

Técnicas de Modelagem - UFMG - Tarefa II

Vinícius Alves - 2015046687

7 de Outubro de 2019

Exercícios - Mínimos Quadrados

O presente relatório responde à duas questões que pedem a utilização do método de mínimos quadrados para modelagem de sistemas.

1 Exercício 1

Para o primeiro exercício foi necessária a definição de uma função de transferência para que seus parâmetros pudessem ser estimados pelo método de mínimos quadrados. Escolheu-se o ganho $k = 10$ e atraso puro de tempo $\theta = 100$. Com isso, determinou-se a seguinte equação:

$$G(s) = \frac{e^{-100s}}{50s + 1} \quad (1)$$

Como pré-determinado, o sinal de entrada U foi definido a partir da função PRBS com 300 amostras, 6 bits e tempo de permanência igual a 1. A figura 1 mostra a simulação do sinal PRBS.

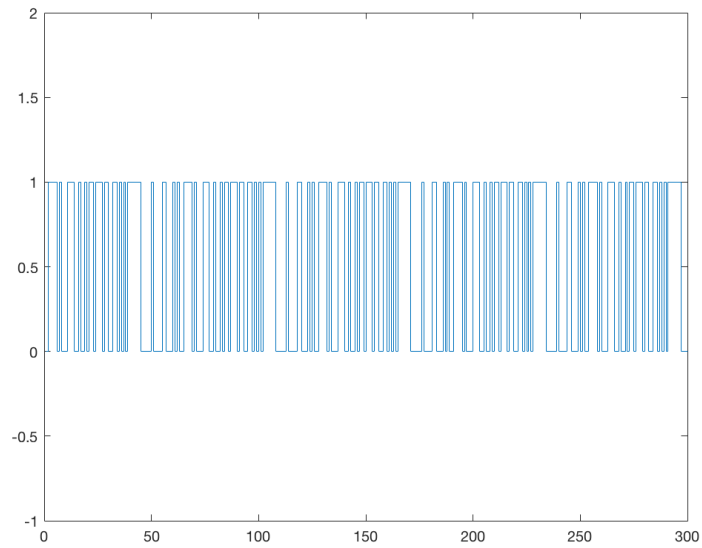


Figura 1: Sinal PRBS

Para a simulação da função em resposta ao sinal de entrada U , mostrada na figura 2, utilizou-se um tempo de amostragem igual a $\frac{\tau}{10} = 5s$.

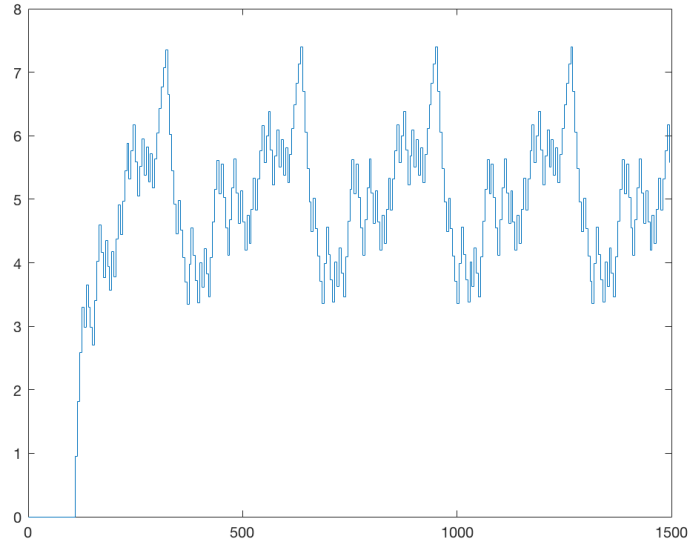


Figura 2: Sinal de saída em resposta a um sinal PRBS de 300 amostras

Para a estimação do atraso puro de tempo, utilizou-se a função de correlação cruzada. A ideia é mapear a primeira reposta não nula da FCC que representa a diferença do início da resposta transitória de $y(k)$ e $U(k)$. Mostrado o intervalo que engloba o tempo 0, percebe-se que o gráfico da FCC se mantém nulo até o tempo 21, como exposto na figura 3

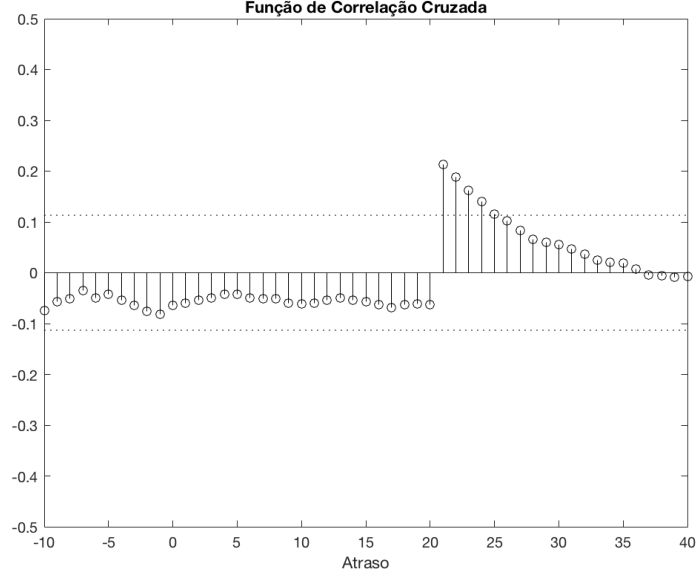


Figura 3: FCC saída e entrada

Assim, utilizando a relação mostrado a seguir é possível estimar o atraso:

$$t_d = (k - 1)T_s = 100 \quad (2)$$

Uma vez estimado o atraso, o método de mínimos quadrados foi utilizado para estimar os demais parâmetros. Este método, descrito em [1], foi aproximado com as equações mostradas a seguir:

$$y[k] = ay[k - 1] + bu[k - 1] \quad (3)$$

$$y[k] = [y[k - 1] + u[k - 1]] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (4)$$

Com isso, tem-se:

$$a = 1 - \frac{T_s}{\tau}; b = \frac{T_s K}{\tau} \quad (5)$$

Assim, obteve-se valores bem próximos aos escolhidos:

$$\hat{\tau} = 7.1229 \quad (6)$$

$$\hat{k} = 497.8387 \quad (7)$$

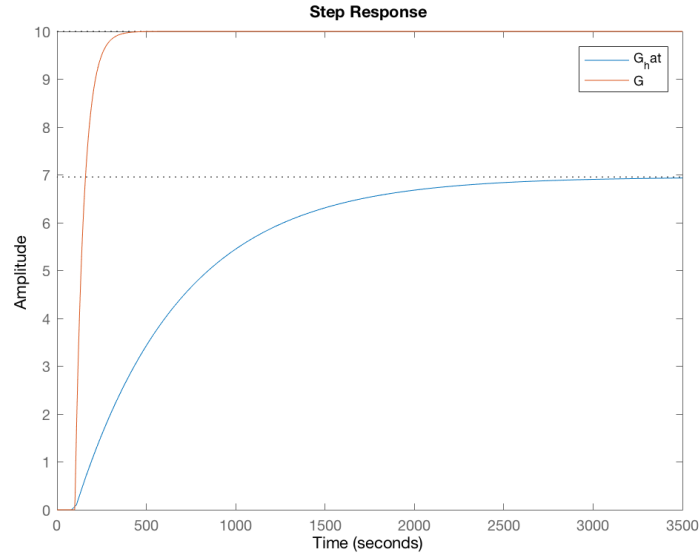


Figura 4: Resposta ao degrau $G(s)$ e $\hat{G}(s)$

1.1 Adição de ruído baixo

Para adição do ruído, somou-se ao U pré-determinado o valor do ruído simulado com a função *randn* multiplicada por $\sigma = 0.3$. Com isso o atraso estimado foi o de 100 novamente, como mostrado nas figuras 5 e 6

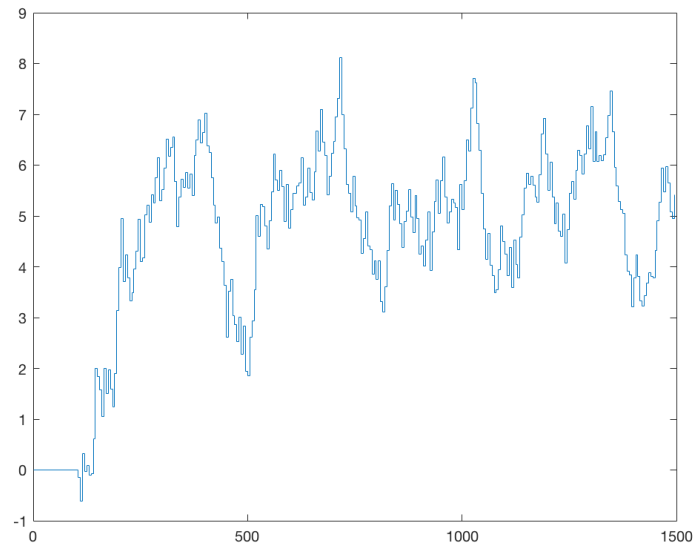


Figura 5: Sinal com ruído baixo

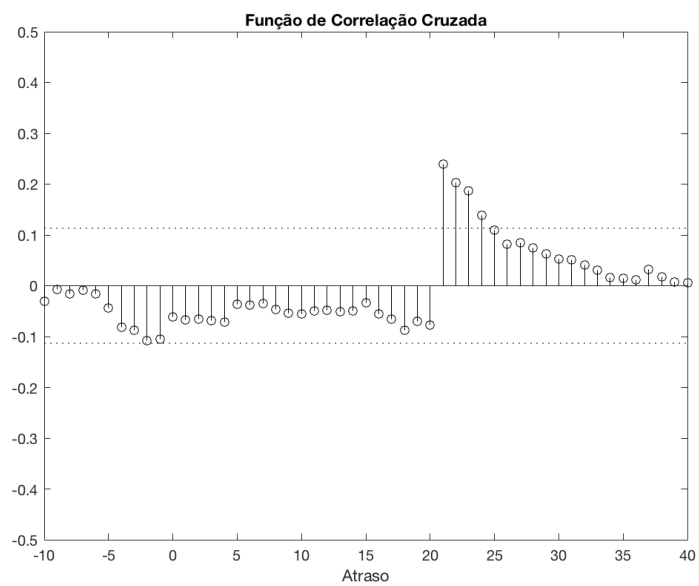


Figura 6: FCC saída e entrada

Com isso, obteve-se os seguintes parâmetros:

$$\hat{\tau} = 6.2071 \quad (8)$$

$$\hat{k} = 491.0659 \quad (9)$$

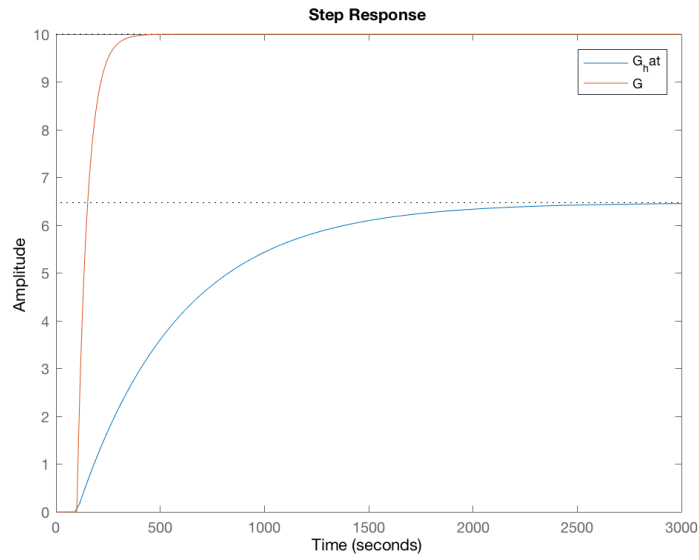


Figura 7: Resposta ao degrau $G(s)$ e $\hat{G}(s)$

2 Alto ruído

Agora, para a adição do ruído alto, somou-se ao U pré-determinado o valor do ruído simulado com a função *randn* multiplicada por $\sigma = 3$. Com isso o atraso estimado foi o de 85 novamente, como mostrado nas figuras 8 e 9

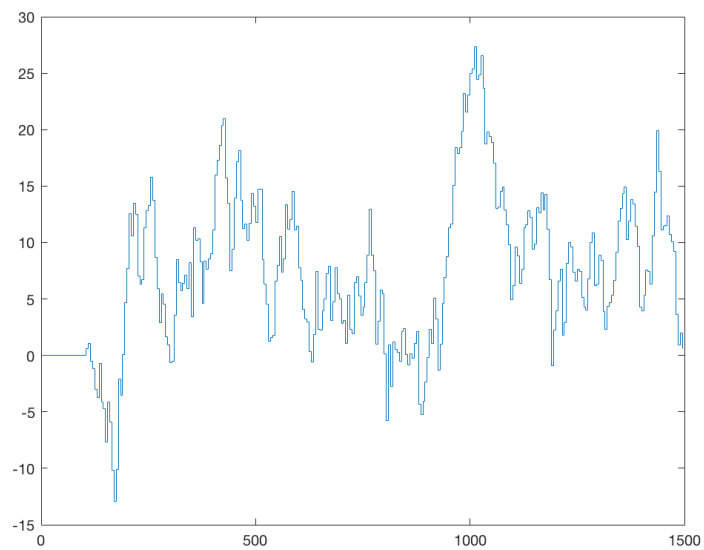


Figura 8: Sinal com ruído alto

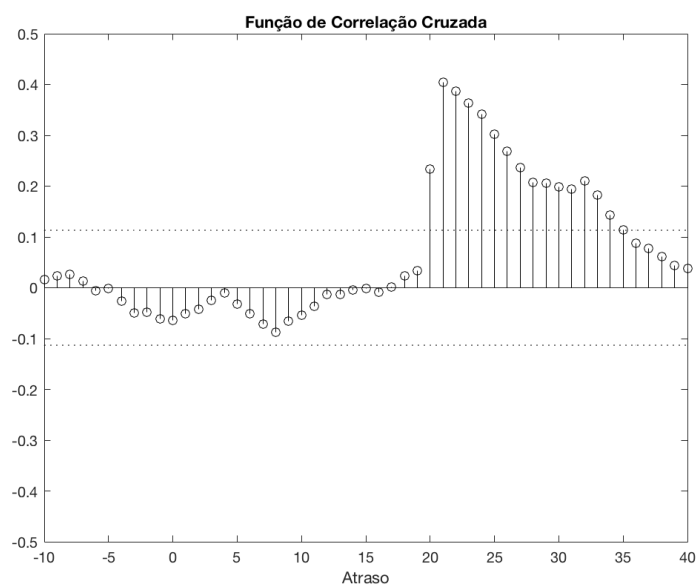


Figura 9: FCC saída e entrada

Com isso, obteve-se os seguintes parâmetros:

$$\hat{\tau} = 3.1122 \quad (10)$$

$$\hat{k} = 120.4040 \quad (11)$$

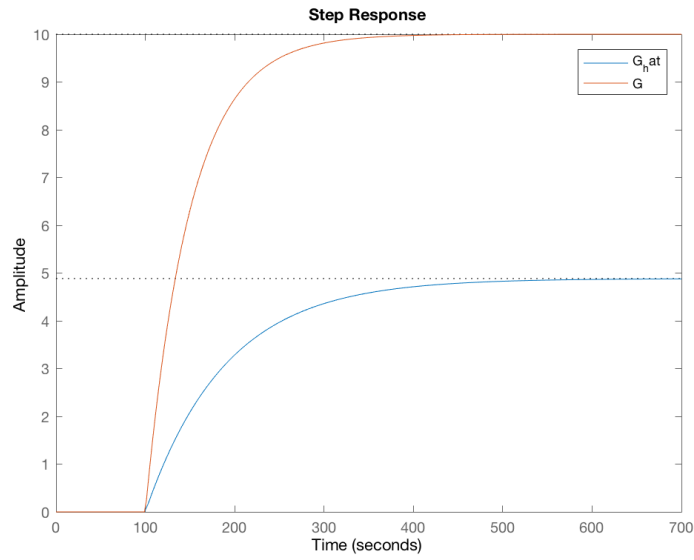


Figura 10: Resposta ao degrau $G(s)$ e $\hat{G}(s)$

Pode-se observar que com a adição do ruído, a exatidão do método diminui à medida que este aumenta. São necessárias alternativas para incrementar o método e fazer com que ele lide melhor com ruídos na entrada.

3 Exercício 5.13

O segundo exercício pede que seja obtido um modelo ARX a partir de dois dados, BFG33 e BFG44. As figuras a seguir mostram os sinais PRBS e de saída, respectivamente, para ambas massas de dados .

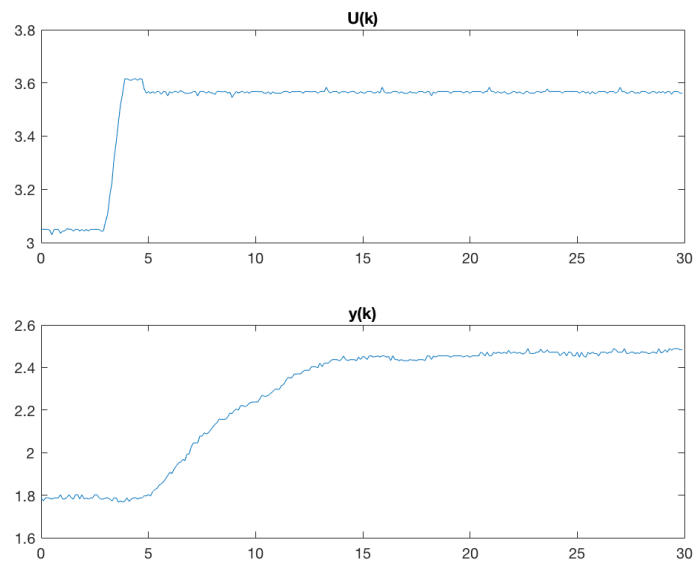


Figura 11: Sinal PRBS BFG33

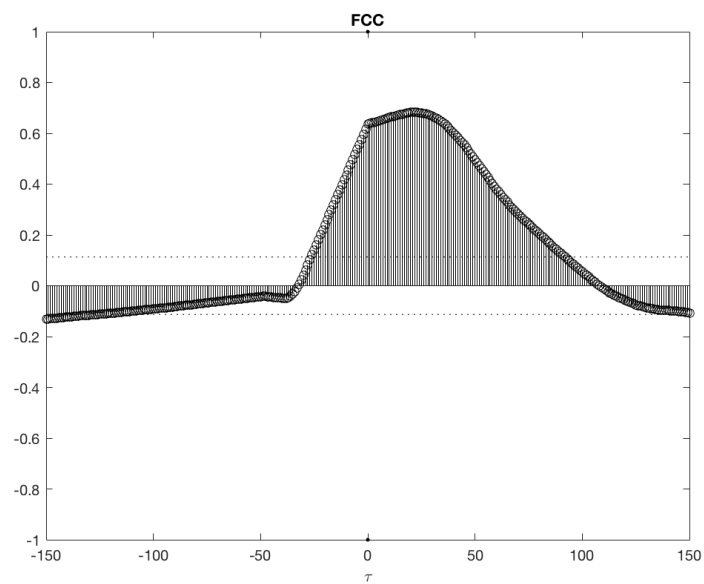


Figura 12: Sinal de saída BFG33

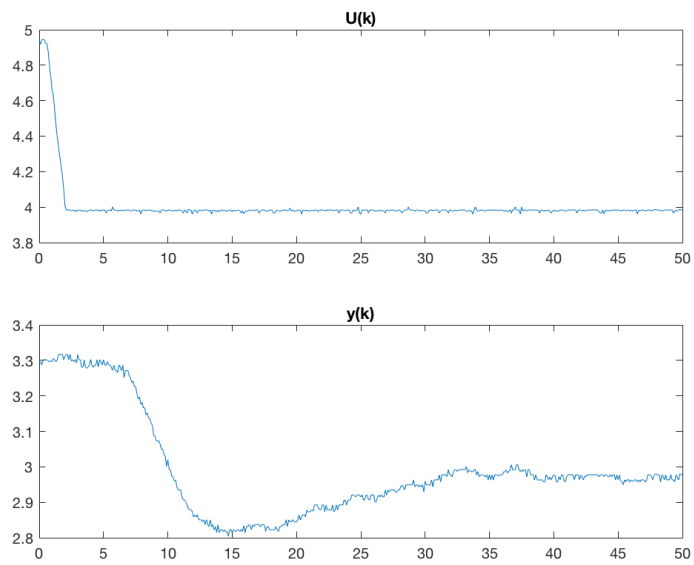


Figura 13: Sinal PRBS BFG44

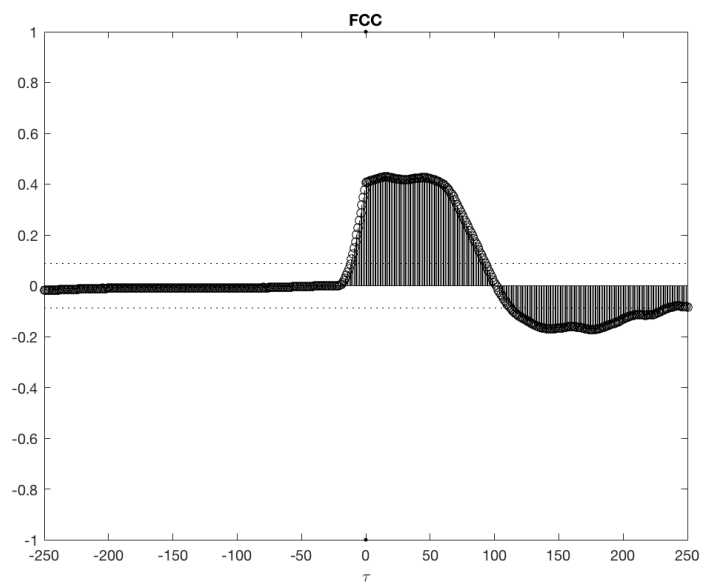


Figura 14: Sinal de saída BFG44

O método dos mínimos quadrados forneceu parâmetros para a função de transferência $\hat{\tau} = 0.7155$ e $\hat{k} = 10.2403$, para BFG33 e $\hat{\tau} = 0.7279$ e $\hat{k} = 11.5301$ para BFG44.

Com isso, pode-se comparar os modelos com as repostas ao degrau das funções H1 e H2 do livro:

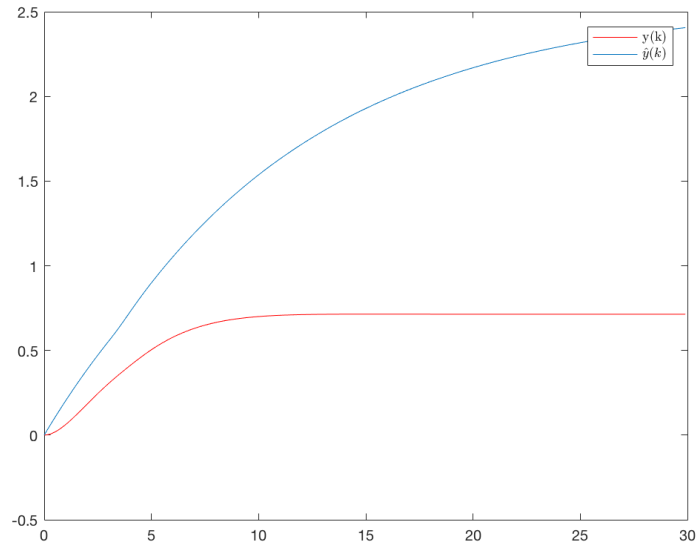


Figura 15: Comparação BFG33 com H1

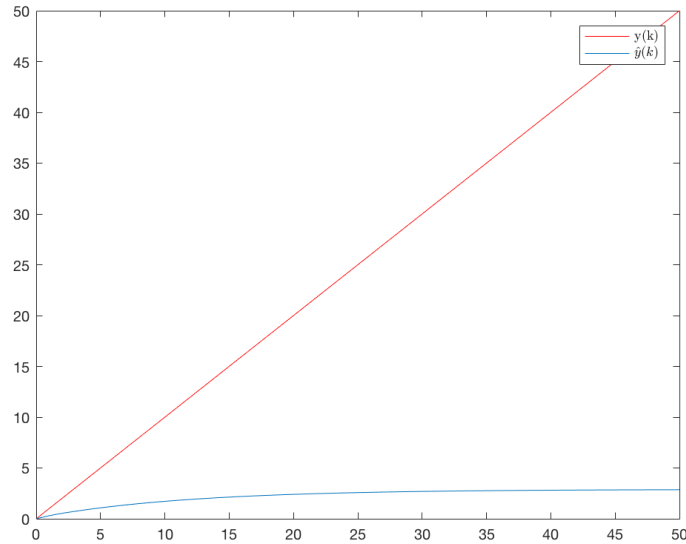


Figura 16: Comparação BFG44 com H2

O ganho obtido via MQ difere dos ganhos apresentados em H1 e H2. É provável que isso aconteça por diferença nas unidades de medidas dos dados experimentais e dos dados obtidos via modelagem para estes sistemas. Apesar disto, a abordagem MQ é interessante julgando a facilidade com que se obtém os parâmetros para modelagem dos sistemas nos quais deseja-se trabalhar. O método se mostrou robusto a ruídos, mesmo que apresentando certa dificuldade ao lidar com os mesmos (O que pode ser melhor verificado no exercício 1).

Referências

- [1] ANTONIO AGUIRRE, Luis. Introdução à identificação de sistemas. Editora UFMG, 4ª Ed, 2015
- [2] O. S. TEIXEIRA, Bruno Revisão de Métodos de Estimação de Parâmetros de Sistemas Dinâmicos Lineares de Primeira e Segunda Ordens
- [3] Maciejowski J.M., Parameter estimation of multivariable systems using

balanced realizations, in: Bittanti,S. (ed), Identification, Adaptation, and Learning, Springer (NATO ASI Series), 1996.

- [4] Chou C.T., Maciejowski J.M., System Identification Using Balanced Parametrizations, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 7, July 1997, pp. 956-974.