Aplicação da equação de calor e de advecção no estudo de poluentes em um rio

Pedro Henrique Sophia [1], Pedro Henrique Machado Zanineli [2], Victor Puntel Rui [3],
Ilum Escola de Ciência
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM)
Campinas, Brasil

Resumo. Solução numérica com Python da equação de calor e advecção pelo método das diferenças finitas, utilizando rios como objeto de estudo, descrevendo a dinâmica de propagação da poluição no mesmo.

Palavras-chave. Diferenças finitas, equação de advecção, equação de calor, poluente.

1 Introdução

Rios são sistemas complexos que estão em constante mudança, de forma que não sejam importantes apenas para a fauna e a flora, como também para as atividades humanas tal como a agricultura e indústria [1, 3]. Por outro lado, atividades humanas podem também ter um grande impacto negativo nos rios, como o lançamento de poluentes [2, 4]. Neste sentido, compreender como os poluentes se movem e se dispersam nos rios é crucial para gerenciar e mitigar seus efeitos, reduzindo assim os impactos ambientais e ecologicos passíveis de serem gerados. Uma maneira de modelar esse movimento é por meio do uso de equações de calor e advecção. Neste artigo, discutiremos as equações de calor e advecção em um rio com poluentes e como elas podem ser usadas para prever o movimento e a concentração de poluentes.

2 Metodologia

Para resolver a equação de calor e advecção, que são Equações Diferenciais Parciais (EDP), como forma de compreender o comportamento de poluentes existente em um rio, o método das diferenças finitas foi adotado, o qual é um método de análise numérica. Por meio da iteração e aplicação dos valores de tempo e posição nas suas respectivas equações, é possível obter as soluções.

O método das diferenças finitas baseia-se na definição da derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e na sua respectiva aproximação

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

de forma que seja pensar tanto na definição da diferença adiantada e atrasada, representadas respectivamente por

$$f'_{+}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \& \frac{f(x) - f(x+h)}{h},$$

que nos permite obter a centrada

$$f'_c(x) = f'_+(x) + f'_-(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Aplicando então as condições de contorno em uma matriz que relacione a solução nas variáveis de posição e tempo, é possível realizar o cálculo em cada conjunto de valores. O código desenvolvido para tanto foi feito em Python.[4]

3 Resultados

3.1 Equação de calor

A figura 1 mostra, em diferentes ângulos, o gráfico da solução numérica da equação de calor

$$u_t = \kappa u_{xx}$$

obtido pelo método das diferenças finitas, onde κ é o coeficiente de difusão térmica, que é uma propriedade física de um material que descreve a taxa na qual o calor se propaga através do meio, a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial t}$ representa a taxa de variação da temperatura com relação ao tempo, enquanto a derivada parcial segunda $\frac{\partial^2 u}{\partial x}$ representa a taxa de variação espacial da temperatura.

Apenas a solução numérica foi obtida pelo fato da equação do calor não possuir, em muitos casos, solução analítica.

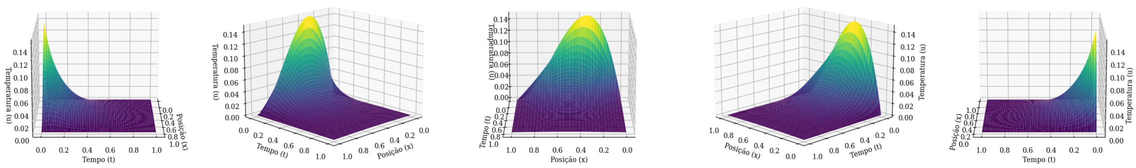


Figura 1: Resolução da equação de calor.

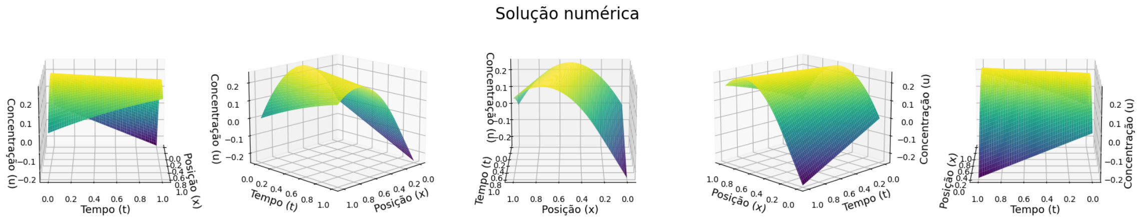
3.2 Equação da advecção

A figura 2a mostra, em diferentes ângulos, o gráfico da solução numérica da equação de advecção

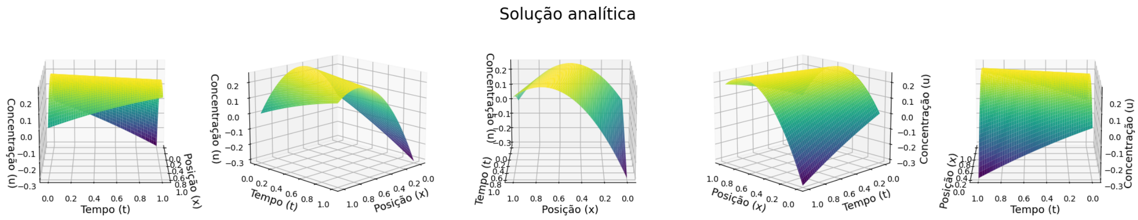
$$u_t + \mu u_x = 0$$

obtido pelo método das diferenças finitas, onde u é a grandeza física sendo transportada (por exemplo, concentração de um poluente ou densidade de um fluido), t representa o tempo, x é a coordenada espacial. Os resultados mostram a evolução da concentração de um soluto em um solvente hipotético ao longo do tempo e em diferentes posições em domínios específicos. Ao comparar a solução numérica com uma solução analítica do mesmo problema, percebemos uma concordância satisfatória.

[4] O código está disponível no repositório cujo link é https://github.com/pedrozanineli/trabalho-analise-numerica.



(a) Solução numérica da advecção.



(b) Solução analítica da equação da advecção.

Figura 2: Soluções da equação de advecção em diferentes ângulos.

4 Conclusões

A computação se mostrou uma excelente ferramenta para ser utilizada na resolução dos problemas com este método, visto que o custo computacional não é alto e entrega uma boa eficiência. Posto isso, sabemos então que há espaço para realizar simulações mais completas com problemas como estes.

4.1 Comparação do método

Para observar a precisão do método, comparamos a solução obtida numericamente com a solução analítica. No caso da equação de advecção, é possível ver que as soluções são bem coerentes, mostrando a precisão do método. Entretanto, na equação de calor, não existe solução analítica, então não podemos afirmar esta mesma precisão de comparação.

4.2 Possível aplicação

A aplicação do método de diferenças finitas se mostrou eficaz, podendo ser utilizado em casos reais, descrevendo, por exemplo, os fenômenos que ocorrem em um rio, como correntes de advecção e propagação de poluentes ao longo do tempo.

Contribuições

4.3 Pedro Henrique Machado Zanineli

As contribuições feitas pelo aluno **Pedro Zanineli**

- Código para obter os valores e gráficos numéricos para equação de calor
- Escrita da introdução
- Escrita da metodologia

4.4 Pedro Henrique Sophia

As contribuições feitas pelo aluno **Pedro Sophia** foram:

- Código para obter os valores e gráficos numéricos para a equação de advecção;
- Código para obter os valores e gráficos analíticos para a equação de advecção;
- Escrita dos resultados referentes à equação de advecção e calor.

4.5 Victor Puntel Rui

As contribuições feitas pelo aluno **Victor Rui** foram:

- Escrita da conclusão;
- Escrita do resumo;
- Revisão e ajuste do artigo.

Referências

[1] Elizabeth P. Anderson et al. "Understanding rivers and their social relations: A critical step to advance environmental water management". Em: **WIREs Water** 6.6 (), e1381. DOI: `https://doi.org/10.1002/wat2.1381`. URL: `https://wires.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/wat2.1381`.

[2] Food and Agriculture Organization of the United Nations. **Guidelines for the safe use of wastewater, excreta and greywater**. 2006.

[3] Daniel P. Loucks e Eelco van Beek. "Water Resources Planning and Management: An Overview". Em: **Water Resource Systems Planning and Management: An Introduction to Methods, Models, and Applications**. Cham: Springer International Publishing, 2017, pp. 1–49. ISBN: 978-3-319-44234-1. DOI: `10.1007/978-3-319-44234-1_1`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-44234-1_1`.

[4] M. H. Runkel e K. M. Bencala. "Transport of reacting solutes in rivers and streams". Em: **Water Resources Research** 35.12 (1999), pp. 3649–3658.