Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

13 de janeiro de 2022

Operações entre conjuntos fuzzy

Vamos definir aqui operações entre conjuntos fuzzy. Mas primeiro, vamos relembrar alguns conceitos da teoria conjuntista clássica. Dados dois **conjuntos clássicos** A e B, temos que a união, intersecção e complementar (no universo U) são dados respectivamente por:

$$A \cup B = \{x \in U : \text{x está em A ou x está em B}\},$$

$$A \cap B = \{x \in U : \text{x está em A e x está em B}\},$$

e

$$A^c = \{x \in U : \text{x não está em A}\}.$$

As funções indicadoras de tais conjuntos são dadas respectivamente pela função máximo, mínimo e a diferença entre a função indicadora do universo pela função indicadora de A. Para visualizar esse fato, veja que

$$\chi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A \cup B \\ 1, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}.$$

Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Consequentemente, $\chi_A(x) = 1$ ou $\chi_B(x) = 1$. Portanto, $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1$. Se $x \notin A \cup B$, então $x \notin A$ e $x \notin B$. Consequentemente, $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$. Portanto, $\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 0$.

Dessa forma, definimos a união pela função indicadora dada por:

$$\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

De modo similar, a intersecção $A \cap B$ é definida pela função indicadora

$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Para definir o conjunto complementar de A, denotado por A^c, precisamos saber o seguinte: Qual é a função indicadora do universo U? Como o conjunto universo U contém todos os elementos, então temos que $\chi_U(x) = 1$, para todo $x \in U$. Por outro lado, como nenhum elemento pertence ao conjunto vazio $\emptyset$, então temos que $\chi_\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in U$. Voltando a definição de complementar, temos que a função indicadora de A^c é dada por

$$\begin{aligned} \chi_{A^c}(x) &= \chi_U(x) - \chi_A(x) \\ &= 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Dados dois conjuntos clássicos A e B, dizemos que $A \subseteq B$ se, e somente se, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$. Para visualizar essa propriedade, considere três casos:

1. $x \in A$ e $x \in B$;
2. $x \notin A$ e $x \notin B$;
3. $x \notin A$ e $x \in B$.

1. Se $x \in A$ e $x \in B$, então $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 1$. Logo, $\chi_A(x) = 1 \leq 1 = \chi_B(x)$.
2. Se $x \notin A$ e $x \notin B$, então $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 0$. Logo, $\chi_A(x) = 0 \leq 0 = \chi_B(x)$.
3. Se $x \notin A$ e $x \in B$, então $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 1$. Logo, $\chi_A(x) = 0 \leq 1 = \chi_B(x)$.

Nesse caso, isto é, se $A \subseteq B$, podemos também definir o complementar de A em B, por

$$\chi_{B/A}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x).$$

Tomando tais definições como motivação, estabelecemos que a união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy são dadas pelas seguintes funções de pertinência.

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},$$

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$$

e

$$\varphi_{A^c}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad \forall x \in U.$$

Além disso, um conjunto fuzzy A está contido em um conjunto fuzzy B ($A \subseteq B$) se, e somente se, $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$, para todo $x \in U$.

Exercício: (para entregar) Considere os seguintes conjuntos fuzzy A (jovens), B (idosos) do universo $U = [0, 120]$, e os conjuntos fuzzy C (baixos) e D (altos) do universo $V = [0, 3]$, cujas funções de pertinência são dadas por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 30] \\ \frac{50-x}{20} & \text{se } x \in [30, 50] \\ 0 & \text{se } x \in [50, 120] \end{cases}, \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 30] \\ \frac{x-30}{20} & \text{se } x \in [30, 50] \\ 1 & \text{se } x \in [50, 120] \end{cases},$$

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0; 1,4] \\ \frac{2-x}{0,6} & \text{se } x \in [1,4; 2] \\ 0 & \text{se } x \in [2; 3] \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0; 1,4] \\ \frac{x-1,4}{0,6} & \text{se } x \in [1,4; 2] \\ 1 & \text{se } x \in [2; 3] \end{cases}$$

a) Faça um gráfico para esboçar as funções de pertinência de A e B;

b) Faça um gráfico para esboçar as funções de pertinência de C e D;

c) Qual a sua pertinência nos conjuntos A e B, segundo esta modelagem?

d) Qual a sua pertinência nos conjuntos C e D, segundo esta modelagem?

e) Qual a sua pertinência no conjunto das pessoas que são jovens e altas?

f) Qual a sua pertinência no conjunto das pessoas que são idosas ou baixas?

g) Como seria o gráfico da função de pertinência $\varphi_{A\cup B}$? Como seria o gráfico da função de pertinência $\varphi_{C\cap D}$?