Olimpíada Brasileira de Informática 2016

Nível Sênior – Fase 2: Upsolving

Prof. Dr. Vinícius R. P. Borges - CiC/UnB

2020

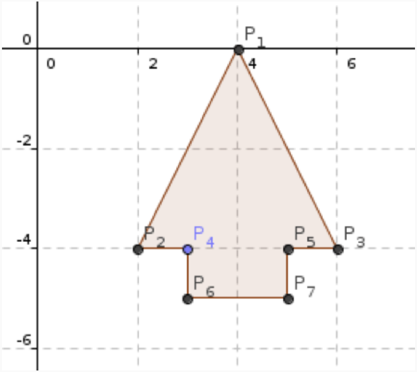
Sumário

Jardim de Infância

Problema

Vívian é uma professora do jardim de infância. Todos os dias, ao final da aula, ela tem que olhar os desenhos que seus alunos fizeram naquele dia e fazer algum comentário. Esta é uma tarefa muito repetitiva, já que as crianças costumam desenhar coisas semelhantes, portanto Vívian decidiu automatizar o processo. Ela fez um programa capaz de processar a imagem e procurar padrões conhecidos para fazer comentários predeterminados. Em particular, ela percebeu que na maioria dos desenhos as crianças incluem um pinheiro. Porém, ela está tendo dificuldades para reconhecê-los e pediu sua ajuda. O programa dela já é capaz de reconhecer uma figura que pode ser um pinheiro e transformá-la em sete pontos $P_1, P_2, ...P_7$. O candidato a pinheiro seria a região interna do polígono $P_1P_2P_4P_6P_7P_5P_3$, como mostra a figura a seguir de um pinheiro válido.

Problema



Entrada e saída

Entrada

A entrada contém sete linhas. A i-ésima da entrada contém dois inteiros X_i e Y_i, indicando as coordenadas cartesianas do ponto P_i.

Saída

Seu programa deve produzir uma única linha, contendo uma única letra, “S” se os pontos formam um pinheiro pelas condições descritas e “N”, caso contrário.

Entrada e saída

Restrições

- $-2 \times 10^4 \leq X_i, Y_i \leq 2 \times 10^4$.
- Todos os pontos são diferentes.

Informações sobre a pontuação

- Em um conjunto de casos de teste somando 40 pontos, $N \leq 1000$

Exemplo de entradas e saídas

Entrada	Saída
2 -4	S
5 3	
-1 3	
3 3	
1 3	
3 5	
1 5	

Exemplo de entradas e saídas

Entrada	Saída
2 -1 5 45 -43 9 -11 33 -27 21 -20 45 -36 33	S

Exemplo de entradas e saídas

Entrada	Saída
-1 -3 11 -23 11 17 11 -7 11 1 19 -7 19 1	N

Exemplo de entradas e saídas

Entrada

```
2 4
18 22
-14 22
6 24
-2 20
6 26
-2 22
```

Saída

```
N
```

Exemplo de entradas e saídas

Entrada	Saída
4 1	N
-36 -4	
-12 -36	
-30 -12	
-18 -28	
-39 -25	
-27 -41	

Estratégia de resolução

- Não tem segredo... temos que utilizar nossos conhecimentos de geometria e implementar um código que receba os dados da entrada, verificando condição por condição;
  - Podemos ter uma condicional beeeeem longa...
- Codificar blocos if-else (se-então) aninhados.

Estratégia de resolução

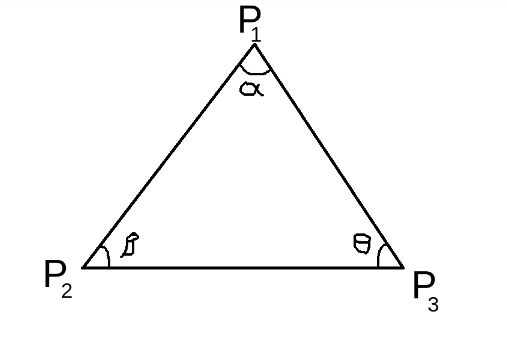
- Elaborar cada condicional verificando se ela não satisfaz uma determinada condição do “pinheiro válido”:
    - Se a condicional for verdadeira, imprime “N” e finaliza o programa;
    - Caso contrário, analisa-se a próxima condição.
- No final, se todas as verificações falharem, temos um pinheiro válido: a resposta é “S”;

Solução

- Condição 1: O ângulo $P_2P_1P_3$ é agudo (vértice em P1);
- Como verificar se um ângulo entre dois segmentos de reta consecutivos (ponto em comum) é agudo?
- Lei dos cossenos!

Solução

- Condição 1: O ângulo $P_2P_1P_3$ é agudo (vértice em P1);



$$\overline{P2P3}^2 = \overline{P1P2}^2 + \overline{P1P3}^2 - 2\overline{P1P2P1P3}\cos(\alpha) \quad (1)$$

Solução

- Condição 1: O ângulo $P_2P_1P_3$ é agudo (vértice em P1);

$$\overline{P2P3}^2 = \overline{P1P2}^2 + \overline{P1P3}^2 - 2\overline{P1P2P1P3}\cos(\alpha) \tag{2}$$

- Como $0 \leq \cos(\alpha) < 90^o$, o termo $-2\overline{P1P2P1P3}\cos(\alpha)$ será negativo. Reescrevendo:

$$\overline{P2P3}^2 < \overline{P1P2}^2 + \overline{P1P3}^2 \tag{3}$$

Solução

- Condição 1: O ângulo $P_2P_1P_3$ é agudo (vértice em P1);

$$\overline{P2P3}^2 = \overline{P1P2}^2 + \overline{P1P3}^2 - 2\overline{P1P2P1P3}\cos(\alpha) \tag{4}$$

- Como $0 \leq \cos(\alpha) < 90^o$, o termo $-2\overline{P1P2P1P3}\cos(\alpha)$ será negativo. Reescrevendo:

$$\overline{P2P3}^2 < \overline{P1P2}^2 + \overline{P1P3}^2 \tag{5}$$

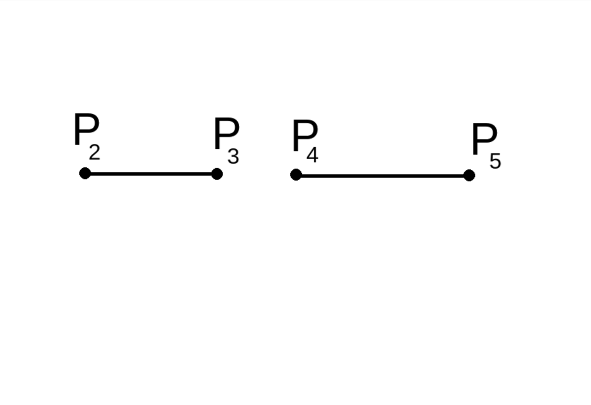
- Por isso, precisamos verificar se $\overline{P2P3}^2 < \overline{P1P2}^2 + \overline{P1P3}^2$ para que o ângulo $P_2P_1P_3$ seja agudo!

Solução

- Condição 2: Os segmentos $\overline{P1P2}$ e $\overline{P1P3}$ têm o mesmo comprimento;
- Basta verificar se $dist(P_1, P_2) \neq dist(P_1, P_3)$;

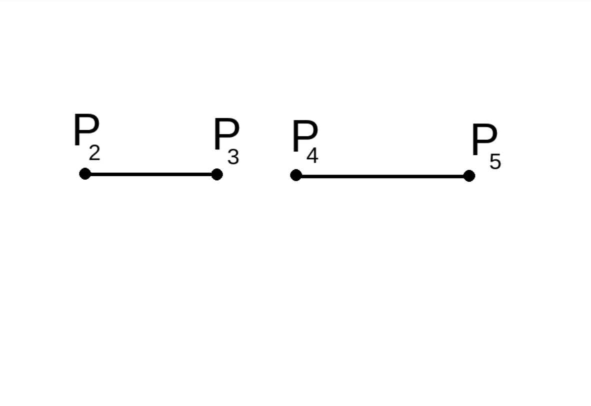
Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;
- Vamos verificar se P_2, P_3 e P_4 são colineares e depois o mesmo para P_2, P_3 e P_5;



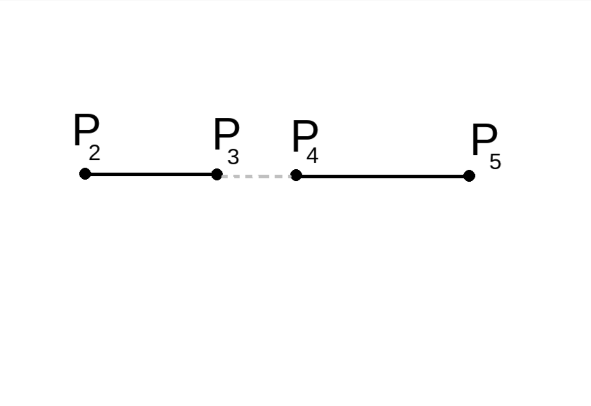
Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;

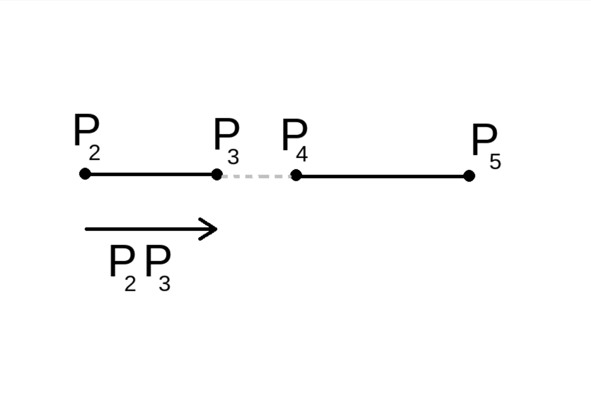


Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;

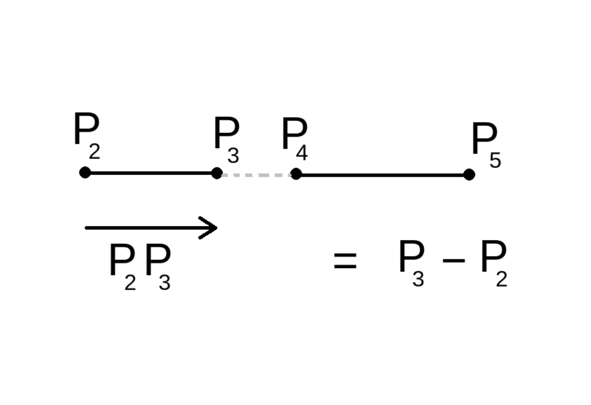


- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;



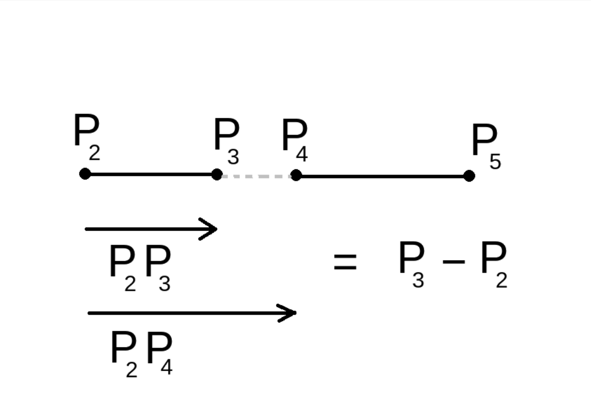
Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;

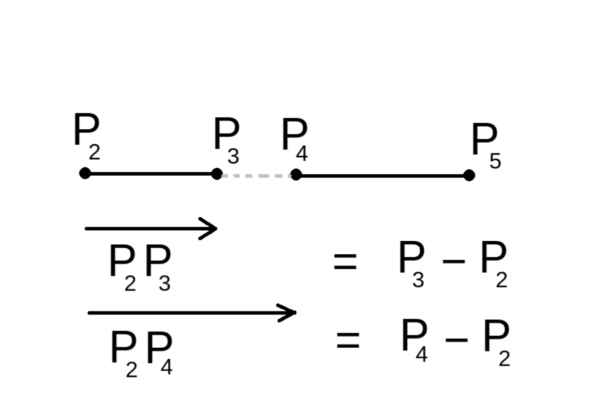


Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;

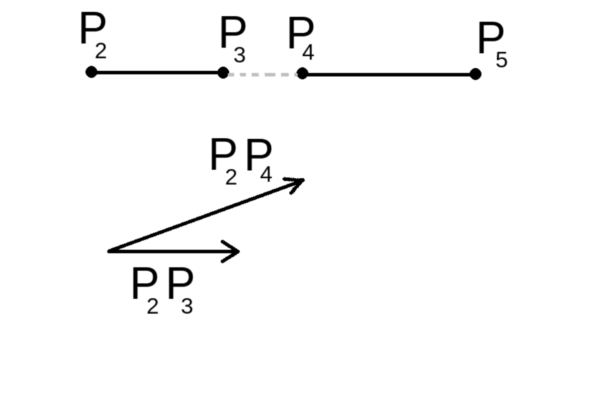


- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;



Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;
- Seja α o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{P_2P_3}$ e $\overrightarrow{P_2P_4}$;



Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;
- Seja α o ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{P_2P_3}$ e $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{P_2P_4}$;
- Podemos calcular o produto vetorial como:

$$|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{A}| \times |\overrightarrow{B}| \sin(\alpha) \tag{6}$$

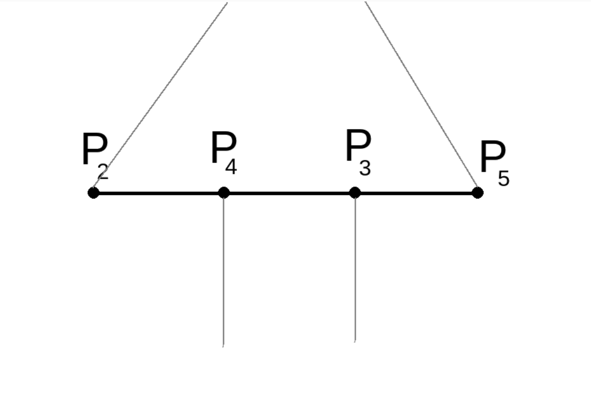
- Para que esses pontos sejam colineares, consideramos que $\alpha = 0^o$, logo $\sin(\alpha) = 0$;
- Portanto, a colinearidade é verificada se $|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = 0$.

Solução

- Condição 3: Os pontos P_2, P_3, P_4 e P_5 são colineares;
- Na nossa implementação, como queremos saber se P_2, P_3 e P_4 não são colineares, verifica-se se $|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| \neq 0$;
- Deve-se verificar também que P_2, P_3 e P_5 não são colineares;
  - $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{P_2P_3}$ e $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{P_2P_5}$
  - Logo, verifica-se se $|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}| \neq 0$.

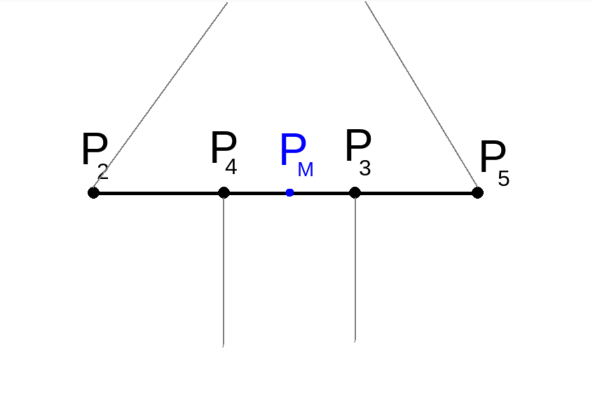
Solução

- Condição 4: Os pontos médios dos segmentos P_2P_3 e P_4P_5 são coincidentes.



Solução

- Condição 4: Os pontos médios dos segmentos P_2P_3 e P_4P_5 são coincidentes.



Solução

- Condição 4: Os pontos médios dos segmentos P_2P_3 e P_4P_5 são coincidentes.

$$P_M = \frac{P_2 + P_5}{2} \tag{7}$$

$$P_M = \frac{P_3 + P_4}{2} \tag{8}$$

$$\frac{P_2 + P_5}{2} = \frac{P_3 + P_4}{2} \tag{9}$$

Solução

- Condição 4: Os pontos médios dos segmentos P_2P_3 e P_4P_5 são coincidentes.

$$\begin{aligned} \frac{P_2 + P_5}{2} &= \frac{P_3 + P_4}{2} \\ P_2 + P_5 &= P_3 + P_4 \end{aligned} \tag{10}$$

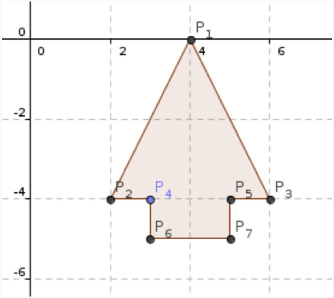
- Na nossa implementação, temos que verificar se $P_2 + P_5 \neq P_3 + P_4$.

Solução

- Condição 5: O segmento P_2P_3 tem comprimento maior que o segmento P_4P_5.
- De maneira simples, tal condição é verificada se $dist(P_2, P_3) > dist(P_4, P_5)$;
- Na nossa implementação, temos que verificar se $dist(P_2, P_3) \leq dist(P_4, P_5)$.

Solução

- Condição 6: Os segmentos P_4P_6 e P_5P_7 são perpendiculares ao segmento P_2P_3.



Solução

- Condição 6: Os segmentos P_4P_6 e P_5P_7 são perpendiculares ao segmento P_2P_3.
- Como já verificamos que P_4 está no segmento P_2P_3, devemos verificar se o ângulo α formado entre P_4P_6 e P_2P_3 é igual a 90^o;
- Pela lei do Cosseno:

$$\overline{P2P6}^2 = \overline{P2P4}^2 + \overline{P4P6}^2 - 2\overline{P2P4} \quad \overline{P4P6}\cos(\alpha) \tag{11}$$

- Fazendo-se $\alpha = 90^o$, $\cos(90^o) = 0$, obtendo-se:

$$\overline{P2P6}^2 = \overline{P2P4}^2 + \overline{P4P6}^2 \tag{12}$$

Solução

- Condição 6: Os segmentos P_4P_6 e P_5P_7 são perpendiculares ao segmento P_2P_3.
- Para que P_4P_6 seja perpendicular a P_2P_3, devemos verificar se:

$$dist(P2, P6)^2 = dist(P2, P4)^2 + dist(P4, P6)^2 \tag{13}$$

- Na nossa implementação, queremos que:

$$dist(P2, P6)^2 \neq dist(P2, P4)^2 + dist(P4, P6)^2 \tag{14}$$

- ou

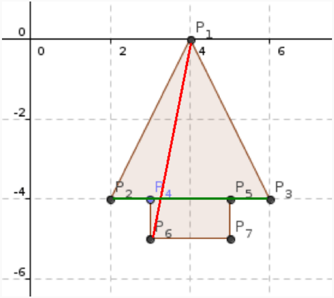
$$dist(P3, P7)^2 \neq dist(P3, P5)^2 + dist(P5, P7)^2 \tag{15}$$

Solução

- Condição 7: Os segmentos P_4P_6 e P_5P_7 têm o mesmo comprimento.
- De maneira simples, tal condição é verificada se $dist(P_4, P_6) = dist(P_5, P_7)$;
- Na nossa implementação, temos que verificar se $dist(P_4, P_6) \neq dist(P_5, P_7)$.

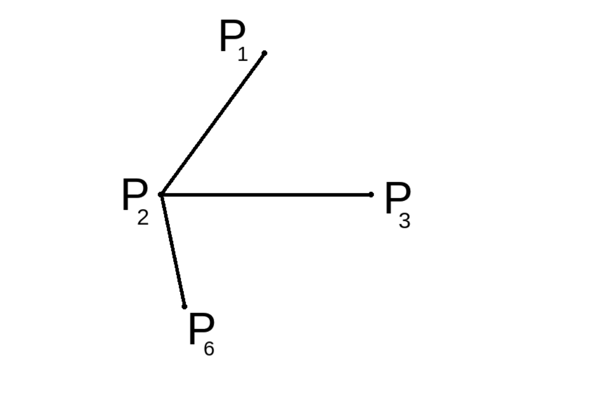
Solução

- Condição 8: Os pontos P_1 e P_6 devem estar separados pela reta que contém o segmento P_2P_3. Formalmente, o segmento P_1P_6 deve interceptar a reta que contém o segmento P_2P_3 em um único ponto.



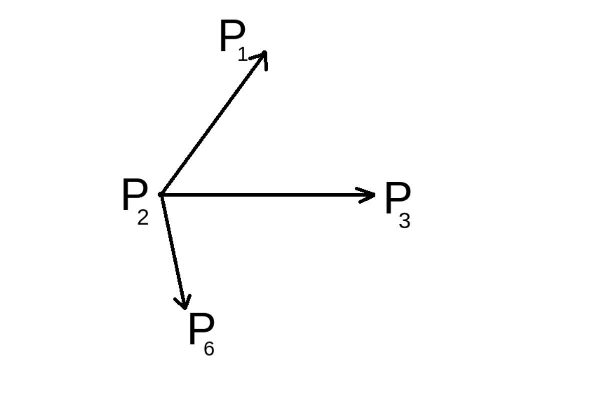
Solução

- Condição 8: Os pontos P_1 e P_6 devem estar separados pela reta que contém o segmento P_2P_3. Formalmente, o segmento P_1P_6 deve interceptar a reta que contém o segmento P_2P_3 em um único ponto.



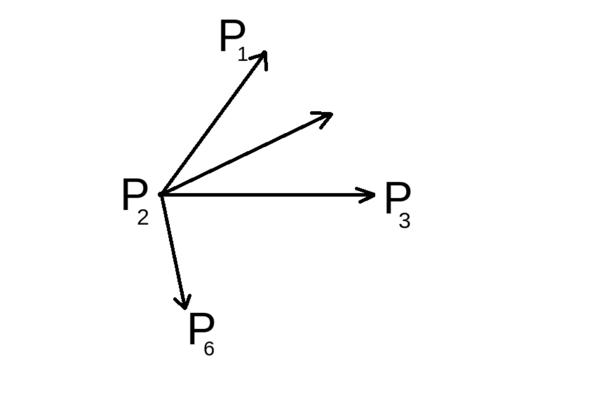
Solução

- Condição 8: Os pontos P_1 e P_6 devem estar separados pela reta que contém o segmento P_2P_3. Formalmente, o segmento P_1P_6 deve interceptar a reta que contém o segmento P_2P_3 em um único ponto.



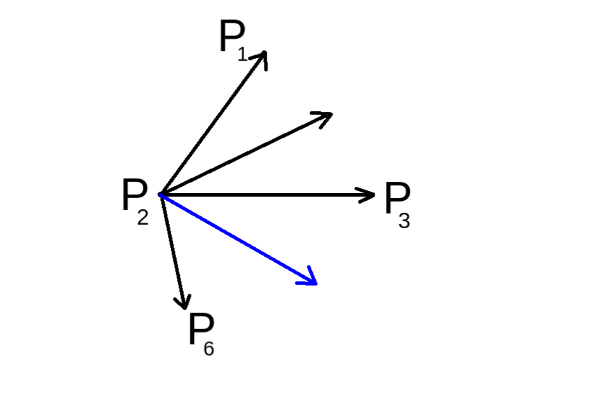
Solução

- Condição 8: Os pontos P_1 e P_6 devem estar separados pela reta que contém o segmento P_2P_3. Formalmente, o segmento P_1P_6 deve interceptar a reta que contém o segmento P_2P_3 em um único ponto.



Solução

- Condição 8: Os pontos P_1 e P_6 devem estar separados pela reta que contém o segmento P_2P_3. Formalmente, o segmento P_1P_6 deve interceptar a reta que contém o segmento P_2P_3 em um único ponto.



Solução

- Condição 8: Os pontos P_1 e P_6 devem estar separados pela reta que contém o segmento P_2P_3. Formalmente, o segmento P_1P_6 deve interceptar a reta que contém o segmento P_2P_3 em um único ponto.
- Calcula-se o sinal s_1 do produto vetorial de $P_3P_2P_1$;
- Calcula-se o sinal s_2 do produto vetorial de $P_3P_2P_6$;
- Para que os pontos P_1 e P_6 sejam divididos pelo segmento P_2P_3, $s_1 \neq s_2$.
- Na nossa implementação, basta verificar se $s_1 = s_2$ para que o polígono não forme um pinheiro.