Trabalho Final da Disciplina de Análise Numérica
Turma 2022

Diferenças Finitas

Felipe dos Santos Minatogau 1 [1], Haziel Sixto Baden Sanchez Hermoza 2 [2]
Ilum Escola de Ciência
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM)
Campinas, Brasil

Resumo. Equações Diferenciais Parciais são equações que envolvem duas ou mais variáveis independentes e suas derivadas parciais relativas a essas variáveis. Essas equações podem descrever uma ampla quantidade de fenômenos da natureza, e nesse trabalho, estaremos verificando a aplicação do método de diferenças finitas para conseguir a solução numérica da equação de calor e a equação de advecção. Esse trabalho é complementado com dois notebooks com os códigos feitos para a implementação do método.

Palavras-chave. Análise numérica, Soluções numéricas, Método de diferenças finitas, Equação de calor, Equação de advecção.

1 Introdução

Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são equações que envolvem duas ou mais variáveis independentes e suas derivadas parciais relativas a essas variáveis. Essas equações podem descrever uma ampla quantidade de fenômenos da natureza, e se diferem de Equações Diferenciais Ordinárias (ODEs) por envolverem derivadas parciais, enquanto ODEs envolvem apenas derivadas ordinárias. Nesse trabalho, estaremos aplicando um método de solução numérica, o método das diferenças finitas, para conseguir a solução de duas equações.

O Método das diferenças finitas é um método de solução numérica para EDPs. Dessa forma, pode ser usado para estimar os valores de uma função que dependem de derivadas parciais com respeito ao espaço e/ou tempo, além de condições de contorno ao longo das bordas do domínio. Assim, o método de diferenças finitas funciona ao substituir as derivadas nas equações diferenciais por aproximações com diferenças finitas. Nesse trabalho, usaremos desse método para conseguir encontrar as soluções numéricas de dois problemas que, na maioria das vezes, não se consegue as soluções reais: a equação de calor e a equação de advecção.

2 Metodologia

Para aplicarmos o método das diferenças finitas, precisamos primeiramente entender o seu conceito e a maneira que aplicaremos suas fórmulas. Assim, conseguimos fazer as aproximações necessárias a fim de obtermos soluções numéricas de nossos problemas.

Como já citado na introdução, esse método de diferenças finitas substitui as derivadas adas EDPs por aproximações de diferenças finitas. Isso cria um sistema algébrico a ser resolvido no lugar da equação diferencial, o que torna todo o problema mais fácil para ser resolvido computacionalmente[1, 2].

[1] felipe220067@ilum.cnpem.br
[2] haziel220065@ilum.cnpem.br

Então, a maneira que trabalharemos para conseguir aplicar o método das diferenças finitas nas EDPs acontecerá nos seguintes passos:

1. Escrever a EDP alvo;
2. Aplicar a aproximação de diferenças finitas nas derivadas da EDP;
3. Montar um sistema linear para resolver de maneira matricial.

Dessa forma, podemos aplicar o método de diferenças finitas para cada uma das equações. O grosso da programação foi resolvido em Python, nos códigos anexados juntos do trabalho.

3 Equação de calor

A equação de calor é uma EDP que descreve a distribuição do calor em uma determinada região em função do tempo, e é dada por:

$$u_t = k \cdot u_{xx} \tag{1}$$

- Onde u é a temperatura em um ponto em determinado espaço tempo;
- t é o tempo;
- k é a constante que depende das propriedades térmicas do meio;
- $_t$ denota a derivada com relação ao tempo;
- $_{xx}$ denota a segunda derivada com respeito ao espaço.

Essa equação vem da Lei da condução de Fourier, que por sua vez, é dada por:

$$q = -k \cdot \nabla T \tag{2}$$

- Onde q é o fluxo de calor
- k é a condutividade térmica
- ∇T é o gradiente da temperatura

Ela nos revela que a variação da condução de calor é proporcional ao gradiente negativo da temperatura. Além disso, mostra que a energia total em um sistema sempre será constante, considerando a conservação de energia. A equação do calor pode ser aplicada em fenômenos físicos em diversas áreas, tais como a difusão do calor através de um sólido e o resfriamento de um objeto quente. Além disso, também pode ser adaptada para problemas biomatemáticos como espalhamento de uma doença e até mesmo a evolução de uma população.

4 Equação de advecção

Essa equação linear de advecção descreve o movimento de um campo escalar u em uma dimensão à medida que é advectado, ou seja, transportado, por um campo vetorial de velocidade constante μ. Ela representa matematicamente como o campo u se propaga ao longo do tempo, seguindo a direção e a magnitude do vetor de velocidade μ. A equação é escrita como:

$$u_t = \mu \cdot u_x \tag{3}$$

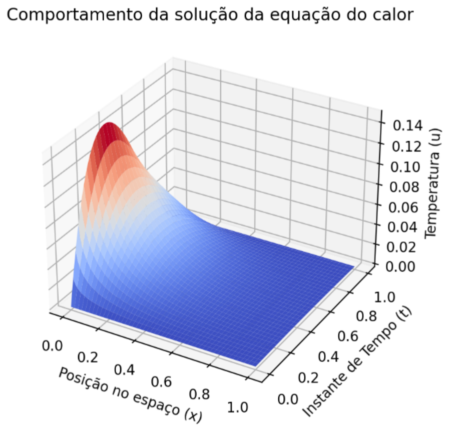

Figura 1: Plot 3D da solução numérica da equação de calor pelo método de diferenças finitas queque conseguimos por meio do módulo pyplot da biblioteca Matplotlib de Python. Aqui pode-se ver claramente a temperatura que obtemos para cada valor de posição no espaço e instante de tempo.

1. u é o campo escalar, ou seja, a quantidade que está sendo transportada pelo campo de velocidade;
2. u_t é a derivada parcial de u em relação ao tempo
3. u_x é a derivada parcial de u em relação ao espaço
4. t é o tempo
5. x é o espaço
6. μ é a velocidade constante

Essa equação apresenta diversas propriedades. A primeira a ser notada é que ela é hiperbólica, isto é, ela tem duas curvas características, as quais mostram a direção na qual a informação se propaga. Outra propriedade importante dessa equação é o fato dela ser linear. Assim, a sua solução pode ser encontrada por meio de uma superposição de várias equações com diferentes condições iniciais. A equação de advecção é relativamente simples, mais ainda assim, pode ser usada para modelar diversos fenômenos físicos, tais como o movimento de partículas em um fluido, o espalhamento de poluentes em um rio e a evolução da frente de temperatura em determinado meio.

5 Contribuições dos autores

Felipe dos Santos Minatogau: Escrita do Código, Redação - revisão e edição, Investigação.
Haziel Sanchez Hermoza: Redação - primeira escrita, Análise formal.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Vinícius F. Wasques por ter nos ajudado e nos guiado durante o projeto; ao nosso colega Marcos P. C. Leite por ter disponibilizado o código que fez do problema

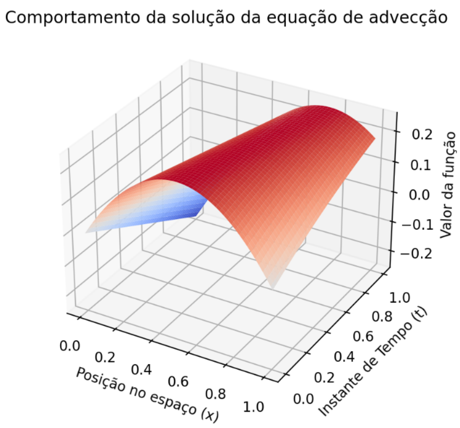

Figura 2: Plot 3D da solução numérica da equação de advecção pelo método de diferenças finitas que conseguimos por meio do módulo pyplot da biblioteca Matplotlib em Python.

no GitHub, no qual nos baseamos para o nosso próprio; e ao nosso colega Tiago M. Bigardi que, apesar de não estar no nosso grupo, se juntou a nós para conseguirmos, ambos os grupos, progredir com o código.

Referências

[1] Vinícius Francisco Wasques. "Notas de Matemática: Análise Numérica". Ilum - Escola de Ciência, mai. de 2023.

[2] Wikipedia contributors. **Finite difference method — Wikipedia, The Free Encyclopedia**. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite_difference_method&oldid=1138837957`. [Online; accessed 25-June-2023]. 2023.