



## Implementação do algoritmo branch-and-bound

**Descrição geral.** Neste trabalho, vocês deverão implementar, em qualquer linguagem de programação, o algoritmo *branch-and-bound* para problemas de programação linear inteira binária. A função objetivo será de maximização e todas as restrições serão de “menor ou igual”, com exceção daquelas que definem o domínio das variáveis. Não se espera que o(a) discente implemente um algoritmo para resolver os subproblemas (por exemplo, o Simplex), mas que seja usado um pacote de programação linear para resolvê-los (por exemplo, python-mip).

**Regra de ramificação.** A regra de ramificação diz como criar os nós filhos a partir de um nó cuja solução da relaxação linear é fracionária. O código de vocês deve ramificar em torno da variável  $x_j$  cujo valor seja fracionário e mais próximo de 0,5. Em um filho, adiciona-se a restrição  $x_j = 1$ ; no outro, a restrição  $x_j = 0$ .

**Estratégia de ramificação.** A estratégia de ramificação determina como a árvore é explorada, ou seja, qual será o próximo nó a ser resolvido. Vocês estão livres para implementar a estratégia que quiserem. Eis duas sugestões de estratégia:

- Busca em profundidade. Para isso, basta utilizar uma pilha para armazenar os nós abertos (nós que ainda não foram processados);
- Busca em largura (estratégia usada na aula). Para isso, basta utilizar uma fila para armazenar os nós abertos.

**Formato do arquivo.** O formato esperado para o arquivo será ilustrado a partir do problema abaixo:

$$\text{Max } 5x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

Sujeito a:

$$\begin{array}{rclclcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & \leq & 7 \\ x_1, & & x_2, & & x_3 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

### Formato do arquivo

```
3 2 #3 variaveis e 2 restricoes
5 10 8 #coeficientes das variaveis na funcao objetivo
3 5 2 6 #restricao 1
4 4 4 7 #restricao 2
```



**Teste 1.**

$$\begin{aligned} & \max 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 10x_6 + 6x_7 \\ \text{s.a. } & 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 1x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 6x_7 \leq 20 \\ & 1x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 6x_6 + 10x_7 \leq 30 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 10x_7 \leq 40 \\ & 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 8x_7 \leq 30 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 7x_5 + 6x_6 + 10x_7 \leq 20 \\ & 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 2x_7 \leq 80 \\ & 7x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 7x_7 \leq 100 \\ & 9x_1 + 8x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 2x_7 \leq 90 \\ & 1x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 9x_7 \leq 70 \\ & 9x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 10x_7 \leq 60 \\ & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 10x_7 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Valor da solução ótima: 20

Arquivo: <https://www.dropbox.com/s/a9rsz0b6cakwqlt/teste1.txt?dl=0>

**Teste 2.**

$$\begin{aligned} & \max 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 7x_9 \\ \text{s.a. } & 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 2x_7 + 1x_8 + 4x_9 \leq 80 \\ & 7x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 1x_4 + 7x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 7x_8 + 1x_9 \leq 90 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 1x_7 + 6x_8 + 5x_9 \leq 10 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 10x_8 + 4x_9 \leq 30 \\ & 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 9x_7 + 7x_8 + 2x_9 \leq 80 \\ & 3x_1 + 10x_2 + 1x_3 + 9x_4 + 2x_5 + 7x_6 + 7x_7 + 9x_8 + 10x_9 \leq 90 \\ & 1x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 2x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 2x_9 \leq 20 \\ & 10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 10x_5 + 2x_6 + 1x_7 + 9x_8 + 7x_9 \leq 10 \\ & 2x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 2x_7 + 1x_8 + 1x_9 \leq 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Valor da solução ótima: 24

Arquivo: <https://www.dropbox.com/s/fkeqme4mopaffwh/teste2.txt?dl=0>



**Teste 3.**

$$\begin{aligned} & \max 7x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 1x_6 + 9x_7 + 8x_8 + 8x_9 \\ \text{s.a. } & 2x_1 + 1x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 10x_7 + 9x_8 + 1x_9 \leq 60 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 6x_9 \leq 80 \\ & 8x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 1x_5 + 4x_6 + 8x_7 + 3x_8 + 4x_9 \leq 30 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 9x_7 + 9x_8 + 6x_9 \leq 40 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 10x_6 + 9x_7 + 9x_8 + 3x_9 \leq 20 \\ & 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 1x_6 + 8x_7 + 3x_8 + 10x_9 \leq 90 \\ & 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 6x_7 + 2x_8 + 2x_9 \leq 90 \\ & 7x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 8x_6 + 5x_7 + 9x_8 + 5x_9 \leq 80 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 1x_4 + 7x_5 + 9x_6 + 10x_7 + 1x_8 + 7x_9 \leq 80 \\ & 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 4x_8 + 9x_9 \leq 10 \\ & 10x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 2x_9 \leq 30 \\ & 9x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 + 10x_7 + 5x_8 + 8x_9 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Valor da solução ótima: 19

Arquivo: <https://www.dropbox.com/s/6ygtwh48w55z23z/teste3.txt?dl=0>

**Teste 4.**

$$\begin{aligned} & \max 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 7x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 8x_7 + 4x_8 + 9x_9 \\ \text{s.a. } & 4x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 6x_8 + 1x_9 \leq 40 \\ & 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 3x_6 + 5x_7 + 9x_8 + 4x_9 \leq 80 \\ & 9x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 3x_8 + 9x_9 \leq 40 \\ & 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 9x_5 + 7x_6 + 8x_7 + 7x_8 + 8x_9 \leq 10 \\ & 7x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 8x_7 + 1x_8 + 9x_9 \leq 10 \\ & 1x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 1x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 8x_8 + 7x_9 \leq 10 \\ & 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 8x_6 + 1x_7 + 4x_8 + 4x_9 \leq 70 \\ & 9x_1 + 1x_2 + 9x_3 + 7x_4 + 10x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 2x_8 + 5x_9 \leq 10 \\ & 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 9x_7 + 2x_8 + 1x_9 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Valor da solução ótima: 10

Arquivo: <https://www.dropbox.com/s/fst1dumwyekp2ab/teste4.txt?dl=0>