Aula de exercícios

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Departamento de Matemática
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.

https://viniciuswasques.github.io/home/

email: viniciuswasques@gmail.com

Teorema de Bachet-Bézout para polinômios

Se $f(x) = g(x) = 0$, então o resultado segue de modo trivial. Suponha então que os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ sejam não nulos.

Seja o conjunto

$$I(f,g) = \{f(x)m(x) + g(x)n(x) | m(x), n(x) \in K[x]\}.$$

Seja $d(x) = f(x)m_0(x) + g(x)n_0(x)$ o polinômio mônico de menor grau no conjunto $I(f,g)$.

Veja que $d(x)$ divide todos os polinômios de $I(f,g)$. De fato, dado $p(x) = f(x)m(x)+g(x)n(x)$, sejam $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

com $deg\ r < deg\ d$ (fato esse garantido pelo algoritmo da divisão).

Assim, $r(x) = p(x)-d(x)q(x) = f(x)m(x)+g(x)n(x)-(f(x)m_0(x)+g(x)n_0(x))q(x)$, logo

$r(x) = f(x)(m(x) - m_0(x)q(x)) + g(x)(n(x) - n_0(x)q(x)) \in I(f,g)$

Por outro lado, seja a o coeficiente líder de $r(x)$. Assim, se $r(x) \in I(f,g)$, também temos que $\bar{r}(x) = \frac{1}{a}r(x) \in I(f,g)$.

Portanto, temos que $deg\ \bar{r} = deg\ r < deg\ d$ e mais, $\bar{r}$ é mônico. Absurdo, pois o polinômio d é o único com tal propriedade.

Portanto, $r(x) = 0$ e temos que $d(x)$ divide todos os polinômios de $I(f, g)$.

Em particular, como $f(x)$ e $g(x)$ são elementos de $I(a, b)$ temos que $d(x)$ divide cada um deles. Logo, $deg\ d(x) \leq deg\ mdc(f(x), g(x))$.

Por outro lado, $mdc(f(x), g(x))$ divide $f(x)$ e $g(x)$, consequentemente, divide $f(x)m_0(x) + g(x)n_0(x) = d(x)$. Logo, $deg\ mdc(f(x), g(x)) \leq deg\ d(x)$.

Portanto, segue que $deg\ mdc(f(x), g(x)) = deg\ d(x)$ e assim,

$$f(x)m(x) + g(x)n(x) = d(x),$$

em que $d(x)$ é o máximo divisor comum entre $f(x)$ e $g(x)$.