Integrais Múltiplas

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

20 de abril de 2020

Revisão integral

Primitivas de funções

Integral	Primitiva da função
$\int cdx$	cx+k
$\int \frac{1}{x}dx$	ln(x)+k
$\int e^x dx$	e^x+k
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$+k
$\int sen(x)dx$	-cos(x)+k
$\int cos(x)dx$	sen(x)+k

Propriedades

1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$

3) Integrais definidas

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

em que $F'(x) = f(x)$.

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx =$

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} =$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos(u)du =$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:
$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos(u)du = \frac{1}{2}sen(u) + k$

Métodos de integração

1) Substituição

$$\int (f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)),$$

em que $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

Exemplo:

$\int cos(2x)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos(u)du = \frac{1}{2}sen(u) + k$

$$\int cos(2x)dx = \frac{1}{2}sen(2x) + k$$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:
$\int ln(x)dx =$

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx =$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx = xln(x) - \int 1dx =$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + k$

Métodos de integração

2) Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ou também

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplo:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{1}{x}xdx = xln(x) - \int 1dx = xln(x) - x + k$

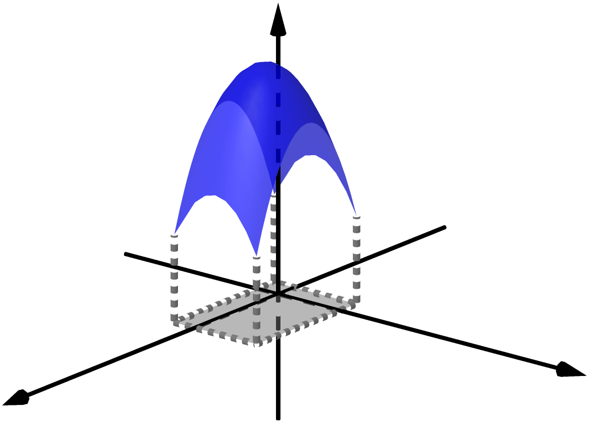
$$\int cos(2x)dx = \frac{1}{2}sen(2x) + k$$

Integrais

- As integrais podem ser utilizadas para calcular área de regiões bidimensionais, isto é, área de triângulos, quadrados, e entre outros polígonos.

- Podemos utilizar integrais múltiplas também para esse fim. Mais que isso, serão usadas para calcular volume de sólidos!

Integrais múltiplas



Como calcular?

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

ou

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Propriedades

1)

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

2)

$$\int\int_A (f(x,y) + g(x,y))dA = \int\int_A f(x,y)dydx + \int\int_A g(x,y)dA$$

3)

$$\int\int_A cf(x,y)dA = c\int\int_A f(x,y)dA$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1^o: $\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º: $\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right)$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

$$\mathbf{1^o:} \int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

$$\mathbf{1^o:}\ \int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º: $\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$

2º: $\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º: $\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$

2º: $\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right)$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º: $\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$

2º: $\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) = 3\frac{4}{2}$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º: $\displaystyle\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$

2º: $\displaystyle\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) = 3\frac{4}{2} = 6$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º: $\displaystyle\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$

2º: $\displaystyle\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) = 3\frac{4}{2} = 6$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y)) dxdy$$

.

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º: $\displaystyle\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º: $\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{2}(x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º: $\int_{0}^{2}(x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$
$= \frac{8}{3}sen(y)$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º: $\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$
$= \frac{8}{3} sen(y)$

2º: $\int_1^2 \frac{8}{3} sen(y)dy = -\frac{8}{3}(cos(y))\Big|_0^2$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º: $\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$
$= \frac{8}{3} sen(y)$

2º: $\int_1^2 \frac{8}{3} sen(y)dy = -\frac{8}{3}(cos(y))\Big|_0^2 = -\frac{8}{3}(cos(2) - cos(1))$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º: $\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$
$= \frac{8}{3} sen(y)$

2º: $\int_1^2 \frac{8}{3} sen(y)dy = -\frac{8}{3}(cos(y))\Big|_0^2 = -\frac{8}{3}\left(cos(2) - cos(1)\right)$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int\int_A (4xy + 6x)dA$$

, sendo A a região dada por

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int\int_A (4xy + 6x)dA$$

, sendo A a região dada por

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4 \;\text{ e }\; 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx$$

Exemplo:

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx \quad =$$

Exemplo:

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx = \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_0^1 \right) dx$$

$$=$$

Exemplo:

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx = \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_0^1 \right) dx$$

$$= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx$$

$$=$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x) dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_0^1 \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_2^4 dx \\
&=
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x) dy dx &= \int_2^4 \left(4x \frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_0^1 \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_2^4 dx \\
&= (4)^2 + 3(4)^2 - ((2)^2 + 3(2)^2) \\
&=
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_0^1 \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_2^4 dx \\
&= (4)^2 + 3(4)^2 - ((2)^2 + 3(2)^2) \\
&= 16 + 3.16 - (4 + 3.4) \\
&=
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x) dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_0^1 \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_2^4 dx \\
&= (4)^2 + 3(4)^2 - ((2)^2 + 3(2)^2) \\
&= 16 + 3.16 - (4 + 3.4) \\
&= 16 + 48 - 16 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

Exercícios propostos

Exercício 1, página 83 da apostila Unip

Exercício 2, página 88 da apostila Unip

- Os exercícios em preto são para praticar.
- Os exercícios em vermelho são para entregar.

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: https://viniciuswasques.github.io/home/