Base e Dependência Linear

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro

22 de junho de 2020

A partir daqui, consideraremos os representantes de cada vetor, como sendo aqueles que possuem ponto inicial como sendo a origem.

Sendo assim, o vetor $\overline{AB}$ terá como ponto inicial a origem $A = (0, 0)$ (ou (0,0,0) caso estejamos nos referindo ao espaço) e como ponto final $B = (a, b)$.

Por simplificação, o vetor $\overline{AB}$ será denotado simplesmente por (a, b).

Assim, retornando as ideias de soma e produto por escalar que vimos anteriormente, denotaremos:

(Soma) $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

(Multiplicação por escalar) $\vec{u} = (a, b)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \alpha\vec{u} = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b).$$

Dependência Linear

Neste curso estudaremos posições relativas de retas e planos.

Nesse sentido, o conceito de dependência linear será utilizado com frequência no tratamento de tal estudo.

Dependência Linear

Sejam n vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Uma combinação linear entre esses vetores é definida por:

$$\vec{v}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{v}_n\alpha_n$$

em que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dependência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são ditos linearmente dependentes se existirem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ não nulos tais que

$$\vec{v}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{v}_n\alpha_n = \vec{0}$$

Notação: L.D

Exemplo:

Os vetores $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4)$ são linearmente dependentes, pois tomando $\alpha_1 = -2$ e $\alpha = 1$, temos:

$$(-2)(1, 2) + 1(2, 4) = (-2, -4) + (2, 4) = (0, 0)$$

Nesse caso, dizemos que $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 4)$ são L.D.

Dependência Linear

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são ditos linearmente independentes se a combinação linear

$$\vec{v}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{v}_n\alpha_n = \vec{0}$$

só for possível se obrigatoriamente tivermos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Notação: L.I

Exemplo:

Os vetores $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (1, 3)$ são linearmente independentes, pois:

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,2) + \alpha_2(1,3) = (0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_3) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que $\vec{v}_1 = (1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (1, 3)$ são L.I.

Em geral, para determinar se dois vetores são L.D ou L.I, então precisamos resolver um problema de sistema linear.

Em geral, para determinar se dois vetores são L.D ou L.I, então precisamos resolver um problema de sistema linear.

Verifiquemos se os vetores $\vec{v}_1 = (1,2)$ e $\vec{v}_2 = (2,4)$ são L.D ou L.I.

Para isso, considere a combinação linear $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$.

Assim,

$$\alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,4) = (0,0)$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Resolva o sistema linear e conclua esse fato.

Exemplo:

Os vetores $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$ e $\vec{v}_3 = (1,5,6)$ são L.D.
Pois:

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,5,6) = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3) = (0,0,0)$$

Portanto, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ e $\alpha_3 = -1$.

Determine o sistema linear associado a essa equação, resolva-o e conclua que os vetores são L.D.

Dependência Linear

Uma outra forma de verificar se os vetores $(a, b, c), (d, e, f)$ e (g, h, i) são L.D. ou L.I é feita da seguinte forma:

Considere a matriz A dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Se $det(A) = 0$, então os vetores são L.D., caso contrário, os vetores são L.I.

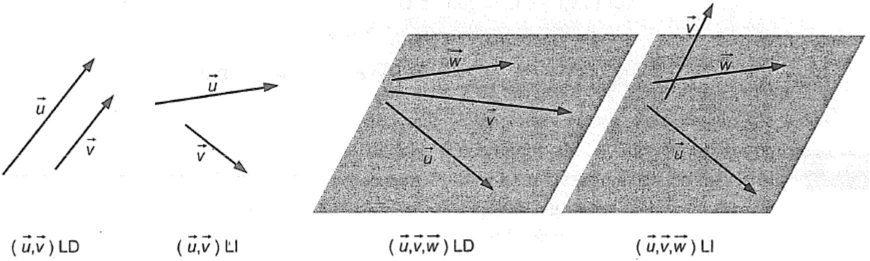
Interpretação Geométrica

Dois vetores do plano são linearmente dependentes se, e somente se eles são paralelos a uma mesma reta.

Caso contrário, eles são linearmente independentes.

Dois vetores do espaço são linearmente dependentes se, e somente se eles são paralelos a um mesmo plano.

Caso contrário, eles são linearmente independentes.


$\vec{u}$
$\vec{v}$
$(\vec{u},\vec{v})$ LD
$\vec{u}$
$\vec{v}$
$(\vec{u},\vec{v})$ LI
$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{u}$
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ LD
$\vec{v}$
$\vec{w}$
$\vec{u}$
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ LI

Base

Sejam $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vetores não nulos. Dizemos que o conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ gera um espaço V, se qualquer elemento $v \in V$ pode ser escrito como

$$v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

para alguns $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos.

Exemplo:

O conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é um gerador do plano $\mathbb{R}^2$.

De fato, seja (x,y) um elemento qualquer do plano. Assim, basta tomar $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ e temos:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

Exemplo:

O conjunto $\{(1,1),(1,0)\}$ também é um gerador do plano $\mathbb{R}^2$.

De fato, seja (x, y) um elemento qualquer do plano. Assim, precisamos determinar α_1 e α_2 em $\mathbb{R}$ tais que

$$(x, y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,0)$$

Novamente caímos em um sistema linear:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_2 \end{cases}$$

Objetivo do sistema linear: Determinar α_1 e α_2 em função de x e y.

Portanto, resolvendo o sistema linear temos $\alpha_1 = x - y$ e $\alpha_2 = y$.

Logo, $\{(1,1),(1,0)\}$ gera o plano.

Exemplo:

O conjunto $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ é um gerador do espaço $\mathbb{R}^3$.

De fato, seja (x,y,z) um elemento qualquer do espaço. Assim, precisamos determinar α_1, α_2 e α_3 em $\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1)$$

Construa o sistema linear associado a equação acima e mostre que esse conjunto gera o espaço.

Base

O conjunto de vetores não nulos $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ é dita ser uma base para um espaço se formarem um conjunto L.I e gerador.

Exemplo:

$E = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, chamada de base canônica do plano.

$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, chamada de base canônica do espaço euclidiano.

Verifique que as afirmações acima são verdadeiras.

Ortogonalidade

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos ortogonais se seus representantes são perpendiculares.

Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$

Exemplo:
Os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ são ortogonais.

Os vetores $(1,1)$ e $(0,1)$ não são ortogonais. Nesse caso, denotamos os vetores por $\vec{u} \not\perp \vec{v}$

Observação: O vetor nulo é ortogonal a todos os vetores.

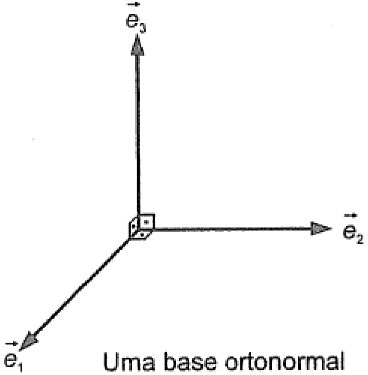
Base ortonormal

Uma base ortogonal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base cujos vetores são dois a dois ortogonais.

Uma base ortonormal é uma base ortogonal cujos elementos são todos unitários.

A partir daqui, utilizaremos a seguinte norma euclidiana:

$$||(a, b, c)|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Uma base ortonormal

Exemplo:

O conjunto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.

Verifique a afirmação acima.

Assim,

$$||\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Calcule a norma do segundo vetor e verifique que essa base é na verdade ortonormal.

Referências

BOULOS, P., CAMARGO, I. Introdução à Geometria Analítica no Espaço, Editora Makron Books, 1997.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. Álgebra Linear, 5a. edição. São Paulo

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. Álgebra Linear, 2a. edição. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1980.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books, 1987.

Contato

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: viniciuswasques@gmail.com

Departamento de Matemática

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`