MATEMÁTICA APLICADA

26/06/25

AULA – NOÇÕES DE LÓGICA PROPOSICIONAL: LEIS DE MORGAN. OPERAÇÕES LÓGICAS E OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS.

Objetivos: Aqui estudaremos com mais detalhes a operação da negação. Faremos uma discussão das leis de Morgan para operações lógicas. Estabeleceremos uma relação entre os conectivos lógicos e as operações entre conjuntos por meio dos Diagramas de Venn.

LEIS DE MORGAN

As leis de Morgan são propriedades muito vistas em álgebras dos conjuntos, mas aqui serão aplicadas ao cálculo proposicional. Estas leis permitirão equivalências importantes entre proposições compostas, de modo que será possível nos livrar do "excesso de negações" que podem aparecer na composição da proposição. Por exemplo,

$$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$$

é uma proposição sempre verdadeira. Com as Leis de Morgan isso será facilmente verificado.

1. **Negação das proposições compostas**

Quando temos uma proposição composta a sua negação é facilmente escrita na forma simbólica com o uso do operador ~ . Quando a proposição é escrita com a linguagem corrente é preciso utilizar corretamente o emprego da palavra **não**. Veja o exemplo a seguir.

p: As vendas estão diminuindo.

q: Os preços estão aumentando.

r: Os salários estão reajustados.

Proposição composta:

$p \rightarrow (q \wedge \sim r)$: Se as vendas estão diminuindo, então os preços estão aumentando e os salários não estão reajustados.

Negação da proposição na forma simbólica:

$\sim(p \rightarrow (q \wedge \sim r))$

Negação da proposição na linguagem corrente:

Não é verdade que, se as vendas estão diminuindo, então os preços estão aumentando e os salários não estão reajustados.

Qual o significado da frase acima? O que ela está informando?

Uma escrita "precisa" poderá dar significado ao conteúdo da frase. Já na forma simbólica isso não é um problema. Mas, se for necessário podemos utilizar de equivalências para obter outras fórmulas.

Ainda no mesmo exemplo, são equivalentes (possuem a mesma tabela-verdade) as proposições

$$\sim(p \rightarrow (q \wedge \sim r)) \text{ e } (\sim p) \vee (q \wedge \sim r)$$

Aqui conseguimos "eliminar" a condicional e deixar tudo em termos da disjunção e conjunção.

Veja este outro exemplo:

p: Carlos é cantor.

q: Carlos é estudante.

Proposição composta:

$p \vee q$: Carlos é cantor **ou** estudante.

Negação da proposição:

$\sim(p \vee q)$: Carlos **não** é cantor **e não** é estudante.

A frase acima informa que Carlos não é cantor e também não é estudante. Aqui houve uma negação das duas proposições simples, p e q, mas o conectivo "ou" também foi alterado.

2. **Leis de Morgan**

As leis de Morgan estabelecem equivalências a partir das negações das operações conjunção e disjunção. São elas:

- $\boldsymbol{\sim(p \vee q)}$ é equivalente a $\boldsymbol{\sim p \wedge \sim q}$
- $\boldsymbol{\sim(p \wedge q)}$ é equivalente a $\boldsymbol{\sim p \vee \sim q}$

Para verificar estas equivalência basta construir as tabelas-verdade das proposições.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

De modo prático, podemos dizer que as leis de Morgan transformam a disjunção em conjunção e a conjunção em disjunção.

É possível aplicar as leis de Morgan e escrever a operação da conjunção em função das operações da disjunção e da negação. Pela lei de Morgan é válido que

$$\boldsymbol{\sim(p \vee q)} \text{ é equivalente a } \boldsymbol{\sim p \wedge \sim q,}$$

assim, aplicando a negação temos que

$$\boldsymbol{\sim(\sim(p \vee q))} \text{ é equivalente a } \boldsymbol{\sim(\sim p \wedge \sim q)}.$$

Logo, pela dupla negação,

$$\boldsymbol{p \vee q} \text{ é equivalente a } \boldsymbol{\sim(\sim p \wedge \sim q)}.$$

De modo análogo obtemos

$$\mathbf{p \wedge q} \text{ é equivalente a } \mathbf{\sim(\sim p \vee \sim q)}.$$

3. **Negação dos quantificadores**

Os quantificadores universal e existencial também podem ser "modificados" quando utilizamos a operação da negação em proposições que apresentam estes quantificadores.

As negações são dadas por

$\sim (\exists\ x \in A: p(x))$ é equivalente a **$\forall\ x \in A, \sim p(x)$**

$\sim (\forall\ x \in A, p(x))$ é equivalente a **$\exists\ x \in A: \sim p(x)$**

Observe que na negação do quantificar existencial $\exists$ passamos a ter o quantificador universal com a negação da proposição p(x). Já na negação do quantificador universal $\forall$ obtemos o quantificador existencial com a negação de p(x).

Exemplos:

1. $\forall\ x \in \mathbb{N},\ x^2 - x - 2 > 0$.

Aqui temos a proposição p(x): $x^2 - x - 2 > 0$.

A negação ficará:

$\exists\ x \in \mathbb{N}: x^2 - x - 2 \leq 0$.

2. $\exists\ x \in \mathbb{N}: x - 1 = 0$.

Negação:

$\forall\ x \in \mathbb{N},\ x - 1 \neq 0$.

3. **Todos** os estudantes de matemática **gostam de lógica**.

Negação:

Existe algum estudante de matemática que **não gosta de lógica**.

4. **Existe** aluno do IFPE que **não estuda ou conta com a sorte**.

Negação:

Todos alunos do IFPE **estudam e não contam com a sorte**.

Neste último exemplo também foi aplicada a lei de Morgan na proposição "não estuda ou conta com a sorte".

Visto na forma simbólica seria

$\exists\ x \in A: p(x) \vee q(x)$

com

A é o conjunto dos alunos do IFPE;

p(x): x não estuda;

q(x): x conta com a sorte.

A negação:

$\forall\ x \in A, \sim p(x) \wedge \sim q(x)$

Obs: A negação sempre altera o valor lógico da proposição, independentemente do valor que ela possui. Isto é, se a proposição tem valor V sua negação terá valor F e vice-versa.

4. **Operções lógicas e operações entre conjuntos**

Existe uma forte relação entre conjuntos e lógica. Os diagramas de Venn são uma ferramenta tanto para a teoria dos conjuntos, na representação das operações de interseção, união e complemento, quanto para a lógica, na representação dos conectivos. Veremos uma maneira precisa de identificar lógica proposicional com teoria dos conjuntos elementar, através desses diagramas.

Podemos considerar a representação da proposição *p* como um conjunto, por meio de um diagrama.

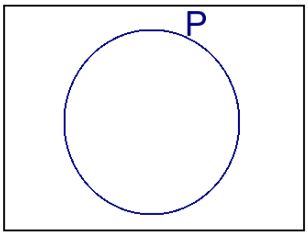


fig. Proposição *p*

Não é difícil imaginar uma relação entre a operação lógica da negação de *p* com a operação do complemento do conjunto *p*. Para isso devemos entender a associação entre os possíveis valores lógicos de *p* com as regiões representadas no diagrama. Vamos fazer esta associação com o uso da tabela-verdade de *p*.

p
V
F

Observe que a tabela apresenta dois possíveis valores lógicos e o diagrama apresenta duas regiões. Vamos associar ao valor V a região interna do círculo, e o valor F estará associado a região externa ao círculo.

Agora precisamos identificar os valores lógicos da operação lógica com a região do diagrama que será marcada em cinza (a qual representa o resultado da operação entre conjuntos) e a região que ficará em branco. Vamos definir cinza para representar o valor V no resultado da operação lógica e branco para F.

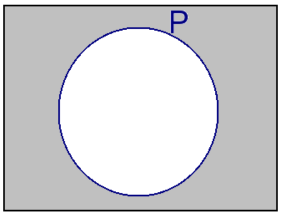
Assim, a negação da proposição *p* corresponderá ao complemento do conjunto *p.*

Operação da Negação

Tabela-Verdade

p	*~p*
V	F
F	V

Diagrama



Seguindo a mesma relação entre os valores lógicos e as regiões do diagrama, podemos identificar a tabela-verdade de uma proposição composta com o diagrama da operação de conjuntos. Sejam *p* e *q* duas proposições. A tabela-verdade e as regiões do diagrama estão relacionadas conforme as cores nas figuras.

p	*q*
V	V
V	F
F	V
F	F

fig. Tabela-Verdade

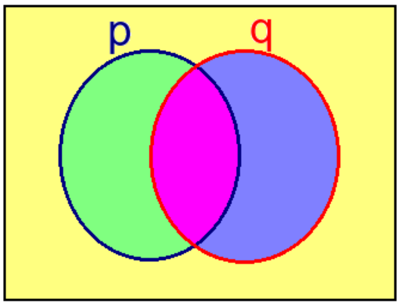


fig. Diagrama de Venn

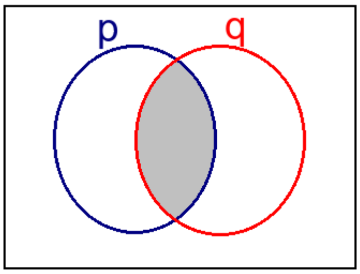
Agora podemos representar no diagrama o resultado de uma operação lógica entre *p* e *q*, identificando em cinza quando a operação resultar em valor V e branco quando resultar em F.

Operação da conjunção

Tabela-Verdade

p	*q*	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Diagrama



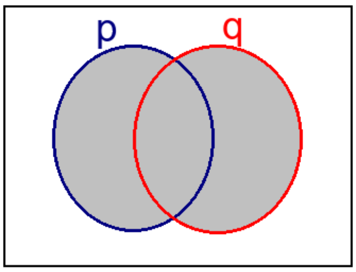
A operação lógica da conjunção é equivalente a operação da interseção entre conjuntos ($p \cap q$).

Operação da disjunção

Tabela-Verdade

p	*q*	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Diagrama



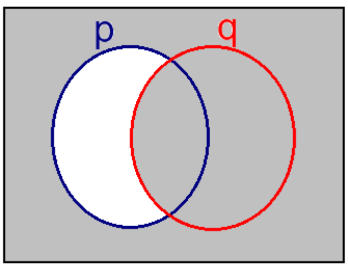
A operação lógica da disjunção é equivalente a operação da união entre conjuntos ($p \cup q$).

Operação da condicional

Tabela-Verdade

p	*q*	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Diagrama



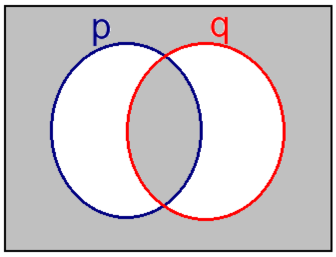
A operação lógica da condicional $p \rightarrow q$ é equivalente ao complemento da diferença p - q. Também pode ser vista como o *complemento de p união q. Operação* ($p^c \cup q$).

Operação da bicondicional

Tabela-Verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Diagrama



A operação lógica da bicondicional $p \leftrightarrow q$ é equivalente ao complemento da diferença simétrica entre p e q. Pode ser expresso também por $(p^c \cup q) \cap (p \cup q^c)$.

Exemplos:

1. Verifique se as proposições são equivalentes:

a) $\sim p \wedge q$ e $p \rightarrow q \wedge p$

Resolução:

Poderíamos utilizar as tabelas-verdade das proposições para verificar se estas são equivalentes. Mas utilizaremos os diagramas de Venn.

$\sim p \wedge q$

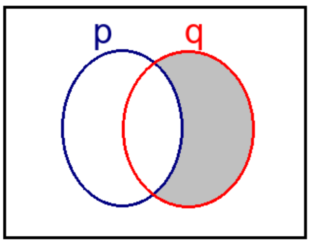


fig. $p^c \cap q$

$p \rightarrow q \wedge p$

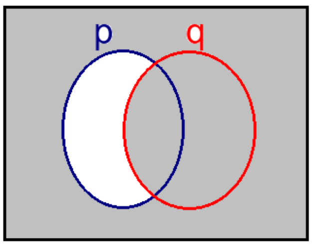


fig. $p^c \cup (q \cap p)$

As proposições não são equivalentes.

b) $p \wedge (p \vee q \vee r)$ e p

Resoução:

Basta construir o diagrama de $p \cap (p \cup q \cup r)$ e verificar se é o mesmo diagrama de p.

$(p \vee q \vee r)$

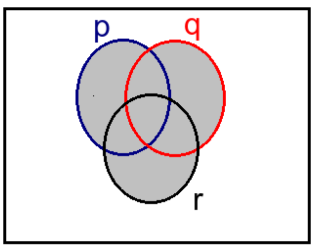


fig. $p \cup q \cup r$

$p \wedge (p \vee q \vee r)$

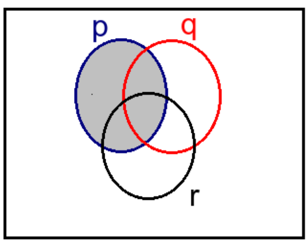


fig. $p \cap (p \cup q \cup r)$

p

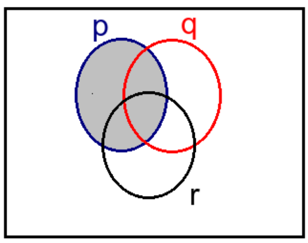


fig. p

As proposições são equivalentes, ou seja, $p \wedge (p \vee q \vee r)$ é Verdadeira sempre que p é Verdadeira, $p \wedge (p \vee q \vee r)$ é Falsidade sempre que p é Falsidade e reciprocamente.

Concluímos a discussão apontando para o fato de que os diagramas podem facilitar a análise das proposições compostas quando as reescrevemos em termos das operações União, Interseção e Complemento, através da seguinte relação:

Conectivo Lógico	Operação sobre Conjuntos
negação	complemento
disjunção	união
conjunção	interseção

Propostas de exercícios para este conteúdo:

1. Verifique que as proposições abaixo são falsas e faça a sua negação.
a) $\forall\, x \in \mathbb{N},\ x^2 - 1 > 0$.
b) $\exists\, x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 < 0$.
c) $\exists\, n \in \mathbb{N} : n + 1 = 0$.
d) Cada pessoa tem uma mãe.
e) Pelo menos uma letra da palavra “banana” é vogal.

2. Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 5, 6, 8, 13} e B = {10, 9, 7, 6, 4, 2, 0} e as sentenças:

p(x): x é um número par.
q(x): $x < 5$.
r(x): $x \geq 7$.
s(x): x é um número primo.
t(x): x é divisível por 3.

pede-se:
a) Escreva uma proposiçao de valor Verdade que envolva as proposições p e r, o quantificador universal e o(s) conjunto(s).
b) Escreva uma proposição de valor Falsidade que envolva p, q, o quantificador universal e o(s) conjunto(s).
c) Escreva uma proposição de valor Verdade que envolva p, r, o quantificador universal e o(s) conjunto(s).
d) Escreva uma proposição de valor Verdade que envolva q, s, o quantificador existencial e o(s) conjunto(s).
e) Escreva uma proposição de valor Falsidade que envolva p, q, t, o quantificador existencial e o(s) conjunto(s).

Exemplo de resolução:
letra a)

$\forall\, x \in (A \cap B),\ \sim r(x) \wedge p(x)$

Na escrita corrente fica

“ Para todo x pertencente a interseção de A com B, x é menor que 7 e x é par”.

Esta é uma proposição de valor Verdade.

Utilizamos o conjunto $A \cap B = \{2, 6\}$ e as proposições

~r(x): x é menor que 7

p(x): x é par.

----

3. Considerando as relações entre operações de conjuntos e operações lógicas, por meio de diagramas de Venn, descreva a operação lógica que representa:
a) $p^c \cap (q \cup r)$
b) $(p - q) \cup (q - p)$

4. Verifique a equivalência entre as proposições:
a) $p \leftrightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$
b) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ e $p \rightarrow q \vee r$
c) $\sim(p \rightarrow \sim q)$ e $p \wedge q$