 0.23} \quad (2.1)$$

Resultando no filtro passa-baixas analógico exibido na figura a seguir.

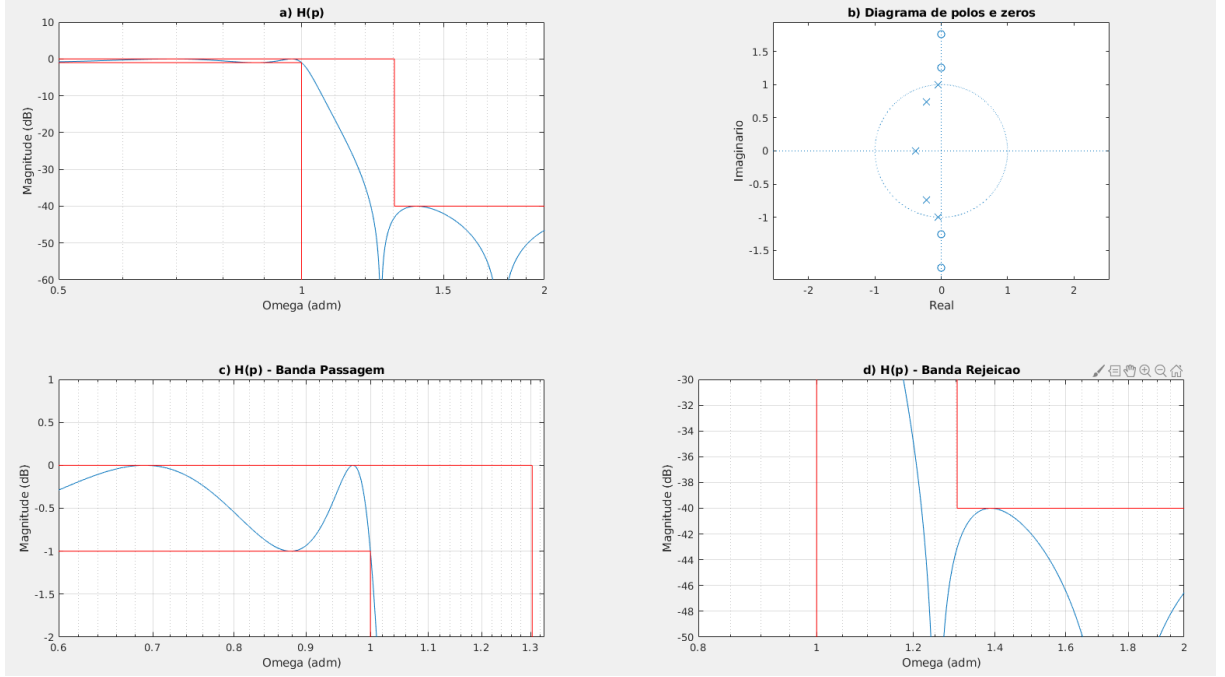


Figura 1 – Protótipo LP

Após o projeto do protótipo, foi realizada a transformação do tipo de filtro, que neste caso, implica na transformação para um filtro passa-baixas. A transformação foi realizada substituindo a variável p de acordo com a seguinte expressão:

$$p = \frac{s}{\lambda_p} \quad (2.2)$$

Resultando na seguinte expressão para $H(s)$:

$$H(s) = \frac{0.117 p^4 - 4.26 \cdot 10^{-17} p^3 + 3.42 p^2 - 6.11 \cdot 10^{-16} p + 22.2}{p^5 + 2.3 p^4 + 11.5 p^3 + 17.5 p^2 + 30.5 p + 22.2} \quad (2.3)$$

O resultado do filtro normalizado em relação à frequência gerado a partir desta expressão pode ser visualizado na figura que segue.

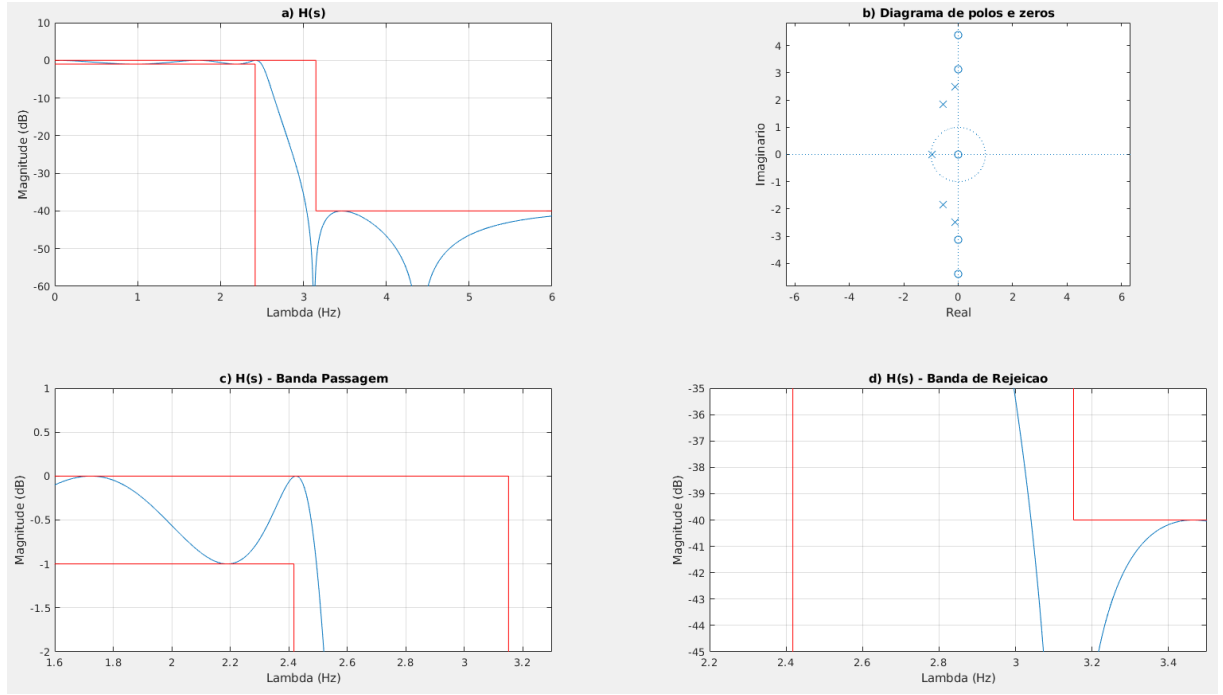


Figura 2 – Transformação LP -> LP'

Após a transformação de frequência, foi realizada a transformação bilinear, a fim de converter o filtro, que até então era analógico, em digital na frequência especificada. Para realização da transformação bilinear, utilizou-se a seguinte expressão para substituição da variável s :

$$s = 2fa \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.4)$$

Resultando na seguinte expressão para $H(z)$:

$$H(z) = \frac{0.12p^5 + 0.379p^4 + 0.632p^3 + 0.632p^2 + 0.379p + 0.12}{p^5 + 0.00586p^4 + 1.32p^3 - 0.326p^2 + 0.444p - 0.178} \quad (2.5)$$

O resultado do filtro após a transformação bilinear pode ser observado na figura a seguir.

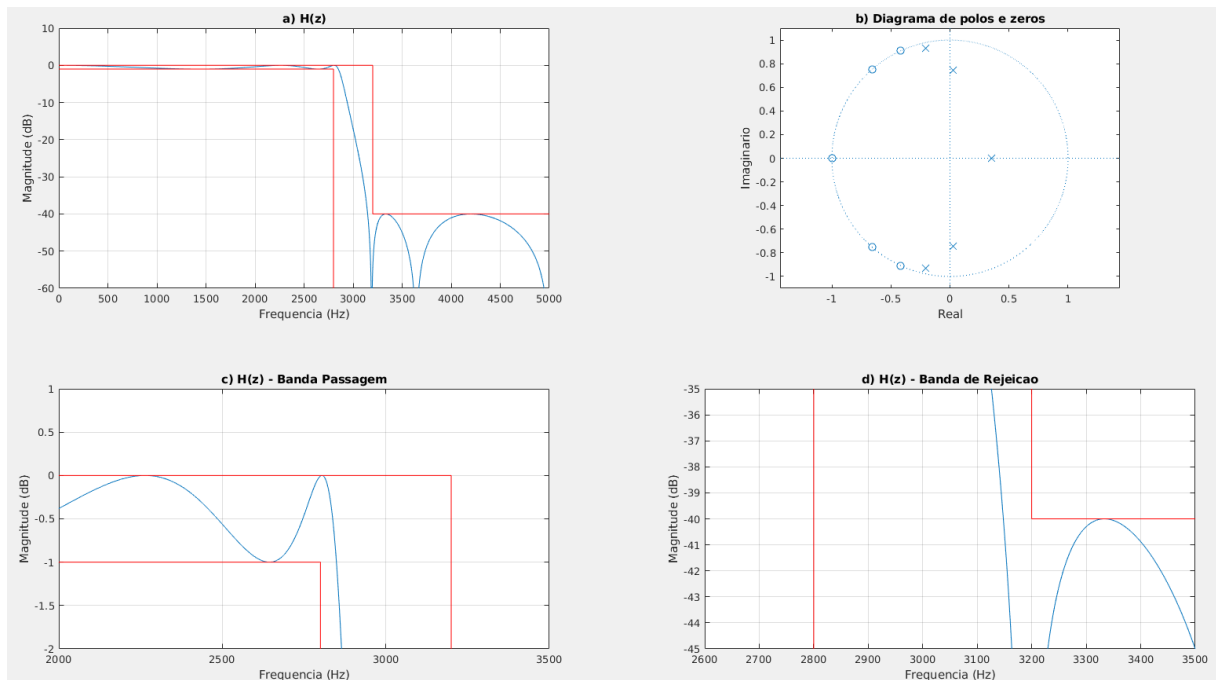


Figura 3 – Transformação Analógico -> Digital

Por fim, verificamos na figura a seguir, o filtro gerado a partir das especificações iniciais, com os detalhes da resposta em frequência, resposta ao impulso, resposta de fase, atraso de grupo e diagrama de polos e zeros.

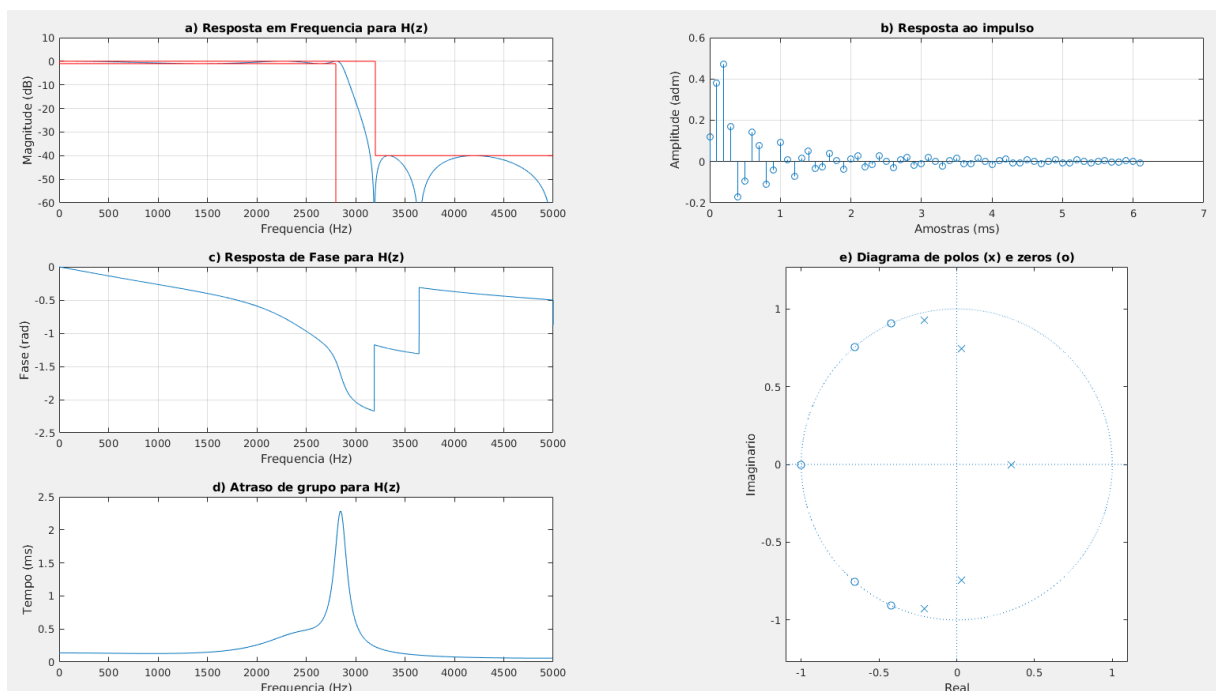


Figura 4 – LP IIR 2800-3200Hz com Ordem 5

Neste filtro foi realizado ajuste apenas nas frequências de corte e rejeição. O ajuste foi realizado com intuito de posicionar o filtro melhor dentro da janela de especificação, mas não resultou numa redução de ordem.

Obs.: para o cálculo do protótipo, Ω_s foi definido como:

$$\Omega_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} \quad (2.6)$$

2.1.2 Filtro FIR do tipo Janela Fixa

Para desenvolvimento do filtro de janela fixa, escolhemos primeiramente a janela de Hann, devido a atenuação que precisávamos para a banda de rejeição (40dB). Para a implementação, utilizamos a função *hann* do MatLab. Após a escolha, estimamos a ordem do filtro através da equação:

$$M = \frac{3.11 * \pi}{W_s - W_p} \quad (2.7)$$

Estimada a ordem, calculamos os coeficientes do filtro através das expressões:

$$c(n) = \begin{cases} \frac{w_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\text{sen}(w_c * n)}{\pi * n}, & |n| \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Em seguida, geramos a janela através da ordem estimada e então, aplicamos a janela ao filtro, resultando na expressão de transferência a seguir.

$$\begin{aligned} H(z) = & -2.02 \cdot 10^{-5} z^{61} - 4.78 \cdot 10^{-5} z^{60} + 2.56 \cdot 10^{-4} z^{59} - 6.13 \cdot 10^{-5} z^{58} - 6.99 \cdot 10^{-4} z^{57} + \\ & 7.32 \cdot 10^{-4} z^{56} + 8.75 \cdot 10^{-4} z^{55} - 0.00204 z^{54} - 3.01 \cdot 10^{-5} z^{53} + 0.00341 z^{52} - 0.00236 z^{51} - \\ & 0.0036 z^{50} + 0.00596 z^{49} + 0.00119 z^{48} - 0.0093 z^{47} + 0.00453 z^{46} + 0.00989 z^{45} - 0.0127 z^{44} \\ & - 0.0051 z^{43} + 0.0207 z^{42} - 0.0067 z^{41} - 0.0239 z^{40} + 0.0251 z^{39} + 0.0166 z^{38} - 0.0475 z^{37} + \\ & 0.00829 z^{36} + 0.0691 z^{35} - 0.0673 z^{34} - 0.0847 z^{33} + 0.303 z^{32} + 0.587 z^{31} + 0.303 z^{30} - \\ & 0.0847 z^{29} - 0.0673 z^{28} + 0.0691 z^{27} + 0.00829 z^{26} - 0.0475 z^{25} + 0.0166 z^{24} + 0.0251 z^{23} - \\ & 0.0239 z^{22} - 0.0067 z^{21} + 0.0207 z^{20} - 0.0051 z^{19} - 0.0127 z^{18} + 0.00989 z^{17} + 0.00453 z^{16} - \\ & 0.0093 z^{15} + 0.00119 z^{14} + 0.00596 z^{13} - 0.0036 z^{12} - 0.00236 z^{11} + 0.00341 z^{10} - \\ & 3.01 \cdot 10^{-5} z^9 - 0.00204 z^8 + 8.75 \cdot 10^{-4} z^7 + 7.32 \cdot 10^{-4} z^6 - 6.99 \cdot 10^{-4} z^5 - 6.13 \cdot 10^{-5} z^4 + \\ & 2.56 \cdot 10^{-4} z^3 - 4.78 \cdot 10^{-5} z^2 - 2.02 \cdot 10^{-5} z \end{aligned} \quad (2.9)$$

Após o projeto inicial, iniciamos os ajustes. Neste filtro, realizamos ajustes na altura do filtro, nas bandas de passagem e de rejeição e, por fim, um deslocamento, para posicionar o filtro dentro da janela que fora especificada no início do projeto. A partir dos ajustes, além de corrigir o filtro, reduzimos a ordem inicial, que era de 77, para ordem 61.

A figura a seguir exibe o filtro, o diagrama de polos e zeros, e as bandas de passagem e rejeição.

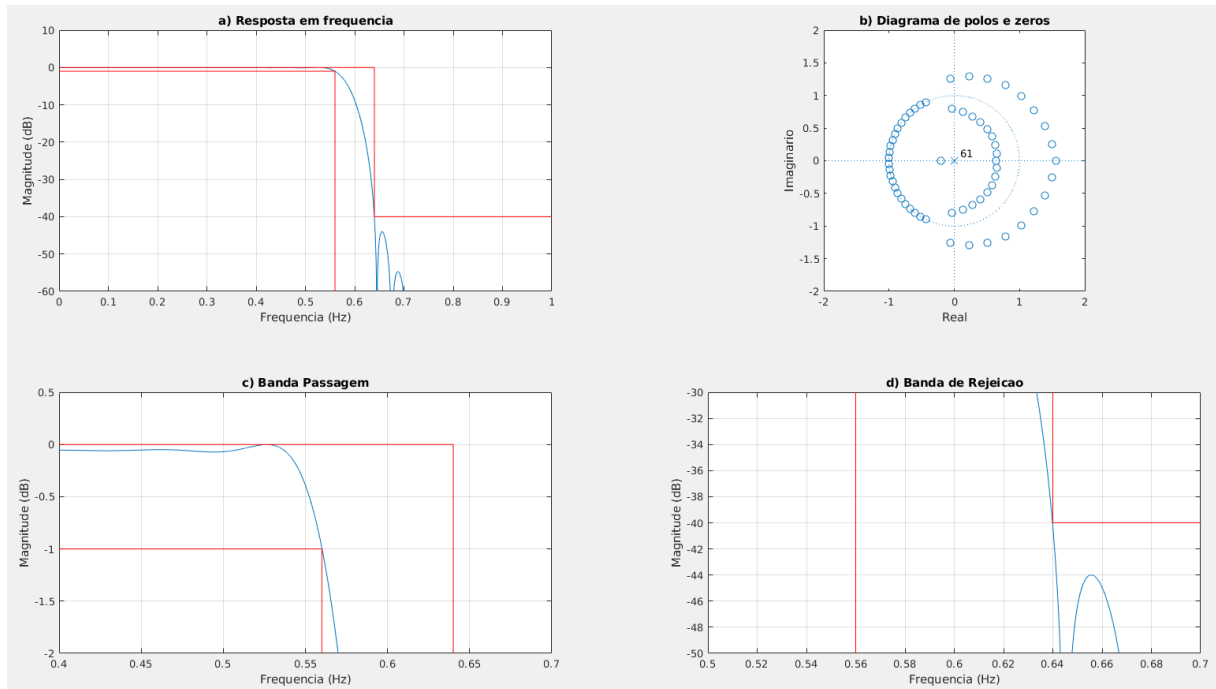


Figura 5 – LP FIR 2800-3200Hz bandas laterais

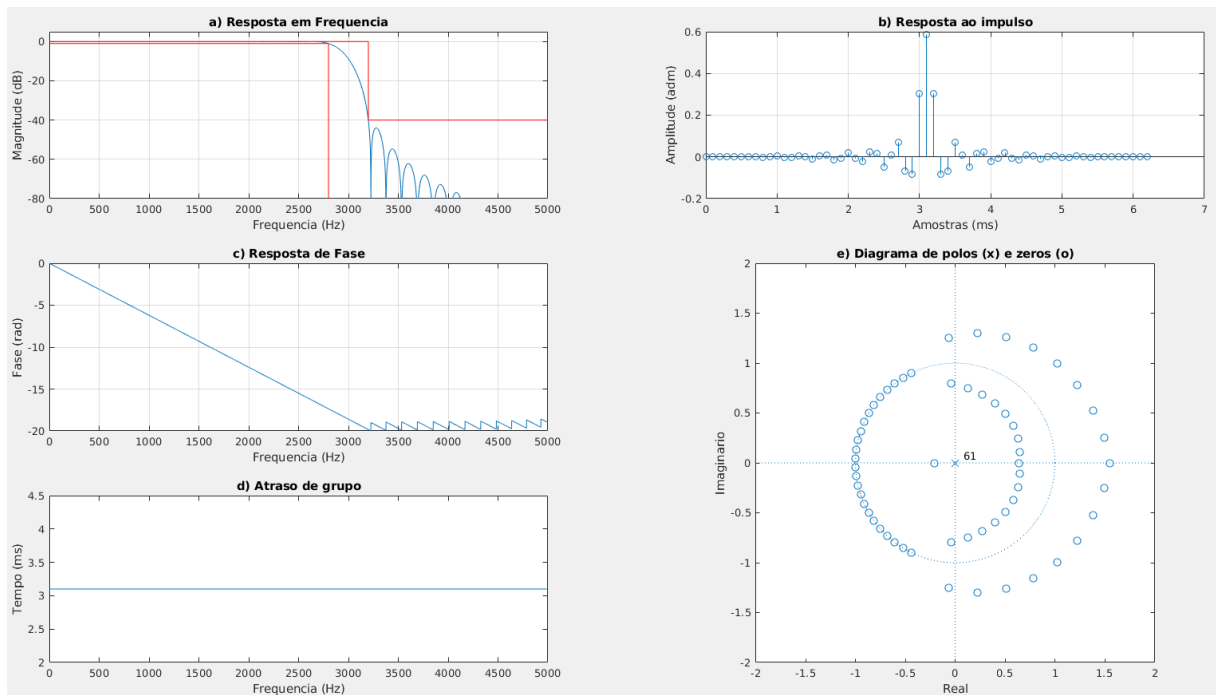


Figura 6 – LP FIR 2800-3200Hz com Ordem 61.

Obs.: foram realizados testes com as janelas fixas triangular, Hamming, Bartlett e Bartlett-Hanning. Entretanto, a que obteve a melhor resposta foi a janela de Hann.

2.1.3 Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Na imagem abaixo foi realizado um comparativo entre o filtro Passa Baixa IIR e FIR, nela é demonstrado a resposta em frequência, resposta de fase e diagrama de pólos e zeros. Percebe-se que a resposta de fase para o modelo FIR é linear na banda de passagem.

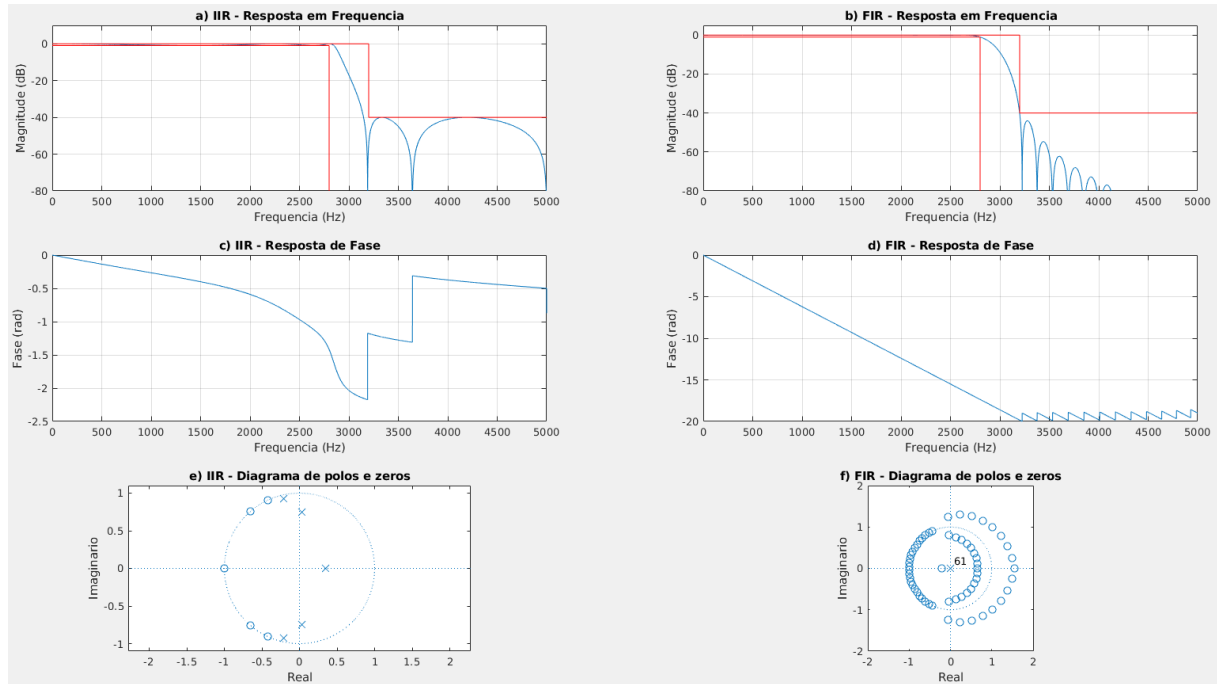


Figura 7 – Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Abaixo na Tabela 2, é exposto um comparativo entre as ordens e atraso de grupo dos modelos já apresentados. Nota-se que a ordem de um filtro FIR é muito maior que para o modelo IIR.

Para a aproximação IIR, tivemos um atraso de grupo não constante. Podemos observar na Figura 4 que próximo a 2800Hz tivemos um atraso de grupo das amostras de 2,3ms. Já para abordagem FIR o atraso de grupo é constante para todas as frequências no valor de 3,1ms, conforme observado na Figura 6.

Filtro	Ordem	Atraso de Grupo
IIR - Eliptico	5	Não Constante
FIR - Janela Fixa	61	3,1ms

Tabela 2 – Comparativo entre as aproximações utilizadas no filtro Passa-Baixa

2.2 Filtro Passa-Altas

O segundo projeto será desenvolvido um filtro passa-altas IIR com aproximação do tipo Butterworth, em seguida um FIR com Janela Ajustável, com as especificações da tabela a seguir.

Frequência de amostragem	10000 Hz
Frequência de passagem	2800 Hz
Frequência de rejeição	3200 Hz
Atenuação máxima na banda de passagem	0.5 dB
Atenuação máxima na banda de rejeição	20 dB
Ganho	0 dB

Tabela 3 – Especificação do filtro passa alta

2.2.1 Filtro IIR do tipo Butterworth

No protótipo do filtro passa-altas do tipo IIR foram especificados os parâmetros da Tabela 3. As equações de cálculo de ordem e de pólos foram baseados na aproximação Butterworth. Este filtro teve seus coeficientes calculados manualmente, ou seja, sem a utilização das funções para filtros Butterworth do MATLAB. Para isto, foram utilizadas as funções a seguir.

Primeiramente, foi definido o valor de ϵ :

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1Ap} - 1} \quad (2.10)$$

Em seguida, estimamos a ordem do filtro.

$$n \geq \frac{\log[(10^{0.1As} - 1)/\epsilon^2]}{2 \log \Omega_s} \quad (2.11)$$

Obtivemos os polos do filtro.

$$p_k = \epsilon^{(-1/n)} e^{[j \frac{2k+n-1}{2n} \pi]}, k = 1, 2, 3...n \quad (2.12)$$

E obtivemos a função de transferência.

$$H(p) = \frac{k}{D(p)}, \text{ onde } k = \epsilon^{-1} \text{ e } D(p) = \prod_{k=1}^n (p - p_k) \quad (2.13)$$

Resultando na seguinte função para H(p):

$$H(p) = \frac{2.86}{p^{13} + 9.0 p^{12} + 40.5 p^{11} + 120.0 p^{10} + 262.0 p^9 + 443.0 p^8 + 596.0 p^7 + 646.0 p^6 + 565.0 p^5 + 393.0 p^4 + 212.0 p^3 + 83.8 p^2 + 21.9 p + 2.86} \quad (2.14)$$

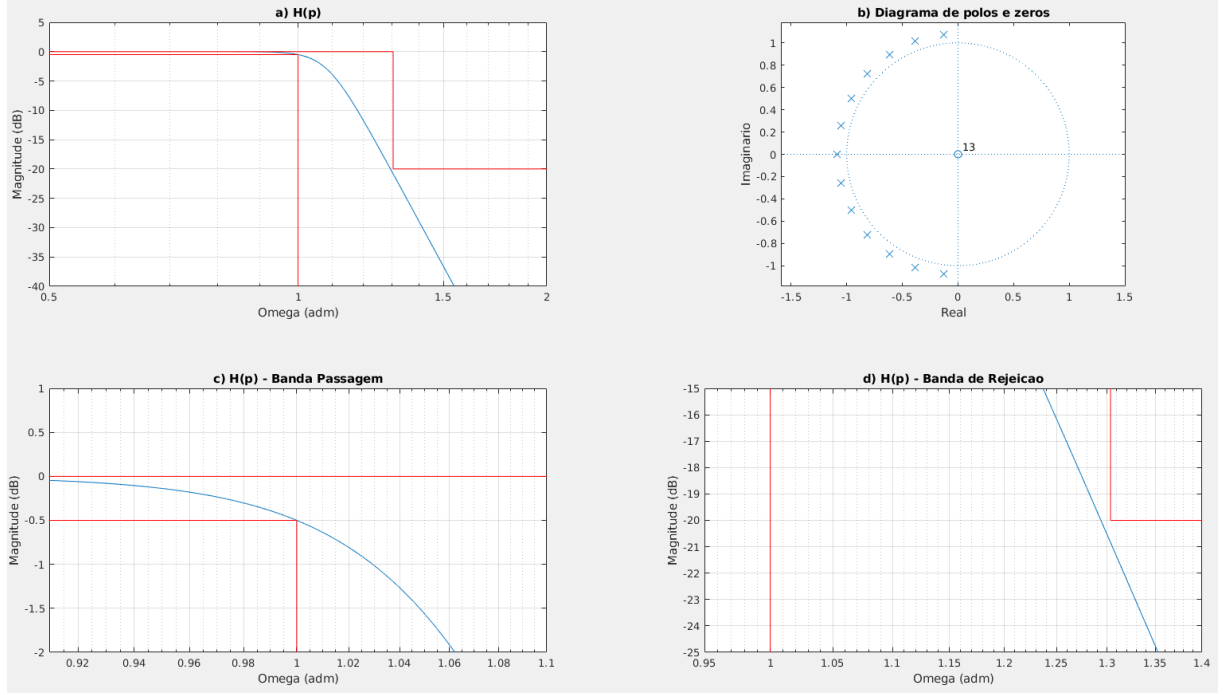


Figura 8 – Protótipo LP

Após a obtenção da função de transferência para o protótipo, seguindo a metodologia definida no início deste relatório, efetuamos a transformada de frequência. Neste caso, transformando o protótipo passa-baixas, num filtro passa-altas de frequência normalizada. Para a conversão, a variável p foi substituída de acordo com a seguinte expressão:

$$p = \frac{\lambda_p}{s} \quad (2.15)$$

Resultando na seguinte expressão $H(s)$:

$$H(s) = \frac{p^{13}}{p^{13} + 24.0p^{12} + 288.0p^{11} + 2299.0p^{10} + 1.33e + 4p^9 + 6.0e + 4p^8 + 2.16e + 5p^7 + 6.24e + 5p^6 + 1.46e + 6p^5 + 2.7e + 6p^4 + 3.89e + 6p^3 + 4.11e + 6p^2 + 2.87e + 6p + 1.0e + 6} \quad (2.16)$$

A figura a seguir exibe o filtro expresso em termos de $H(s)$.

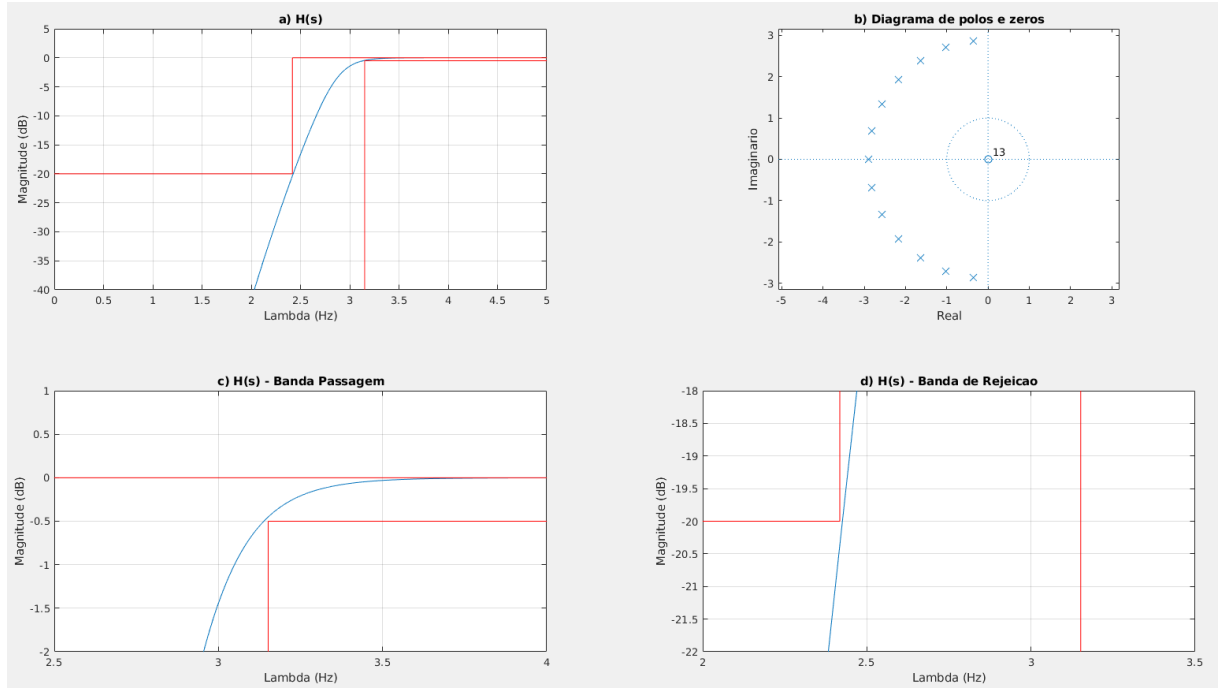


Figura 9 – Transformação LP -> HP

Por fim, realizamos a transformação bilinear, conforme já indicado neste relatório, convertendo o filtro em digital na frequência especificada. Com isso, obtivemos a seguinte função de transferência para $H(z)$.

$$H(z) = \frac{3.46e - 5 p^{13} - 4.49e - 4 p^{12} + 0.0027 p^{11} - 0.00989 p^{10} + 0.0247 p^9 - 0.0445 p^8 + 0.0593 p^7 - 0.0593 p^6 + 0.0445 p^5 - 0.0247 p^4 + 0.00989 p^3 - 0.0027 p^2 + 4.49e - 4 p - 3.46e - 5}{p^{13} + 2.99 p^{12} + 5.68 p^{11} + 7.29 p^{10} + 7.09 p^9 + 5.29 p^8 + 3.12 p^7 + 1.45 p^6 + 0.526 p^5 + 0.147 p^4 + 0.0306 p^3 + 0.00447 p^2 + 4.11e - 4 p + 1.78e - 5} \quad (2.17)$$

A imagem a seguir exhibe o filtro expresso em termos de $H(z)$.

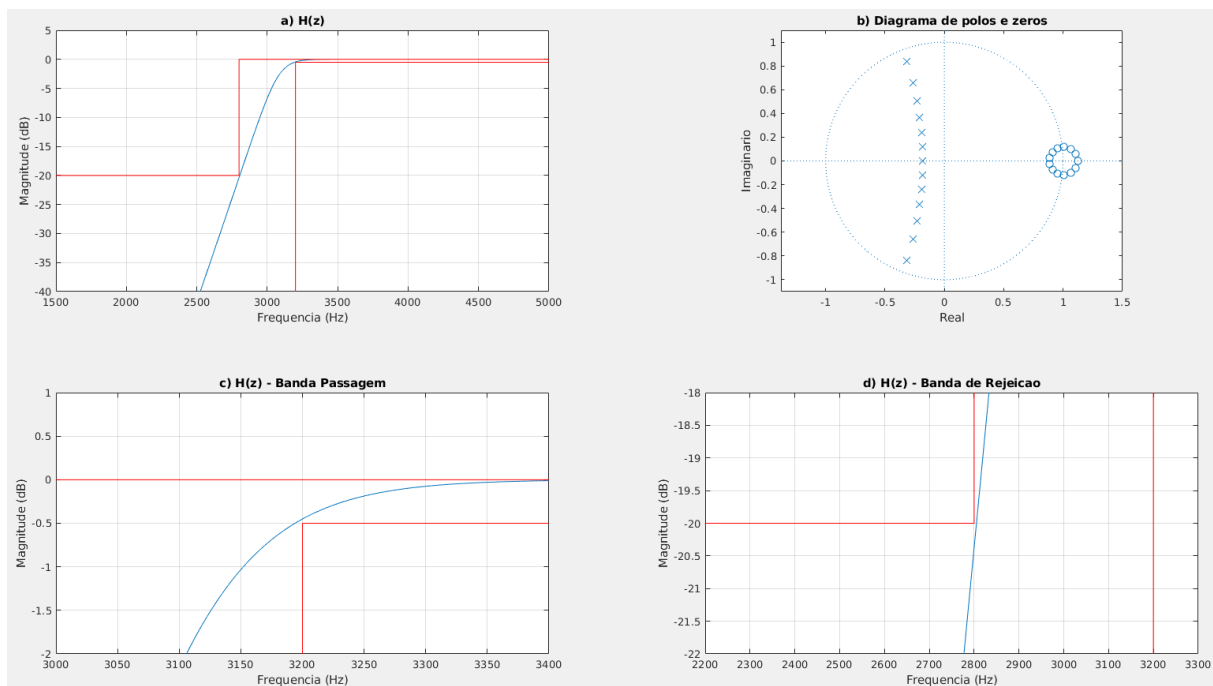


Figura 10 – Transformação Analógico -> Digital

Por fim, na figura a seguir, visualizamos o filtro projetado.

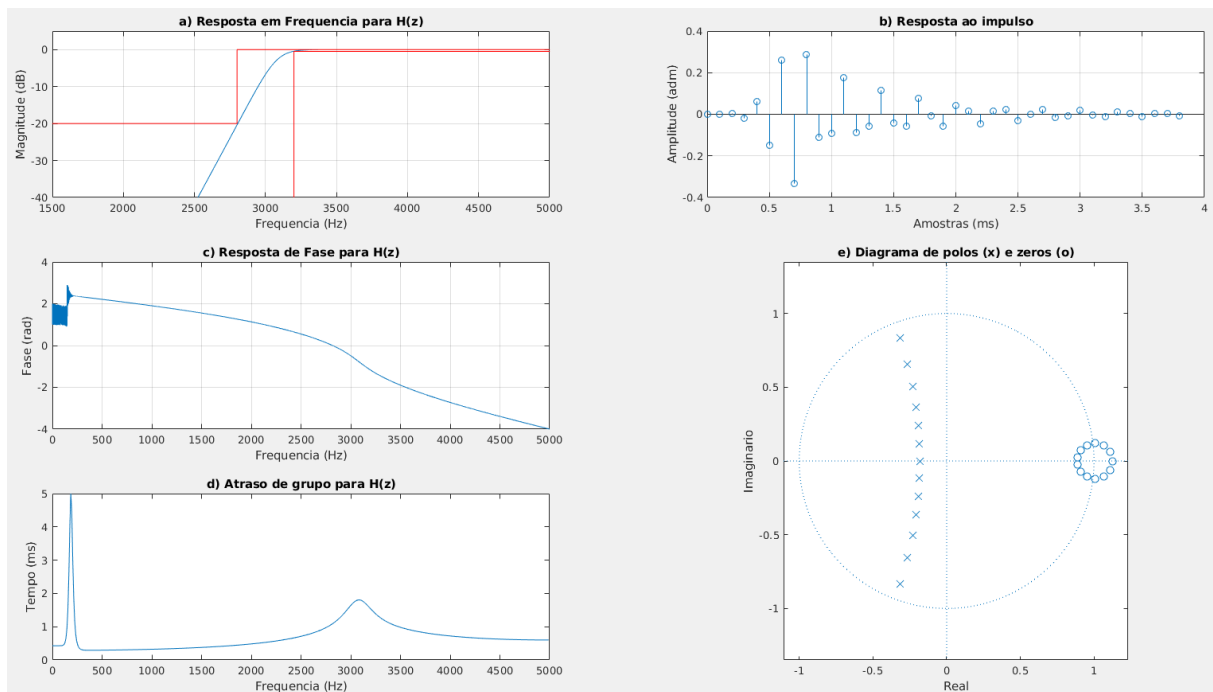


Figura 11 – HP IIR 2800-3200Hz com Ordem 13

Neste filtro foi realizado ajuste apenas nas frequências de corte e rejeição. O ajuste

foi realizado com intuito de posicionar o filtro melhor dentro da janela de especificação, mas não resultou numa redução de ordem.

Obs.: para o cálculo do protótipo, Ω_s foi definido como:

$$\Omega_s = \frac{\lambda_p}{\lambda_s} \quad (2.18)$$

2.2.2 Filtro FIR do tipo Janela Ajustável

No protótipo do filtro passa-altas do tipo janela ajustável foi especificado os parâmetros da Tabela 3. A melhor aproximação que obtivemos utilizando uma janela ajustável foi com a de Kaiser. Para realização do projeto seguimos os seguintes passos:

A ordem inicial foi estimada de acordo com as seguintes expressões, em que α indica a atenuação na banda de rejeição:

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha - 8.7), & \alpha > 50 \\ 0.5842(\alpha - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha - 21), & 50 \geq \alpha \geq 21 \\ 0, & \alpha < 21 \end{cases} \quad (2.19)$$

Inicialmente β foi definido como zero, já que a atenuação na banda de passagem definida na especificação foi de 20dB. Todavia, foram necessários ajustes, fazendo com que forçássemos uma atenuação maior na banda de rejeição. Estes ajustes implicaram numa nova forma de calcular o β , fazendo com que passássemos a utilizar a segunda expressão do cálculo acima, na qual α está entre 21 e 50.

Após o cálculo do β , estimamos a ordem do filtro através da expressão:

$$N = \frac{\alpha - 8}{2.285(w_p - w_s)} + 1 \quad (2.20)$$

Com os valores de ordem (N) e betha (β) calculados, foi utilizado a função Kaiser do MATLAB para calcular os valores da janela.

$$wk = \text{kaiser}(N, \beta); \quad (2.21)$$

Com a janela e os parâmetros obtidos, calculamos os coeficientes do filtro passa-altas a partir da seguinte expressão:

$$c(n) = \begin{cases} \frac{1-w_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{-\text{sen}(w_c * n)}{\pi * n}, & |n| \neq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Em seguida, foi aplicada a janela e o ganho nos coeficientes do filtro.

$$b = b * wk * 10^{\frac{-G_0}{20}}; \quad (2.23)$$

Neste filtro, foram necessários ajustes na atenuação na banda de rejeição, afim de garantir o enquadramento da banda de passagem nas especificações. Além disso, foram realizados ajustes na altura do filtro, frequências de rejeição e passagem, e ajuste de deslocamento. O resultado, foi um filtro *fir* de ordem 38, expresso pela função a seguir.

$$\begin{aligned}
 H(z) = & 0.0062 z^{38} - 0.0063 z^{37} - 0.004 z^{36} + 0.0111 z^{35} - 0.00231 z^{34} - 0.013 z^{33} \\
 & + 0.0119 z^{32} + 0.00894 z^{31} - 0.0216 z^{30} + 0.00304 z^{29} + 0.0266 z^{28} - 0.0225 z^{27} \\
 & - 0.0207 z^{26} + 0.0465 z^{25} - 0.00353 z^{24} - 0.0698 z^{23} + 0.0622 z^{22} + 0.0867 z^{21} \\
 & - 0.293 z^{20} + 0.39 z^{19} - 0.293 z^{18} + 0.0867 z^{17} + 0.0622 z^{16} - 0.0698 z^{15} - 0.00353 z^{14} \\
 & + 0.0465 z^{13} - 0.0207 z^{12} - 0.0225 z^{11} + 0.0266 z^{10} + 0.00304 z^9 - 0.0216 z^8 + 0.00894 z^7 \\
 & + 0.0119 z^6 - 0.013 z^5 - 0.00231 z^4 + 0.0111 z^3 - 0.004 z^2 - 0.0063 z + 0.0062
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Na Figura 11 é apresentado a resposta em frequência do ganho do filtro dentro das especificações determinadas pelas máscaras. Se visualizarmos com um zoom nas frequências de passagem e rejeição com suas respectivas atenuações, podemos observar que o filtro ficou dentro das especificações.

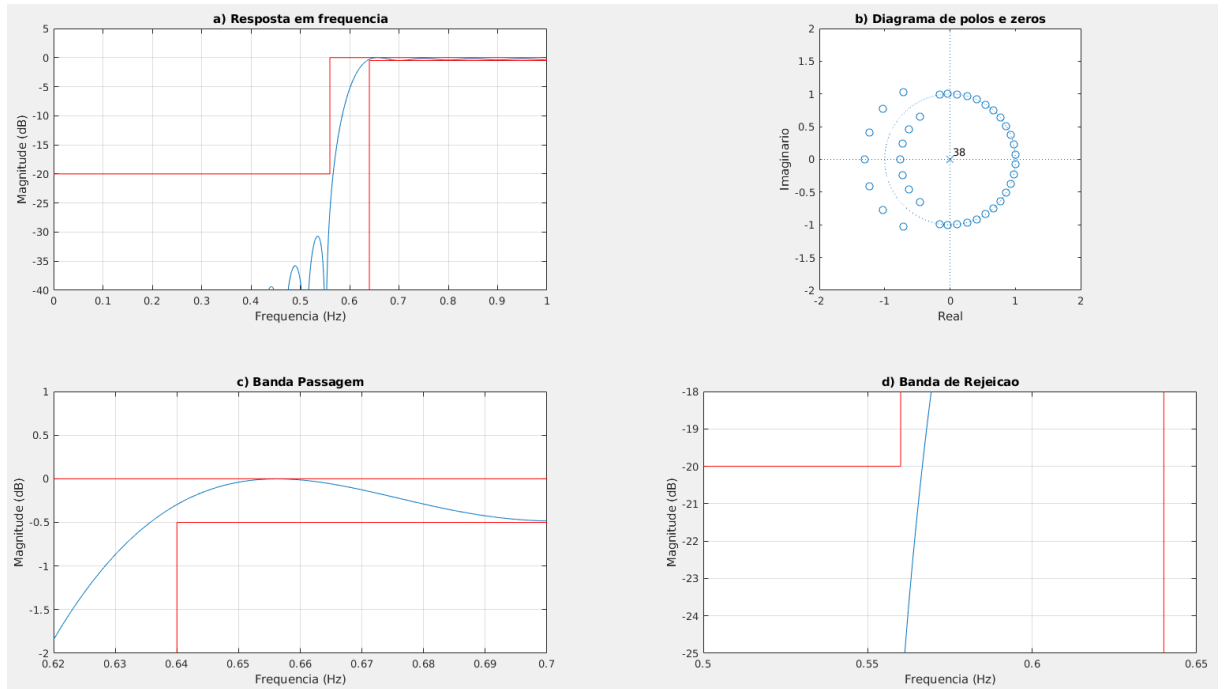


Figura 12 – HP FIR 2800-3200Hz bandas laterais

A Figura 12 apresenta a resposta da fase do filtro, sendo uma fase linear, também apresenta a resposta ao impulso, diagrama de polos e zeros do filtro, e por fim a resposta do atraso de grupo, sendo um atraso de grupo constante, característico do filtro *fir*. No diagrama de pólos e zeros, nota-se que não há pólos neste tipo de filtro, todos pólos está concentrados em zero, pois o filtro FIR contém apenas o número um no denominador.

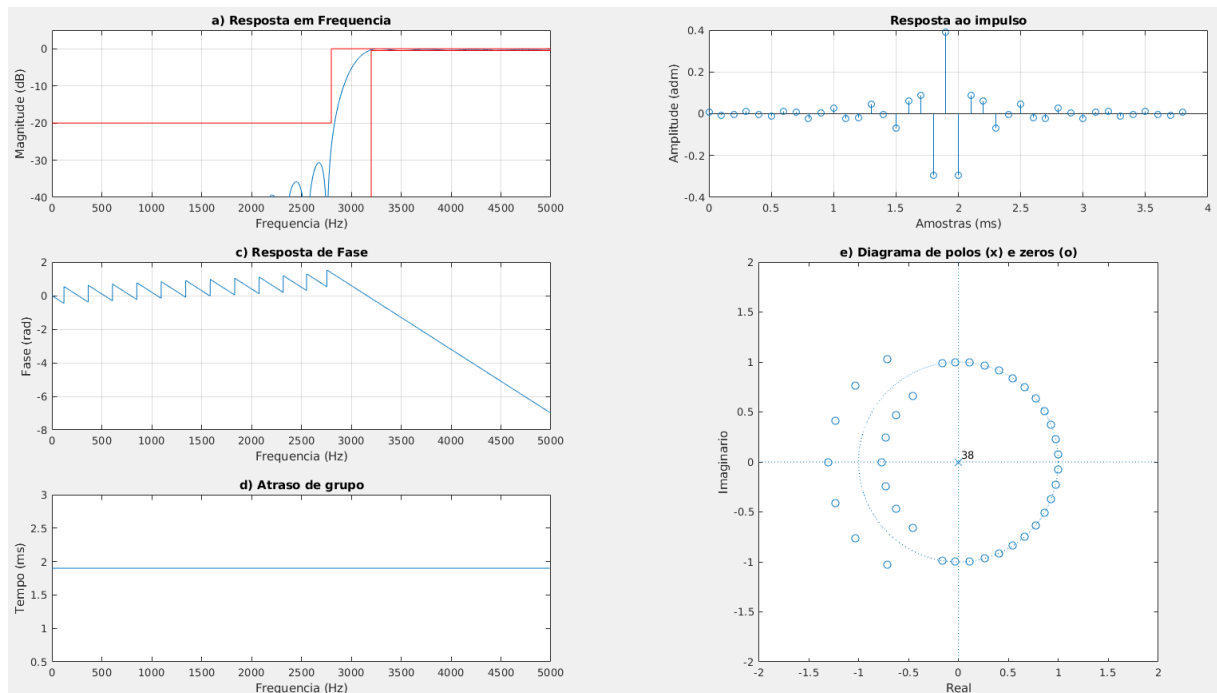


Figura 13 – HP FIR 2800-3200Hz com Ordem 38

2.2.3 Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Na imagem a seguir foi realizado um comparativo entre o filtro Passa Altas IIR e FIR, nela é demonstrado a resposta em frequência, resposta de fase e diagrama de pólos e zeros. Percebe-se que a resposta de fase para o modelo FIR é linear na banda de passagem.

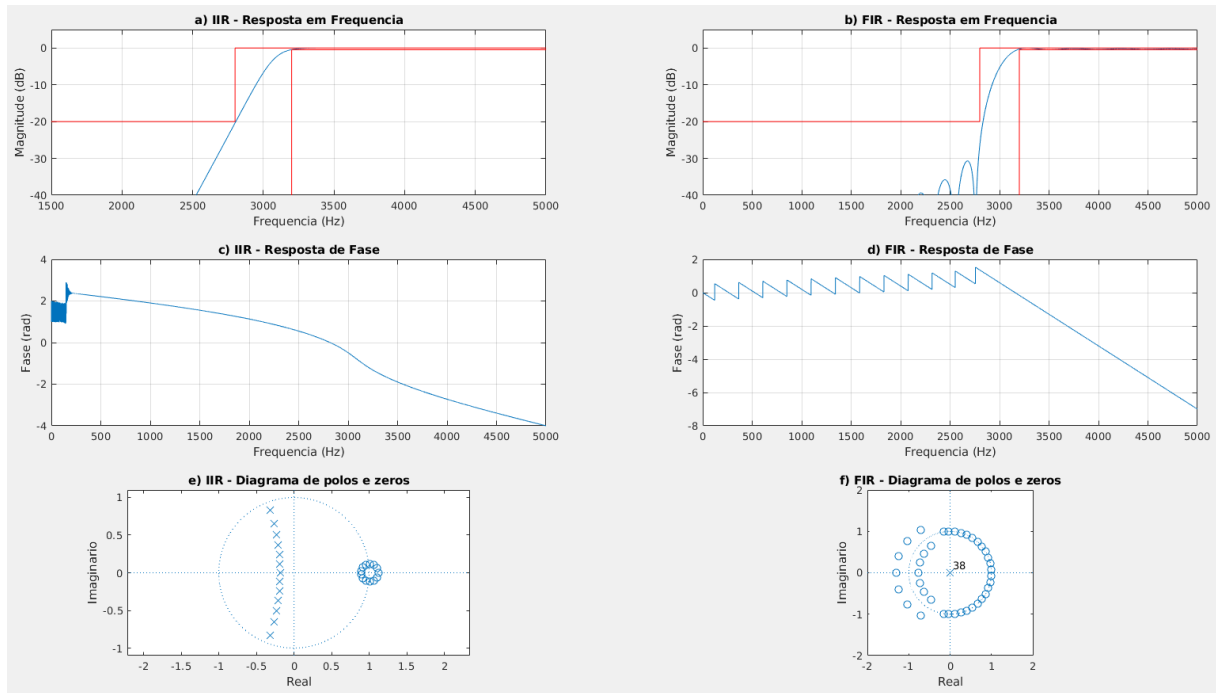


Figura 14 – Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Abaixo na Tabela 4, é exposto um comparativo entre as ordens e atraso de grupo dos modelos já apresentados. Nota-se que a ordem de um filtro FIR é maior que para o modelo IIR.

Para a aproximação IIR, tivemos um atraso de grupo não constante. Podemos observar na Figura 11 que próximo a frequência de 250Hz tivemos um atraso de grupo das amostras de 5ms. Já para abordagem FIR o atraso de grupo é constante para todas as frequências no valor de 1,9ms, conforme observado na Figura 13.

Filtro	Ordem	Atraso de Grupo
IIR - Butterworth	13	Não Constante
FIR - Janela Ajustável	38	1,9ms

Tabela 4 – Comparativo entre as aproximações utilizadas no filtro Passa-alta

2.3 Filtro Passa-Faixa

A seguir será apresentado um filtro passa-faixa IIR com aproximação do tipo Chebyshev II, em seguida um FIR com algoritmo de Parks-McClellan, com as especificações da tabela a seguir.

Frequência de amostragem	10000 Hz
F1	3000 Hz
F2	3200 Hz
F3	3400 Hz
F4	3500 Hz
Atenuação máxima na banda de passagem	2 dB
Atenuação máxima na banda de rejeição	30 dB
Ganho	-10 dB

Tabela 5 – Especificação do filtro Passa Faixa

2.3.1 Filtro IIR do tipo Chebyshev II

Para esse filtro foi permitido o uso das funções do MATLAB no projeto, foi utilizada a função *cheb2ord* para estimar a ordem do filtro, com base nas especificações normalizadas. Em seguida, foi utilizada a função *cheby2* para calcular os coeficientes do filtro, utilizando a ordem gerada na função anterior e os valores da banda de passagem e das bandas rejeição que foram circunstanciados (Tabela 5) para este filtro. A função de transferência $H(p)$ obtida foi a seguinte:

$$H(p) = \frac{0.01 p^4 - 3.78e - 18 p^3 + 0.286 p^2 + 2.91e - 17 p + 1.02}{p^4 + 3.34 p^3 + 5.6 p^2 + 5.51 p + 3.23} \quad (2.25)$$

A operação anterior resultou em um filtro passa-baixas analógico exibido na figura a seguir:

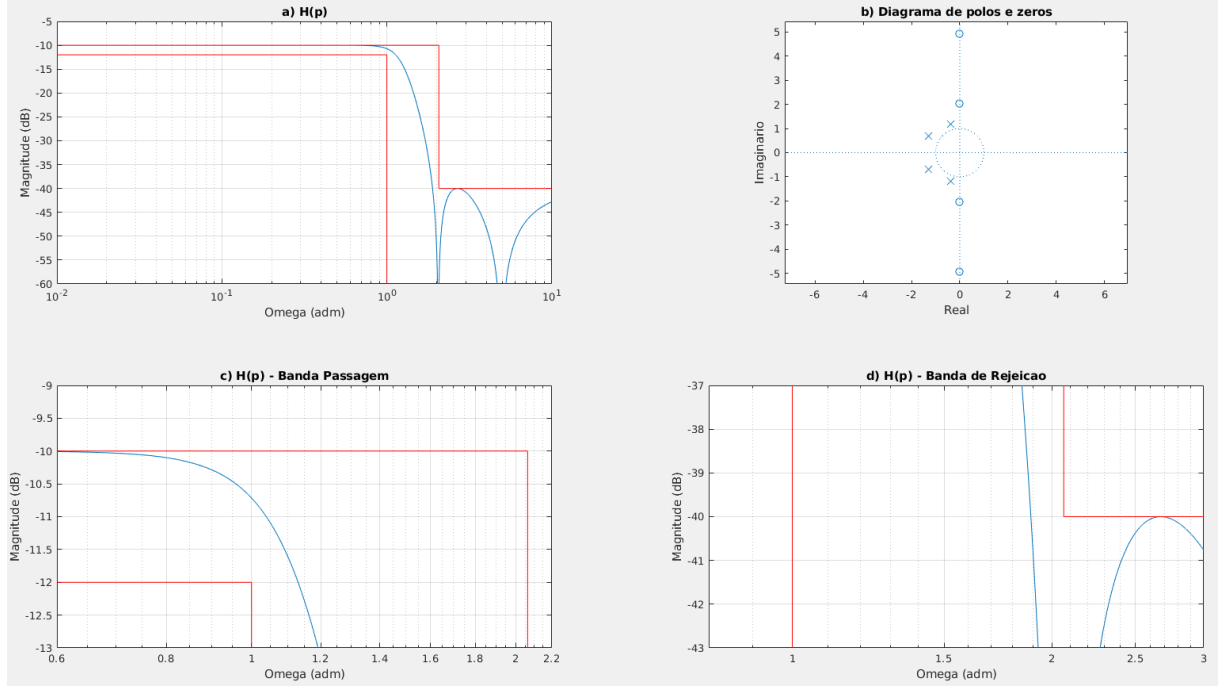


Figura 15 – Protótipo LP

Depois de obtido o projeto protótipo, realizamos a transformação do tipo de filtro, que neste caso, resulta a transformação para um filtro passa-faixas. Essa transformação executada substituindo a variável p pela seguinte expressão:

$$p = \frac{s^2 + \lambda_o^2}{B_s} \quad (2.26)$$

Essa substituição resultou na expressão $H(s)$:

$$H(s) = \frac{0.01p^8 - 1.84e - 18p^7 + 0.526p^6 - 5.98e - 17p^5 + 9.5p^4 - 6.86e - 16p^3 + 69.2p^2 - 2.77e - 15p + 173.0}{p^8 + 1.62p^7 + 47.2p^6 + 56.5p^5 + 819.0p^4 + 647.0p^3 + 6200.0p^2 + 2455.0p + 1.73e + 4} \quad (2.28)$$

O resultado do filtro normalizado em relação à frequência gerado a partir desta expressão pode ser visualizado na figura a seguir.

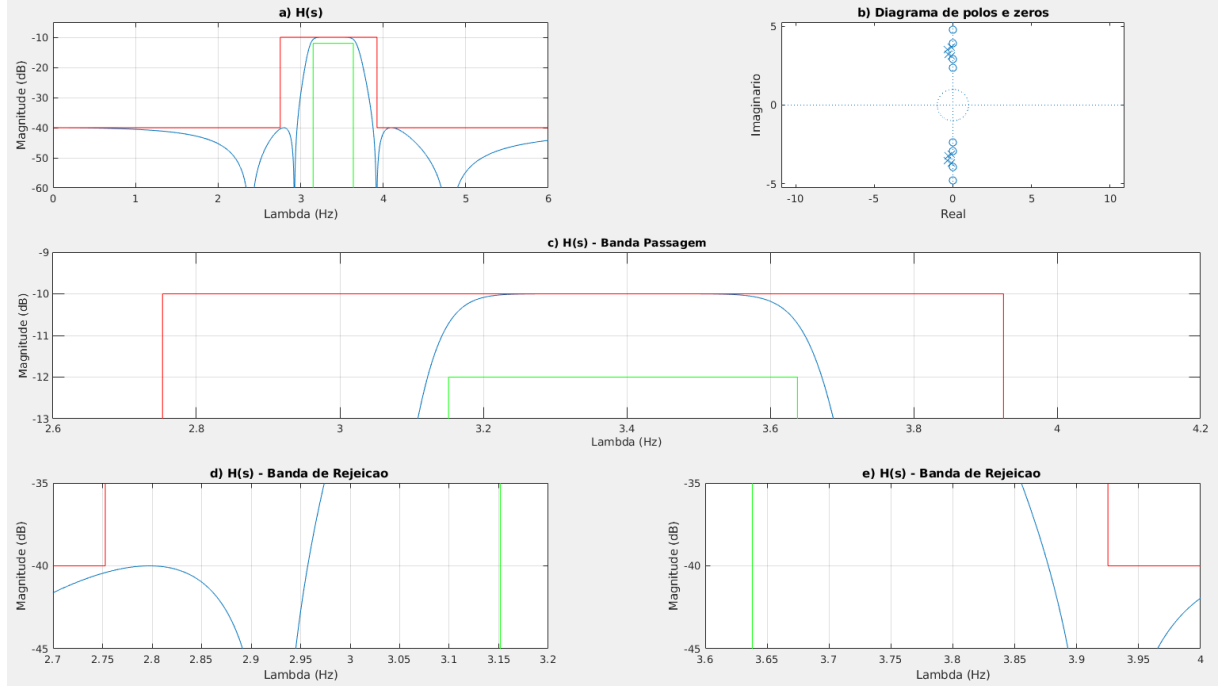


Figura 16 – Transformação LP -> BP

Após a transformação de frequência, realizou-se a transformação bilinear, com a intenção de converter o filtro de analógico para digital na frequência especificada inicialmente. Para realização da transformação bilinear, utilizou-se a seguinte expressão para substituição da variável s :

$$s = 2fa \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.29)$$

Resultando na seguinte expressão para $H(z)$:

$$H(z) = \frac{0.00904p^8 + 0.0331p^7 + 0.0786p^6 + 0.121p^5 + 0.143p^4 + 0.121p^3 + 0.0786p^2 + 0.0331p + 0.00904}{p^8 + 3.66p^7 + 8.61p^6 + 12.9p^5 + 14.6p^4 + 11.6p^3 + 6.98p^2 + 2.67p + 0.657} \quad (2.31)$$

O resultado do filtro após a transformação bilinear pode ser observado na figura a seguir.

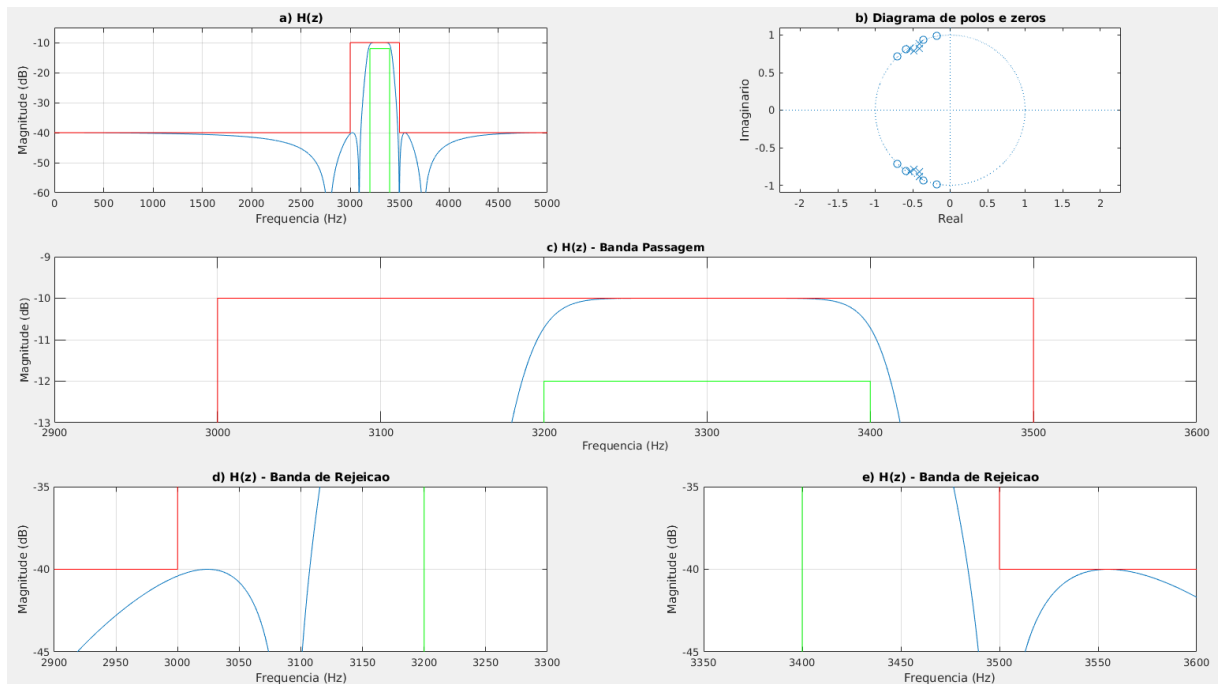


Figura 17 – Transformação Analógico -> Digital

Por fim, pode-se observar na figura a seguir, o filtro gerado a partir das especificações iniciais, com os detalhes da resposta em frequência, resposta ao impulso, resposta de fase, atraso de grupo e diagrama de polos e zeros.

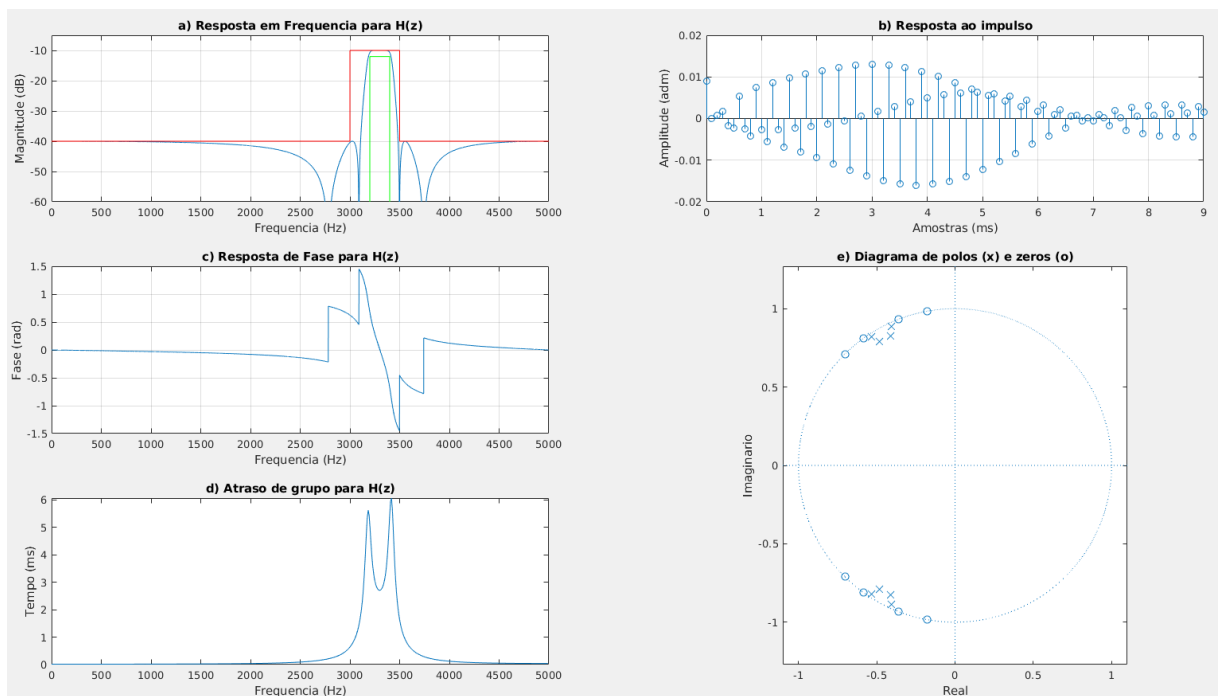


Figura 18 – BP IIR com Ordem 8

Neste filtro foi realizado ajuste apenas nas frequências de corte e rejeição. O ajuste foi realizado com intuito de posicionar o filtro melhor dentro da janela de especificação, mas não resultou numa redução de ordem.

Obs.: para o cálculo do protótipo, Ω_s foi definido como:

$$\Omega_s = \left| \frac{-\lambda_s^2 + \lambda_0^2}{B\lambda_s} \right|, \text{ onde } B = \lambda_{p2} - \lambda_{p1} \text{ e } \lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p2}\lambda_{p1}} \quad (2.32)$$

2.3.2 Filtro FIR do tipo Parks-McClellan

Para o filtro FIR utilizou-se o algoritmo de Parks-McClellan. Com as funções prontas do MATLAB *firpmord* e *firpm*. Para o cálculo de ordem do filtro utiliza-se a função *firpmord* e para montagem do filtro com o algoritmo de Parks-McClellan foi utilizada a função *firpm*.

$$[n, f0, a0, w0] = \text{firpmord}(fcuts, mags, devs, fa); \quad (2.33)$$

$$h_pm = \text{firpm}(n, f0, a0, w0); \quad (2.34)$$

O resultado dos coeficientes obtidos a partir da função *firpm* é apresentado na expressão a seguir.

$$\begin{aligned} H(z) = & 0.0043 z^{90} + 0.00207 z^{89} - 0.0035 z^{88} + 0.00317 z^{87} - 6.2e - 4 z^{86} - 0.00194 z^{85} \\ & + 0.00195 z^{84} + 5.86e - 4 z^{83} - 0.00295 z^{82} + 0.0026 z^{81} + 1.5e - 4 z^{80} - 0.00259 z^{79} \\ & + 0.00246 z^{78} - 1.15e - 4 z^{77} - 0.00224 z^{76} + 0.00271 z^{75} - 0.00109 z^{74} - 0.00145 z^{73} \\ & + 0.00317 z^{72} - 0.00256 z^{71} - 5.89e - 4 z^{70} + 0.00418 z^{69} - 0.00459 z^{68} + 1.7e - 4 z^{67} \\ & + 0.00581 z^{66} - 0.00697 z^{65} + 5.28e - 4 z^{64} + 0.0081 z^{63} - 0.00943 z^{62} + 2.7e - 4 z^{61} \\ & + 0.0109 z^{60} - 0.0116 z^{59} - 7.51e - 4 z^{58} + 0.014 z^{57} - 0.0132 z^{56} - 0.00252 z^{55} + 0.017 z^{54} \\ & - 0.0139 z^{53} - 0.00488 z^{52} + 0.0195 z^{51} - 0.0136 z^{50} - 0.00755 z^{49} + 0.0212 z^{48} - 0.0123 z^{47} \\ & - 0.0101 z^{46} + 0.0218 z^{45} - 0.0101 z^{44} - 0.0123 z^{43} + 0.0212 z^{42} - 0.00755 z^{41} - 0.0136 z^{40} \\ & + 0.0195 z^{39} - 0.00488 z^{38} - 0.0139 z^{37} + 0.017 z^{36} - 0.00252 z^{35} - 0.0132 z^{34} + 0.014 z^{33} \\ & - 7.51e - 4 z^{32} - 0.0116 z^{31} + 0.0109 z^{30} + 2.7e - 4 z^{29} - 0.00943 z^{28} + 0.0081 z^{27} \\ & + 5.28e - 4 z^{26} - 0.00697 z^{25} + 0.00581 z^{24} + 1.7e - 4 z^{23} - 0.00459 z^{22} + 0.00418 z^{21} \\ & - 5.89e - 4 z^{20} - 0.00256 z^{19} + 0.00317 z^{18} - 0.00145 z^{17} - 0.00109 z^{16} + 0.00271 z^{15} \\ & - 0.00224 z^{14} - 1.15e - 4 z^{13} + 0.00246 z^{12} - 0.00259 z^{11} + 1.5e - 4 z^{10} + 0.0026 z^9 \\ & - 0.00295 z^8 + 5.86e - 4 z^7 + 0.00195 z^6 - 0.00194 z^5 - 6.2e - 4 z^4 + 0.00317 z^3 \\ & - 0.0035 z^2 + 0.00207 z + 0.0043 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Considerando os dados fornecidos pela especificação na Tabela 5, o filtro Passa-Faixa protótipo está dentro das especificações conforme podemos notar na Figura 17, também observa-se nesta figura o diagrama de pólos e zeros obtidos através das funções do MATLAB, nota-se que este projeto trata-se de um filtro estável. Um zoom na banda de passagem e nas bandas de rejeição foram aplicados para melhor visualização.

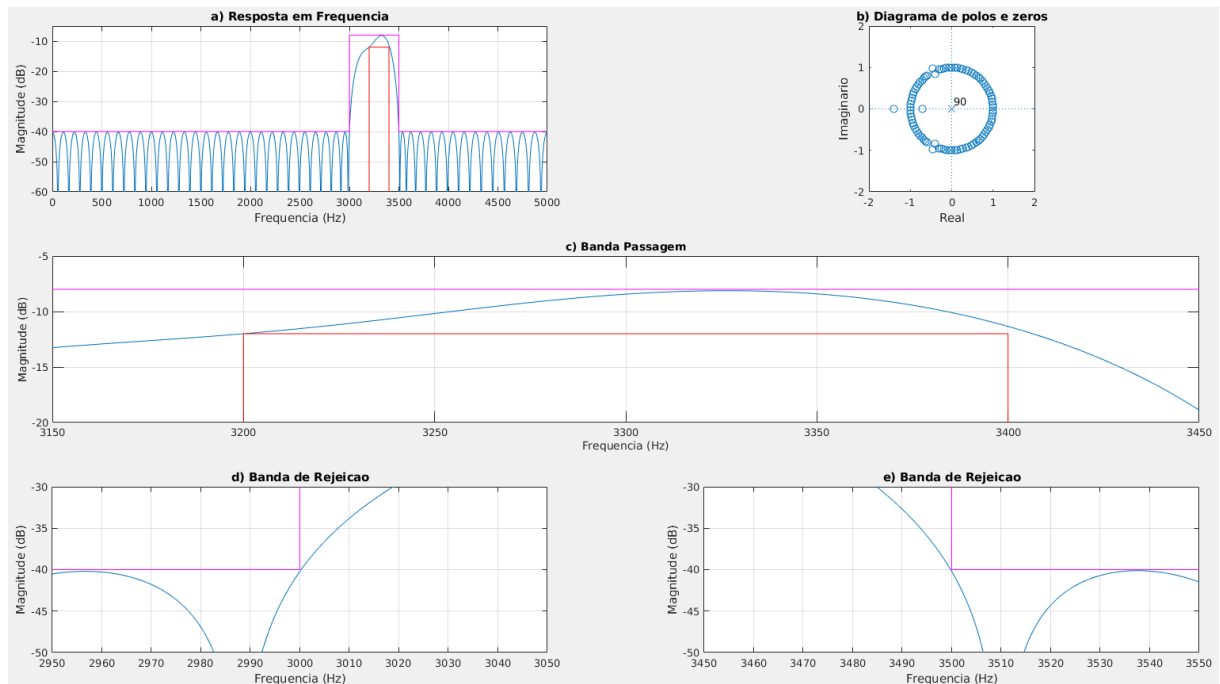


Figura 19 – BP FIR bandas laterais

Na figura 18 podemos observar a sua resposta em magnitude, também a resposta ao impulso, sua resposta de fase, atraso de grupo e o diagrama de pólos e zeros. A medição do atraso de grupo, é a medida do tempo de atraso da magnitude do sinal. Foi utilizada a função do MATLAB *grpdelay* para fazer a verificação deste atraso. Podemos observar na Figura 18 que há um atraso de 4.5 milissegundos constante para todas as frequências.

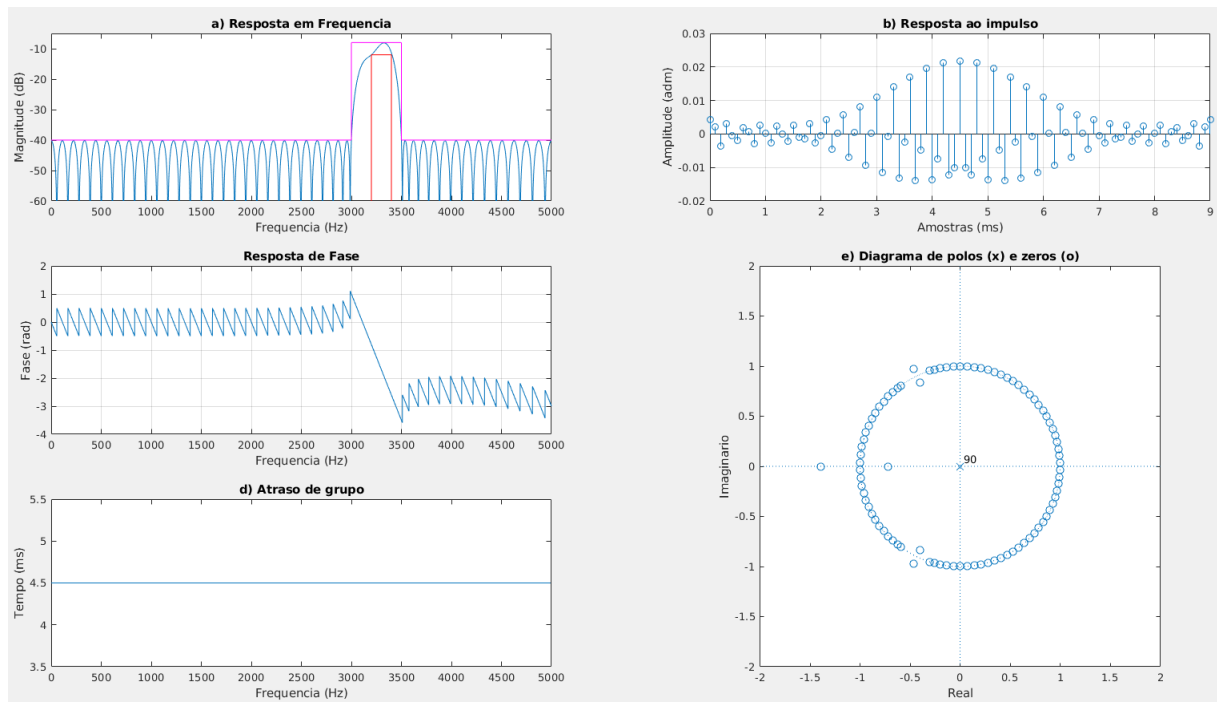


Figura 20 – BP FIR de ordem 90

Neste filtro, foram necessários ajustes na banda de passagem, a fim de garantir o enquadramento na janela de especificação.

2.3.3 Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Na imagem a seguir foi realizado um comparativo entre o filtro Passa Altas IIR e FIR, nela é demonstrado a resposta em frequência, resposta de fase e diagrama de pólos e zeros. Percebe-se que a resposta de fase para o modelo FIR é linear na banda de passagem.

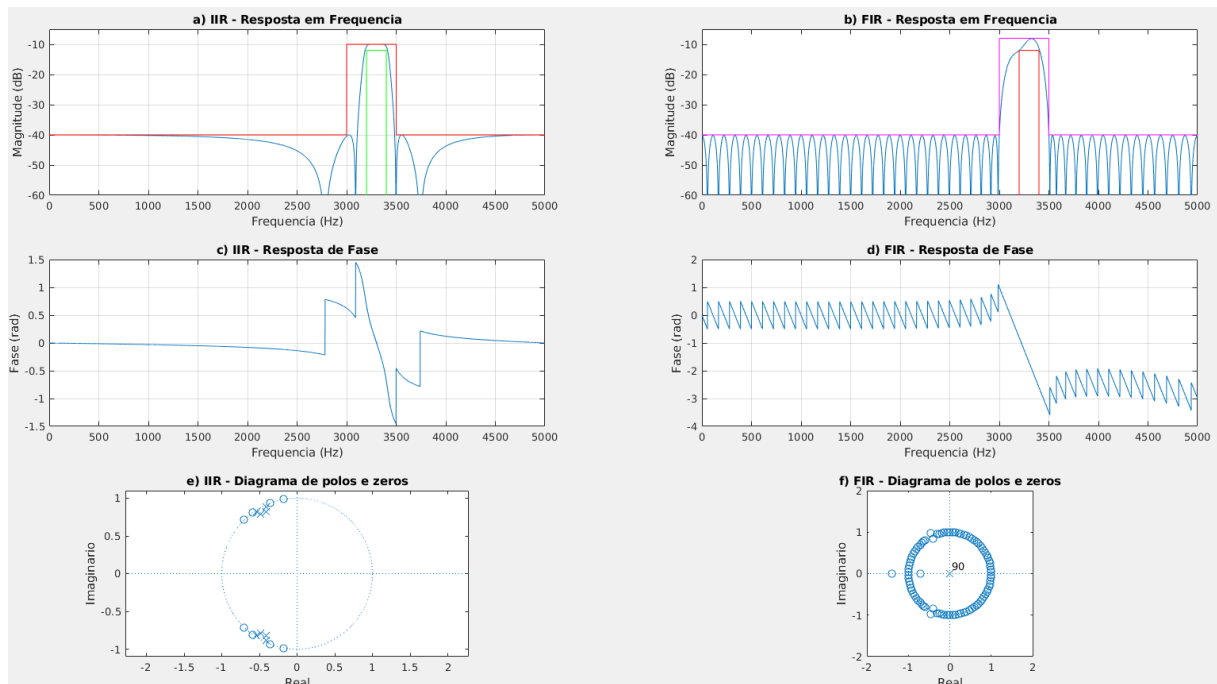


Figura 21 – Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Abaixo na Tabela 6, é exposto um comparativo entre as ordens e atraso de grupo dos modelos já apresentados. Nota-se que a ordem de um filtro FIR é muito maior que para o modelo IIR.

Para a aproximação IIR, tivemos um atraso de grupo não constante. Podemos observar na Figura 18 que próximo a frequência de 3100Hz tivemos um atraso de grupo das amostras de 5,5ms e próximo a 3500Hz obtivemos 6ms de atraso de grupo. Já para abordagem FIR o atraso de grupo é constante para todas as frequências no valor de 4,5ms, conforme observado na Figura 20.

Filtro	Ordem	Atraso de Grupo
IIR - Chebyshev II	8	Não Constante
FIR - Parks-McCleallan	90	4,5ms

Tabela 6 – Comparativo entre as aproximações utilizadas no filtro Passa-faixa

2.4 Filtro Rejeita-Faixa

No último projeto será desenvolvido um filtro rejeita-faixa IIR com aproximação do tipo Chebyshev I, em seguida um FIR com algoritmo de Parks-McCleallan, com as especificações da tabela a seguir.

Frequência de amostragem	8000 Hz
F1	1200 Hz
F2	1250 Hz
F3	1300 Hz
F4	1400 Hz
Atenuação máxima na banda de passagem	0.5 dB
Atenuação máxima na banda de rejeição	60 dB
Ganho	0 dB

Tabela 7 – Especificação do filtro rejeita faixa

2.4.1 Filtro IIR do tipo Chebyshev I

Foi utilizada a função do MATLAB *cheb1ord* para estimar a ordem do protótipo Chebyshev tipo 1, com base nas especificações normalizadas. Em seguida, a função *cheby1* foi utilizada para calcular os coeficientes do filtro, tendo como base a ordem gerada na função anterior e os valores de banda de passagem e rejeição especificados. Como resultado, a função de transferência gerada foi a seguinte:

$$H(p) = \frac{0.0447}{p^7 + 1.15p^6 + 2.41p^5 + 1.87p^4 + 1.65p^3 + 0.756p^2 + 0.282p + 0.0447} \quad (2.36)$$

Resultando no filtro passa-baixas analógico exibido na figura a seguir.

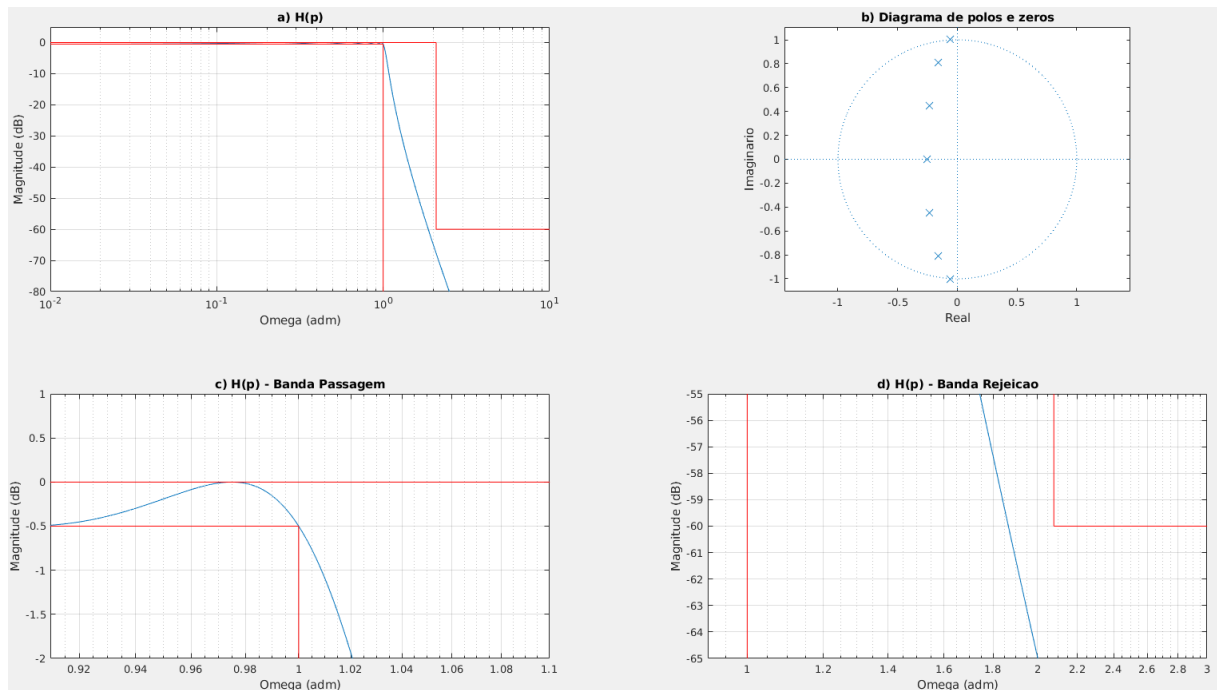


Figura 22 – Protótipo LP

Após o projeto do protótipo, realizamos a transformação do tipo de filtro através da seguinte expressão:

$$p = \frac{Bs}{s^2 + \lambda_0^2} \quad (2.37)$$

Resultando na seguinte expressão para $H(s)$:

$$H(s) = \frac{p^{14} + 8.74p^{12} + 32.8p^{10} + 68.2p^8 + 85.2p^6 + 63.8p^4 + 26.6p^2 + 4.74}{p^{13} + 24.0p^{12} + 288.0p^{11} + 2299.0p^{10} + 1.33e + 4p^9 + 6.0e + 4p^8} \quad (2.38)$$

O resultado pode ser observado na figura a seguir.

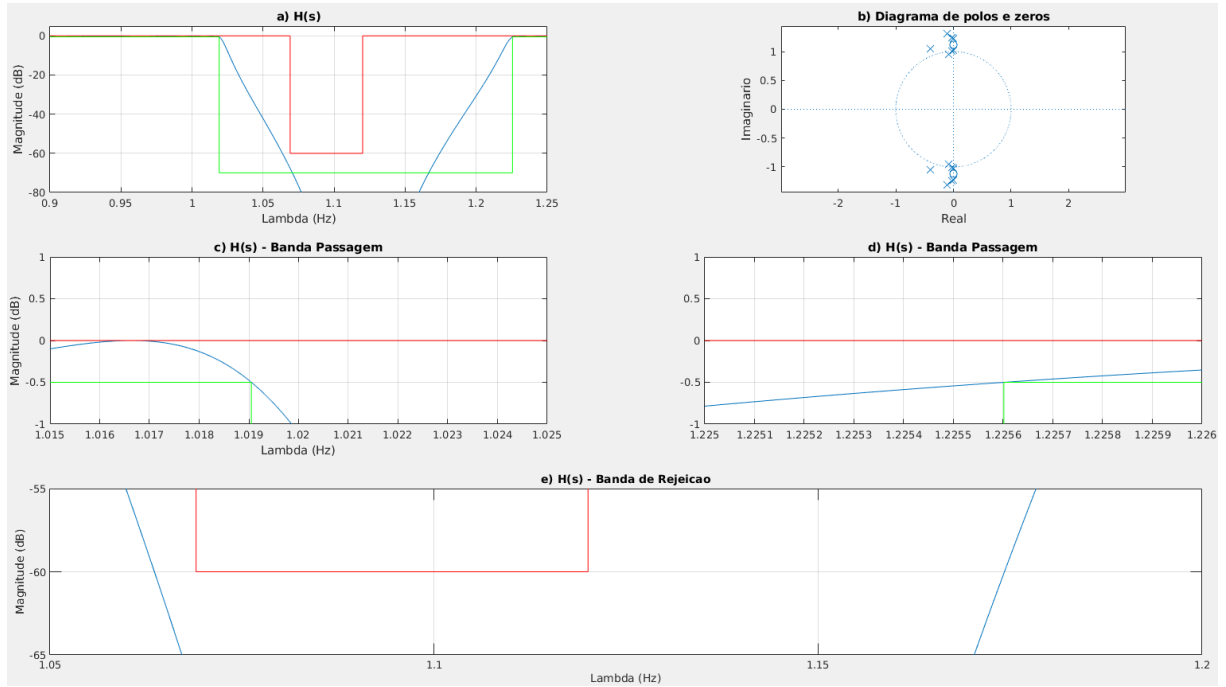


Figura 23 – Transformação LP -> BS

Após a transformação do filtro para rejeita-faixa, foi realizada a transformação bilinear, resultando na equação a seguir para $H(z)$:

$$H(z) = \frac{0.617p^{14} - 4.53p^{13} + 18.6p^{12} - 52.0p^{11} + 110.0p^{10} - 184.0p^9 + 248.0p^8 - 273.0p^7 + 248.0p^6 - 184.0p^5 + 110.0p^4 - 52.0p^3 + 18.6p^2 - 4.53p + 0.617}{p^{14} - 6.84p^{13} + 26.1p^{12} - 68.3p^{11} + 135.0p^{10} - 209.0p^9 + 263.0p^8 - 270.0p^7 + 228.0p^6 - 158.0p^5 + 88.0p^4 - 38.6p^3 + 12.8p^2 - 2.9p + 0.365} \quad (2.39)$$

O resultado do filtro após a transformação bilinear pode ser observado na figura a seguir.

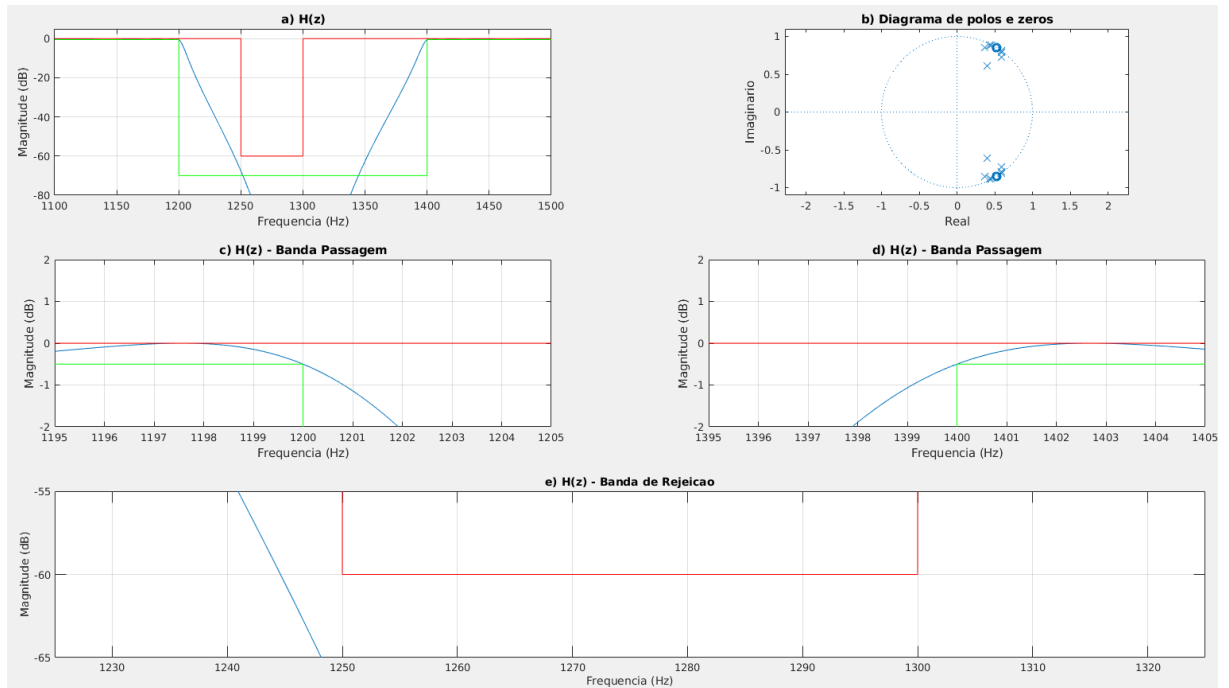


Figura 24 – Transformação Analógico -> Digital

O filtro finalizado, com os detalhes da resposta em frequência, resposta ao impulso, resposta de fase, atraso de grupo e diagrama de polos e zeros pode ser visualizado na figura a seguir.

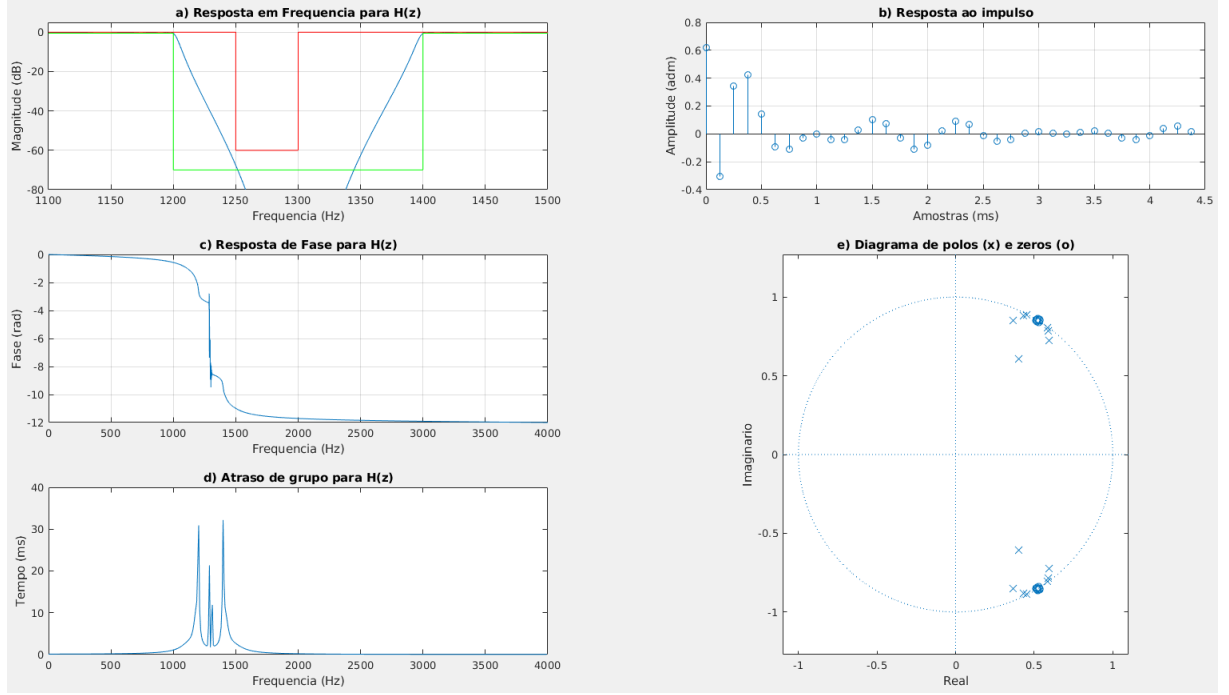


Figura 25 – BS IIR 1250-1300Hz com Ordem 14

Obs1.: Não foi necessário realizar ajustes no filtro desenvolvido.

Obs2.: para o cálculo do protótipo, Ω_s foi definido como:

$$\Omega_s = \left| \frac{B\lambda_s}{-\lambda_s^2 + \lambda_0^2} \right|, \text{ onde } B = \lambda_{p2} - \lambda_{p1} \text{ e } \lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p2}\lambda_{p1}} \quad (2.40)$$

2.4.2 Filtro FIR do tipo Parks-McClellan

Para o modelo FIR utilizou-se o algoritmo de Parks–McClellan. Com as funções prontas do MATLAB *firpmord* e *firpm*. Para o cálculo de ordem do filtro utilizou-se a função *firpmord* e para montagem do filtro com o algoritmo de Parks–McClellan foi utilizada a função *firpm*.

$$[n, f0, a0, w0] = \text{firpmord}(fcuts, mags, devs, fa); \quad (2.41)$$

$$h_pm = \text{firpm}(n, f0, a0, w0); \quad (2.42)$$

O resultado dos coeficientes obtidos a partir da função *firpm* é apresentado na expressão a seguir.

$$\begin{aligned}
H(z) = & 0.00222 z^{342} - 0.0127 z^{341} - 0.00286 z^{340} - 6.28 \cdot 10^{-5} z^{339} + 0.00114 z^{338} \\
& + 8.96 \cdot 10^{-4} z^{337} - 3.31 \cdot 10^{-4} z^{336} - 0.00123 z^{335} - 8.42 \cdot 10^{-4} z^{334} + 4.12 \cdot 10^{-4} z^{333} \\
& + 0.00121 z^{332} + 7.09 \cdot 10^{-4} z^{331} - 5.27 \cdot 10^{-4} z^{330} - 0.00115 z^{329} - 5.0 \cdot 10^{-4} z^{328} + \\
& 6.89 \cdot 10^{-4} z^{327} + 0.00108 z^{326} + 2.17 \cdot 10^{-4} z^{325} - 9.08 \cdot 10^{-4} z^{324} - 9.85 \cdot 10^{-4} z^{323} + \\
& 1.35 \cdot 10^{-4} z^{322} + 0.00119 z^{321} + 8.97 \cdot 10^{-4} z^{320} - 5.45 \cdot 10^{-4} z^{319} - 0.00154 z^{318} - \\
& 8.28 \cdot 10^{-4} z^{317} + 9.97 \cdot 10^{-4} z^{316} + 0.00195 z^{315} + 7.9 \cdot 10^{-4} z^{314} - 0.00147 z^{313} - \\
& 0.00242 z^{312} - 7.93 \cdot 10^{-4} z^{311} + 0.00195 z^{310} + 0.00292 z^{309} + 8.42 \cdot 10^{-4} z^{308} - \\
& 0.0024 z^{307} - 0.00344 z^{306} - 9.36 \cdot 10^{-4} z^{305} + 0.00281 z^{304} + 0.00395 z^{303} + 0.00107 z^{302} - \\
& 0.00315 z^{301} - 0.00442 z^{300} - 0.00122 z^{299} + 0.00343 z^{298} + 0.00482 z^{297} + 0.00138 z^{296} - \\
& 0.00361 z^{295} - 0.00512 z^{294} - 0.00151 z^{293} + 0.00371 z^{292} + 0.0053 z^{291} + 0.0016 z^{290} - \\
& 0.00373 z^{289} - 0.00532 z^{288} - 0.00159 z^{287} + 0.00368 z^{286} + 0.00521 z^{285} + 0.00147 z^{284} - \\
& 0.00362 z^{283} - 0.0049 z^{282} - 0.00121 z^{281} + 0.00353 z^{280} + 0.00445 z^{279} + 7.91 \cdot 10^{-4} z^{278} - \\
& 0.00346 z^{277} - 0.00386 z^{276} - 1.96 \cdot 10^{-4} z^{275} + 0.00344 z^{274} + 0.00315 z^{273} - 5.82 \cdot 10^{-4} z^{272} - \\
& 0.00351 z^{271} - 0.00236 z^{270} + 0.00154 z^{269} + 0.0037 z^{268} + 0.00154 z^{267} - 0.00262 z^{266} - \\
& 0.00401 z^{265} - 7.2 \cdot 10^{-4} z^{264} + 0.00383 z^{263} + 0.00445 z^{262} - 4.6 \cdot 10^{-5} z^{261} - 0.00511 z^{260} - \\
& 0.00503 z^{259} + 7.2 \cdot 10^{-4} z^{258} + 0.0064 z^{257} + 0.00572 z^{256} - 0.00126 z^{255} - 0.00764 z^{254} - \\
& 0.00649 z^{253} + 0.00165 z^{252} + 0.00876 z^{251} + 0.00728 z^{250} - 0.00187 z^{249} - 0.00971 z^{248} - \\
& 0.00805 z^{247} + 0.00193 z^{246} + 0.0104 z^{245} + 0.00872 z^{244} - 0.00184 z^{243} - 0.0109 z^{242} - \\
& 0.00923 z^{241} + 0.00164 z^{240} + 0.011 z^{239} + 0.00949 z^{238} - 0.00138 z^{237} - 0.0108 z^{236} - \\
& 0.00943 z^{235} + 0.00113 z^{234} + 0.0103 z^{233} + 0.009 z^{232} - 9.61 \cdot 10^{-4} z^{231} - 0.00942 z^{230} - \\
& 0.00815 z^{229} + 9.55 \cdot 10^{-4} z^{228} + 0.00834 z^{227} + 0.00684 z^{226} - 0.00119 z^{225} - 0.00705 z^{224} - \\
& 0.00507 z^{223} + 0.00175 z^{222} + 0.00566 z^{221} + 0.00286 z^{220} - 0.00269 z^{219} - 0.00425 z^{218} - \\
& 2.3 \cdot 10^{-4} z^{217} + 0.00407 z^{216} + 0.00291 z^{215} - 0.00274 z^{214} - 0.00592 z^{213} - 0.00176 z^{212} + \\
& 0.00597 z^{211} + 0.00823 z^{210} + 8.85 \cdot 10^{-4} z^{209} - 0.00937 z^{208} - 0.011 z^{207} - 3.74 \cdot 10^{-4} z^{206} + \\
& 0.0128 z^{205} + 0.0142 z^{204} + 2.98 \cdot 10^{-4} z^{203} - 0.0161 z^{202} - 0.0177 z^{201} - 7.01 \cdot 10^{-4} z^{200} + \\
& 0.0193 z^{199} + 0.0215 z^{198} + 0.00161 z^{197} - 0.022 z^{196} - 0.0254 z^{195} - 0.00302 z^{194} + \\
& 0.0244 z^{193} + 0.0292 z^{192} + 0.0049 z^{191} - 0.0261 z^{190} - 0.033 z^{189} - 0.00718 z^{188} + \dots
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Considerando os dados fornecidos pela especificação na Tabela 7, o filtro Rejeita-Faixa protótipo está dentro das especificações conforme podemos notar na Figura 23 as atenuações do filtro está dentro da máscara efetuada, também observa-se na figura o diagrama de pólos e zeros obtidos através das funções do MATLAB. Um zoom nas bandas de passagens e na banda de rejeição foram aplicados para melhor visualização.

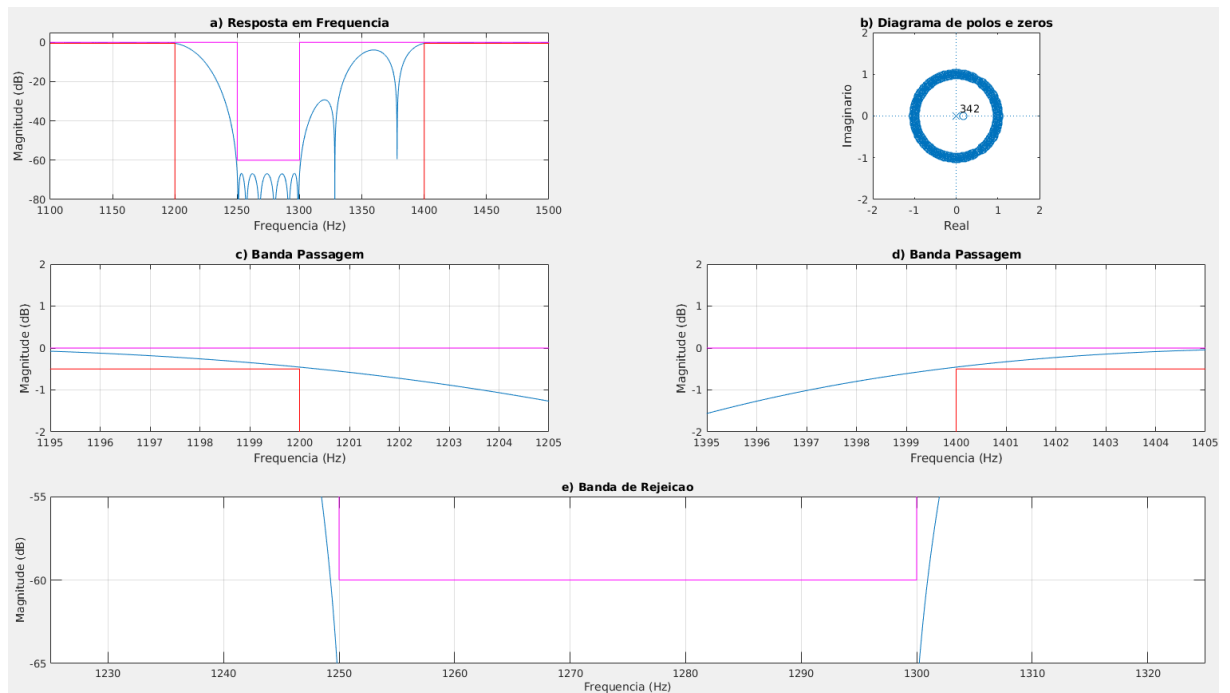


Figura 26 – BS FIR 1250-1300Hz com as bandas laterais

Na figura 24 podemos observar a sua resposta em magnitude, também a resposta ao impulso, sua resposta de fase, atraso de grupo e o diagrama de pólos e zeros. A medição do atraso de grupo, é a medida do tempo de atraso da magnitude do sinal. Foi utilizada a função do MATLAB *grpdelay* para fazer a verificação deste atraso.

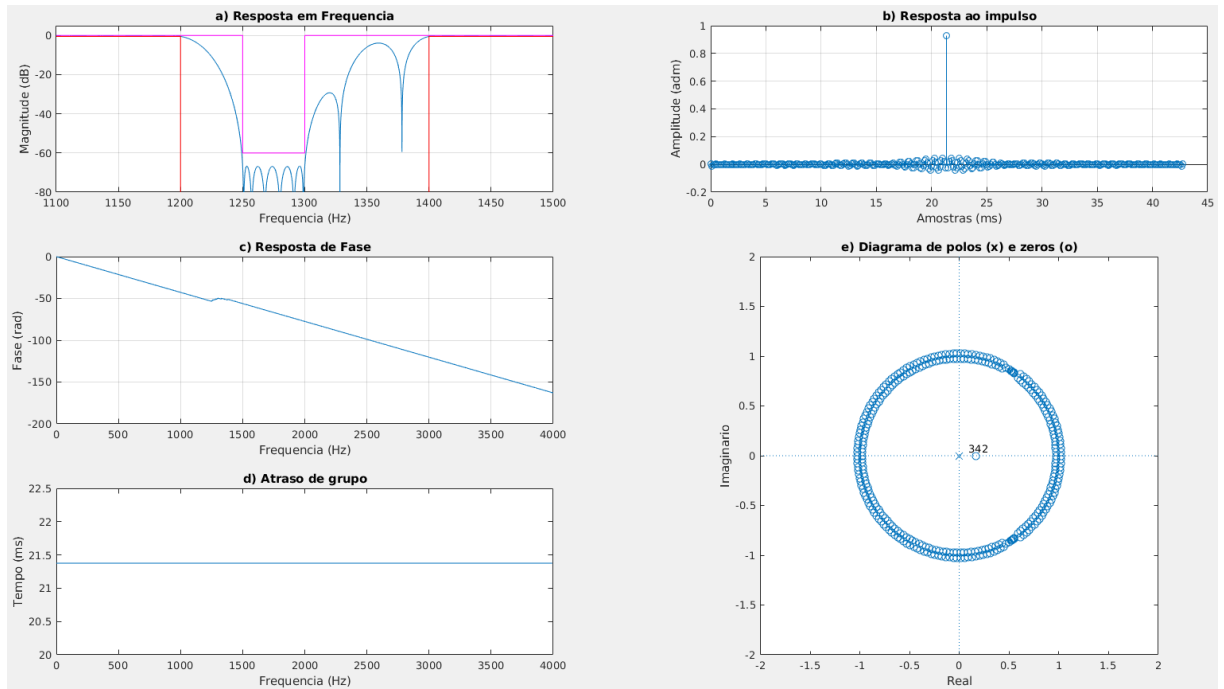


Figura 27 – BS FIR 1250-1300Hz de ordem 342

Obs.: Neste filtro, foi realizado ajuste no ganho, garantindo que o filtro ficasse dentro da janela de especificação.

2.4.3 Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Na imagem a seguir foi realizado um comparativo entre o filtro Passa Altas IIR e FIR, nela é demonstrado a resposta em frequência, resposta de fase e diagrama de pólos e zeros. Percebe-se que a resposta de fase para o modelo FIR é linear na banda de passagem.

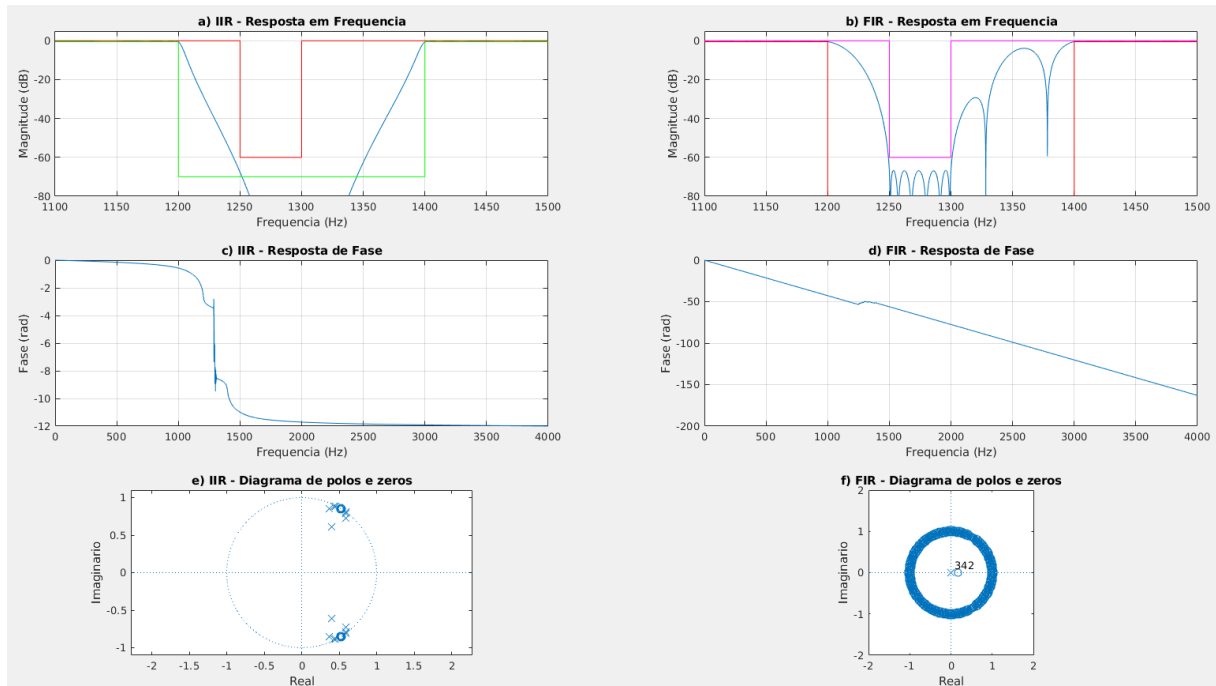


Figura 28 – Comparativo entre o filtro IIR e FIR

Abaixo na Tabela 8, é exposto um comparativo entre as ordens e atraso de grupo dos modelos já apresentados. Nota-se que a ordem de um filtro FIR é muito maior que para o modelo IIR.

Para a aproximação IIR, tivemos um atraso de grupo não constante. Podemos observar na Figura 25 que próximo as frequências de 1150Hz e 1450Hz tivemos um atraso de grupo das amostras próximo a 30ms. Já para abordagem FIR o atraso de grupo é constante para todas as frequências no valor de 21,4ms, conforme observado na Figura 27.

Filtro	Ordem	Atraso de Grupo
IIR - Chebyshev I	14	Não Constante
FIR - Parks-McCleallan	342	21.4ms

Tabela 8 – Comparativo entre as aproximações utilizadas no filtro Rejeita-faixa

Conclusão

Diante dos filtros projetados, foi possível observarmos algumas características relacionadas a cada tipo de filtro, bem como suas vantagens e desvantagens.

A diferença mais acentuada encontrada entre os dois tipos de filtros foi na ordem. Os filtros IIR possuem ordens bastante reduzidas em relação aos filtros FIR. Além disso, os filtros IIR podem utilizar de realimentação, permitem a existência de pólos fora do zero e o projeto é exato, por outro lado, eles podem ser instáveis e o atraso de grupo não é constante.

Analisando os filtros FIR desenvolvidos, constatamos que não é possível o uso de realimentação e o projeto não é exato, ou seja, são necessários ajustes ao projetá-lo. Todavia, os benefícios do filtro FIR são bastante relevantes no momento da definição do tipo de filtro a ser utilizado, já que eles podem ter fase linear (não distorcendo o sinal na banda de passagem), sempre serão estáveis e possuem atraso de grupo constante.

Com as atividades realizadas, além de compreender as vantagens e as desvantagens de cada tipo de filtro, foi possível praticarmos o desenvolvimento de projetos de filtros, aplicando a metodologia aprendida em sala, em projetos reais.

Referências

- [1] SENHOI, B .A.; Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design. Índia: Wiley India Pvt. Ltd., 2010
- [2] DINIZ, P. S. R., DA SILVA, E. A. B., e LIMA NETTO, S. Processamento Digital de Sinais: Projeto e Análise de Sistemas. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 976 p. ISBN 978-8582601235.