

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

# Notas de aula

## Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques  
viniciuswasques@gmail.com

4 de fevereiro de 2022

# T-normas e S-normas

Nosso objetivo daqui pra frente é trabalhar com regras do seguinte tipo:

“Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$ .”

ou

“Se  $x$  é  $A$  ou  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$ .”

Até aqui já vimos como trabalhar as expressões “ $x$  é  $A$ ”. Agora é necessário aprender os conectivos lógicos *e* e *ou*. Além disso, precisamos aprender a trabalhar com “Se....então” do ponto de vista da lógica fuzzy.

Na lógica clássica os conectivos *e* e *ou* são definidos pelos operadores *mínimo* e *máximo*, respectivamente. Por exemplo, a afirmação “Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ ...” fica  $\min(\chi_A(x), \chi_B(y))$ . Para estender tais operadores lógicos, utilizamos o conceito de t-normas e s-norma (ou também chamado de t-conorma).

**Definição:** Dizemos que o operador  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma t-norma, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro:  $t(1, x) = 1$  e  $t(x, 1) = x$ .
2. Comutativa:  $t(x, y) = t(y, x)$ .
3. Associativa:  $t(x, t(y, z)) = t(t(x, y), z)$ .
4. Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $t(x, y) \leq t(u, v)$ .

Note que o operador mínimo (que generaliza o conectivo lógico clássico *e*) é um exemplo de t-norma. Pois,

1.  $\min\{1, x\} = x$ , pois  $x \in [0, 1]$  e o maior valor possível que  $x$  poderia assumir é 1.
2. Como  $\min\{x, y\} = \min\{y, x\}$ , para quaisquer  $x, y \in [0, 1]$ .
3. Suponha todos os casos, isto é,
  - (a)  $x \leq y \leq z$
  - (b)  $x \leq z \leq y$
  - (c)  $y \leq x \leq z$
  - (d)  $y \leq z \leq x$
  - (e)  $z \leq y \leq x$
  - (f)  $z \leq x \leq y$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de forma análoga. Assim,

$$\min(x, \min(y, z)) = \min(x, y) = x.$$

Por outro lado,

$$\min(\min(x, y), z) = \min(x, z) = x.$$

Logo,  $t = \min$  é associativo.

4. Sejam  $x \leq u$  e  $y \leq v$ . Assim, temos os seguintes casos:

(a)  $x \leq y$  e  $u \leq v$

(b)  $x \leq y$  e  $v \leq u$

(c)  $y \leq x$  e  $u \leq v$

(d)  $y \leq x$  e  $v \leq u$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de modo análogo.

$$\min(x, y) = x.$$

Por outro lado,

$$\min(u, v) = u.$$

Portanto, por hipótese, temos que:

$$\min(x, y) = x \leq u = \min(u, v).$$

Portanto, o operador mínimo satisfaz a propriedade de monotonicidade.

Com isso mostramos que o operador mínimo é uma t-norma. Esse operador é denotado por  $t_{\wedge}$  (ou em algumas referências, por  $t_{\min}$ ).

**Exemplo:** O operador  $t_p$  definido por  $t_p(x, y) = xy$  é chamado de t-norma do produto.

**Exemplo:** O operador  $t_L$  definido por  $t_L = \max(0, x + y - 1)$  é chamado de t-norma de Lukasiewicz.

**Exemplo:** O operador  $t_d$  definido por

$$t_d(x, y) = \begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamado de t-norma drástica.

É possível provar que toda t-norma é limitada pelas t-normas do mínimo e da drástica, isto é, para toda t-norma  $t$ , vale o seguinte:

$$t_d(x, y) \leq t(x, y) \leq t_{\wedge}(x, y)$$

**Definição:** Dizemos que o operador  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma s-norma, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. Elemento neutro:  $s(0, x) = 0$  e  $s(x, 0) = 0$ .
2. Comutativa:  $s(x, y) = s(y, x)$ .
3. Associativa:  $s(x, s(y, z)) = s(s(x, y), z)$ .
4. Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $s(x, y) \leq s(u, v)$ .

Note que o operador máximo (que generaliza o conectivo lógico clássico *ou*) é um exemplo de s-norma.

1. Note que  $\max(0, x) = x$ , porque  $x \in [0, 1]$ , e portanto, 0 é o menor valor que  $x$  pode assumir, isto é,  $0 \leq x$ .
2. Também,  $\max(x, y) = \max(y, x)$ .
3. Suponha todos os casos, isto é,

- (a)  $x \leq y \leq z$
- (b)  $x \leq z \leq y$
- (c)  $y \leq x \leq z$
- (d)  $y \leq z \leq x$
- (e)  $z \leq y \leq x$
- (f)  $z \leq x \leq y$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de forma análoga. Assim,

$$\max(x, \max(y, z)) = \max(x, z) = z.$$

Por outro lado,

$$\max(\max(x, y), z) = \max(y, z) = z.$$

4. Sejam  $x \leq u$  e  $y \leq v$ . Assim, temos os seguintes casos:

- (a)  $x \leq y$  e  $u \leq v$
- (b)  $x \leq y$  e  $v \leq u$
- (c)  $y \leq x$  e  $u \leq v$
- (d)  $y \leq x$  e  $v \leq u$

Faremos o caso (a) e os outros seguem de modo análogo.

$$\max(x, y) = y.$$

Por outro lado,

$$\max(u, v) = v.$$

Assim, temos que

$$\max(x, y) = y \leq v = \max(u, v).$$

Portanto, segue a propriedade de monotonicidade.

Com isso provamos que o operador máximo é um exemplo de s-norma, e é denotado por  $s_v$  (ou também, denotado por  $s_{\max}$ ).

**Exemplo:** O operador  $s_L$ , chamado de s-norma de Lukasiewicz é definido por  $s(x, y) = \min(1, x + y)$ .

**Exemplo:** O operador  $s_s$  chamado de s-norma da soma é definido por  $s_s(x, y) = x + y - xy$ .

**Exercício (para entregar:**

1. Prove que os operadores  $t_p$  e  $t_L$  são de fato t-normas.
2. Prove que os operadores  $s_L$  e  $s_s$  são de fato s-normas.

3. Um operador  $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é chamado de negação se satisfizer as seguintes propriedades:

(a)  $\eta(1) = 0$  e  $\eta(0) = 1$ .

(b)  $\eta$  é decrescente.

Mostre que  $\eta_1(x) = 1 - x$  e  $\eta_2(x) = \frac{1-x}{1+x}$  são negações.

4. Dizemos que uma t-norma e uma s-norma são duais em relação a uma negação  $\eta$  (denotamos por  $(t, s)_\eta$ ), se satisfazem as leis de De Morgan, isto é,

$$\eta(t(x, y)) = s(\eta(x), \eta(y))$$

$$\eta(s(x, y)) = t(\eta(x), \eta(y)).$$

Mostre que:

(a)  $(t_\wedge, s_\vee)_{\eta_1}$  são duais.

(b)  $(t_L, s_L)_{\eta_1}$  são duais.