Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

31 de janeiro de 2022

Princípio de extensão de Zadeh

Hoje falaremos sobre o princípio de extensão de Zadeh, que estende o conceito de função clássica para uma função fuzzy. Uma função fuzzy pode ser determinada de várias formas:

- $F : \mathbb{R}_F \to \mathbb{R}_F$. **Exemplo:** $F((a;b;c)) = 2(a;b;c)$.
- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_F$. **Exemplo:** $F(x) = x(a;b;c)$.

A extensão de Zadeh produz uma função fuzzy do primeiro tipo, mas para isso é necessário ter em mãos uma função clássica $f : X \to Y$. Assim, dado um subconjunto fuzzy $A \subseteq X$, temos que o princípio de extensão de Zadeh produz o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Y . Em outras palavras, esse princípio produz uma função do tipo $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$.

Dessa forma, Zadeh propos a seguinte definição:

Definição: Seja $f : X \to Y$ uma função clássica e $A \subseteq X$ subconjunto fuzzy. O conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Y é definido pela seguinte função de pertinência:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_{f(x)=y} \varphi_A(x)$$

É importante observar que, se não existir $x \in X$ de tal forma que $f(x) = y$, então atribuímos a pertinência igual a 0. Para isso é necessário estudar a pré-imagem de y, isto é, $f^{-1}(y)$.

A fim de simplificar a notação, é comum ver nas referências, o seguinte:

$$\hat{f}(A)(y) = \sup_{f(x)=y} A(x)$$

Exemplo: Sabe-se que um conjunto fuzzy A tem a seguinte propriedade: $\varphi_A(-2) = 0.5$, $\varphi_A(-1) = 0.25$, $\varphi_A(0) = 1$, $\varphi_A(1) = 0.25$, $\varphi_A(2) = 0.45$, $\varphi_A(3) = 0.75$. Considere a função $f(x) = 2x$.

- Qual a pertinência de $y = 6$ no conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$?

  Note que $x = 3$ é o único elemento na pré-imagem de $y = 6$. Então,

  $$\hat{f}(A)(6) = \sup_{f(x)=6} A(x) = \sup\{A(3)\} = \sup\{0.75\} = 0.75.$$

Agora considere $f(x) = x^2$.

- Qual a pertinência de $y = 9$ no conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$?

  Note que $x = 3$ é o único elemento na pré-imagem de $y = 9$. Então,

  $$\hat{f}(A)(9) = \sup_{f(x)=9} A(x) = \sup\{A(3)\} = \sup\{0.75\} = 0.75.$$

- Qual a pertinência de $y = 1$ no conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$? Nesse caso temos dois elementos na pré-imagem de $y = 1$, isto é, $x = -1$ e $x = 1$. Assim,

  $$\hat{f}(A)(1) = \sup_{f(x)=1} A(x) = \sup\{A(-1), A(1)\} = \sup\{0.25, 0.25\} = 0.25$$

- Qual a pertinência de $y = 4$ no conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$? Nesse caso temos dois elementos na pré-imagem de $y = 4$, isto é, $x = -2$ e $x = 2$. Assim,

$$\hat{f}(A)(4) = \sup_{f(x)=4} A(x) = \sup\{A(-2), A(2)\} = \sup\{0.5, 0.45\} = 0.5$$

É possível determinar os α-níveis da extensão de Zadeh de um conjunto fuzzy, através de uma função f. Se a função f for contínua e bijetiva, então os α-níveis de $\hat{f}(A)$ são dados por:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Em termos gerais, é possível determinar os α-níveis da seguinte forma:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = \left[\inf_{x \in [A]^\alpha} f(x), \sup_{x \in [A]^\alpha} f(x) \right], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Exemplo: Considere o seguinte conjunto fuzzy A, dado por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Os α-níveis de A são dados por

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right].$$

Considere a seguinte função clássica $f(x) = x^2$. Como a função f, restrita ao intervalo $[0, 1]$ é uma função contínua e bijetiva, então temos que

$$\begin{aligned} [\hat{f}(A)]^\alpha &= \left[f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}) \right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}) \right)^2, \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Exemplo: Considere o número fuzzy triangular $A = (-1; 0; 1)$ e a função clássica $f(x) = x^2$. Note que f, restrita ao intervalo $[-1, 1]$ não é injetora. Portanto, a primeira expressão para o cálculo de α-níveis não pode ser utilizada.

Perceba que de fato isso é verdade. Os α-níveis de A são dados por $[A]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$. Se fosse possível a primeira expressão, então teríamos:

$$\begin{aligned} [\hat{f}(A)]^\alpha &= [f(-1 + \alpha), f(1 - \alpha)] \\ &= [(-1 + \alpha)^2, (1 - \alpha)^2] \\ &= [\alpha^2 - 2\alpha + 1, \alpha^2 - 2\alpha + 1] \end{aligned}$$

Note que a expressão acima não é compatível para conjuntos fuzzy. Lembre-se que todo conjunto fuzzy A deve satisfazer o seguinte: Se $\beta \geq \alpha$, então $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$. Perceba agora que

$$[\hat{f}(A)]^1 = [0, 0] \not\subset [1, 1] = [\hat{f}(A)]^0.$$

Dessa forma é preciso resolver o problema utilizando a segunda expressão, isto é,

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = \left[\inf_{x\in[-1+\alpha,1-\alpha]} x^2, \sup_{x\in[-1+\alpha,1-\alpha]} x^2\right], \quad \forall\alpha \in [0,1].$$

A função $f(x) = x^2$ vai assumir os valores de máximo e mínimo em três possível valores: $x \in \{-1+\alpha, 1-\alpha, 0\}$. Como $f(-1+\alpha) = f(1-\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 = f(0)$, segue que:

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = \left[0, \alpha^2 - 2\alpha + 1\right], \quad \forall\alpha \in [0,1].$$

Exercício (para entregar): Determine os α-níveis da extensão de Zadeh do conjunto fuzzy

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x-x^2), & \text{se } x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

pela função clássica $f(x) = x^2$.