

# Matrizes

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

8 de abril de 2020

# Matrizes

## Definição

*Uma matriz de ordem  $m \times n$  é uma tabela de números reais dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas*

# Matrizes

## Definição

*Uma matriz de ordem  $m \times n$  é uma tabela de números reais dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas*

## Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

# Tipos de matrizes

**Matrizes Quadradas** ( $m=n$ )  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

**Matrizes Retangulares** ( $m \neq n$ )  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

**Matrizes Linhas** ( $m=1$ )  $A = [1 \ 2 \ 0 \ 4 \ -3]_{1 \times 5}$

**Matrizes Colunas** ( $n=1$ )  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$

# Tipos de matrizes

**Matrizes Quadradas** ( $m=n$ )  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

**Matrizes Retangulares** ( $m \neq n$ )  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

**Matrizes Linhas** ( $m=1$ )  $A = [1 \ 2 \ 0 \ 4 \ -3]_{1 \times 5}$

**Matrizes Colunas** ( $n=1$ )  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$

# Tipos de matrizes

**Matriz Identidade** É a matriz que possui o valor 1 na sua diagonal principal, e o valor 0 em suas demais entradas.

**Exemplo:**

$$I_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{1 \times 1} = [1]$$

# Tipos de matrizes

**Matriz Nula** É a matriz que possui o valor 0 em todas as suas entradas.

**Exemplo:**

$$0_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Definição

*Duas matrizes  $A$  e  $B$  são iguais se, e somente se seus elementos correspondentes são iguais, isto é,  $a_{ij} = b_{ij}$ .*

## Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & 10 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$



# Operações

**Soma:** A soma entre as matrizes A e B é dada pela soma dos elementos correspondentes de A e B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1+4 & 2+0 \\ -3+3 & 0+7 \end{bmatrix}}_C$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

**Observação:** Só é possível somar matrizes de mesma ordem!

# Operações

**Subtração:** A subtração entre as matrizes A e B é dada pela subtração dos elementos correspondentes de A e B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_A - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-4 & 2-0 \\ -3-3 & 0-7 \end{bmatrix}}_C$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

# Operações

**Multiplicação:** A multiplicação entre as matrizes A e B é dada pela multiplicação das linhas de A pelas colunas de B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4 + 2.3 & 1.0 + 2.7 \\ -3.4 + 0.3 & -3.0 + 0.7 \end{bmatrix}}_C$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

# Operações

**Multiplicação:** A multiplicação entre as matrizes A e B é dada pela multiplicação das linhas de A pelas colunas de B.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4 + 2.3 & 1.0 + 2.7 \\ -3.4 + 0.3 & -3.0 + 0.7 \end{bmatrix}}_C$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

**Cuidado!** Em geral  $A \cdot B \neq B \cdot A$

# Matriz Inversa

## Definição

*A matriz quadrada  $A$  é inversível (não singular), se existir uma única matriz  $B$  tal que  $A.B = B.A = I$ , sendo  $I$  a matriz identidade.*

## Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

# Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (I):  $3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$



# Matriz Inversa

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (I):  $3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Substituindo na primeira equação de (I):  $\frac{1}{3} - c = 1 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$

# Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

# Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (II):  $3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

# Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (II):  $3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Substituindo na primeira equação de (II):  $\frac{1}{3} - d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

# Matriz Inversa

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad (I) \qquad \begin{cases} b - d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases} \quad (II)$$

Somando as duas equações do sistema (II):  $3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

Substituindo na primeira equação de (II):  $\frac{1}{3} - d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

Portanto,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Quando existir a matriz  $B$ , denotamos  $B = A^{-1}$

# Obrigado pela atenção!