Otimização de Portfólios de Longo Prazo Através da Simulação de Monte Carlo com Análise de Consistência

Autor: Vinícius Brocca Bertotti

Içara, Setembro de 2025

Resumo (Abstract)

Este trabalho de pesquisa apresenta e formaliza um modelo quantitativo para a otimização de portfólios de investimento com foco no horizonte de longo prazo. O objetivo central é identificar a alocação de ativos mais eficiente em termos de retorno ajustado ao risco, medida pelo Índice de Sharpe. A metodologia proposta transcende a simples otimização histórica ao incorporar uma análise de consistência, que avalia a estabilidade do desempenho do portfólio em diferentes períodos. O modelo utiliza a Simulação de Monte Carlo para gerar um vasto conjunto de alocações aleatórias. Para cada portfólio, são calculados matematicamente o retorno, a volatilidade e o Índice de Sharpe. A robustez do sistema é garantida por um filtro baseado na equação de regressão linear que descarta carteiras cujo desempenho do Índice de Sharpe varia significativamente entre os dados de treino e teste. A descrição matemática das equações e o rigor metodológico são detalhados para permitir a replicabilidade e o aprofundamento do estudo.

---

1. Introdução

A alocação estratégica de ativos é um dos pilares da gestão de investimentos. A Teoria Moderna de Portfólios (MPT), desenvolvida por Harry Markowitz, provê o arcabouço teórico para a seleção de carteiras, mas a sua implementação prática exige ferramentas computacionais robustas. Modelos que se baseiam unicamente em dados históricos correm o risco de selecionar portfólios que demonstram um desempenho excepcional apenas no período de análise, falhando em condições de mercado futuras.

O presente estudo descreve um modelo de otimização que aborda essa limitação. O objetivo principal é detalhar a metodologia, as fórmulas matemáticas e os algoritmos que formam a espinha dorsal do sistema, respondendo às seguintes questões:

- Como a simulação de Monte Carlo pode ser utilizada para explorar o universo de alocações de portfólios?
- Quais são as equações fundamentais para o cálculo de retorno e risco de um portfólio?
- De que forma a consistência do desempenho pode ser matematicamente avaliada para selecionar um portfólio robusto?

---

2. Fundamentação Teórica e Formulação Matemática

2.1. Teoria Moderna de Portfólios (MPT)

A MPT postula que o risco de um portfólio é a combinação não linear dos riscos individuais dos ativos, ponderada por suas covariâncias. Para um portfólio composto por $\boldsymbol{n}$ ativos, o retorno esperado do portfólio ($\boldsymbol{R_\rho}$) e a volatilidade do portfólio ($\boldsymbol{\sigma_\rho}$) são dados pelas seguintes fórmulas:

$$\boldsymbol{R_\rho = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i}$$

$$\boldsymbol{\sigma_\rho = \sqrt{\omega^{\mathrm{T}} \sum \omega}}$$

Onde:

- $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega_1}, \boldsymbol{\omega_2}, \dots, \ \boldsymbol{\omega_n}]^{\mathrm{T}}$ é o vetor de pesos de cada ativo, com $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega_i} = \mathbf{1}.$
- $\boldsymbol{R_i}$ é o retorno esperado do ativo i.
- $\sum$ é a matriz de covariância dos retornos dos ativos.

A matriz de covariância ($\sum$) é uma matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ onde os elementos da diagonal são as variâncias de cada ativo ($\boldsymbol{\sigma_i^2}$) e os elementos fora da diagonal são as covariâncias entre os ativos ($\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{R_i}, \ \boldsymbol{R_j})$)

2.2. Índice de Sharpe

O Índice de Sharpe ($\boldsymbol{S}$) é uma medida de desempenho que normaliza o excesso de retorno de um portfólio pelo seu risco. A formulação matemática é:

$$\boldsymbol{S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}}$$

Onde ($\boldsymbol{R_f}$) é a taxa de retorno de um ativo livre de risco. O objetivo do modelo é maximizar este índice, pois ele representa o portfólio mais eficiente em termos de retorno por unidade de risco assumido.

---

3. Metodologia do Modelo

O modelo proposto segue uma abordagem em quatro etapas, utilizando ferramentas de programação em Python (numpy, pandas, yfinance, sklearn).

3.1. Aquisição e Pré-processamento dos Dados

1. Dados: Preços de fechamento de $\boldsymbol{n}$ ativos são obtidos a partir da biblioteca yfinance para um período de tempo definido.

2. Cálculo de Retornos: Os retornos diários são calculados como a variação percentual dos preços de fechamento. Para um dia $\boldsymbol{t}$ e preço $\boldsymbol{P_t}$: $\boldsymbol{r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}}$.
3. Divisão dos Dados: O conjunto de dados é particionado em duas metades iguais: uma para treino e outra para teste. Esta divisão é crucial para a etapa de validação de consistência.

3.2. Simulação de Monte Carlo

1. Geração de Pesos Aleatórios: O coração do modelo é a simulação de Monte Carlo. Um número massivo de interações ($\boldsymbol{N_{simulações} = 30.000}$) é executado. Em cada interação, um vetor de pesos aleatórios ($\boldsymbol{\omega_{aleatório}}$) de dimensão $\boldsymbol{1 \times n}$ é gerado.
2. Normalização dos Pesos: Para garantir que a soma dos pesos seja 1, cada vetor de pesos ($\boldsymbol{\omega_{aleatório}}$) é normalizado: $(\boldsymbol{\omega_{normalizado}}) = \frac{\boldsymbol{\omega_{normalizado}}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega_{aleatório}}}$
3. Cálculo das Métricas do Portfólio: Para cada portfólio gerado aleatoriamente, as métricas de retorno, volatilidade e Índice de Sharpe são calculadas para os períodos de treino e teste, utilizando as equações da Seção 2.

3.3. Filtro de Consistência

Esta etapa é o diferencial do modelo. Após as simulações, os portfólios são avaliados por sua consistência. Um portfólio é considerado consistente se a diferença absoluta entre o Índice de Sharpe no período de treino ($\boldsymbol{S_{treino}}$) e no período de teste ($\boldsymbol{S_{teste}}$) estiver abaixo de um limiar predefinido por uma regressão linear ($\boldsymbol{\alpha = 0.3}$), mas pode ser definido qualquer valor no código.

$$|\boldsymbol{S_{teste} - S_{treino}}| \leq \boldsymbol{\alpha}$$

Este filtro elimina portfólios que podem ter se beneficiado de condições favoráveis e não repetíveis no período de treino, selecionando aqueles com desempenho mais estável e confiável.

3.4. Otimização Final

Após a aplicação do filtro de consistência, o modelo seleciona, dentre os portfólios restantes, aquele que maximiza o Índice de Sharpe no período de teste. Esta é a carteira final, considerada a mais robusta e eficiente.

4. Discussão: Limitações e Considerações Matemáticas

- Distribuição de Retornos: A MPT e o cálculo do Índice de Sharpe assumem que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal. No entanto, os retornos de mercado frequentemente exibem "caudas pesadas" (eventos extremos mais frequentes do que o previsto pela distribuição normal).
- A Matriz de Covariância: A covariância é uma medida histórica. As correlações entre ativos podem mudar drasticamente em períodos de crise ou de euforia de mercado, o que não é capturado pelo modelo estático.
- Taxa Livre de Risco: A fixação da taxa livre de risco é uma simplificação. Em um modelo mais sofisticado, a taxa poderia ser uma variável dinâmica.
- Algoritmo de Otimização: A Simulação de Monte Carlo é um método estocástico. Embora a grande quantidade de simulações (30.000) torne a probabilidade de encontrar um portfólio próximo do ótimo muito alta, não há garantia matemática de que o portfólio globalmente ótimo tenha sido encontrado, ao contrário de um otimizador matemático determinístico.

---

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

Este *paper* detalhou a base matemática e a metodologia por trás de um modelo de otimização de portfólios. A combinação da simulação de Monte Carlo para explorar o espaço de alocações com um rigoroso filtro de consistência é uma abordagem inovadora que aprimora a MPT clássica. O modelo não se limita a encontrar o portfólio ideal no passado, mas busca um portfólio robusto e resiliente para o futuro.

Como trabalhos futuros, sugere-se a incorporação de otimizadores determinísticos (scipy.optimize) para confirmar se o portfólio encontrado pelo Monte Carlo está de fato próximo do ótimo global. Além disso, a inclusão de modelos de Machine Learning (como a Regressão Linear presente no código original) poderia ser explorada para prever os retornos futuros e otimizar a carteira de forma prospectiva, ao invés de histórica.

---

6. Referências

- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*.

- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., & Kolm, P. N. (2006). *Financial Modeling of the Equity Market*. John Wiley & Sons.