Curso de Análise e Des. de Sistemas

Disciplina: Probailidade e Estatística

Prof. Marcelo Araújo

Turma: 3^o período

1^a unidade

Distribuições de Probabilidade Discreta

1. Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é um modelo de probabilidade discreta que descreve um único teste com dois resultados possíveis: sucesso (1) ou fracasso (0). É caracterizada por um único parâmetro, p, que representa a probabilidade de sucesso. A fórmula da função de probabilidade é:

$$f(x) = p.(1-p)^{1-x}$$

com $p \in \{0, 1\}$

$$E(X) = p$$

e

$$VAR(X) = p.(1-p)$$

2. Distribuição de Binomial

A distribuição binomial é um modelo estatístico que calcula a probabilidade de obter um número específico de sucessos em um conjunto fixo de tentativas independentes, onde cada tentativa tem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) e a probabilidade de sucesso é constante. É usada para analisar eventos com resultados dicotómicos, como o sucesso ou falha na produção de um item, ou a ocorrência de um resultado numa moeda.
Condições para a Distribuição Binomial
a)Para que um processo siga uma distribuição binomial, as seguintes condições devem ser atendidas:
b)Número de tentativas fixo (n): Existe um número determinado de tentativas a serem realizadas.
c)Tentativas independentes: O resultado de uma tentativa não influencia o resultado das outras.
d)Dois resultados possíveis: Cada tentativa tem apenas dois resultados, um considerado "sucesso"e o outro "fracasso".
e)Probabilidade de sucesso constante (p): A probabilidade de um evento ser "sucesso"é a mesma em todas as tentativas.
Fórmula da Distribuição Binomial

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

com

$$E(X) = np$$

e

$$VAR(X) = np(1-p)$$

3. Distribuição Geométrica

A distribuição geométrica é uma distribuição de probabilidade discreta que descreve a probabilidade de o primeiro sucesso ocorrer em uma série de tentativas independentes de Bernoulli, onde cada tentativa tem uma probabilidade constante de sucesso.

$$f(x) = p.(1-p)^{x-1}$$

onde p é a probailidade do sucesso e x é o número de tentativas até obter o primeiro sucesso.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

e

$$VAR(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

EXEMPLO: A probabilidade de que haja alguma falha no lançamento de uma nave espacial é 10%. Qual é a probabilidade de que para lançar a nave seja necessário:
a) 4 tentativas?
b) no máximo 3 tentativas?
c) Calcule o número esperado de tentativas de lançamento da nave espacial. Calcule também a variância e o desvio padrão do número de tentativas de lançamento.

4. Distribuição Binomial Negativa

A distribuição binomial negativa é uma distribuição de probabilidade discreta que modela o número de tentativas necessárias para obter um número específico de sucessos em uma sequência de experimentos de Bernoulli independentes e identicamente distribuídos.

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r.(1-p)^{x-r}$$

onde p é a probailidade do sucesso e x é o número de tentativas até obter "r"sucessos.

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

e

$$VAR(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

EXEMPLO: Considere o tempo para recarregar o flash de uma câmera de celular. Assuma que a probabilidade de que uma câmera instalada no celular durante sua montagem passe no teste é de 0.80, e que cada câmera tem seu desempenho independente. Determine as seguintes probabilidades.
a)Qual é a probabilidade de que a segunda falha ocorra na décima câmera testada?
b)Qual é a probabilidade de que a segunda falha ocorra no teste de quatro ou menos câmeras?
c)Qual é o valor esperado do número de câmeras testadas para obter a terceira falha?

5. Distribuição Hipergeométrica

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos. Para ilustrar, considere uma população de N objetos, r dos quais têm o atributo A e $N-r$ têm o atributo B. Um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, sem reposição. Estamos interessados em calcular a probabilidade de que esse grupo contenha k elementos com o atributo A. Pode-se ver facilmente, utilizando o princípio multiplicativo, que essa probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{\binom{r}{k}.\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

onde p é a probailidade do sucesso.

$$E(X) = n.p$$

e

$$VAR(X) = n.p.(1-p).(\frac{N-n}{N-1})$$

EXEMPLO:Um varejista compra produtos em lotes. Cada objeto do lote pode ser aceitável ou defeituoso. Suponha que um lote tem 25 objetos. 6 deles são defeituosos. Selecionamos uma amostra sem reposição de 10 objetos. Qual a probabilidade de não encontrarmos nenhum objeto defeituoso?Calcule e esperança e a variância.

6. Distribuição Poisson

A distribuição de Poisson é um modelo de probabilidade discreta que descreve a probabilidade de um certo número de eventos ocorrerem em um intervalo fixo de tempo ou espaço, dados uma taxa média de ocorrência.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

onde, $p = \frac{\lambda}{n}$; λ é a média e x é o número de eventos.

$$E(X) = \lambda$$

e

$$VAR(X) = \lambda$$

EXEMPLO:A emissão de partículas radioativas tem sido modelada através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrências é de 5 emissões a cada minuto. Calcular a probabilidade de:
a)haver mais de 2 emissões em um minuto.
b)haver 3 emissões em 30seg.
c)haver 1 emissão em 10seg.

7. Distribuição Exponencial
A distribuição exponencial é um modelo de probabilidade contínua usado para descrever o tempo entre eventos em um processo de Poisson, onde os eventos ocorrem de forma independente a uma taxa constante. É frequentemente utilizada para modelar tempos de espera, tempos de vida de componentes e intervalos entre eventos.

$$f(x) = f(x) = \lambda.e^{-\lambda x}$$

para $x \geq 0$ onde λ é a taxa e x é o tempo.

Função Densidade de Probailidade Acumulada

$$F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$$

para $x \geq 0$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

e

$$VAR(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

EXEMPLO 01:Considere uma rede de usuários de computadores. As conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas por um Processo de Poisson. A média desse processo é de 25 conexões por hora. Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?Qual a probabilidade do tempo até a próxima conexão estar entre 2 e 3 minutos?

EXEMPLO 02 Considere um contador que detecta partículas raras. Seja X o tempo entre detecções de uma partícula. X tem distribuição exponencial com E(X) = 1, 4 minuto . A probabilidade de detectarmos uma partícula dentro de 30 segundos a partir do começo da contagem é?