INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco

AULA – NOÇÕES DE LÓGICA PROPOSICIONAL: VALIDADE DE UM ARGUMENTO. QUANTIFICADORES.

Objetivos: Nesta aula iremos estudar o argumento e sua validade. Faremos uso dos diagramas de Venn para analisar um argumento e seu conteúdo e apresentaremos um método para verificar a validade ou não do argumento. Em seguida apresentaremos os quantificadores: universal e existencial.

Alguns conceitos:

Temos uma tautologia quando a tabela-verdade da operação lógica é sempre V, independente dos valores das proposições simples.

Dizemos que P ***implica logicamente*** Q se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia e escrevemos

$$P \Rightarrow Q$$

Duas sentenças P e Q são ***logicamente equivalentes*** se assumem o mesmo valor-verdade.

A notação é $P \Leftrightarrow Q$.

1. **Argumentos**

Definição:

Chama-se argumento toda a afirmação de que uma dada sequência finita de proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, acarreta uma proposição final Q.

As proposições $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ são chamadas de **premissas do argumento**, e a proposição final Q é chamada de **conclusão do argumento**.

Podemos escrever, por exemplo

P_1: Os múltiplos de 5 pertencem ao conjunto $\mathbb{N}$.
P_2: Divisores de 50 são múltiplos de 5.
____
Q: Os divisores de 50 pertencem a $\mathbb{N}$.

Outro exemplo:

Se 7 < 4, então 7 não é número primo.
7 não é menor do que 4.
____
Logo, 7 não é primo.

1.1 **Validade do Argumento**

Definição:

Um argumento é válido se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira em todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ forem verdadeiras.

Em outras palavras: o argumento é válido se

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$$

A definição de validade de um argumento deixa notório que validade e verdade não significam a mesma coisa. Enquanto Verdade é um valor lógico atribuído a proposições, a Validade do argumento depende dos valores lógicos das suas proposições. Isto nos conduz a várias situações que apresentam "conteúdo" verdadeiro na conclusão Q, mas que tem argumento não válido. Da mesma forma, teremos situações de Q com "conteúdo" falso, mas cujo argumento é válido.

Para o critério de validade de um argumento podemos pensar nas tabelas-verdade da condicional

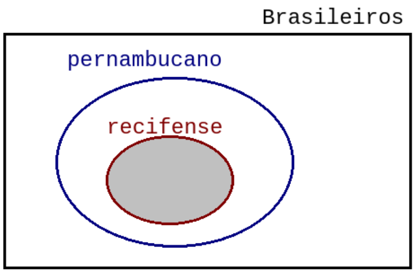
$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \rightarrow Q$$

Mas, inicialmente optaremos por utilizar os conjuntos como forma de ilustrar melhor as situações citadas anteriormente.

Caso do *Argumento válido* com conteúdo verdadeiro:

P_1: Os pernambucanos são brasileiros.
P_2: Os recifenses são pernambucanos.

Q: Recifenses são brasileiros.

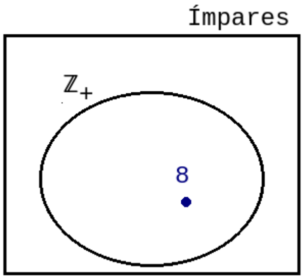


Observe que se as premissas são verdadeiras a conclusão também é. O diagrama ao lado ilustra o conjunto "recifenses" contido no conjunto "pernambucano" que por sua vez está contido no conjunto "Brasileiros".

Caso do *Argumento válido* com conteúdo falso:

P_1: Todo número inteiro positivo é ímpar.
P_2: O número 8 é inteiro positivo.

Q: 8 é ímpar.



"Todo número positivo ímpar" é uma falsidade. Mas, como estamos interessados na validade do argumento assumimos desconhecer este fato e consideramos esta premissa com valor Verdade. Assim, com as premissas verdadeiras a conclusão também é. Veja no diagrama que "8 é um inteiro positivo" é elemento do conjunto "números inteiros positivos". Consequentemente 8 é elemento do conjunto "Ímpares".

Uma maneira de entender melhor a ideia de se ter um argumento válido com conteúdo falso seria se de fato não soubessemos o valor lógico das premissas nem da conclusão. Neste caso estaríamos somente analisando a validade do argumento. Segue um exemplo:

P_1: A derivada de qualquer função real definida em $\mathbb{R}$ é descontínua.
P_2: $f(x) = x^2 + 1$ é uma função com domínio em $\mathbb{R}$.

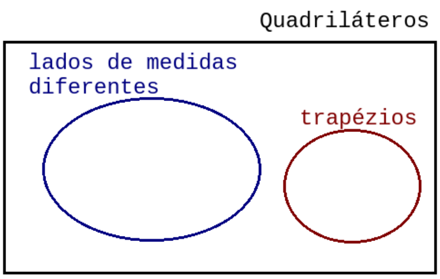
Q: A derivada de $f(x) = x^2 + 1$ é descontínua.

Neste exemplo é provável que o conteúdo seja desconhecido e, assim, assumir as premissas como verdadeiras seja mais "natural". A conclusão é verdadeira a partir das premissas verdadeiras.

Caso do *Argumento inválido* com conteúdo verdadeiro:

P_1: Todos os trapézios são quadriláteros.
P_2: Existem quadriláteros com lados de medidas diferentes.

Q: Existem trapézios com lados de medidas diferentes.

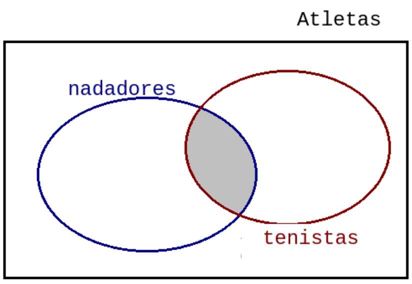


Que existem trapézios com os 4 lados de medidas diferentes é fácil verificar. Mas não se pode concluir isso das premissas. Observe que o conjunto dos "quadriláteros com lados de medidas diferentes" pode não ter interseção com o conjunto "trapézios". Significa que mesmo com as premissas verdadeiras há uma situação em que a conclusão não seria verdadeira, o que deixa o argumento inválido.

Caso do Argumento *inválido* com conteúdo falso:

P_1: Os nadadores são atletas.
P_2: Todo tenista é atleta.

Q: Todo tenista é nadador.



A conclusão diz que todo tenista é também nadador. Este conteúdo é notoriamente falso. O argumento é inválido, pois mesmo com as premissas verdadeiras podemos observar pelo diagrama que podem existir tenistas nadadores e tenistas que não são nadadores. Logo a conclusão é uma falsidade.

Agora veremos como verificar a validade de um argumento pelas Tabelas-Verdade.
Dado um argumento

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \text{ acarretam em } Q$$

o que queremos constatar é se existe a possibilidade do valor lógico de Q ser F quando os valores lógicos de $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ são V. Para isso, basta construir uma tabela-verdade com as premissas e a conclusão nas colunas e verificar as linhas onde P_1, P_2, P_3, …,P_n são todos V. Se em alguma destas linhas a conclusão Q for F, então o argumento será inválido.

Exemplos:

a) Verifique a validade do argumento a seguir

P_1: Se 8 não é par, então 5 não é primo.

P_2: 8 é par

Q: 5 é primo

A premissa P_1 é composta por duas proposições na forma condicional,

p: 8 não é par

q: 5 não é primo

$p \rightarrow q$: Se 8 não é par, então 5 não é primo.

Já a premissa P_2 é a negação de p,

$\sim p$: 8 é par.

Por fim, temos a conclusão Q escrita como a negação de q,

$\sim q$: 5 é primo

Na tabela-verdade faremos as operações das proposições simples que constituem as presmissas. Lembrando que as proposições simples devem ter todas as possibilidades de V ou F.

p	q	P_1 $p \rightarrow q$	P_2 $\sim p$	Q $\sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Na 3ª linha as premissas são V mas a conclusão é F. Portanto, o argumento é inválido.

b) Teste a validade do argumento

p

$p \rightarrow q$

$p \wedge q$

Neste caso temos as premissas p e $p \rightarrow q$, enquanto a conclusão é $p \wedge q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

As premissas são ambas V somente na 1ª linha. Nesta linha a conclusão também é V. Portanto, o argumento é válido.

2. **Quantificadores**

Já mencionamos que existem frases declarativas que não há como decidir se são verdadeiras ou falsas. Por exemplo:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

b) Ela é aluna da Matemática.

c) $x + y$ é positivo.

Observe que “ Ela” e “x” são variáveis que podem ser substituídas por um elemento arbitrário, tornando a frase verdadeira ou falsa. Sendo assim, estas frases tornam-se proposições somente depois de atribuirmos valores as suas variáveis.

Estas frases declarativas são denominadas de proposições abertas. Denotamos por $p(x)$ uma proposição aberta que depende da variável $x \in A$, em que A é um conjunto, chamado de universo de discurso.

Os quantificadores serão utilizados para transfomar uma proposição aberta em uma proposição. São eles oquantificador universal e o quantificador existencial.

Quantificador	Símbolo	Leitura
Universal	$\forall$	Para todo; Qualquer que seja
Existencial	$\exists$	Existe

Exemplos:

a) Existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 - 2x + 1 = 0$.

b) Para todo $x \in \mathbb{N}$ temos que $x + 1 > 0$.

c) Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 + 1\ 6 = 0$.

De modo geral, escrevemos da seguinte maneira:

Existe $x \in A$ tal que $p(x)$.

Para todo $x \in A$ temos que $p(x)$.

Na forma simbólica a escrita fica assim:

$\exists x \in A : p(x)$

$\forall x \in A,\ p(x)$

Nos exemplos acima teríamos as seguintes proposições:

a) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2x + 1 = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1\ 6 = 0$.

2.1 **Universo do discurso**

Para o Universo de Discurso Finito A com n elementos, uma proposição

$$\forall x \in A,\ p(x)$$

é verdadeira se a proposição aberta $p(x)$ for verdadeira para todo $x \in A$. Por outro lado,

$$\exists x \in A : p(x)$$

será verdadeira se a proposição aberta $p(x)$ for verdadeira para algum $x \in A$.

Considere que $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$ e que $p(x)$ é “$x^2 - x + 1 > 0$”.

Para $x = 1$ temos $p(1)$: $1^2 - 1 + 1 > 0$ verdadeiro.

Para $x = 2$, $p(2)$: $2^2 - 2 + 1 > 0$ verdadeiro.

Testando os todos os valores de A na variável x, chegaremos que p(x) é verdadeiro.
Assim, podemos concluir que a proposição $\forall x \in A$, $p(x)$ é verdadeira.

Agora considere o mesmo conjunto A e a proposição aberta $q(x)$: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Para $x = 1$ temos $q(1)$: $1^2 - 2 - 3 = 0$ é falsa.

Para $x = 2$, $q(2)$: $2^2 - 4 - 3 = 0$ é falsa.

Para $x = 3$, $q(3)$: $3^2 - 6 - 3 = 0$ é verdadeira.

Podemos concluir que é $\exists x \in A : p(x)$ verdadeira.

Alguns exemplos do uso dos quantificadores que envolvem mais de uma proposição aberta:

1. Todos os estudantes de matemática gostam de lógica.
2. Para todo estudante, se o estudante é da matemática, então este estudante gosta de lógica.
3. Alguns estudantes de matemática gostam de lógica.

Nestes exemplos identificamos:

Universo do discurso é o *conjunto de estudantes*;

Proposição aberta p(x): *x é estudante de Matemática*;

Proposição aberta q(x): *x gosta de lógica*.

Vamos reescrever os exemplos com o uso dos símbolos:

1. $\forall x \in A$, $p(x) \wedge q(x)$.
2. $\forall x \in A$, $p(x) \rightarrow q(x)$.
3. $\exists x \in A : p(x) \wedge q(x)$.

Observações:

Os termos “existe” e “alguns” na Matemática são equivalentes. Quando queremos quantificar que existe apenas 1 (um) devemos dizer “existe só um” e usar o símbolo $\exists!$

As proposições abertas que estão na forma de operações devem ser analisadas como proposições compostas abertas. Assim, seu valor lógico deve ser verificado pelas tabelas-verdade.

Para o caso de

$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10\}$

$p(x)$: x^2 é par

$q(x)$: $x + 5 < 10$

avalie se é verdadeira ou falsa a proposição $\exists x \in A : p(x) \wedge q(x)$.
Neste exemplo precisamos achar um valor para x que torne verdadeira a proposição

$$p(x) \wedge q(x)$$

ou mostrar que para todos os valores de A a proposição $p(x) \wedge q(x)$ é falsa.

Temos $x = 2$ que pertence ao conjunto A e para o qual $p(x) \wedge q(x)$ é verdadeira.

Portanto,

$\exists x \in A : p(x) \wedge q(x)$ é verdadeira.

Propostas de exercícios para este conteúdo:

1. Escreva na linguagem simbólica:
a) Existe um inteiro n tal que $4 = n + 2$.
b) Alguns inteiros são pares e divisíveis por 3.
c) Todo mundo ama alguém um dia.
d) Qualquer triangulo equilátero é equiangular.

2. Teste a validade dos argumentos:

a) Se Diego tiver um bom currículo, então ele conseguirá um emprego.
Ele conseguiu um emprego.
____
Portanto, Diego tem um bom currículo.

b) Se tenho dinheiro, então viajo.
Não tenho dinheiro.
____
Logo, não viajo.

c) $p \rightarrow q$
$\sim p$
_____
$p \vee q$

3. Utilize os quantificadores para transformar as proposições abertas em verdadeiras para o universo do discurso sendo o conjunto dos números naturais.
a) $\sqrt{x^3} = x$.
b) $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$
c) $x^2 + 2x + 2 \neq 0$.
d) $x + 1 > 0$

4. Escreva na forma simbólica utilizando os quantificadores.
a) Todo inteiro é par ou ímpar.
b) Todo inteiro é par ou todo inteiro é ímpar.