

Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Engenharia Eletrônica

## **Problema de identificação completo**

Alunos: Paolo Lorrán e Vinícius Alves

Novembro  
2019

# 1 Resumo

O objetivo deste relatório é utilizar todos os conhecimentos obtidos na matéria "Técnicas de Modelagem de Sistemas Dinâmicos", para realizar todo o ciclo das técnicas que envolvem a modelagem de um sistema, sendo elas: pré-processamento, seleção de estrutura, estimação de parâmetros e validação.

## 2 Análise dos Resultados

### 2.1 Exercício 1

#### 2.1.1 a) Pré-processamento

(i) Divisão dos dados em Identificação e Validação: Foi escolhida a proporção 70% - 30%, a primeira parcela corresponde aos dados de Identificação e a segunda parcela aos dados de Validação.

Figura 1: Dados de Identificação

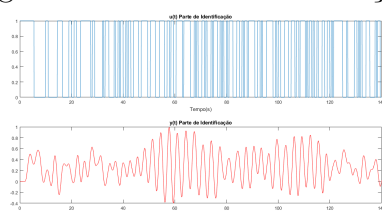
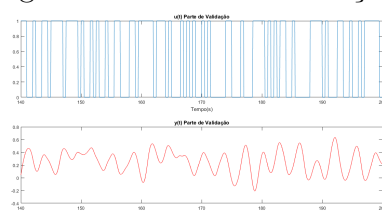
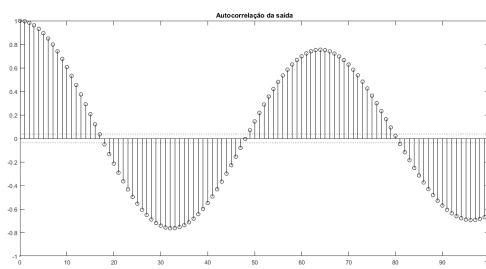


Figura 2: Dados de Validação



(ii) Escolha de um novo tempo de amostragem: Baseando-se em funções de autocorrelação foi escolhido um novo tempo de amostragem mais adequado para a identificação do sistema, utilizando os dados de identificação.

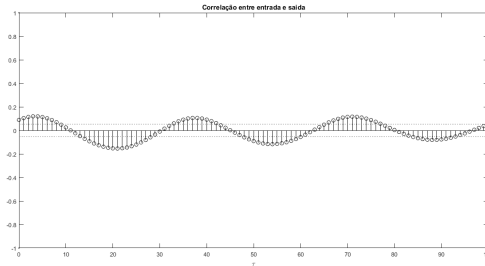
Figura 3: Autocorrelação da saída



Como é possível observar na Figura 3, o primeiro mínimo da função se encontra na amostra 33, para que esse valor fique entre 10 e 20, que é um valor considerado razoável, precisa ser dividido por 2. Dessa forma a decimação dos dados deve ser realizada com um tempo de amostra igual ao dobro do tempo inicial.

(iii) Verificação da correlação cruzada entre os dados de entrada e saída: Para que os dados possam ser considerados razoáveis para a identificação, os dados de entrada e saída devem ter uma correlação razoável, pois para identificar o sistema é necessária uma relação de causa e efeito.

Figura 4: Correlação entre entrada e saída



Com a análise da Figura 4 fica evidente que os sinais de entrada e saída escolhidos possuem uma relação de causa e efeito, portanto, podem ser utilizados na identificação do sistema.

### 2.1.2 b) Seleção de estrutura

Para selecionar a ordem do modelo ARX a ser utilizado, foram empregados dois critérios de informação. O critério de informação de Akaike e o critério de informação de Bayes.

Figura 5: Akaike

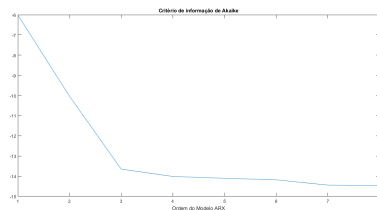
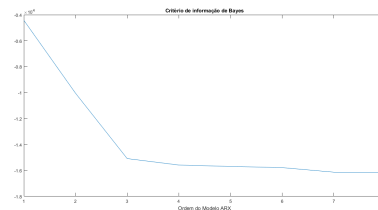


Figura 6: Bayes

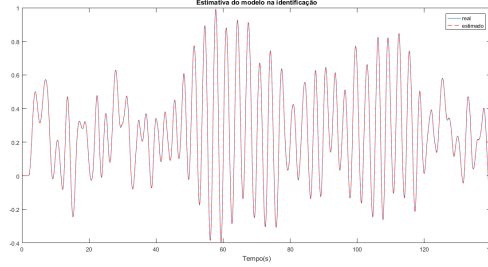


Como é possível ver nas figuras 5 e 6, o valor a partir do qual o aumento da ordem do modelo não causa uma diminuição considerável no valor de nenhum dos dois critérios analisados é 3, portanto essa é a ordem escolhida para a identificação do modelo.

### 2.1.3 c) Estimação de parâmetro

Para estimar os parâmetros utilizados no modelo ARX foi usado o estimador de mínimos quadrados de 3ª ordem.

Figura 7: Modelo utilizando dados de identificação



A figura 7 mostra a diferença entre a saída estimada pelo modelo ARX criado e o valor real de saída do sistema, para os dados de identificação.

#### 2.1.4 d) Validação

Para realizar a validação do modelo foram realizados dois testes, a validação um passo a frente e validação livre.

Figura 8: Um passo a frente

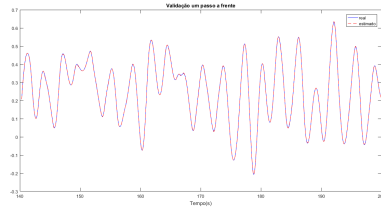
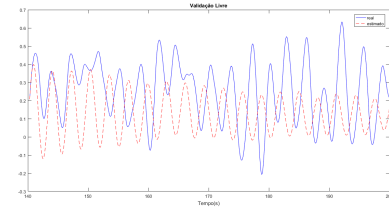


Figura 9: Livre



Em cada caso o RMSE foi calculado, sendo 0.0012 para a validação um passo a frente e 0.2551 para a validação livre. Aqui deve ser levado em consideração que a validação um passo a frente é muito limitada, portanto a validação livre apresenta uma informação de maior consistência em relação a capacidade real do modelo. Dessa forma, é possível chegar a conclusão de que o erro é muito alto, uma vez que, corresponde a mais de 20% da amplitude do sinal.

Figura 10: FAC Erro um passo

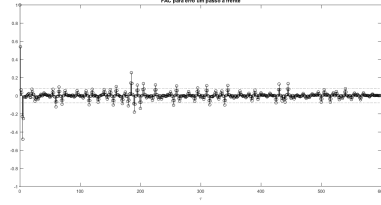
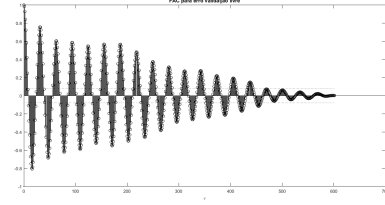


Figura 11: FAC Erro livre



Com as figuras 10 e 11 pode ser feita a análise de que os resíduos obtidos pelo modelo um passo a frente é parecida com um ruído branco então consegue explicar bem o modelo, porém a atenção maior deve ser na validação livre. É possível ver que como a função de autocorrelação apresenta forte correlação em todos os atrasos, isso indica que o modelo não é capaz de explicar toda a informação contida nos dados de identificação, já que, a FAC para a validação livre difere muito de um ruído branco, que seria o ideal.

## 2.2 Exercício 2

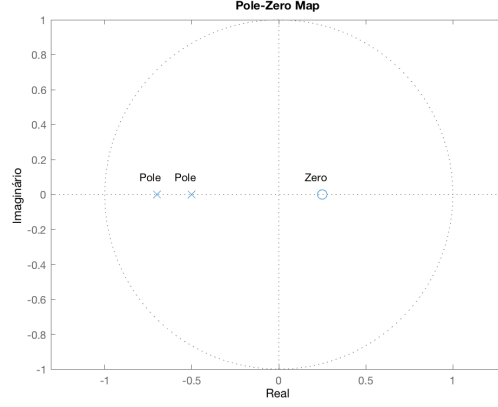
### 2.2.1 Item A: Simulação

Pede-se para estimar os valores da função de transferência  $H(z)$ , para que estes resultem em um sistema estável. Esta condição é satisfeita se todos os polos da função de transferência se encontram dentro do círculo unitário. Desta maneira, os valores para os parâmetros foram escolhido considerando que o sistema terá dois polos  $p1 = -0.5$  e  $p2 = -0.7$ . O sistema é mostrado a seguir:

$$H(z) = \frac{-z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 + 1.2z^{-1} + 0.35z^{-2}} \quad (1)$$

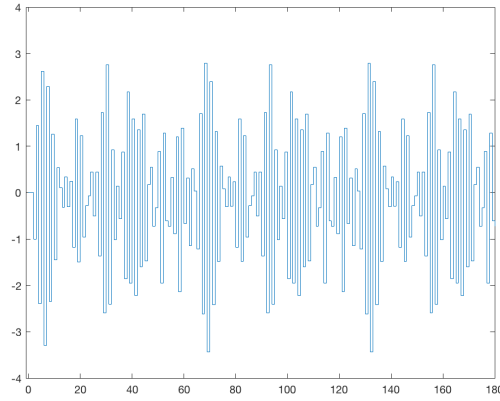
A figura 12 demonstra a estabilidade do sistema  $H(z)$  através do diagrama de polos e zeros:

Figura 12: Diagrama de polos e zeros de  $H(z)$



O sinal  $U$  de entrada para a simulação do sistema foi um PRBS com  $N = 189$ ,  $n = 6$ , e  $m = 1$ . Com estes valores o sistema reconhecerá a aleatoriedade do sistema. A figura 13 é a simulação do sistema à entrada  $U$ .

Figura 13: Simulação de  $H(z)$  à uma entrada PRBS



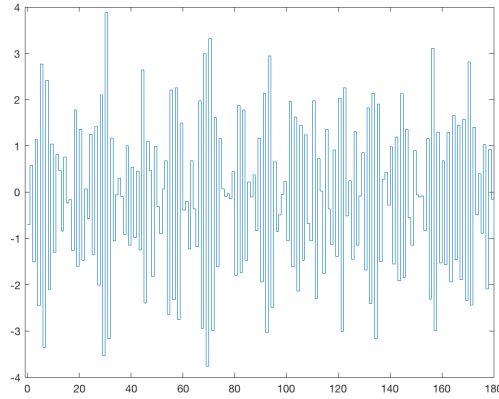
Para estimação do ruído o parâmetro  $\sigma$  foi escolhido baseando-se na equação (2) disponível em [1]. A relação ruído sinal escolhida foi de  $12dB$ :

$$SNR = 20 \log_{10} \frac{\sigma_y}{\sigma_e} \quad (2)$$

Sendo assim, obteve-se  $\sigma_e = 0.3592$ .

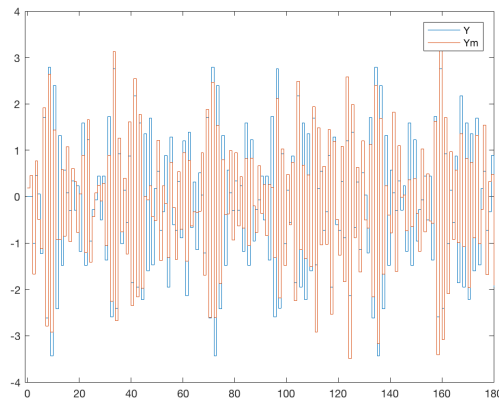
Com isso, pode-se obter a saída ruidosa  $y_m$ , cuja simulação com a entrada PRBS é mostrada na figura 15.

Figura 14: Simulação de  $y_m$  à uma entrada PRBS



A saída ruidosa, plotada juntamente com o sinal sem ruído, exalta as principais diferenças destes sinais:

Figura 15: Simulações de  $y$  e  $y_m$  à uma entrada PRBS



Percebe-se que ambas têm bastante semelhanças. Os valores estimados dos parâmetros deve estar próximos, pois o ruído adicionado não modificou muito a resposta do sistema à entrada PRBS.

### 2.2.2 item B - item C

Formulado o problema de estimação de parâmetros sob a perspectiva do algoritmo de mínimos quadrados (MQ), o parâmetro  $\hat{\tau}$  e  $\hat{k}$  foram obtidos a partir de  $\hat{h}$ . As simulações foram realizadas se considerando duas perspectivas:

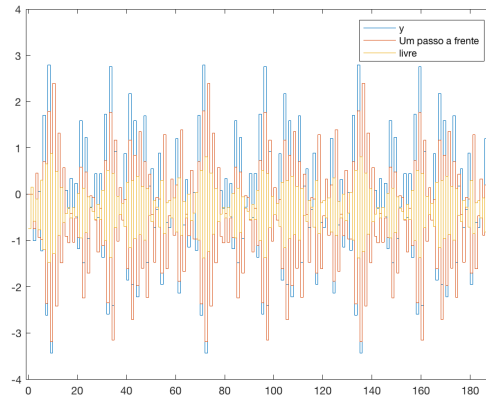


1. **Sem Ruído:** A primeira simulação no sistema sem ruído retornou valores idênticos aos do sistema original. Estes valores eram esperados, pois  $H$  é um sistema estável de ordem conhecida.

$$\hat{h} = -1.2, -0.35; -1.0, 0.25$$

As simulações um passo a frente e livre, juntamente com a resposta ao degrau do modelo estimado é mostrado a seguir:

Figura 16: Resposta ao degrau do modelo estimado sem ruído



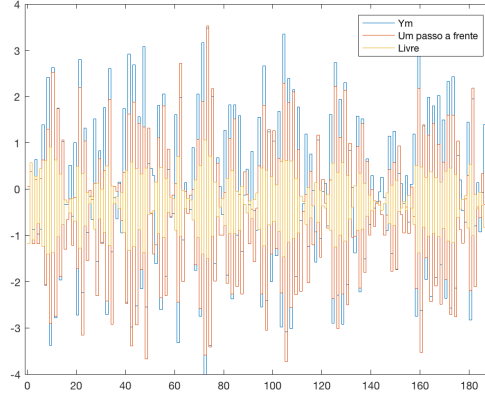
2. **Com Ruído:**

Como previsto, os valores estimados ficaram bem próximos aos reais, julgando  $y_m$  é bastante parecido com  $y$ :

$$\hat{h} = -1.1713, -0.3472; -1.0579, 0.3050$$

As simulações um passo a frente e livre, juntamente com a resposta ao degrau do modelo estimado com ruído é mostrado a seguir:

Figura 17: Resposta ao degrau do modelo estimado com ruído



Os gráficos também estão bem próximos aos mostrados no passo anterior.

Ambos os sistemas, com e sem ruído, foram aproximados a sistemas de segunda ordem de um modelo ARX. Os gráficos das simulações estão bastante similares, considerando que os valores dos parâmetros de  $\hat{h}$  ficaram bem próximos. É possível perceber que a simulação um passo a frente produziu um sinal que se aproxima muito do real, devida as limitações deste tipo de simulação. Enquanto a simulação livre explana muito mais as deficiências do modelo em fazer previsões utilizando os dados estimados.

### 2.2.3 item D

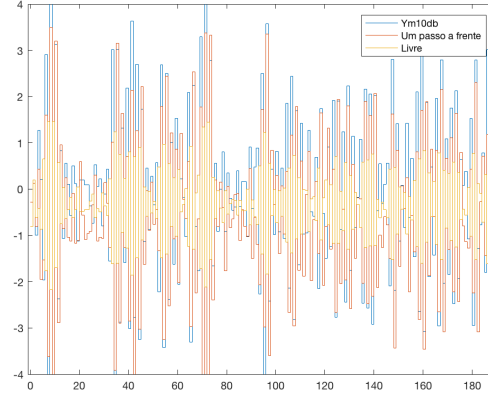
No item D, pede-se que se repita os itens B e C variando o valor do SNR:

1. **5 dB:** Os valores medidos são apresentados a seguir:

$$\hat{h}_{5dB} = -1.1983, -0.3905; -0.9289, 0.2261$$

Simulações:

Figura 18: Simulação com SNR de 5dB

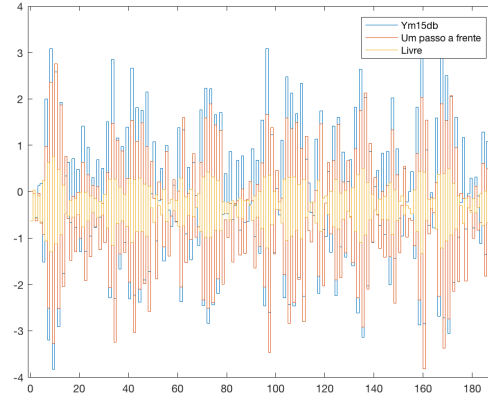


2. **10 dB**: Os valores medidos são apresentados a seguir::

$$\hat{h}_{10dB} = -1.2537, -0.3684; -0.935, 0.1943$$

Simulações:

Figura 19: Simulação com SNR de 10dB

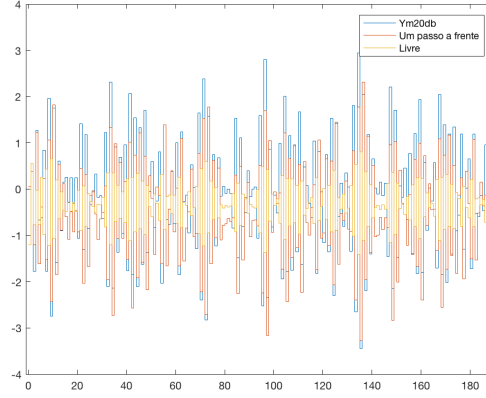


3. **15 dB**: Os valores medidos são apresentados a seguir:

$$\hat{h}_{15dB} = -1.1986, -0.3474; -1.0017, 0.2160$$

Simulações:

Figura 20: Simulação com SNR de 15db

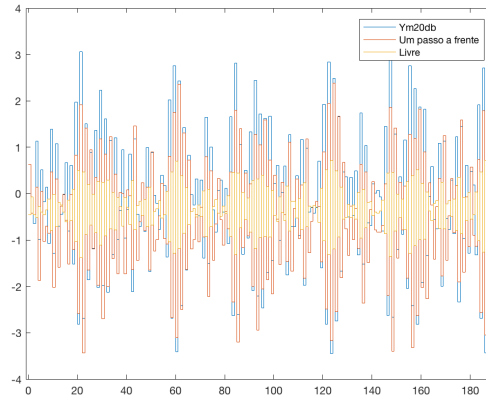


4. **20 dB**: Os valores medidos são apresentados a seguir:

$$\hat{h}_{20dB} = -1.1671, -0.3128; -1.0147, 0, 2805$$

Simulações:

Figura 21: Simulação com SNR de 20dB



Apesar da pequena discrepância em relação ao valor original, os resultados se mantiveram bem próximos aos valores reais, o que ressalta a robustez do MQ ao ruído levantada em [2]. É preciso ressaltar, entretanto, que para SNR igual à 5dB os resultados destoaram um pouco mais se comparados ao sistema original. Esta observação é considerável, uma vez que um menor valor de SNR indica um maior efeito do ruído [2].

### 2.2.4 item E

No item E pediu-se que as mesmas análises fossem feitas para um sistema de primeira e terceira ordens.

Para ambos os sistemas, utilizou-se STR igual a  $12dB$ .

1. **Primeira ordem** Fazendo-se  $b_2 = a_2 = 0$ , o sistema fica como o seguinte:

$$H_1(z) = \frac{-z^{-1}}{1 + 1.2z^{-1}} \quad (3)$$

O sistema divergiu, pois ao fazer  $b_2 = a_2 = 0$  ele se tornou não estável:

Figura 22: Diagramas de polos e zeros para  $H_1z$

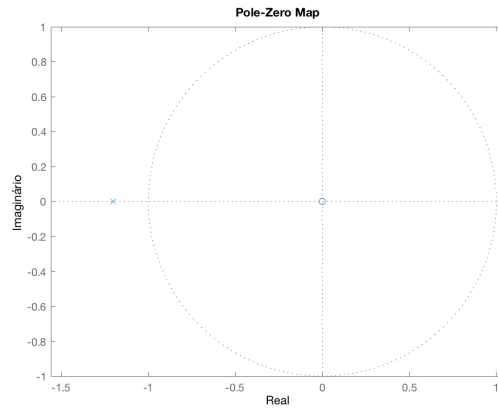
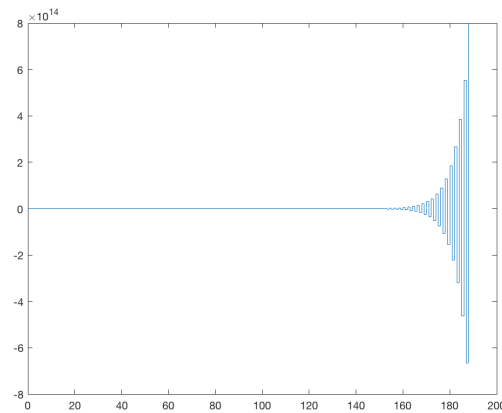


Figura 23: Simulação de  $y_1$  à uma entrada PRBS

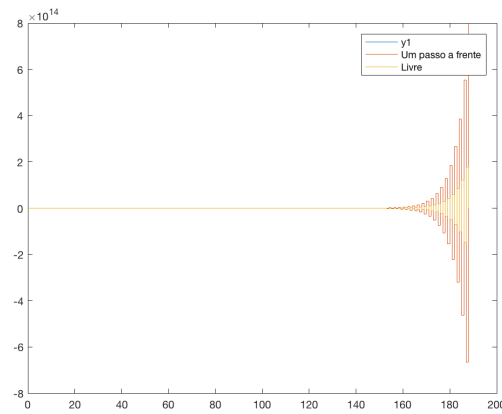


2. **Sem Ruído:** Os valores estimados foram praticamente idênticos aos do sistema original:

$$\hat{h}1 = -1.2; -0.9999$$

Simulação:

Figura 24: Resposta ao degrau do modelo estimado sem ruído



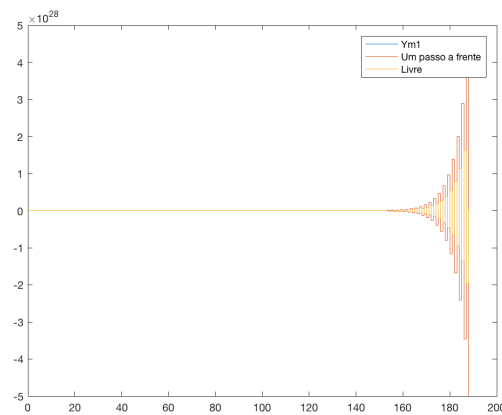
3. **Com Ruído:**

Os valores estimados divergiram bastante do original:

$$\hat{h} = -0.000; -4.8935$$

Simulação:

Figura 25: Resposta ao degrau do modelo estimado com ruído



4. **Terceira ordem** Escolheu-se  $b_3 = -1.3$  e  $a_3 = -0.035$ , o sistema fica como o seguinte:

$$H_3(z) = \frac{-z^{-1} + 0.25z^{-2} - 1.3z^{-3}}{1 + 1.2z^{-1} + 0.35z^{-2} - 0.035z^{-3}} \quad (4)$$

O sistema permaneceu estável, apesar de agora ele possuir dois polos com componentes imaginárias:

Figura 26: Diagramas de polos e zeros para  $H_3z$

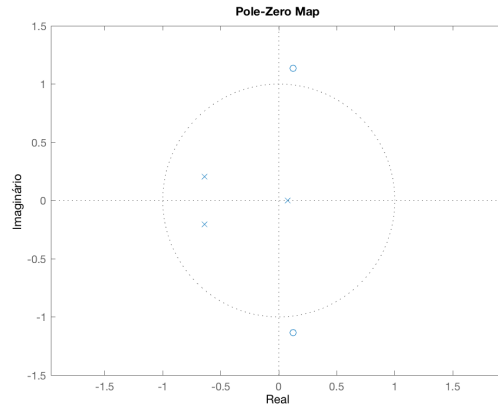
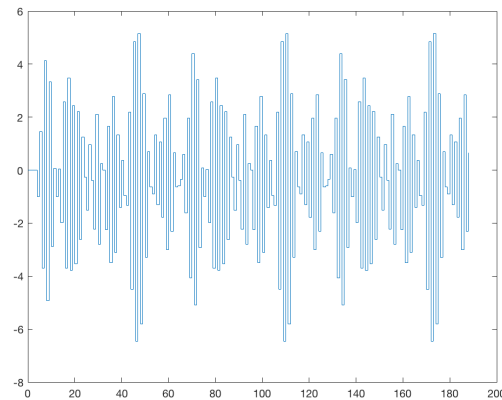


Figura 27: Simulação de  $y_3$  à uma entrada PRBS

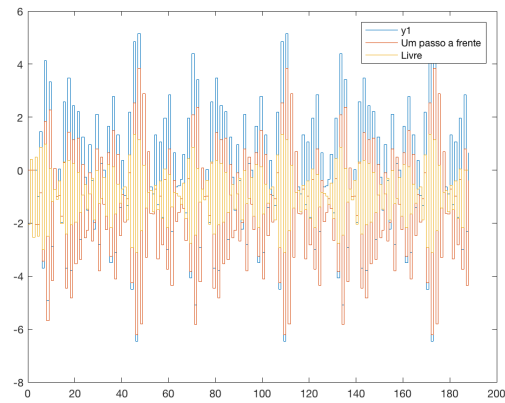


5. **Sem Ruído:** Os valores medidos foram idênticos aos do sistema original:

$$\hat{h}1 = -1.2, -0.35, 0.035; -1, 0.25, -1.3$$

Simulação:

Figura 28: Resposta ao degrau do modelo estimado sem ruído



## 6. Com Ruído:

Os valores medidos ficaram bastante próximos do original:

$$\hat{h} = -1.1135, -0.2367, 0.0802; -0.9824, 0.1578, -1.0020$$

Simulação:

Figura 29: Resposta ao degrau do modelo estimado com ruído - validação um passo a frente

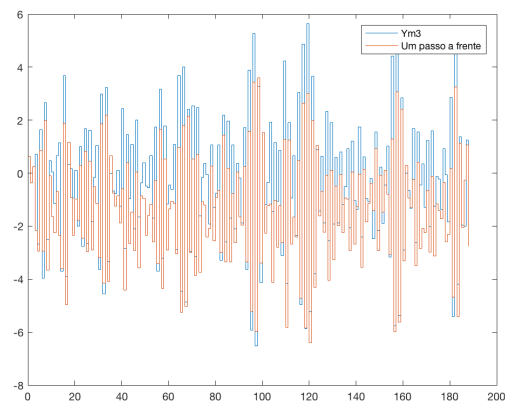
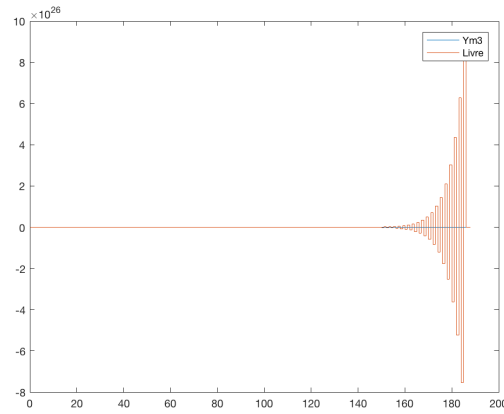




Figura 30: Resposta ao degrau do modelo estimado com ruído - validação livre



Para o sistema de primeiro grau, acredita-se que a instabilidade levou à divergência do modelo na simulação à entrada PRBS e nas validações feitas, como observado nos gráficos simulados.

Como se escolheu um sistema cujos polos estavam dentro do círculo unitário, o sistema de terceiro grau se comportou de maneira satisfatória em todas as simulações sem ruído. As simulações um passo a frente, mais uma vez foram pouco explicativas. Para o sistema com ruído, no entanto, acredita-se que o ruído se propagou durante o uso dos dados estimados na simulação livre. A dupla acredita que isso pode ter acontecido, por causa dos polos com fatores imaginários presentes no sistema original.

## Referências

- [1] TEIXEIRA, O. S. Notas de Aula
- [2] AGUIRRE, L. A. Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não lineares Aplicadas a Sistemas Reais. Belo Horizonte, Brasil, EDUFMG. 2004.