Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

21 de janeiro de 2022

Cálculo de α-níveis e os números fuzzy

Exemplo: Considere o conjunto fuzzy A dado pela seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{2}, & x \in [4,6] \\ \frac{8-x}{2}, & x \in [6,8] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Lembrando que os α-níveis são dados por $[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$, para $0 < \alpha \leq 1$ e $[A]^0 = \overline{supp(A)}$.

Calculemos então os α-níveis de A. Para $0 < \alpha \leq 1$, temos

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-4}{2} \geq \alpha, \quad \text{se } x \in [4,6],$$

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{8-x}{2} \geq \alpha, \quad \text{se } x \in [6,8].$$

Portanto,

$$\frac{x-4}{2} \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x-4 \geq 2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 2\alpha + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\alpha + 4 \leq x \leq 6, \quad \text{se } x \in [4,6],$$

$$\frac{8-x}{2} \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad 8-x \geq 2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 8 - 2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad 6 \leq x \leq 8 - 2\alpha, \quad \text{se } x \in [6,8].$$

Com isso, concluímos que os α-níveis são dados por

$$[A]^\alpha = [2\alpha + 4, 6] \cup [6, 8 - 2\alpha] = [2\alpha + 4, 8 - 2\alpha], \quad \forall \alpha \in (0,1].$$

Para o 0-nível, temos que $supp(A) = (4,8)$, e assim, $\overline{(4,8)} = [4,8]$.

Note que o 0-nível coincide com a definição de $[A]^\alpha$, para $0 < \alpha \leq 1$, substituindo $\alpha = 0$. Isso sempre ocorre para números fuzzy triangulares. Ainda mais, os α-níveis obtidos pela união dos intervalos (como feito acima) sempre resultará em um intervalo.

A mesma observação feita acima vale para números fuzzy trapezoidais.

Exemplo: Considere o seguinte conjunto fuzzy A, determinado pela seguinte função de pertinência.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Note que, $supp(A) = (0,1)$, e portanto, $[A]^0 = \overline{(0,1)} = [0,1]$. Para $0 < \alpha \leq 1$, temos que

$$\varphi_A(x) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad 4(x - x^2) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad -4x^2 + 4x - \alpha \geq 0$$

Pela fórmula quadrática temos que:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16\alpha}}{-8} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16(1-\alpha)}}{-8} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{(1-\alpha)}}{-8}$$

$$\iff \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{(1-\alpha)}}{2}$$

Obtemos então duas raízes:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha}}{2}$$

Portanto, os α-níveis de A são dados por

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1-\alpha}}{2}\right].$$

Exemplo: Provemos que $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$ e quaisquer conjuntos fuzzy A e B. Se $A \cap B = \emptyset$ não há nada o que provar. Suponha $A \cap B \neq \emptyset$.

(Ida) Seja $x \in [A \cap B]^\alpha$, logo $\varphi_{A \cap B}(x) \geq \alpha$. Isto é, $\min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha$. Note que

$$\varphi_A(x) \geq \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha \Rightarrow \varphi_A(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [A]^\alpha$$

e

$$\varphi_B(x) \geq \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha \Rightarrow \varphi_B(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in [B]^\alpha.$$

Portanto, $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$. Assim, $[A \cap B]^\alpha \subseteq [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

(Volta) Seja $x \in [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$. Logo, $\varphi_A(x) \geq \alpha$ e $\varphi_B(x) \geq \alpha$. Portanto,

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \geq \alpha.$$

Logo, $x \in [A \cap B]^\alpha$, e assim, $[A]^\alpha \cap [B]^\alpha \subseteq [A \cap B]^\alpha$, concluindo a igualdade.

Exercícios (para entregar):

1. Mostre que $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$, para qualquer $\alpha \in [0,1]$, e para quaisquer conjuntos fuzzy A e B.
2. Calcule os α-níveis de $A \cap B$, sendo $A = (1;2;3)$ e $B = (2;3;4)$ números fuzzy triangulares.
3. Determine os α-níveis do conjunto fuzzy abaixo chamado de *número fuzzy Gaussiano*.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} e^{\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right)}, & \text{se } u-\delta \leq x \leq u+\delta \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases},$$

em que $\delta > 0$ é um valor fixo.