INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco

MATEMÁTICA APLICADA

AULA 02 – OPERAÇÕES LÓGICAS E TABELA VERDADE.

Objetivos: Nesta aula estudaremos as operações lógicas. Faremos a apresentação das tabelas de cada operação e também a construção de tabelas de operações compostas. Finalizaremos com a construção de tabelas verdade para um caso de equivalência lógica entre proposições.

1. **Operações Lógicas e Tabela Verdade**

Quando estabelecemos o valor lógico de uma proposição composta, o que de fato estamos fazendo são operações sobre as proposições simples. Estas operações seguem regras de um cálculo, que denominamos *cálculo proposicional.* Podemos comparar este cálculo de proposições com o cálculo realizado com os números na aritmética. As regras para as operações devem ser bem definidas, de modo que não haja ambiguidade. Em outros termos, as operações sobre as proposições devem ter uma única resposta no conjunto {V, F} para cada par de proposições simples.

A seguir, apresentamos uma tabela com as operações lógicas na **ordem de precedência** das operações:

Símbolo	Operação
~	negação
$\wedge$	conjunção
$\vee$	disjunção
$\rightarrow$	condicional
$\leftrightarrow$	bicondicional

Exemplos:

a) Para as proposições simples,

p: 2 - 4 = 1

q: 6 + 1 ≠ 0

r: 5 < -2

temos as proposições compostas:

$p \wedge q$: 2 - 4 = 1 e 6 + 1 ≠ 0

$p \rightarrow r$: Se 2 - 4 = 1, então 5 < -2

$\sim p \lor q$: $2 - 4 \neq 1$ ou $6 + 1 \neq 0$

b) Para as seguintes proposições,

p: O conjuto dos números primos é infinito;

q: O conjunto $\mathbb{N}$ contém os números primos;

r: Qualquer conjunto é subconjunto de $\mathbb{N}$;

temos:

$q \rightarrow p$: Se o conjunto $\mathbb{N}$ contém os números primos, então o conjunto dos números primos é infinito.

$q \leftrightarrow r$: O conjunto $\mathbb{N}$ contém os números primos se, e somente se, qualquer conjunto é subconjunto de $\mathbb{N}$.

c) Para as seguintes proposições,

p: O homem é mortal;

q: A terra é plana;

r: Cássio entrou na onda do negacionismo científico;

temos:

$p \land \sim q$: O homem é mortal e a terra não é plana.

$r \rightarrow (\sim p \lor q)$: Se Cássio entrou na onda do negacionismo científico, então o homem é imortal ou a terra é plana.

Observe que neste último exemplo temos uma proposição composta a partir de três operações. A ordem de precedência das operações determinará o resultado. O uso do parênteses neste exemplo é redundante, pois a operação da negação precede a disjunção, e a disjunção precede a condicional. Ou seja, a operação da condicional será a última a ser realizada.

O **parênteses ( )** deve ser utilizado para ***alterar*** a ordem de precedência das operações. Por exemplo, na proposição

$$(p \rightarrow \sim q) \land (r \leftrightarrow p)$$

devido ao uso do parênteses, a operação da *conjunção* $\land$ será realizada depois das operações da *condicional* e *bicondicional*.

Agora vamos entender as definições de cada uma das operações lógicas fundamentais. Faremos isso utilizando diretamente a tabela verdade de cada operação.

Tabela Verdade da **Negação**:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Veja que a operação da negação é uma operação unária, logo só é preciso uma proposição simples para efetuar a operação da negação. Uma situação interessante é o caso da **dupla negação** de p, que resultará na própria proposição p. Por exemplo:

p: Hoje está chovendo

$\sim p$: Hoje não está chovendo.

$\sim(\sim p)$: Hoje está chovendo.

Tabela Verdade da **Conjunção**:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A operação da conjunção, uso do conectivo *e*, só resulta em valor Verdade quando ambas proposições forem de valor Verdade.

Exemplo:
p: O zero é divisor de qualquer número. V(p) = F
q: A interseção de conjuntos é comutativa. V(q) = V
$p \wedge q$: O zero é divisor de qualquer número e a interseção de conjuntos é comutativa.
V($p \wedge q$) = F

Tabela Verdade da **Disjunção**:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A operação da conjunção, uso do conectivo *ou*, resulta em valor Verdade sempre que alguma das proposições for de valor Verdade. Consequentemente, só teremos valor Falsidade se ambas proposições forem de valor Falsidade.

Exemplo:
p: O zero é divisor de qualquer número. V(p) = F
q: A interseção de conjuntos é comutativa. V(q) = V
$p \vee q$: O zero é divisor de qualquer número ou a interseção de conjuntos é comutativa.
V($p \vee q$) = V

Tabela Verdade da **Condicional**:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A operação da condicional resulta em valor Falsidade somente no caso da primeira proposição ser de valor Verdade e a segunda proposição for de valor Falsidade. Dizemos que a primeira proposição é o *antecedente* e a segunda proposição é o *consequente*.

$p \rightarrow q$ “ p é o antecedente e q é o consequente”

Exemplo:

p: Múltiplos do número 2 são inteiros. V(p) = V

q: O número √3 é inteiro. V(q) = F

$p \rightarrow q$: Se múltiplos do número 2 são inteiros, então o número √3 é irracional.

V($p \rightarrow q$) = F

Tabela Verdade da **Bicondicional**:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A operação da bicondicional resulta em valor Verdade quando as proposição têm o mesmo valor lógico. Percebe-se que a bicondicional é uma operação que resulta da composição

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Faremos a tabela verdade desta operação na seção 3.1.

Para a bicondicional $p \leftrightarrow q$, dizemos que *p é condição necessária e suficiente para q*, ou ainda *q é condição necessária e suficiente para p*.

Exemplo:

p: O número 6 é par. V(p) = V

q: 2 divide 6. V(q) = V

$p \leftrightarrow q$: O número 6 é par se, e somente se, 2 divide 6.

V($p \leftrightarrow q$) = V

1.1 **Construção de Tabelas Verdade:**

Para construir a tabela verdade de uma proposição composta por várias simples, devemos considerar a quantidade de operações lógicas envolvidas e quantidade de proposições. A quantidade de colunas da tabela é igual ao número de operações realizadas mais a quantidade de proposições simples. Já o número de linhas da tabela será igual a 2^n+1, onde n é a quantidade de proposições simples.

Exemplos:

1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ possui três operações e duas proposições. A tabela terá 5 colunas e 5 linhas.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2. $p \vee q \rightarrow \sim r$ possui três proposições e três operações para realizarmos, assim teremos uma tabela com 6 colunas e 9 linhas.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \sim r$
V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

Observe que as operações são realizadas seguindo as Tabela Verdade das operações lógicas fundamentais, respeitando a ordem de precedência das operações. As colunas das operações (exceto a última) são apenas auxiliares para se chegar na proposição desejada. É a última coluna que apresenta o resultado das operações, isto é, apresenta o valor lógico da proposição composta de acordo com as possibilidades de V e F em cada linha das proposições simples. Como exemplo veja a 2ª linha dos valores da última tabela.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \sim r$
V	V	F	V	V	V

Esta linha nos informa que, quando p e q são Verdadeiras e r é Falsa, a proposição $p \vee q \rightarrow \sim r$ será Verdadeira.

Isto nos leva a entender que nem sempre será necessário construir a tabela verdade da operação. Se já forem conhecidos os valores lógicos de cada proposição simples envolvidas na operação, então basta tomar a linha da tabela referente a estes valores.

Por exemplo:

Determine o valor lógico de $p \vee q \rightarrow \sim r$ sabendo que p e q são Falsas e r é Verdadeira.

Solução:

Faremos a análise somente da linha com os valores informados.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \sim r$
F	F	V			

Agora completamos a tabela para chegar ao resultado da operação $p \vee q \rightarrow \sim r$.

p	q	r	$\sim r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \sim r$
F	F	V	F	F	V

Portanto, o valor lógico de $p \vee q \rightarrow \sim r$ é Verdade.

1.2 **Equivalência lógica:**

É possível observar que as tabelas de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ e da bicondicional $p \leftrightarrow q$ possuem os mesmos resultados na última coluna. Estas duas proposições têm o mesmo valor lógico e, neste caso, chamamos de proposições equivalentes.

A equivalência entre proposições nos permite substituir (ou trocar) uma proposição pela outra sem mudar o valor lógico. Assim podemos substituir uma proposição composta com um número grande de operações por outra com poucas operações. Também podemos substituir uma proposição por outra que envolva operações mais fáceis de entender.

Por exemplo:

$q \vee p$ é equivalente a $p \vee q$

$p \rightarrow q$ é equivalente a $\sim p \vee q$

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \mathrm{p})$ é equivalente a $p \leftrightarrow q$

A equivalência pode ser comprovada pela tabela verdade das proposições. Faremos um dos casos acima.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \vee \mathrm{p}$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \mathrm{p})$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V

As colunas de $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \mathrm{p})$ e $p \leftrightarrow q$ são idênticas, comprovando assim que estas proposições são equivalentes.

Propostas de exercícios para este conteúdo:

1. Escreva as proposições composta a partir das proposições simples:
p: Está chovendo hoje.
q: A rua ficou molhada.
r: Não existe tempo ruim.
s: Eu vou viajar.

a) $p \wedge q$
b) $r \rightarrow s$
c) $\sim r \wedge p \rightarrow \sim s$

2. Construa a tabela verdade para as operações:
a) $p \vee q \wedge p$
b) $p \rightarrow q \vee q$
c) $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim r$

3. A partir das proposições compostas identifique as proposições simples:
a) Se 3 > 6 e 4 < 2, então 5 > 10.
b) Carlos não está estudando e Maria está trabalhando ou viajando.
c) Uma proposição tem valor verdade se, e somente se, é verdadeira ou sua negação for uma falsidade.

4. Verifique que são equivalentes as proposições
a) $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$
b) $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$

5. Escreva na linguagem simbólica:
a) Existe um inteiro n tal que 4 = n + 2.
b) Alguns inteiros são pares e divisíveis por 3.
c) Todo mundo ama alguém um dia.
d) Qualquer triangulo equilátero é equiangular.