Método das diferenças finitas

Tiago Marques Bigardi [1], Caio Eduardo Palatin de Souza [2], Gustavo Alves Beneti [3]
Ilum Escola de Ciência
Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM)
Campinas, Brasil

Resumo Neste trabalho, abordamos a significância de se aprender e utilizar o método das diferenças finitas em modelos de equações diferenciais físicos e quimicos, entre outros. Ao aplicarmos estes métodos numéricos, podemos ter uma melhor visualização de comportamentos por aproximações de soluções analíticas para equações diferenciais parciais. A versatilidade e efetividade deste método, provando serem ferramentas indispensáveis para se compreender e avançar o conhecimento de fenômenos naturais.

Palavras-chave. Diferenças Finitas, Equação do Calor, Advecção, Solução Analítica

1 Introdução

Os métodos de diferenças finitas são uma ferramenta numérica muito utilizada para modelar fenômenos físicos, químicos e outros. Eles desempenham um papel fundamental na resolução de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento de sistemas complexos. Aprender e utilizar esse métodos é essencial para entender e prever o comportamento de sistemas, fornecendo informações valiosas para tomas de decisões e o desenvolvimento de soluções. Neste trabalho, abordaremos dois fenômenos abordados por equações diferenciais parciais: O **comportamento do calor** e **advecção**, onde aplicaremos o método das diferenças finitas para a aproximação da solução analítica destas duas equações.

2 O método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas é um método de análise numérica que visa a aproximação do comportamento de soluções para Equações Diferenciais Parciais. Para a aplicação do método, é conveniente a transformação da EDP em um sistema linear, para que assim este possa ser trabalhado de forma matricial e reduzindo o custo computacional [1]

Este método aplica três aproximações diferentes para partições definidas para a função, os quais são:

- Diferença Adiantada $\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$
- Diferença Atrasada $\frac{u(x)-u(x-h)}{h}$
- Diferença Central $\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$

Definido o que é o método das diferenças finitas, abordaremos agora as duas EDPs as quais queremos ter a solução aproximada

[1] tiago220053@ilum.cnpem.br
[2] caio220070@ilum.cnpem.br
[3] gustavo220061@ilum.cnpem.br

3 A equação do calor

A equação do calor é uma *Equação Diferencial Parcial (EDP)* que descreve como a temperatura em um dado ponto irá variar conforme o tempo, além de como esta se propaga no espaço.

$$u_t = \kappa u_{xx} \tag{1}$$

ou, na forma diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

O problema se estende para até termodinâmica, pois, a segunda lei da termodinâmica denota que o calor é transmitido de corpos mais quentes para corpos mais frios, proporcionalmente à diferença de temperatura e a condutividade térmica do material entre os corpos. Isto pode ser observado na equação do calor, onde a frequência $\dot{u}$ a qual o material em um ponto x irá aquecer ou resfriar é proporcional ao quão frio ou quente o material ao redor está. Ademais, o coeficiente **k** também revela propriedades termodinâmicas, pois representa as propriedades condutividade térmica, calor específico e densidade do material.

4 Diferenças Finitas na Equação do Calor

Queremos aproximar a derivada u_{xx} na equação do calor, e para isso, podemos utilizar a diferença finita à esquerda, à direita, ou a centrada para uma aproximação de sua primeira ordem u_x. Escolhemos preferencialmente a centrada por sua iteração mais rápida, logo, u_x vale

$$D_c u_x = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

Na equação do calor, temos o termo u_{xx} que representa a segunda derivada de u, e para calculá-lo, podemos aproximar pela série de Taylor a própria aproximação da primeira derivada por diferenças finitas, resultando em

$$u_{xx} = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}$$

conhecida como diferença finita centrada de segunda ordem.

A equação do calor portanto está na forma

$$u_t = \kappa \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}$$

u_t também pode ser aproximado por diferenças finitas

$$u_t = \frac{u(t-h) - u(t)}{h}$$

rearranjando os termos, a equação do calor ficará na forma

$$u(t) = hk \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2}$$

Como apresentado no problema, a condição inicial para quando t = 0 é

$$u(x,0) = x(1-x)^2 \tag{3}$$

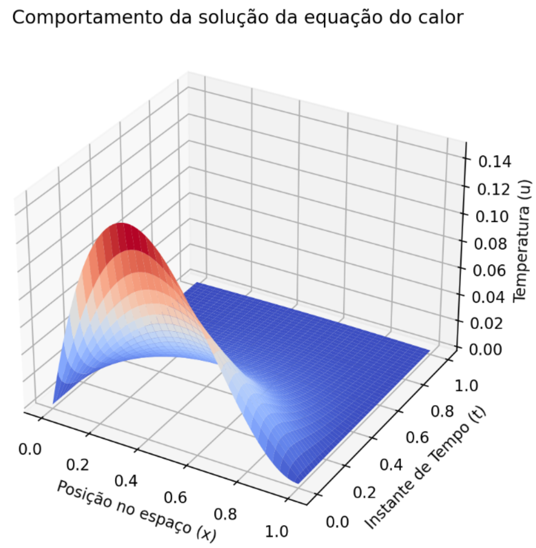

Figura 1: Aproximação da solução da Equação do Calor por diferenças finitas

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

Como aproximação por diferenças finitas, a solução numérica encontrada foi

Comparando com a solução analítica, vemos que o comportamento aproximado se assemelha fielmente

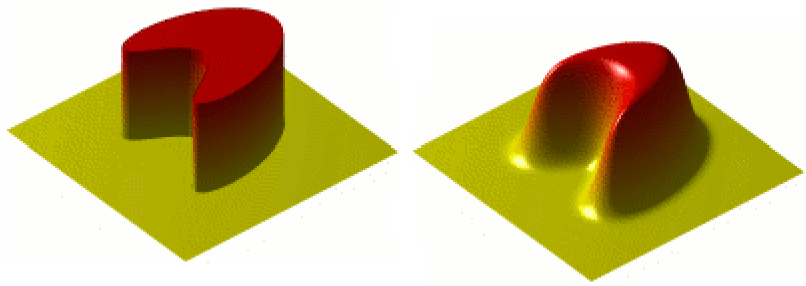

Figura 2: Solução analítica da Equação do Calor

5 Equação de Advecção

A importância dessa equação reside na sua capacidade de prever como uma grandeza se comporta ao longo do tempo e espaço, considerando a influência da velocidade de advecção. Ela permite determinar como uma substância se distribui em diferentes regiões de um sistema, quais regiões serão mais afetadas por sua presença e como ela se espalha ou se concentra ao longo do tempo. No contexto específico da equação de advecção apresentada ($u_t = \mu u_x = 0$), em que μ representa a velocidade de transporte, a compreensão da solução dessa equação permite visualizar como uma distribuição inicial da grandeza se move ao longo de um domínio espacial ao longo do tempo. Isso é fundamental para entender o comportamento de sistemas em que o transporte é um fator determinante. Um exemplo prático pode ser dado na modelagem da dispersão de poluentes em corpos de água. Suponha que houve um vazamento de um produto químico tóxico em um rio. Para entender como esse poluente se dispersará na água ao longo do tempo, podemos usar a equação de advecção.

6 Diferenças finitas na Advecção

Observa-se que, para a equação da advecção, se a distribuição inicial for uma função f(x), então a distribuição num instante t qualquer é igual a $f(x-\mu t)$, ou seja, a função é transladada na direção x com velocidade constante μ. No nosso caso, em que a distribuição inicial é $u(x,0) = x(1-x)$, a solução para um instante t será:

$$u(x,t) = x - x^2 + x\mu t - \mu t + 2x\mu t - \mu^2 t^2 \tag{4}$$

Usando as diferenças finitas atrasadas para aproximar a derivada em x:

$$u_x = \frac{u(x-h) - u(x)}{h} \tag{5}$$

E usando a equação da advecção para aproximar $u(x,t)$ a partir do valor de $u(x,t-h)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t-h) + h \cdot u_t && (6) \\ &= u(t-h) + h \cdot (-\mu \cdot u_x) && (7) \end{aligned}$$

Então, temos:

$$u(t+h) = u(t) + h \cdot \mu \cdot \frac{u(x-h) - u(x)}{h} \tag{8}$$

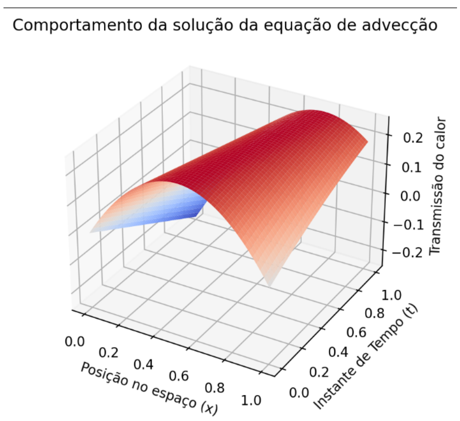

Figura 3: Aproximação numérica da solução da equação de advecção

Neste contexto, explorar a equação de advecção e suas soluções nos permite compreender fenômenos complexos, desde a propagação de ondas até a disseminação de poluentes ou a disseminação de espécies em ecossistemas. Essa equação é uma ferramenta poderosa para modelar, analisar e prever o comportamento de substâncias e propriedades transportadas por meio de fluidos, desempenhando um papel fundamental na compreensão dos processos físicos, químicos e biológicos em nosso mundo.

7 Discussão

Tanto a equação de calor quanto a equação de advecção são importantes equações diferenciais parciais que descrevem a evolução de quantidades físicas ao longo do tempo. Embora sejam equações distintas, elas compartilham algumas semelhanças no âmbito numérico, que são essenciais para sua resolução.

Uma das primeiras semelhanças está na discretização do domínio. Para resolver essas equações numericamente, é necessário dividir o domínio espacial em uma malha, composta por células ou pontos discretos. Essa discretização permite representar a quantidade física em cada ponto da malha, facilitando os cálculos.

Outro ponto comum entre essas equações é o uso de esquemas de diferenças finitas. Esses esquemas aproximam as derivadas parciais das equações por diferenças entre os valores discretizados nos pontos da malha. Existem diferentes tipos de esquemas de diferenças finitas, como os explícitos, que calculam os valores futuros usando apenas informações no passado, e os implícitos, que utilizam informações presentes e futuras para determinar os valores futuros. No caso do método de diferenças finitas utilizado, na equação de calor, a discretização espacial é realizada em uma malha uniforme, enquanto para a equação de advecção, são usados esquemas de diferenças finitas adequados dependendo da direção do movimento. A discretização temporal é aplicada em ambos os casos para avançar a solução no tempo.

8 Contribuições dos autores

- **Tiago Marques Bigardi:** Análise formal, Programação da equação do calor, Redação Diferenças finitas, correção do código da equação de advecção.
- **Caio Eduardo Palatin de Souza:** Resumo, Introdução, Discussão, Redação das duas equações.
- **Gustavo Alves Beneti:** Programação da equação de advecção, correção do código da equação do calor.

9 Agradecimentos

Agradecemos ao professor Vinícius F. Wasques por ter nos ajudado e nos guiado durante o projeto; ao nosso colega Marcos P. C. Leite por ter disponibilizado o código que fez do problema no GitHub, no qual nos baseamos para o nosso próprio; e ao nosso colega Felipe dos Santos Minatogau que, apesar de não estar no nosso grupo, se juntou a nós para conseguirmos, ambos os grupos, progredir com o código.

Referências

[1] Vinícius Francisco Wasques. "Notas de Matemática: Análise Numérica". Ilum - Escola de Ciência, mai. de 2023.