

Utilização do Método de Euler para a obtenção da solução de um problema escalar e um problema bidimensional

Keith Ando Ogawa
Vinícius Viana de Paula

23 de Janeiro de 2023
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Descrição e análise propostas pela tarefa 01 da disciplina MAP3122

Neste documento será apresentada a implementação do Método de Euler, utilizando inicialmente um problema unidimensional e outro bidimensional, por meio da estratégia da solução manufaturada, para verificar se o método foi corretamente implementado. Por fim, será obtida uma solução para outro problema bidimensional, cuja solução é desconhecida, supostamente.

I. Introdução

Nota-se que inúmeros problemas não apresentam soluções exatas, como o de descrição de sistemas biológicos da equação de Lotka-Volterra, portanto, é necessário utilizarmos processos para obter soluções aproximadas. Nesse documento, ilustramos um dos métodos para obter soluções numéricas de equações diferenciais, o Método de Euler. Primeiro é verificado que ele é adequado, para problemas unidimensionais e bidimensionais, a partir da estratégia da solução manufaturada. E então, é testado o método para um problema bidimensional de solução desconhecida.

II. Modelo Matemático

II. a. Problema com uma variável de estado e solução exata conhecida

O Problema de Cauchy unidimensional estudado é dado por

$$\dot{y} = y - t^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

cuja solução exata é dada por

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + (1+t)^2. \quad (2)$$

II. b. Problema com duas variáveis de estado e solução conhecida

A partir do circuito da figura 1, utilizando Lei das Malhas, obtém-se um sistema de equações diferenciais, em (3) - sendo que as correntes I_1 e I_2 representam as correntes dos dois laços internos:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -4I_1 + 3I_2 + 6, & I_1(0) = 0 \\ \dot{I}_2 = -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6, & I_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Para o problema, o instante de tempo t pertence ao intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Assim, o problema de Cauchy dado por (3) é um sistema bidimensional com

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\dot{\mathbb{Y}} = f(t, \mathbb{Y}) = f(t, I_1(t), I_2(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, I_1(t), I_2(t)) \\ f_2(t, I_1(t), I_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4I_1 + 3I_2 + 6 \\ -2.4I_1 + 1.6I_2 + 3.6 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

com condições iniciais $I_1(0) = 0$ e $I_2(0) = 0$, $0 \leq t \leq 1$.

Esse problema apresenta solução exata dada por

$$\mathbb{Y}(t_k) = \begin{pmatrix} I_1(t_k) \\ I_2(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.375e^{-2t} + 1.875e^{-0.4t} + 1.5 \\ -2.25e^{-2t} + 2.25e^{-0.4t} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

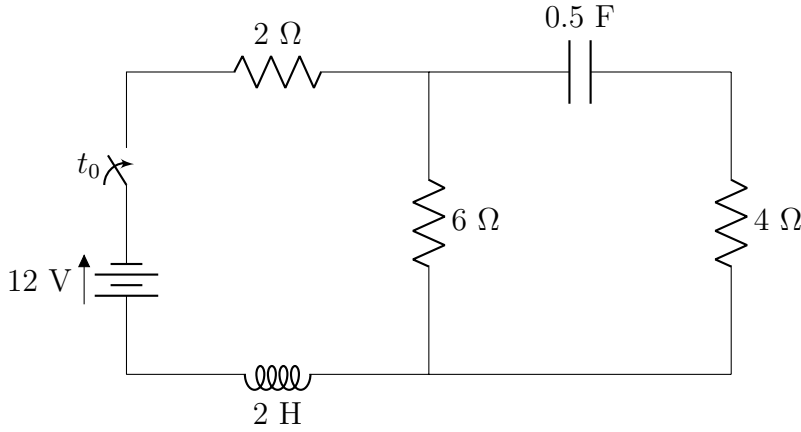


Figure 1: Circuito RLC utilizado na descrição do problema

II. c. Problema com duas variáveis de estado e solução desconhecida

O segundo Problema de Cauchy, bidimensional, entretanto com solução considerada desconhecida estudado é dado por:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = e^{2t} \sin(t) \quad (7)$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = -0.4, \quad \dot{y}(0) = -0.6$$

III. Metodologia Numérica

III. a. Método de Euler

Dado um Problema de Cauchy que satisfaz as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade, é possível construir um problema aproximado, que, para as soluções numéricas, será obtido discretizando o problema original. A solução aproximada é, então, determinada em um conjunto discreto de pontos.

Utilizando a estratégia da aproximação do Problema de Cauchy por Taylor, representando a solução exata pelo seu polinômio de Taylor:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hy^{(1)}(t_k) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(t_k) + \dots + R(\xi), \quad (8)$$

em que $R(\xi)$ é o erro de Lagrange, e h é o passo de integração definido para o problema discretizado.

A equação (8) pode ser reescrita - para valores de h suficientemente pequenos, e adotando $t_k + h = t_{k+1}$ - como

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} \approx y^{(1)}(t_k) = f(t_k, y(t_k)). \quad (9)$$

A partir da equação (9), é obtido o Método de Euler:

$$\begin{cases} \dot{y} \doteq y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k, h), 0 \leq k \leq n-1 \end{cases} \quad (10)$$

onde

$$h = \frac{(b-a)}{n} \quad e \quad \phi(t_k, y_k, h) \doteq f(t_k, y_k)$$

A solução numérica é uma aproximação da solução exata em um conjunto de pontos finito, de modo que existem erros locais e globais provenientes da discretização. Em particular, o erro de discretização global, que será utilizado para estudar a aplicação do Método de Euler nos problemas escolhidos, é dado, em um instante $t = t_k$, por

$$e(t_k, h) = e_k = y(t_k) - y_k, \quad (11)$$

em que $y(t)$ é a solução exata do Problema de Cauchy e y_k é o k -ésimo passo de integração do método numérico para este problema.

IV. Resultados

IV. a. Problemas cujas soluções são conhecidas

IV. a. 1. Problema unidimensional

Sendo dado o Problema de Cauchy descrito em (1), unidimensional, que apresenta solução exata, dada em (2), e que será utilizado na depuração via estratégia da solução manufaturada.

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$ e(T, h_n) $	ordem p
16	1.250e-01	2.950e-01	———
32	6.250e-02	1.572e-01	9.079e-01
64	3.125e-02	8.131e-02	9.514e-01
128	1.562e-02	4.136e-02	9.750e-01
256	7.812e-03	2.086e-02	9.873e-01
512	3.906e-03	1.048e-02	9.936e-01
1024	1.953e-03	5.251e-03	9.968e-01
2048	9.766e-04	2.628e-03	9.984e-01
4096	4.883e-04	1.315e-03	9.992e-01
8192	2.441e-04	6.577e-04	9.996e-01
16384	1.221e-04	3.289e-04	9.998e-01
32768	6.104e-05	1.644e-04	9.999e-01
65536	3.052e-05	8.223e-05	9.999e-01

Table 1: Tabela de Convergência Numérica para o problema unidimensional proposto utilizando o método de Euler.

Esse problema será utilizado para verificar a implementação do Método de Euler, que é um método de ordem 1. A tabela 1, de convergência numérica, apresenta o número de passos, o passo de integração, o erro de discretização global no instante de tempo final e a ordem exibida ao aproximar o passo de integração à zero.

Para a obtenção do erro de discretização global no instante de tempo final t_f , foi construída uma aproximação numérica $y_n(t_f, h_n)$ da solução exata

$y_e(t_f)$ utilizando o Método de Euler, de modo que

$$|e(t_f, h_n)| = |y_e(t_f) - y_n(t_f, h_n)|. \quad (12)$$

O erro de discretização global, apresentado na terceira coluna da tabela 1, é utilizado para a obtenção da ordem p do método, através da relação

$$p \approx \log_r \frac{|e(t_f, h_{n-1})|}{|e(t_f, h_n)|}, \quad (13)$$

em que r é a razão entre dois passos de integração consecutivos,

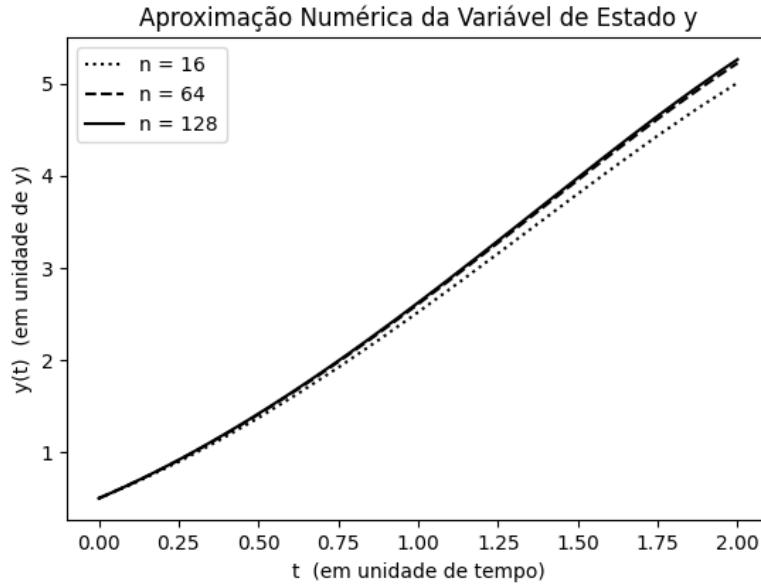


Figure 2: Gráfico y vs t com diferentes valores de n.

$$r = \frac{h_{n-1}}{h_n}. \quad (14)$$

Analisando a quarta coluna da tabela 1, é possível perceber o comportamento do Método de Euler, já que p tende à 1 para valores de h cada vez mais próximos de zero.

A figura 2 mostra a solução para a variável de estado $y(t)$, variando os valores de n. Analisando a figura, é possível observar que à medida que se aumenta o valor de n, o que diminui o passo de integração, h_n , as soluções se sobrepõem.

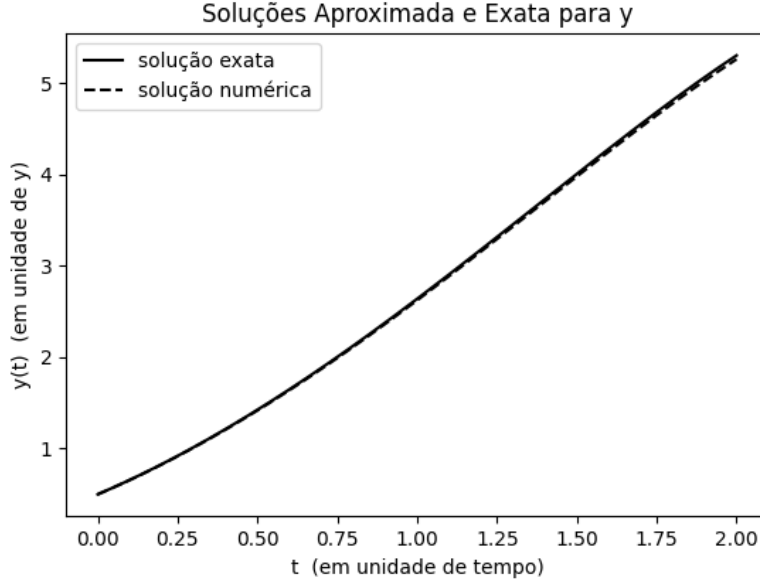


Figure 3: Gráfico y vs t das soluções exata e aproximada para $n = 128$.

Por sua vez, a figura 3 apresenta as soluções exata e numérica para o problema, possibilitando uma comparação entre as duas soluções. A partir da figura 3, é possível perceber que a solução numérica se aproxima da solução exata do problema.

IV. a. 2. Problema bidimensional

O problema bidimensional utilizado para a depuração via estratégia da solução manufaturada, é descrito em (3).

A coluna $|e(T, h_n)|$ da tabela 2 descreve o erro de discretização global, que é dado por

$$e(t_k, y_k) \doteq e_k \doteq \mathbb{Y}(t_k) - \mathbb{Y}_k \quad (15)$$

onde \mathbb{Y}_k é o k -ésimo passo de integração do método numérico. Dado que o problema é bidimensional, o erro de discretização global pode ser obtido a partir da norma do máximo:

$$\begin{cases} e_1 = I_1(t_k) - I_{1,k} \\ e_2 = I_2(t_k) - I_{2,k} \\ |e(t, h)| = \max(|e_1|, |e_2|) \end{cases} \quad (16)$$

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$ e(T, h_n) $	ordem p
16	6.250e-02	5.191e-02	————
32	3.125e-02	2.568e-02	1.015e+00
64	1.562e-02	1.277e-02	1.008e+00
128	7.812e-03	6.368e-03	1.004e+00
256	3.906e-03	3.180e-03	1.002e+00
512	1.953e-03	1.589e-03	1.001e+00
1024	9.766e-04	7.942e-04	1.000e+00
2048	4.883e-04	3.970e-04	1.000e+00
4096	2.441e-04	1.985e-04	1.000e+00
8192	1.221e-04	9.924e-05	1.000e+00
16384	6.104e-05	4.962e-05	1.000e+00
32768	3.052e-05	2.481e-05	1.000e+00
65536	1.526e-05	1.240e-05	1.000e+00

Table 2: Tabela de Convergência Numérica para o problema bidimensional proposto utilizando o método de Euler e seguindo a norma do máximo para o cálculo do erro e da ordem p .

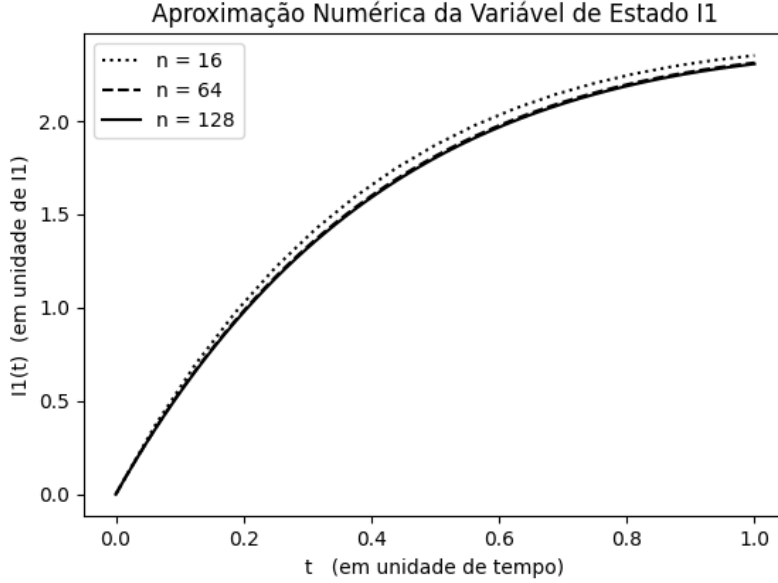


Figure 4: Gráfico I_1 vs t com diferentes valores de n .

em que $I_{i,k}$ representa o valor obtido pelo método numérico, enquanto $I_i(t_k)$ representa o valor da solução exata.

O valor de p continua sendo obtido pela equação (13), sendo que o erro de discretização global para cada instante de tempo t_k é obtido como descrito em (16).

A tabela 2, de convergência numérica, exhibe o número de passos de cada iteração, o passo de integração, o erro de discretização global e a ordem exibida ao aproximar o passo de integração a zero. Nota-se o comportamento do Método de Euler, visto que, conforme h tende a zero, a ordem p tende a um.

As figuras 4 e 5 apresentam gráficos com a solução para cada variável de estado, $I_1(t)$ e $I_2(t)$, para diferentes valores de n .

Novamente, é possível perceber que para menores valores do passo de integração, h_n , obtidos aumentando o valor de n , as soluções se sobrepõem.

As figuras 6 e 7 apresentam as soluções exatas e as numéricas para o problema. É possível ver que a solução numérica também se aproxima da solução exata do problema para o caso bidimensional.

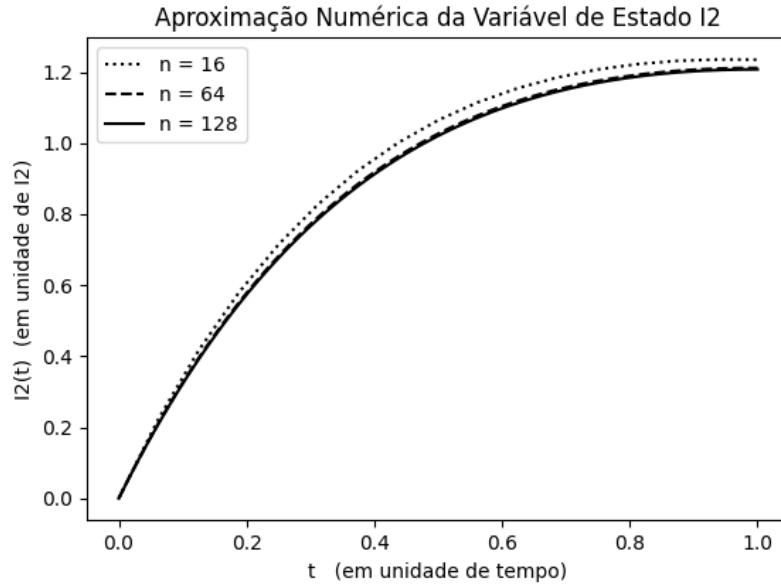


Figure 5: Gráfico I_2 vs t com diferentes valores de n .

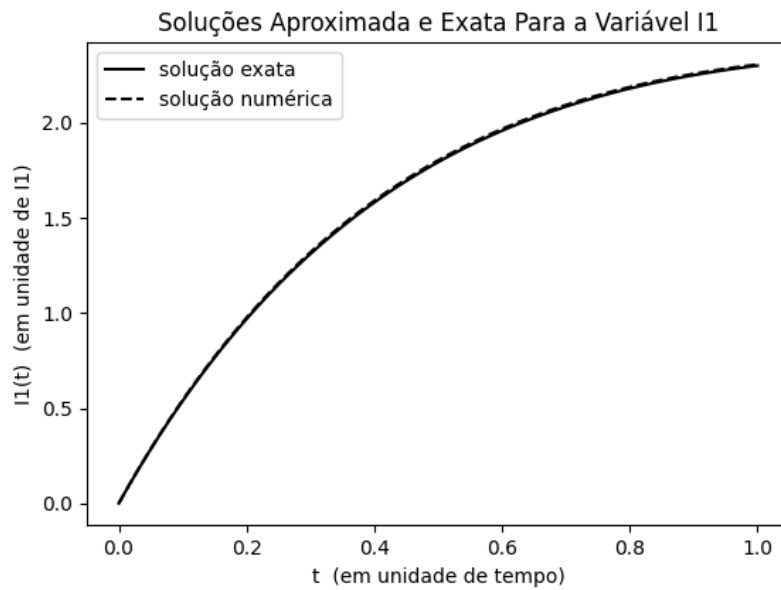


Figure 6: Gráfico I_1 vs t das soluções exata e aproximada para $n = 128$.

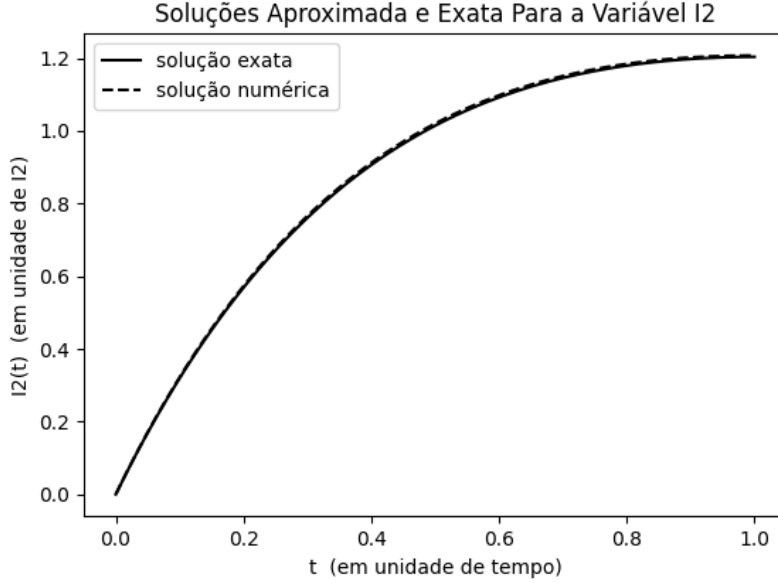


Figure 7: Gráfico I_2 vs t das soluções exata e aproximada para $n = 128$.

IV. b. Resolução de um problema bidimensional com solução desconhecida

Utiliza-se novamente o Método de Euler para obter, numericamente, uma solução aproximada para o problema apresentado em (7). Diferentemente das análises anteriores, entretanto, a solução exata desse problema é supostamente desconhecida. Portanto, a obtenção do erro de discretização global e da ordem p são abordadas outro modo.

O erro e a ordem p do método podem ser estimados sem a presença de uma solução exata, a partir da ordem teórica p do método, e de soluções numéricas η com passos de integração h sucessivos:

$$|e(t, h/2)| \approx \frac{\eta(t, h) - \eta(t, h/2)}{2^p - 1} = \eta(t, h) - \eta(t, h/2), \quad (17)$$

$$p \approx \log_2 \frac{\eta(t, 2h) - \eta(t, h)}{\eta(t, h) - \eta(t, h/2)} = e(t, h) - e(t, h/2), \quad (18)$$

Desse modo, a tabela 3 exhibe o número de passos, o passo de integração, o erro de discretização global no instante de tempo final e a ordem exibida ao aproximar o passo de integração à zero. Observa-se que a ordem p também

n	$h_n = \frac{(T - t_0)}{n}$	$ e(T, h_n) $	ordem p
64	1.562e-02	2.452e-02	9.157e-01
128	7.812e-03	6.491e-03	9.587e-01
256	3.906e-03	1.669e-03	9.796e-01
512	1.953e-03	4.233e-04	9.899e-01
1024	9.766e-04	1.066e-04	9.949e-01
2048	4.883e-04	2.673e-05	9.975e-01
4096	2.441e-04	6.695e-06	9.987e-01
8192	1.221e-04	1.675e-06	9.994e-01
16384	6.104e-05	4.190e-07	9.997e-01
32768	3.052e-05	1.048e-07	9.998e-01
65536	1.526e-05	2.620e-08	9.999e-01

Table 3: Tabela de Convergência Numérica para o problema bidimensional proposto utilizando o método de Euler e seguindo a norma euclidiana para o cálculo do erro e da ordem p .

tende a 1 conforme h tende a 0, evidenciando o comportamento do Método de Euler.

O problema de Cauchy dado por (7) pode ser transformado em um sistema de duas equações de ordem 1:

$$\begin{cases} y_1(t) \doteq y(t) \Rightarrow \dot{y}_1(t) = \dot{y}(t) = y_2(t) \\ y_2(t) \doteq \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{y}_2(t) = \ddot{y}(t) = e^{2t} \sin(t) - 2y_1(t) + 2y_2(t) \end{cases} \quad (19)$$

que é um sistema bidimensional descrito por

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\dot{\mathbb{Y}} = f(t, \mathbb{Y}) = f(t, y_1(t), y_2(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), y_2(t)) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ e^{2t} \sin(t) - 2y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

com condições iniciais $y_1(0) = -0.4$ e $y_2(0) = -0.6$.

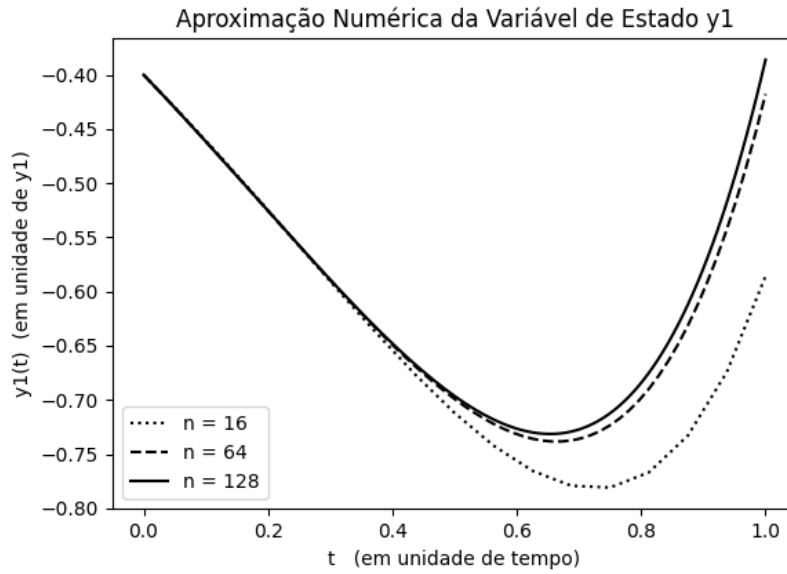


Figure 8: Gráfico y_1 vs t com diferentes valores de n .

As figuras 8 e 9 apresentam os gráficos com as soluções para as variáveis de estado $y_1(t)$ e $y_2(t)$, para valores distintos de n . Nesse caso, as soluções também se sobrepõem ao se aumentar o valor de n , de modo que é possível identificar uma convergência à medida que o passo de integração se aproxima de zero.

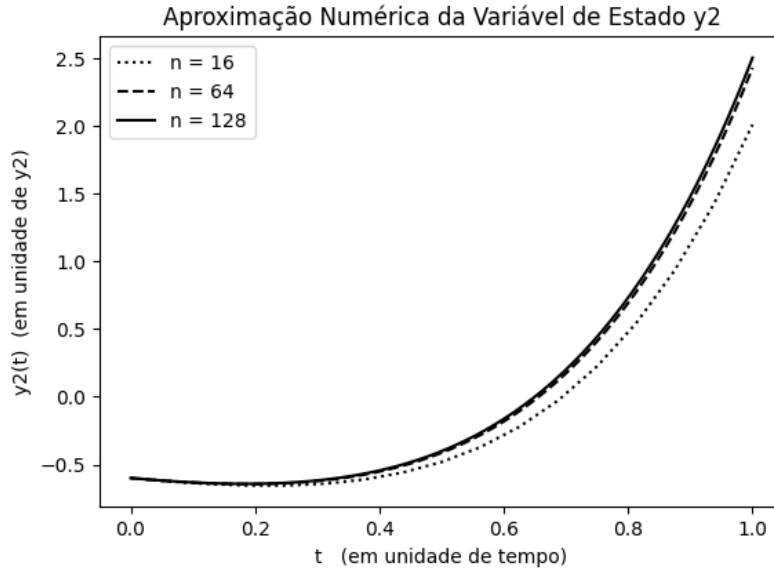


Figure 9: Gráfico y_2 vs t com diferentes valores de n .

V. Conclusão

Este trabalho analisou o Método de Euler explícito, de passo simples, através de um Problema de Cauchy bidimensional, cuja solução era desconhecida, e de dois problemas - um unidimensional e outro bidimensional - cujas soluções eram conhecidas. Verificou-se que o método é convergente, analisando a ordem do método para valores do passo de integração cada vez mais próximos de zero. Além disso, apresentação gráfica das soluções aproximadas e exatas para os problemas de solução conhecida demonstrou a aproximação da solução obtida pelo método numérico com a solução exata.

VI. Apêndice

VI. a. Estratégia da Solução Manufaturada

Trata-se de uma estratégia utilizada para verificar o quanto o método é, de fato, útil. Utilizando uma solução exata conhecida para um problema de valor inicial, o método é aplicado para esse problema e, então, as soluções aproximadas obtidas são comparadas com a solução exata.

VI. b. Implementação

A implementação técnica do estudo foi feito em Python, utilizando as bibliotecas MatPlot e NumPy. Para a verificação da integridade do método, foram implementadas, individualmente, em dois arquivos, formas de obter as soluções para um problema com uma variável de estado e para um problema com duas variáveis de estado. Nessas implementações, através da estratégia de solução manufaturada, comparamos a solução numérica e a solução exata, certificando que o método é válido. Finalmente, com a certeza da efetividade do método, obtivemos estimativas para a solução de um problema bidimensional cuja solução é desconhecida.

Para os três casos descritos, a estrutura do programa é semelhante, sendo composta de uma função ϕ de discretização, uma função f utilizada para descrever o problema do valor inicial proposto e a função OneStep-Method que implementa o método de um passo (Euler) utilizado. Ademais, nos dois primeiros problemas há funções que descrevem as soluções exatas para fim de comparação.

Dadas as demais funções, a função principal aplica a implementação proposta, inicializando os valores iniciais de cada caso e iterando com números de passos e tamanhos de passos de integração distintos para ser possível a análise feita com o erro e a ordem de convergência.

VII. Referências Bibliográficas

- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical analysis*. Nona Edição.
- Mathplotlib documentation at <https://matplotlib.org/stable/index.html>
- Roma, A. L; Bevilacqua J. S. *Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais*