Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

14 de janeiro de 2022

Propriedades de operações entre conjuntos fuzzy

Na última aula fizemos um exercício sobre modelagem do conjunto fuzzy das pessoas jovens e idosas. É possível perceber que $\varphi_A(x) + \varphi_B(x) = 1$. Isso significa que podemos escrever o seguinte:

$$\varphi_A(x) = 1 - \varphi_B(x) \quad \text{e também} \quad \varphi_B(x) = 1 - \varphi_A(x).$$

Em outras palavras, os conjuntos fuzzy A e B são complementares em U. Isto é, $A = B^c$ e $B = A^c$. Vimos através do item g) do exercício da última aula, que a função de pertinência de $A \cap B$ é não nula. Portanto, a intersecção é diferente do vazio. Com isso temos que para conjuntos fuzzy

$$A \cap A^c \neq \emptyset.$$

Na teoria conjuntista clássica temos que $A \cup A^c = U$, para qualquer conjunto A. Por outro lado, na teoria de conjuntos fuzzy essa propriedade não é válida, isto é, $A \cup A^c \neq U$, como é possível perceber no item g) do exercício da última aula. Veja que no intervalo entre 30 e 50, a função de pertinência da união $A \cup B$ é diferente da função constante igual a 1.

Pergunta: Quais propriedades da teoria clássica também são válidas na teoria de conjuntos fuzzy?

Propriedades: Sejam A, B e C conjuntos fuzzy quaisquer. Então são válidas as seguintes propriedades:

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $\emptyset \subseteq A \subseteq U$;
4. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$;
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
7. $A \cup A = A$;
8. $A \cap A = A$;
9. $\emptyset \cup A = A$;
10. $U \cap A = A$;
11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
12. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
13. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **(Leis de De Morgan)**.

Demonstração:

1. Note que $\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \max\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} = \varphi_{B\cup A}(x)$.

2. Análogo ao item anterior.

3. Veja que $\varphi_\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in U$. Também, $\varphi_U(x) = 1$, para todo elemento $x \in U$. Agora perceba que para qualquer conjunto fuzzy A, temos que $0 \leq \varphi_A(x) \leq 1$, uma vez que $\varphi_A : U \to [0, 1]$. Sendo assim,
$$\varphi_\emptyset(x) = 0 \leq \varphi_A(x) \leq 1 = \varphi_U(x).$$
Portanto, $\emptyset \subseteq A \subseteq U$.

4. Exercício.

5. Temos que $\varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) = \max\{\varphi_{A\cup B}(x), \varphi_C(x)\} = \max\{(\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}), \varphi_C(x)\}$. Por outro lado, $\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_{B\cup C}(x)\} = \max\{\varphi_A(x), (\max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\})\}$. Vamos supor então os seguintes casos:

   (a) $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_C(x)$

   (b) $\varphi_A(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_B(x)$

   (c) $\varphi_B(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_C(x)$

   (d) $\varphi_B(x) \leq \varphi_C(x) \leq \varphi_A(x)$

   (e) $\varphi_C(x) \leq \varphi_B(x) \leq \varphi_A(x)$

   (f) $\varphi_C(x) \leq \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$

   Vejamos o caso (a). Assim,
$$\varphi_{(A\cup B)\cup C}(x) = \max\{(\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}), \varphi_C(x)\} = \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\} = \varphi_C(x).$$
   Por outro lado,
$$\varphi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \max\{\varphi_A(x), (\max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\})\} = \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\} = \varphi_C(x).$$
   Analogamente, pode-se mostrar para os demais casos. Logo, segue a igualdade.

Exercício (para entregar): Demonstre as propriedades 4, 7, 10 e 13.

Dica para o item 13: o máximo entre duas funções pode ser escrito da seguinte forma:
$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right)$$
e o mínimo é pode ser escrito como
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right)$$