Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

4 de fevereiro de 2022

T-normas e S-normas

Nosso objetivo daqui pra frente é trabalhar com regras do seguinte tipo:

“Se x é A e y é B, então z é C.”

ou

“Se x é A ou y é B, então z é C.”

Até aqui já vimos como trabalhar as expressões “x é A”. Agora é necessário aprender os conectivos lógicos *e* e *ou*. Além disso, precisamos aprender a trabalhar com “Se....então” do ponto de vista da lógica fuzzy.

Na lógica clássica os conectivos *e* e *ou* são definidos pelos operadores *mínimo* e *máximo*, respectivamente. Por exemplo, a afirmação “Se x é A **e** y é B...” fica $\min(\chi_A(x), \chi_B(y))$. Para estender tais operadores lógicos, utilizamos o conceito de t-normas e s-norma (ou também chamado de t-conorma).

Definição: Dizemos que o operador $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ é uma t-norma, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro: $t(1,x) = 1\ t\ x = x$.
2. Comutativa: $t(x,y) = x\ t\ y = y\ t\ x = t(y,x)$.
3. Associativa: $t(x, t(y,z)) = t(t(x,y), z)$.
4. Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $t(x,y) \leq t(u,v)$.

Note que o operador mínimo (que generaliza o conectivo lógico clássico *e*) é um exemplo de t-norma. Pois,

1. $\min\{1,x\} = x$, pois $x \in [0,1]$ e o maior valor possível que x poderia assumir é 1.
2. Como $\min\{x,y\} = \min\{y,x\}$, para quaisquer $x, y \in [0,1]$.
3. Suponha todos os casos, isto é,

   (a) $x \leq y \leq z$
   (b) $x \leq z \leq y$
   (c) $y \leq x \leq z$
   (d) $y \leq z \leq x$
   (e) $z \leq y \leq x$
   (f) $z \leq x \leq y$

   Faremos o caso (a) e os outros seguem de forma análoga. Assim,

   $$\min(x, \min(y,z)) = \min(x,y) = x.$$

   Por outro lado,

   $$\min(\min(x,y), z) = \min(x,z) = x.$$

   Logo, $t = \min$ é associativo.

4. Sejam $x \leq u$ e $y \leq v$. Assim, temos os seguintes casos:

   (a) $x \leq y$ e $u \leq v$

   (b) $x \leq y$ e $v \leq u$

   (c) $y \leq x$ e $u \leq v$

   (d) $y \leq x$ e $v \leq u$

   Faremos o caso (a) e os outros seguem de modo análogo.

   $$\min(x, y) = x.$$

   Por outro lado,

   $$\min(u, v) = u.$$

   Portanto, por hipótese, temos que:

   $$\min(x, y) = x \leq u = \min(u, v).$$

   Portanto, o operador mínimo satisfaz a propriedade de monotonicidade.

Com isso mostramos que o operador mínimo é uma t-norma. Esse operador é denotado por $t_\wedge$ (ou em algumas referências, por $t_{\min}$).

Exemplo: O operador t_p definido por $t_p(x, y) = xy$ é chamado de t-norma do produto.

Exemplo: O operador t_L definido por $t_L = \max(0, x + y - 1)$ é chamado de t-norma de Lukasiewcz.

Exemplo: O operador t_d definido por

$$t_d(x, y) = \begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamado de t-norma drástica.

É possível provar que toda t-norma é limitada pelas t-normas do mínimo e da drástica, isto é, para toda t-norma t, vale o seguinte:

$$t_d(x, y) \leq t(x, y) \leq t_\wedge(x, y)$$

Definição: Dizemos que o operador $s : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ é uma s-norma, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro: $s(0, x) = 0\ s\ x = x$.

2. Comutativa: $s(x, y) = x\ s\ y = y\ s\ x = s(y, x)$.

3. Associativa: $s(x, s(y, z)) = s(s(x, y), z)$.

4. Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $s(x, y) \leq s(u, v)$.

Note que o operador máximo (que generaliza o conectivo lógico clássico *ou*) é um exemplo de s-norma.

1. Note que $\max(0, x) = x$, porque $x \in [0, 1]$, e portanto, 0 é o menor valor que x pode assumir, isto é, $0 \leq x$.

2. Também, $\max(x, y) = \max(y, x)$.

3. Suponha todos os casos, isto é,

   (a) $x \leq y \leq z$

   (b) $x \leq z \leq y$

   (c) $y \leq x \leq z$

   (d) $y \leq z \leq x$

   (e) $z \leq y \leq x$

   (f) $z \leq x \leq y$

   Faremos o caso (a) e os outros seguem de forma análoga. Assim,

   $$\max(x, \max(y, z)) = \max(x, z) = z.$$

   Por outro lado,

   $$\max(\max(x, y), z) = \max(y, z) = z.$$

4. Sejam $x \leq u$ e $y \leq v$. Assim, temos os seguintes casos:

   (a) $x \leq y$ e $u \leq v$

   (b) $x \leq y$ e $v \leq u$

   (c) $y \leq x$ e $u \leq v$

   (d) $y \leq x$ e $v \leq u$

   Faremos o caso (a) e os outros seguem de modo análogo.

   $$\max(x, y) = y.$$

   Por outro lado,

   $$\max(u, v) = v.$$

   Assim, temos que

   $$\max(x, y) = y \leq v = \max(u, v).$$

   Portanto, segue a propriedade de monotonicidade.

Com isso provamos que o operador máximo é um exemplo de s-norma, e é denotado por $s_\vee$ (ou também, denotado por $s_{\max}$).

Exemplo: O operador s_L, chamado de s-norma de Lukasiewcz é definido por $s(x, y) = \min(1, x + y)$.

Exemplo: O operador s_s chamado de s-norma da soma é definido por $s_s(x, y) = x + y - xy$.

Exercício (para entregar:

1. Prove que os operadores t_p e t_L são de fato t-normas.

2. Prove que os operadores s_L e s_s são de fato s-normas.

3. Um operador $\eta : [0,1] \to [0,1]$ é chamado de negação se satisfizer as seguintes propriedades:

   (a) $\eta(1) = 0$ e $\eta(0) = 1$.

   (b) η é descrescente.

   Mostre que $\eta_1(x) = 1 - x$ e $\eta_2(x) = \frac{1-x}{1+}$ são negações.

4. Dizemos que uma t-norma e uma s-norma são duais em relação a uma negação η (denotamos por $(t, s)_\eta$), se satisfazem as leis de De Morgan, isto é,

$$\begin{aligned} \eta(t(x,y)) &= s(\eta(x), \eta(y)) \\ \eta(s(x,y)) &= t(\eta(x), \eta(y)). \end{aligned}$$

   Mostre que:

   (a) $(t_\wedge, s_\vee)_{\eta_1}$ são duais.

   (b) $(t_L, s_L)_{\eta_1}$ são duais.