INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco

LÓGICA MATEMÁTICA

AULA – DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

Objetivos: Nesta aula identificaremos na proposição condicional a hipótese e a tese. Faremos a reescrita de uma proposição condicional na forma contrapositiva e recíproca. Diferenciaremos exemplo de contraexemplo de uma proposição. Também apresentaremos o método de demonstração condicional.

1. HIPÓTESE, TESE, EXEMPLOS E CONTRAEXEMPLOS

Utilizaremos proposições condicionais abertas (sentenças abertas) para analisar os valores lógicos do seu antecedente e do seu consequente. Assim, estabeleceremos quando um caso particular para a variável da proposição aberta é exemplo e quando este valor é contraexemplo. Também queremos reescrever a proposição para estabelecer a sua recíproca e a contrapositiva. Faremos este estudo mediado por algumas questões.

1.1. Questão resolvida

Considere a seguinte proposição aberta para $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Se } \frac{2x+1}{x-1} > 1, \text{ então } x > -2$$

a. Qual é a hipótese e qual é a tese desta proposição?

b. $x=-1$ é um exemplo para a proposição?

c. $x=-1$ é um contraexemplo para a proposição?

d. $x=-3$ é um contraexemplo para a proposição?

e. $x=2$ é um exemplo para a proposição?

f. Escreva a recíproca da proposição.

g. Escreva a contrapositiva da proposição.

h. A proposição é verdadeira?

i. A recíproca é verdadeira?

Resolução:

a. Na forma condicional, a hipótese é o antecedente e a tese é o consequente.

Hipótese: $\frac{2x+1}{x-1}>1$

Tese: $x>-2$

b. Um valor para a variável é um exemplo quando faz a hipótese ser Verdadeira e também faz a tese ser Verdadeira.

Neste caso, $x=-1$ *não é exemplo, pois* $x=-1$ *não faz a hipótese da proposição ser Verdadeira.*

c. Um valor para a variável é contraexemplo quando faz a hipótese ser Verdadeira mas faz a tese ser Falsidade.

Neste caso $x=-1$ *não é contraexemplo, pois* $x=-1$ *não faz a hipótese da proposição ser Verdadeira.*

d. Sim. Para $x=-3$ *temos a hipótese verdadeira e a tese falsidade.*

e. Sim. Para $x=2$ *temos a hipótese e a tese verdadeiras, ou seja, a proposição tem valor lógico Verdade.*

f. Na forma condicional, p → q, a recíproca é escrita na forma q → p. Portanto, a recíproca será:

Se $x>-2$ *, então* $\frac{2x+1}{x-1}>1$.

g. Na forma condicional de uma proposição, $p \rightarrow q$*, a contrapositiva é escrita na forma* $\sim q \rightarrow \sim p$*. Observe que essas duas formas de escrita são equivalentes (as tabelas Verdade são idênticas).*

Portanto, a contrapositiva será:

Se $x \le -2$ *, então* $\frac{2x+1}{x-1} \le 1$.

h. Para uma proposição ser Verdadeira é preciso que tenha valor lógico verdadeiro para todos os valores da variável. Enquanto que para ser falsa, basta que exista um contraexemplo.

Neste caso a proposição é falsa. Como já vimos, $x=-3$ *é um contraexemplo.*

i. A recíproca também é falsa. Um contraexemplo é $x=0$. *Note que* $x=0$ *satisfaz a hipótese* $x>-2$, *mas torna a tese* $\frac{2x+1}{x-1}>1$ *falsidade.*

1.2. Questão para ser resolvida

Considere a seguinte proposição aberta para $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Se } -2<x\leq 3, \text{ então } \frac{-1}{2}<x<3$$

a. Qual é a hipótese e qual é a tese desta proposição?

b. $x=-1$ é um contraexemplo para a proposição?

c. $x=3$ é um exemplo para a proposição?

d. $x=0$ é um exemplo para a proposição?

e. Escreva a recíproca da proposição.

f. Escreva a contrapositiva da proposição.

g. A proposição é verdadeira?

h. A recíproca é verdadeira?

2. MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

2.1. Questão resolvida

Considere a proposição a seguir.

P1: Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Pede-se:

a. Identifique a hipótese e a tese da proposição.

b. Como proceder para demonstrar a proposição pelo método de **demonstração condicional?**

Resolução:

Proposição P1.
a. *Hipótese:* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq C$.
Tese: $A \subseteq C$.

b. Procedimento da demonstração direta:

1º. Assuma que a hipótese é verdadeira.
2º. Utilize a hipótese para concluir que a tese é verdadeira.

Observe que queremos deduzir a tese a partir da hipótese, ou seja, construir um argumento válido.

Para a proposição P1 teremos:
1º. Assuma que $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq C$ *como verdadeiros.*
2º. A partir da premissas $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq C$ *se constrói um argumento válido para concluir que* $A \subseteq C$.

2.2. Questões para serem resolvidas

Considere as seguintes proposições:

P2: Se *f* é uma função real derivável num ponto *a* de seu domínio, então *f* é contínua em *a*.

P3: Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

P4: Dados os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ do plano cartesiano, a distância do ponto P ao ponto Q é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

P5: Se a sequencia $(a_{1,} a_{2,} \ldots, a_n, \ldots)$ é uma progressão geométrica, então a soma dos *n* primeiros termos é $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

P6: No triângulo retângulo de lados *a*, *b* e *h* (lado oposto ao ângulo reto), é válida a equação

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Pede-se para cada proposição:

a. Identifique a hipótese e a tese em cada proposição.

b. Como proceder para demonstrar a proposição pelo método de **demonstração condicional (direta)**?

2.3. Questões para serem resolvidas

Considere as proposições a seguir.

Q1: Se $x^2 - 2 = 0$ possui solução, então x é irracional.

Q2: Se tg(α) = sen(α)/cos(α), com 0º < α < 90º, então tg²(α) é diferente de 0.

Q3: Se o determinante da matriz A é diferente de zero, então a equação matricial A.X = B possui uma única solução.

Q4: Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

Q5: É válido que sen(α) = cos(β) sempre que α + β =90º.

Pede-se para cada proposição:

a. Identifique a hipótese e a tese.

b. Escreva a recíproca e a contrapositiva da proposição.