

CAPÍTULO V – DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

- **Definição de densidade espectral de potência.**
- **Propriedades.**
- **Exemplos.**
- **Transformações de processos estocásticos (sistemas contínuos).**
- **Sistemas lineares e espectro de potência.**
- **Ruído impulsivo; ruído branco e ruído térmico.**
- **Processos gaussianos em sistemas lineares.**
- **Densidade espectral de potência de tempo discreto.**
- **Amostragem.**
- **Sistemas lineares discretos.**
- **Estimação espectral;**

Densidade espectral de potência

- A densidade espectral de potência (DEP) de um processo aleatório $x(t)$ é definida como a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação,

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

- Como $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$, conclui-se que $S_x(f)$ é uma função real.
- Utilizando-se a expressão inversa, tem-se que

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

Densidade espectral de potência

- e para $\tau = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = R_x(0) = E\left[|\mathbf{x}(t)|^2\right] \geq 0$$

- Ou seja, a área de $S_x(f)$ é não negativa e igual à **potência média** do processo $\mathbf{x}(t)$.
- Se o processo $\mathbf{x}(t)$ é real, então $R_x(\tau)$ é real e par, portanto $S_x(f)$ será, também, par:

$$S_x(f) = S_x(-f)$$

- e, nesse caso,

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \quad \text{e} \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \cos(2\pi f \tau) df$$

Densidade espectral de potência

- A D.E.P cruzada de dois processos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ é a transformada de Fourier de sua função de correlação cruzada:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = S_{yx}^*(f)$$

- e

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

- Para $\tau = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) df = R_{xy}(0) = E\{\mathbf{x}(t) \mathbf{y}^*(t)\}$$

- Se $\mathbf{x}(t)$ é a tensão em um bipolo e $\mathbf{y}(t)$ é a corrente que por ele circula, então a expressão anterior é igual ao valor esperado da potência dissipada por esse dispositivo.
- Se os processos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são ortogonais ($R_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow S_{xy}(f) = 0$), então $R_{x+y}(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$ e $S_{x+y}(f) = S_x(f) + S_y(f)$

Densidade espectral de potência

- **Propriedades:**

- Se

$$\mathbf{y}(t) = a \mathbf{x}(t)$$

- então

$$R_y(\tau) = |a|^2 R_x(\tau) \quad \text{e} \quad S_y(f) = |a|^2 S_x(f)$$

- sendo $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, temos que

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}(\tau) &= E \left\{ \mathbf{x}(t+\tau) \mathbf{x}'^*(t) \right\} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left\{ \mathbf{x}(t+\tau) \frac{\mathbf{x}^*(t+\Delta) - \mathbf{x}^*(t)}{\Delta} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{R_x(\tau - \Delta) - R_x(\tau)}{\Delta} = - \frac{dR_x(\tau)}{d\tau} \end{aligned}$$

Densidade espectral de potência

- analogamente,

$$R_{\dot{x}}(\tau) = E \left\{ \dot{x}(t+\tau) \dot{x}^*(t) \right\} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left\{ \frac{x(t+\tau+\Delta) - x(t+\tau)}{\Delta} \dot{x}^*(t) \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{R_{xx}(\tau+\Delta) - R_{xx}(\tau)}{\Delta} = \frac{dR_{xx}(\tau)}{d\tau}$$

- portanto

$$R_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} \Rightarrow S_{\dot{x}}(f) = (2\pi f)^2 S_x(f)$$

- E para $y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$

temos que

$$R_y(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n} R_x(\tau)}{d\tau^{2n}} \Rightarrow S_y(f) = (2\pi f)^{2n} S_x(f)$$

Uma interpretação da DEP

- A potência de um sinal $g(t)$ é definida por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

- Se $g(t)$ é um sinal de potência (P_g finita e não nula) então ele tem energia infinita e, assim, pode não ter transformada de Fourier.
- Usando-se, porém, o sinal truncado $g_T(t)$ dado por

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad G_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- esse sinal terá transformada de Fourier e sua energia será dada por

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df$$

- pelo teorema de Parseval.

Uma interpretação da DEP

- Temos, então, que a potência do sinal $g(t)$ pode ser calculada, alternativamente, como

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} df$$

- Podemos, assim, chamar o integrando dessa última expressão de densidade espectral de potência do sinal $g(t)$, já que ele é função da frequência, é sempre positivo, e sua integral é igual à potência total do sinal $g(t)$:

$$\tilde{S}_g(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j 2\pi f t} dt \right|^2$$

Uma interpretação da DEP

- No caso de um processo aleatório $\mathbf{x}(t)$ poderíamos, de forma análoga, definir a sua densidade espectral de potência como sendo a média das densidades espectrais de potência de suas amostras, ou seja,

$$S_{\mathbf{x}}(f) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t) e^{-j 2 \pi f t} dt \right|^2 \right\}$$

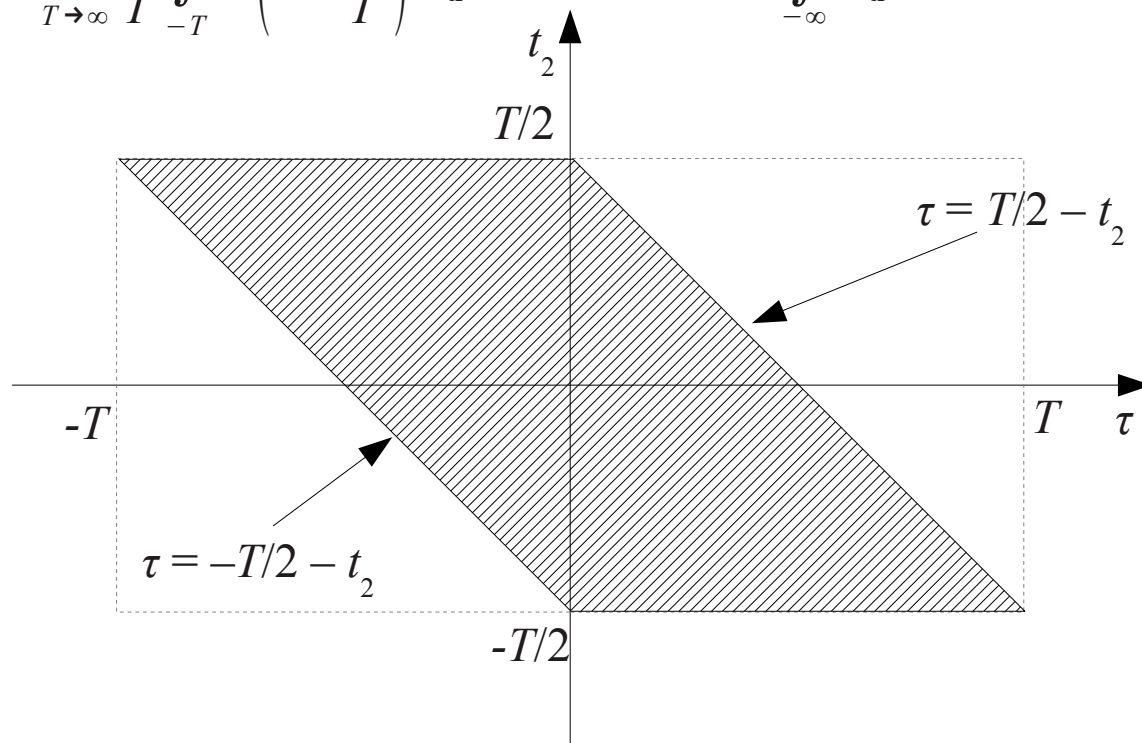
- Comutando-se o operador média com o operador limite, se este existir, temos:

Uma interpretação da DEP

$$\begin{aligned}
 S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t) e^{-j 2 \pi f t} dt \right|^2 \right\} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_1) e^{-j 2 \pi f t_1} dt_1 \right] \left[\int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_2) e^{-j 2 \pi f t_2} dt_2 \right]^* \right\} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}^*(t_2) e^{-j 2 \pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \right\} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(t_1 - t_2) e^{-j 2 \pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-\frac{T}{2} - t_2}^{\frac{T}{2} - t_2} R_x(\tau) e^{-j 2 \pi f \tau} d\tau dt_2
 \end{aligned}$$

Uma interpretação da DEP

$$\begin{aligned}
 S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-\frac{T}{2}-t_2}^{\frac{T}{2}-t_2} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau dt_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \int_{\max\left(-\frac{T}{2}, -\tau-\frac{T}{2}\right)}^{\min\left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}-\tau\right)} dt_2 R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau
 \end{aligned}$$



Uma interpretação da DEP

- Note, então, que essa é justamente a definição de densidade espectral de potência apresentada anteriormente.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_x(f) = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \right\}$$

- Isso mostra, portanto, que $S_x(f)$ é real, positiva, e relacionada com a potência média na frequência f .

Exemplo 1

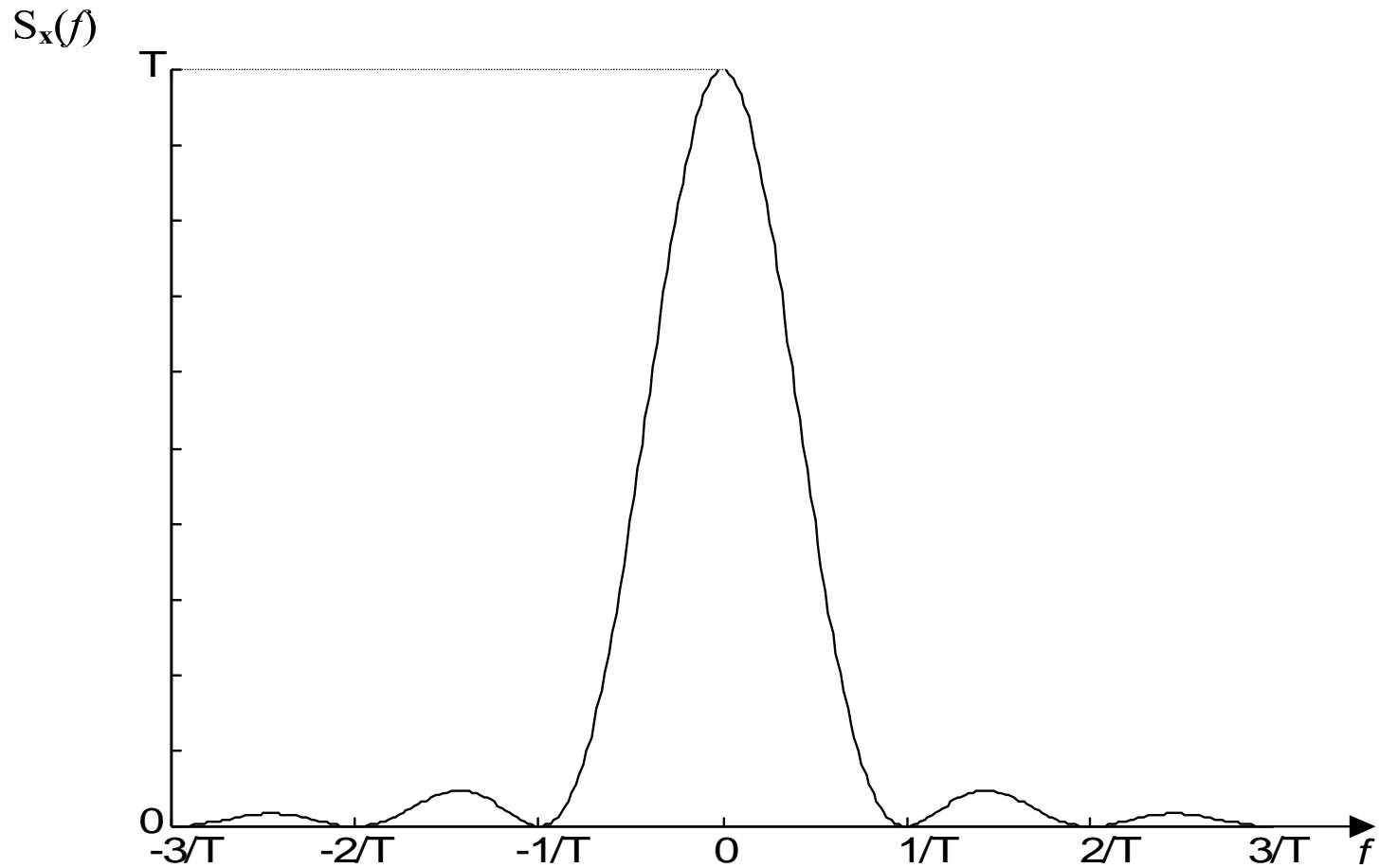
- Considere o processo binário randômico. Como visto, sua função de autocorrelação é dada por

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- Assim, a densidade espectral de potência desse processo, será então,

$$S_x(f) = T \operatorname{sinc}^2(f T)$$

Exemplo 1

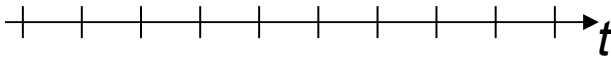


Exemplo 1

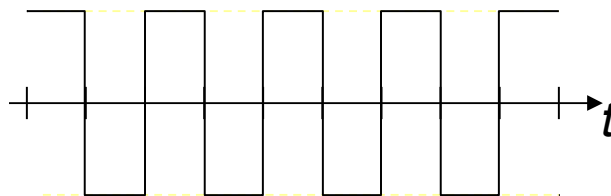
- Possíveis funções amostra:

- Constante:

$$x_1(t) = 1$$



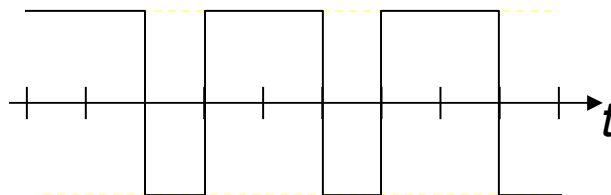
- Período $2T$ (onda quadrada):



$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{j 2 \pi n t}{2 T}} ;$$

$$a_n = \frac{1}{2 T} \int_0^{2 T} x_2(t) e^{\frac{-j 2 \pi n t}{2 T}} dt = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \infty \frac{1}{n} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

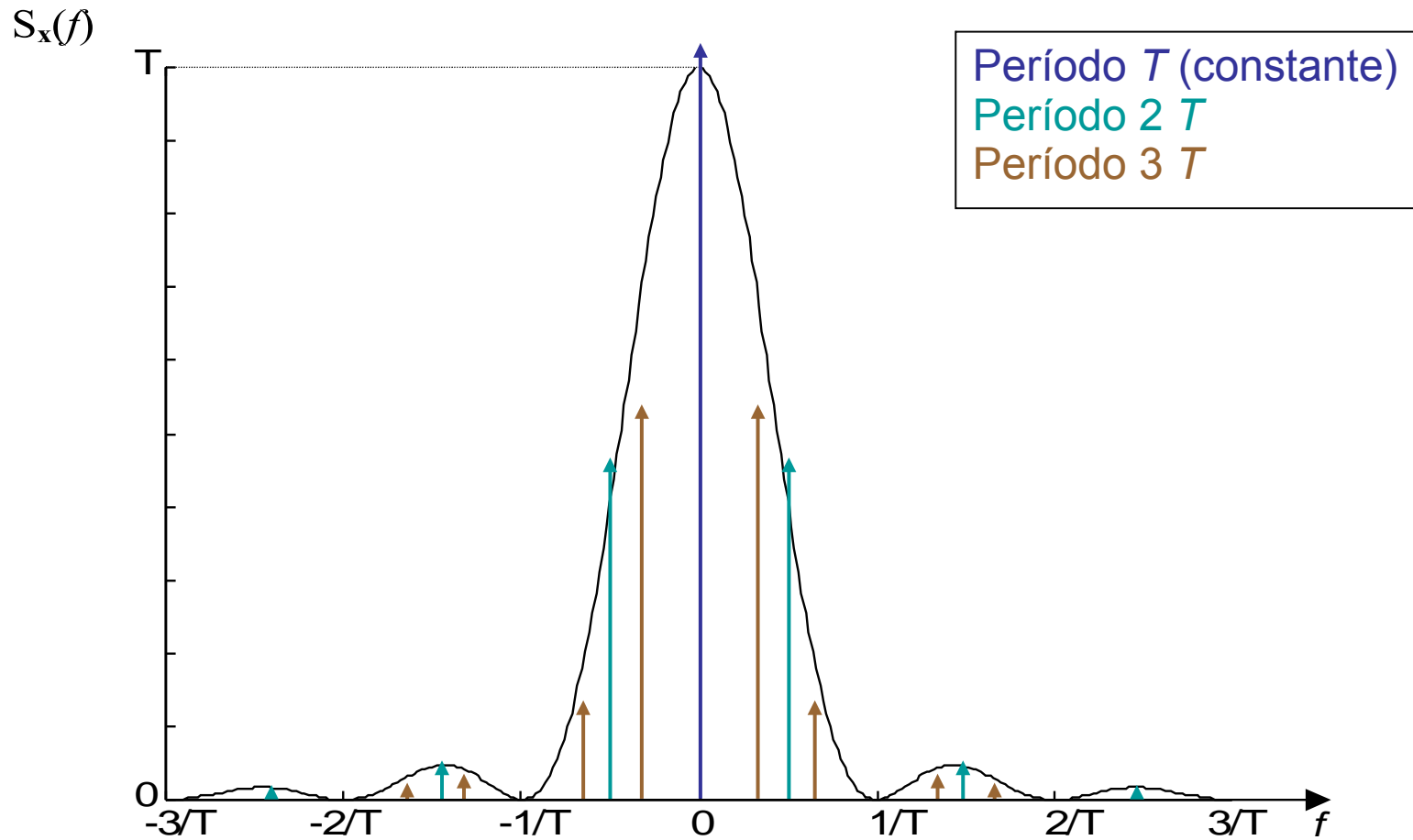
- Período $3T$:



$$x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{j 2 \pi n t}{3 T}} ;$$

$$a_n = \frac{1}{3 T} \int_0^{3 T} x_3(t) e^{\frac{-j 2 \pi n t}{3 T}} dt = \begin{cases} 0 & n = \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots \\ \infty \frac{1}{n} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 1



Exemplo 2

- Considere o processo impulsos de Poisson, que tem função de autocorrelação dada por

$$R_x(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau)$$

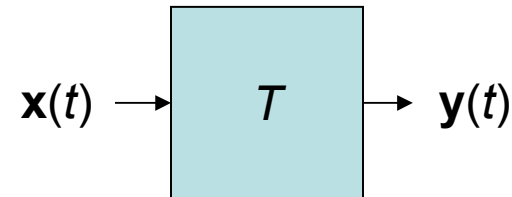
- A sua densidade espectral de potência será, portanto, dada por

$$S_x(f) = \lambda + \lambda^2 \delta(f)$$

Processos aleatórios em sistemas

- Dado um processo aleatório, $\mathbf{x}(t)$, vamos associar, através de uma regra, uma função $y_i(t)$ a cada uma de suas funções amostra $x_i(t)$. Dessa forma, teremos criado um novo processo aleatório $\mathbf{y}(t)$, indicado por

$$\mathbf{y}(t) = T [\mathbf{x}(t)]$$



- O símbolo T indica uma regra de correspondência entre as funções x e y .
- O processo $\mathbf{y}(t)$ pode ser considerado como a saída de um sistema em cuja entrada é aplicado o processo $\mathbf{x}(t)$.
- Note que a transformação T é determinística, ou seja, dada uma função amostra $x(t)$ a saída será sempre a mesma amostra $y(t)$.

Sistemas invariantes no tempo, sem memória

- Seja $y(t)=g[x(t)]$, onde $g(x)$ é uma função apenas de x . Dessa forma, no instante t_1 a saída $y(t_1)$ depende apenas de $x(t_1)$, e não dos valores passados ou futuros de $x(t)$.
- Vê-se, então, que $y(t+\varepsilon)=g[x(t+\varepsilon)]$, ou seja, o sistema é invariante no tempo.
- Assim, a função densidade de probabilidade da variável aleatória $y(t)$ pode ser determinada a partir da função densidade de probabilidade correspondente da variável aleatória $x(t)$.
- Da mesma forma, a densidade conjunta das variáveis aleatórias $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ pode ser determinada da correspondente densidade das variáveis aleatórias $x(t_1), \dots, x(t_n)$.
- Note, assim, que a média de $y(t)$ será dada por:

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x; t) dx$$

Sistemas invariantes no tempo, sem memória

- e sua autocorrelação por

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) g(x_2) f_{\mathbf{x}\mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- Pode-se mostrar que, se a entrada $\mathbf{x}(t)$ é estacionária de ordem k , então a saída $\mathbf{y}(t)$ também será estacionária de ordem k .
- Note, porém, que se $\mathbf{x}(t)$ é estacionário apenas no sentido amplo, então $\mathbf{y}(t)$ não é necessariamente estacionário em sentido algum:

- Por exemplo, $f_{\mathbf{x}}(x; t) = t N(0, \sigma) + (1-t) U[-\sigma\sqrt{3}, \sigma\sqrt{3}]; \quad t \in [0, 1]$
 $f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{\mathbf{x}}(x_1; t_1) f_{\mathbf{x}}(x_2; t_2)$

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = 0 \quad R_{\mathbf{x}}(t_1; t_2) = \begin{cases} \sigma^2 & t_2 = t_1 \\ 0 & t_2 \neq t_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^4(t) \Rightarrow E\{\mathbf{y}(t)\} = E\{\mathbf{x}^4(t)\} = t 3\sigma^4 + (1-t) \frac{9\sigma^4}{5}$$

Sistemas invariantes no tempo, sem memória

- Exemplo 2: $y(t) = x^2(t)$.
 - Para se determinar $f_y(y;t)$ observe que se $y > 0$ a equação $y = x^2$ admite duas soluções

$$x_1 = \sqrt{y} \quad \text{e} \quad x_2 = -\sqrt{y}$$

- e como

$$dy/dx = \pm 2\sqrt{y}$$

- obtém-se

$$f_y(y;t) = \begin{cases} \frac{f_x(\sqrt{y};t) + f_x(-\sqrt{y};t)}{2\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Sistemas invariantes no tempo, sem memória

- Supondo-se $x(t)$ estacionário (pelo menos 2a. ordem) pode-se, também, calcular a média e a autocorrelação de $y(t)$ por:

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2 f_{x_1 x_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

- Se $x(t)$ for real e gaussiano com média nula:

$$C_{x(t_1)x(t_2)} = C_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(t_1 - t_2) \\ R_x(t_1 - t_2) & R_x(0) \end{bmatrix} \quad C_x^{-1} = \frac{1}{|C_x|} \begin{bmatrix} R_x(0) & -R_x(t_1 - t_2) \\ -R_x(t_1 - t_2) & R_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |C_x| &= R_x^2(0) - R_x^2(\tau) \\ f_x(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{|C_x|} 2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_1 \ x_2] C_x^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{R_x^2(0) - R_x^2(\tau)}} \exp \left[-\frac{R_x(0)x_1^2 + R_x(0)x_2^2 - 2R_x(\tau)x_1x_2}{2R_x^2(0) - 2R_x^2(\tau)} \right] \end{aligned}$$

Sistemas invariantes no tempo, sem memória

- Dessa forma:

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = E\{\mathbf{x}^2(t)\} = R_x(0)$$

- e

$$R_y(\tau) = E\{\mathbf{x}^2(t) \mathbf{x}^2(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2 f_x(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = R_x^2(0) + 2 R_x^2(\tau)$$

Sistemas Lineares

- Seja a transformação $y(t)=L[x(t)]$. Dizemos que L é uma transformação linear se

$$L[a_1x_1(t)+ a_2x_2(t)]= a_1 L[x_1(t)]+ a_2 L[x_2(t)]$$

para quaisquer $a_1, a_2, x_1(t), x_2(t)$.

- Dizemos que L é invariante no tempo se

$$y(t+\varepsilon)=L[x(t+\varepsilon)]$$

- A partir deste ponto o termo linear significará linear e invariante no tempo.
- Assim,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha).h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\alpha).x(\alpha)d\alpha$$

- onde $h(t)$ é a resposta impulsiva de nosso sistema;

Sistemas Lineares

- Demonstração:

$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\alpha) \Rightarrow h(t-\alpha)$$

$$x(\alpha) \delta(t-\alpha) \Rightarrow x(\alpha) h(t-\alpha)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) \delta(t-\alpha) d\alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha$$

$$x(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha$$

- portanto

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\alpha) x(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

Sistemas Lineares

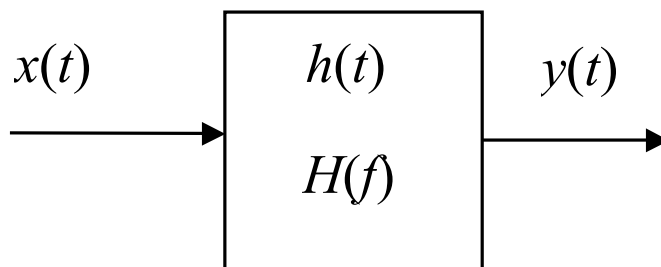
- sendo

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

a função de transferência do sistema

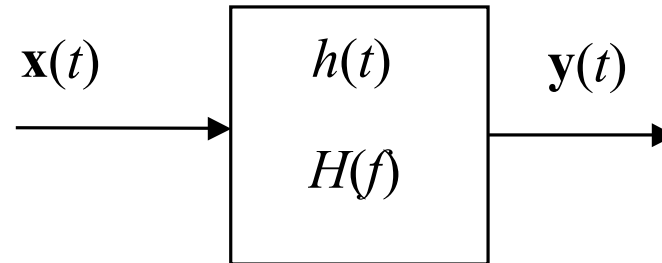
- Em sistemas físicos, $h(t)$ é real e é nula para $t < 0$ (causal). Neste caso:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t h(t-\alpha) x(\alpha) d\alpha$$



Sistemas Lineares

- Aplicando-se um processo $x(t)$ à entrada de um sistema linear teremos, portanto, um outro processo $y(t)$ em sua saída:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\alpha) x(\alpha) d\alpha$$

Sistemas Lineares

- Vamos admitir que a entrada $\mathbf{x}(t)$ de nosso sistema seja um processo aleatório estacionário. Dessa forma,

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{x}(t-\alpha)\} h(\alpha) d\alpha = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha = H(0) m_x$$

- Vamos determinar, agora, a autocorrelação da saída $\mathbf{y}(t)$, determinando primeiro a correlação cruzada entre $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, como se segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) \mathbf{x}^*(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t-\alpha) \mathbf{x}^*(t-\tau) h(\alpha) d\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow E\{\mathbf{y}(t) \mathbf{x}^*(t-\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{x}(t-\alpha) \mathbf{x}^*(t-\tau)\} h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau-\alpha) h(\alpha) d\alpha \\ &\therefore R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Temos, também, que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+\tau) \mathbf{y}^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(t+\tau) \mathbf{x}^*(t-\alpha) h^*(\alpha) d\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathbf{y}(t+\tau) \mathbf{x}^*(t-\alpha)\} h^*(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau+\alpha) h^*(\alpha) d\alpha \\ \therefore R_y(\tau) &= R_{yx}(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned}$$

- Dessa forma,

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= R_x(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau-\alpha-\beta) h^*(-\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

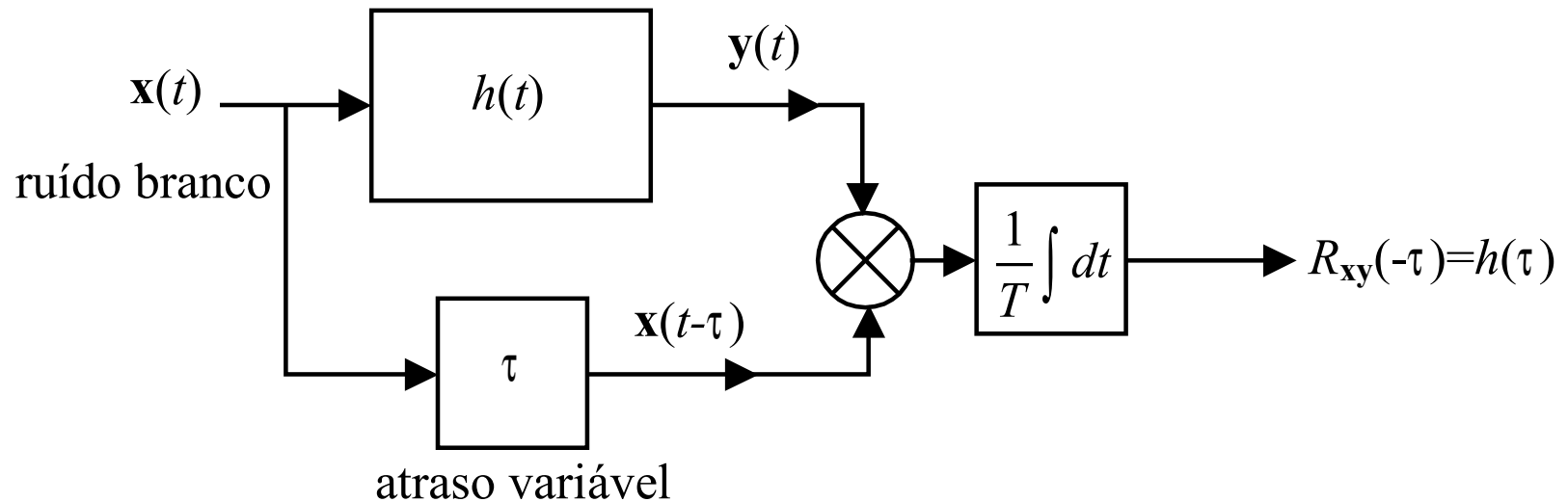
Sistemas Lineares

- Comentários:

- Se $R_x(\tau) = \delta(\tau)$ (ruído branco), e $h(t) = 0$ para $t < 0$ (sistema real causal), então, para $\tau > 0$, $R_{xy}(\tau) = E\{\mathbf{x}(t + \tau) \mathbf{y}(t)\} = h(-\tau) = 0$, ou seja, valores futuros de ruído branco não influenciam no valor presente da saída.
- Usando-se ruído branco como entrada, pode-se medir experimentalmente a resposta impulsiva $h(t)$ de um sistema por uma média no tempo:
como $R_{xy}(\tau) = h(-\tau)$, é suficiente medir a correlação cruzada entre a entrada e a saída para vários valores negativos de τ .
- Se $R_{xy}(\tau)$ for ergódico, então basta calcular-se a integral, para T suficientemente grande:

$$h(-\tau) = R_{xy}(\tau) \simeq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t + \tau) \mathbf{y}(t) dt$$

Sistemas Lineares



Estacionariedade da saída

- Do que foi visto anteriormente, segue que, se $x(t)$ é estacionário no sentido amplo, então $y(t)$ também será estacionário no sentido amplo.
- O mesmo ocorre para a estacionariedade no sentido restrito.
- As conclusões acima não são corretas se a entrada do sistema é aplicada a partir do instante $t=0$, por exemplo.
- Neste caso, se $h(t)$ for absolutamente integrável (sistema estável), então $y(t)$ será assintoticamente estacionário.

Espectro de potência

- Como a transformada de Fourier de $h^*(-t)$ é igual a $H^*(f)$, conclui-se que

$$S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f) \quad \text{e} \quad S_y(f) = S_{xy}(f) H(f)$$

- e portanto,

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

- *Corolário:* A densidade espectral de potência de um processo $\mathbf{x}(t)$ arbitrário, real ou complexo, é não negativa:

$$S_x(f) \geq 0$$

- **Prova:** suponha que $S_x(f)$ seja negativa para $f = f_0$.
 - Pode-se, então, encontrar um intervalo pequeno (f_1, f_2) , próximo a f_0 tal que $S_x(f) \leq 0$ para $f_1 \leq f \leq f_2$.

Espectro de potência

- Considerando-se, agora, um sistema passa-faixa ideal, com banda no intervalo (f_1, f_2) ,

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_1 < f < f_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

vamos aplicar à sua entrada o processo $\mathbf{x}(t)$. Dessa forma, o processo $\mathbf{y}(t)$ resultante será tal que

$$S_y(f) = \begin{cases} S_x(f) \leq 0 & f_1 < f < f_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Mas isso é impossível, pois

$$E\{|\mathbf{y}(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df \geq 0$$

- Portanto,

$$S_x(f) \geq 0$$

Espectro de potência

- Comentários:
 - O que foi visto justifica o termo densidade espectral de potência usado para a função $S(f)$, pois
 - sua integral em f é igual à potência do processo e
 - ela é realmente uma densidade de potência por frequência, já que sua integral em uma faixa de frequência (f_1, f_2) é igual à potência do processo resultante ao se passar o primeiro por um sistema passa-faixas ideal com essa mesma banda.
 - como havíamos enunciado.

$$|R_x(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f \tau} df \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = R_x(0)$$

Espectro de potência

- Analogamente pode-se mostrar que $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_x(0) \cdot R_y(0)$.
- $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$ não é condição suficiente para que $R_{xy}(\tau)$ seja uma função de autocorrelação. É necessário também que ela tenha transformada de Fourier real e positiva para todo f .

Ruído Impulsivo

- O processo

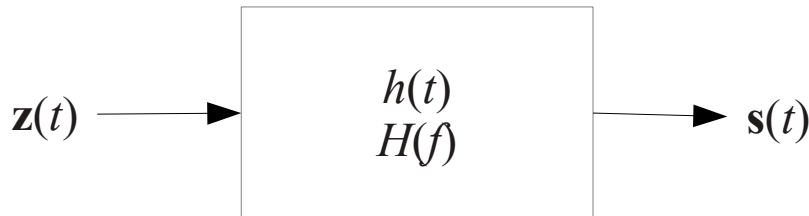
$$s(t) = \sum_i h(t - t_i)$$

onde t_i são pontos randômicos com densidade uniforme λ e $h(t)$ é uma função real, é denominado ruído impulsivo.

- Sendo

$$z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

uma sequência de impulsos de Poisson, $s(t)$ pode ser considerado como a saída de um sistema linear com resposta impulsiva $h(t)$, quando em sua entrada é aplicado o processo $z(t)$.



Ruído Impulsivo

- Como vimos, $E\{z(t)\}=\lambda$ e $R_z(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$ e $S_z(f)=\lambda^2\delta(f)+\lambda$, assim temos que

$$E\{s(t)\}=\lambda H(0)$$

$$S_s(f)=\lambda^2 H^2(0)\delta(f)+\lambda|H(f)|^2$$

$$R_s(\tau)=\lambda^2 H^2(0)+\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

e

$$C_s(\tau)=\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

- Segue-se, portanto, que

$$E\{s(t)\}=\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$$

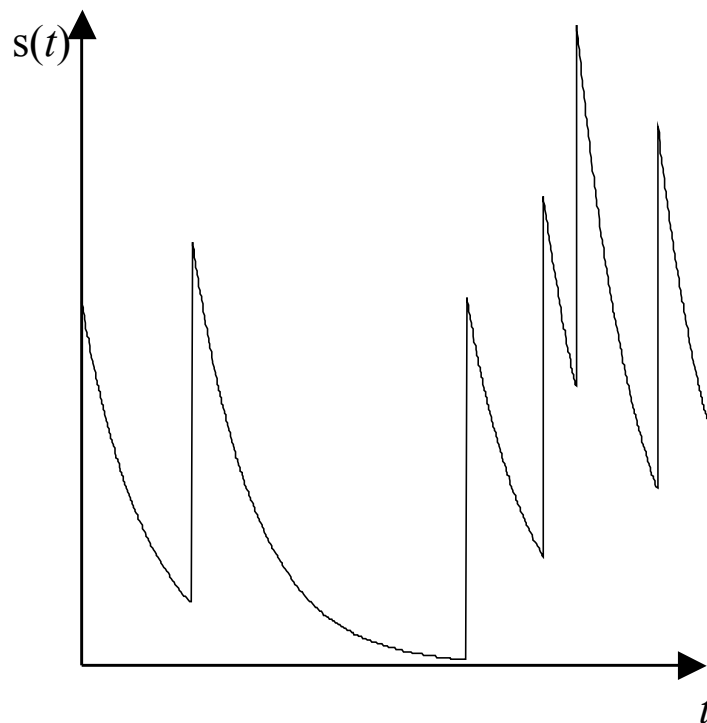
$$\sigma_s^2=\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

Ruído Impulsivo

- Seja $h(t)$ um pulso exponencial,

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

- Uma função amostra do ruído impulsivo correspondente a esse pulso está mostrada na Figura:



Ruído Impulsivo

- Temos, então, que

$$H(f) = \frac{1}{\alpha + j 2 \pi f}$$

- e, portanto,

$$S_s(f) = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \delta(f) + \frac{\lambda}{\alpha^2 + 4 \pi^2 f^2}$$

$$R_s(\tau) = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

$$E\{s(t)\} = \frac{\lambda}{\alpha} \quad e \quad \sigma_s^2 = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Ruído Branco

- Seja $n(t)$ um processo aleatório tal que

$$S_n(f) = \frac{N}{2} \Rightarrow R_n(\tau) = \frac{N}{2} \delta(\tau)$$

- O processo assim definido é denominado ruído branco, devido ao fato de sua densidade espectral de potência ser constante sobre todo o espectro.
- Propriedades:
 - a expressão de sua função de autocorrelação implica que duas amostras de ruído branco, não importando quão próximas elas estejam, são sempre não correlacionadas (no caso de ruído branco gaussiano, são independentes)
 - a potência média quadrática do ruído branco é infinita!

Ruído Branco

- Vemos assim que o ruído branco não pode existir fisicamente. Porém há certos tipos de ruído que possuem uma densidade espectral de potência plana até frequências muito altas.
- Esses processos, ao passarem por um filtro com banda limitada bem abaixo da sua, produzem na saída um processo com uma densidade espectral de potência idêntica à que apareceria no caso da entrada ser o ruído branco.
- Daí a importância de se estudar esse tipo fictício de ruído.

Ruído Branco e o Processo de Wiener

- Considere o processo de Wiener⁽¹⁾ $w(t)$, com média nula e função de autocorrelação $R_w(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$, e seja o processo $x_\Delta(t)$ definido por

$$x_\Delta(t) = \frac{w(t+\Delta) - w(t)}{\Delta}$$

- Vamos determinar sua função de autocorrelação.

- (1) Na verdade qualquer processo de incrementos independentes, ou até incrementos não correlacionados apenas, pode ser usado.

Ruído Branco e o Processo de Wiener

$$\begin{aligned}
 R_{\Delta}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}_{\Delta}(t_1)\mathbf{x}_{\Delta}(t_2)\} = \frac{E\left\{\left[\mathbf{w}(t_1+\Delta) - \mathbf{w}(t_1)\right]\left[\mathbf{w}(t_2+\Delta) - \mathbf{w}(t_2)\right]\right\}}{\Delta^2} = \\
 &= \frac{R_w(t_1+\Delta, t_2+\Delta) + R_w(t_1, t_2) - R_w(t_1+\Delta, t_2) - R_w(t_1, t_2+\Delta)}{\Delta^2} = \\
 &= \sigma^2 \frac{\min(t_1+\Delta, t_2+\Delta) + \min(t_1, t_2) - \min(t_1+\Delta, t_2) - \min(t_1, t_2+\Delta)}{\Delta^2} = \\
 &= \begin{cases} \sigma^2 \frac{(t_2+\Delta) + t_2 - t_2 - (t_2+\Delta)}{\Delta^2} = 0 & t_1 > t_2 + \Delta \\ \sigma^2 \frac{(t_2+\Delta) + t_2 - t_2 - t_1}{\Delta^2} = \frac{\sigma^2}{\Delta} \left(1 - \frac{(t_1 - t_2)}{\Delta}\right) & t_2 < t_1 < t_2 + \Delta \\ \sigma^2 \frac{(t_1+\Delta) + t_1 - t_2 - t_1}{\Delta^2} = \frac{\sigma^2}{\Delta} \left(1 - \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta}\right) & t_1 < t_2 < t_1 + \Delta \\ \sigma^2 \frac{(t_1+\Delta) + t_1 - (t_1+\Delta) - t_1}{\Delta^2} = 0 & t_2 > t_1 + \Delta \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ruído Branco e o Processo de Wiener

- ou seja,

$$R_{\Delta}(t_1, t_2) = R_{\Delta}(t_1 - t_2) = R_{\Delta}(\tau) = \frac{\sigma^2}{\Delta} \Lambda\left(\frac{\tau}{\Delta}\right)$$

- onde $\Lambda(x)$ é a função triangular:

$$\Lambda(x) = \max(1 - |x|, 0)$$

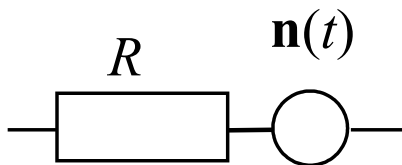
- Notamos que, quando Δ tende a zero essa função de autocorrelação tende à função delta de Dirac, ou seja, quando Δ tende a zero o processo $x_{\Delta}(t)$ converge (no sentido médio quadrático) para o processo ruído branco.
- Assim, o processo ruído branco pode ser visto como a derivada no tempo de um processo de incrementos independentes.

Ruído térmico

- Chama-se de ruído térmico à tensão e à distribuição de corrente que aparecem em um sistema devido à agitação dos elétrons nos vários resistores. Essas fontes de ruído (os resistores) podem ser modeladas por uma fonte de tensão em série com um resistor ideal.
- Assim, um resistor real de valor R será modelado por um resistor ideal de valor R em série com uma fonte de tensão de valor $\mathbf{n}_e(t)$, onde $\mathbf{n}_e(t)$ é um processo aleatório com média zero e espectro plano (ruído branco):

$$E\{\mathbf{n}_e(t)\}=0 \quad S_n(f)=2 \kappa T R$$

- onde κ = constante de Boltzmann = $1,37 \times 10^{-23}$ J/K; R = resistência do resistor considerado; T = temperatura absoluta.

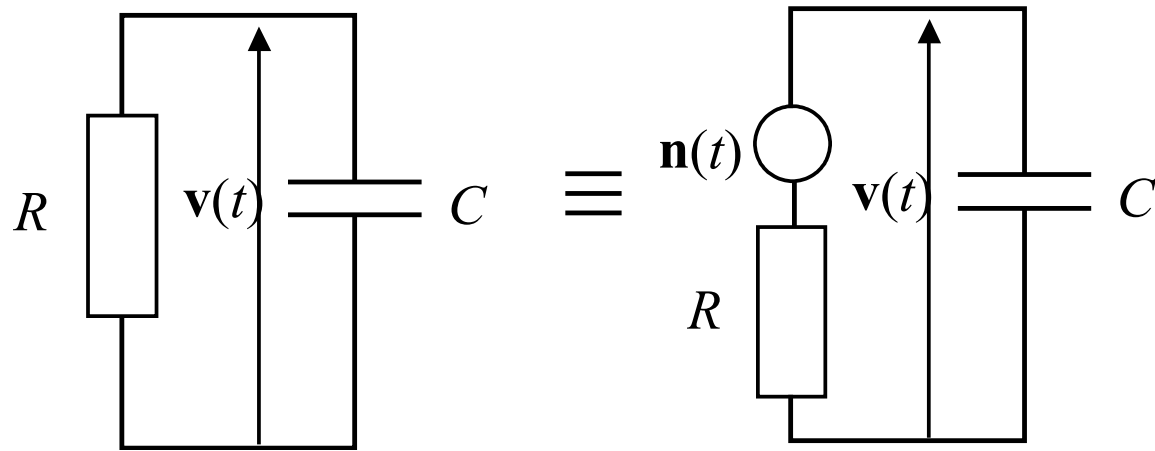


Ruído térmico

- Como o movimento dos elétrons livres em um material condutor pode ser descrito por um processo de Wiener, a tensão nos terminais desse resistor (que é proporcional à velocidade desses elétrons) pode ser descrita como a derivada desse processo, e portanto é do tipo ruído branco gaussiano.
- Dessa forma, a informação anterior especifica completamente as características do processo $\mathbf{n}_e(t)$.
- Deve-se considerar, ainda, que as fontes de ruído dos vários resistores em um circuito são independentes.

Ruído térmico

- Dado o circuito RC paralelo abaixo, vamos determinar a densidade espectral de potência de sua tensão $v(t)$.



Ruído térmico

- Da teoria de circuitos temos que:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{N}(s) \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \mathbf{N}(s) \frac{1}{1 + RCs}$$

ou seja, $\mathbf{v}(t)$ é a saída de um sistema linear onde

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

tendo $\mathbf{n}(t)$ em sua entrada. Dessa forma,

$$S_v(f) = 2 \kappa T R \frac{1}{1 + R^2 C^2 4 \pi^2 f^2}$$

e, portanto,

$$R_v(\tau) = \frac{\kappa T}{C} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

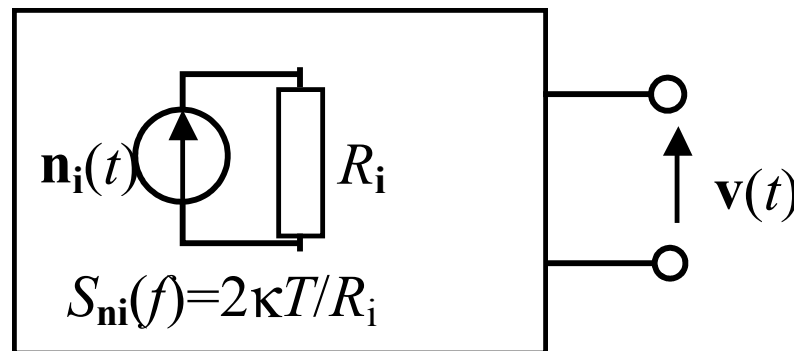
e, além disso, $E\{\mathbf{v}^2(t)\} = R_v(0) = \kappa T/C$, ou seja a potência média não depende de R .

Teorema de Nyquist

- Seja $v(t)$ a tensão entre dois terminais de uma rede passiva contendo vários resistores na mesma temperatura T , e seja $Z(s)$ a impedância de rede vista entre esses terminais. Nesse caso, o espectro de $v(t)$ é dado por:

$$S_v(f) = 2 \kappa T \operatorname{Re}[Z(j 2 \pi f)]$$

- Prova:** Na Figura abaixo temos os terminais onde se deseja determinar a densidade espectral de potência da tensão $v(t)$, e um dos resistores genéricos presentes nessa rede, R_i .



Teorema de Nyquist

- Como as fontes de ruído dos vários resistores são independentes, temos que

$$S_v(f) = \sum_i S_{v_i}(f) = \sum_i S_{n_i}(f) |H_i(f)|^2 = \sum_i \frac{2kT}{R_i} |H_i(f)|^2$$

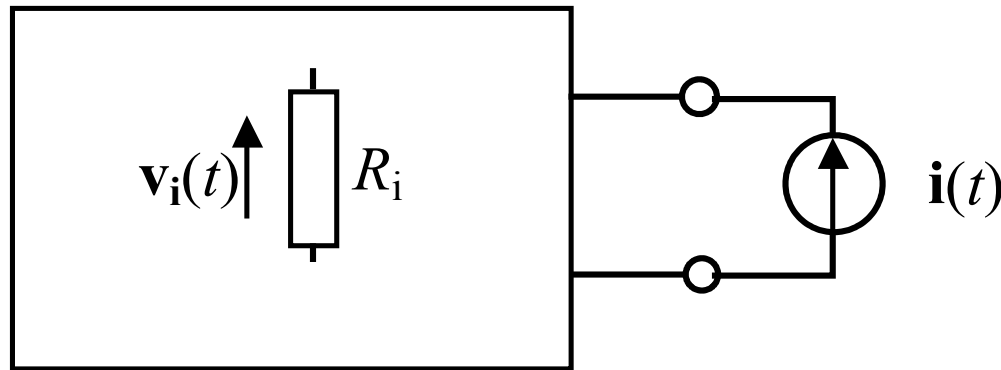
- onde $H_i(f)$ é a função de transferência da i -ésima fonte de corrente para a saída $v(t)$, ou seja,

$$H_i(f) = \frac{V(f)}{I_i(f)}$$

Teorema de Nyquist

- Pelo teorema da reciprocidade, se aplicarmos aos terminais em estudo uma corrente $I(f)$, a relação entre a tensão que aparecerá sobre o resistor R_i e essa corrente será a mesma, ou seja,

$$H_i(f) = \frac{V_i(f)}{I(f)}$$



Teorema de Nyquist

- Com base ainda nessa figura, temos que a potência dissipada no sistema quando $i(t)$ for senoidal, de frequência f e valor eficaz I , será dada por:

$$P = \operatorname{Re} [Z(j 2 \pi f)] I^2 = \sum_i \frac{V_i^2}{R_i} \Rightarrow \operatorname{Re} [Z(j 2 \pi f)] = \sum_i \frac{V_i^2}{I^2 R_i} = \sum_i \frac{|H_i(f)|^2}{R_i}$$

- Substituindo-se essa expressão na expressão da densidade espectral de potência desejada, obtém-se

$$S_v(f) = 2 \kappa T \sum_i \frac{|H_i(f)|^2}{R_i} = 2 \kappa T \operatorname{Re} [Z(j 2 \pi f)]$$

- Analogamente, sendo $i(t)$ a corrente num ramo de uma rede passiva, e sendo $Y(s)$ a admitância vista desse ramo, temos que:

$$S_i(f) = 2 \kappa T \operatorname{Re} [Y(j 2 \pi f)]$$