Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

2 de fevereiro de 2022

Relações Fuzzy

Uma relação clássica entre dois universos U e V é definido por qualquer subconjunto de $U \times V$. Em termos de função, uma relação clássica R pode ser caracterizada por

$$\chi_R : U \times V \to \{0, 1\}$$

Isto é, se $x \in U$ e $y \in V$ estão relacionados segundo a relação R, então $\chi_R(x, y) = 1$. Caso contrário, ou seja, se eles não estão relacionados conforme a relação R, então $\chi_R(x, y) = 0$.

Exemplo: Considere a relação R de “maior ($>$)” em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pergunta: O número 4 está relacionado com 2? Sim! Como 4 é maior que 2, temos que $\chi_R(4, 2) = 1$. O número 2 está relacionado com 4? Não! Como 2 não é maior que 4, temos que $\chi_R(2, 4) = 0$.

Existem diversas propriedades de relações. Algumas delas são:

1. (Reflexiva) Dizemos que uma relação é reflexiva se x está relacionado com o próprio x.
2. (Simétrica) Dizemos que uma relação é simétrica, se x estiver relacionado com y e y estiver relacionado com x.
3. (Transitiva) Dizemos que uma relação é transitiva, se x estiver relacionado com y, e y estiver relacionado com z, implicar que x está relacionado com z.

Um exemplo de relação reflexiva é o de “divisibilidade”. Isso porque todo elemento (não nulo) é divisível por ele mesmo. Um exemplo de relação simétrica é o de “igualdade”. Um exemplo de relação transitiva é o de “maior”.

Em todos esses exemplos mencionados acima, não há incerteza sobre os critérios da relação. Por exemplo, não há dúvidas se dados dois elementos, eles são iguais ou não. No entanto, algumas relações possuem subjetividades.

Exemplo: Considere os seguintes animais: Águia, cobra e sapo. Considere a relação de predação. Como a águia preda tanto a cobra quanto o sapo, temos que χ_R(águia,cobra) $= 1$ e χ_R(águia,sapo) $= 1$. Poderíamos ponderar a preferência de predação da águia em relação a cobra e o sapo da seguinte forma: φ_R(águia,cobra) $= 0.75$ e φ_R(águia,sapo) $= 0.25$.

Baseados nesse exemplo, definimos:

Definição: Uma relação fuzzy nos universos U e V são definidos através de qualquer subconjunto fuzzy do cartesiano $U \times V$. Isto é, uma relação fuzzy caracterizada pela seguinte função característica:

$$\varphi_R(x, y) : U \times V \to [0, 1].$$

em que $\varphi_R(x, y)$ representa o grau de associação em que x está relacionado com y, segundo a relação R.

Exemplo: Considere os seguintes animais: águia (a), cobra (c), inseto (i), lebre (l) e sapo (s). Considere também a relação R de predação, ou seja, xRy, se x é predador de y.

R	a	c	i	l	s
a	0	0	0	0	0
c	1	0,2	0	0	0
i	0,1	0	0,3	0	1
l	1	0,8	0	0	0
s	0,2	1	0	0	0,1

No contexto da teoria de conjuntos fuzzy, também são definidas relações fuzzy reflexivas, simétricas e transitivas.

Quando estamos tratando de uma relação fuzzy em um universo $X_1 \times X_2$, dizemos que a relação R é uma relação fuzzy binária. De um modo geral, uma relação fuzzy em $X_1 \times \ldots \times X_n$, dizemos que R é uma relação fuzzy n-ária.

Sejam R em $U \times V$ e S em $V \times W$. Definimos a relação de composição entre as relações R e S pela relação $T = R \circ S$ dada por:

$$\varphi_T : U \times W \to [0,1]$$

em que

$$\varphi_T(u,w) = \sup_{v \in V}[\min\{\varphi_R(u,v), \varphi_S(v,w)\}]$$

Obs: Essa operação é também chamada de operação *max-min*. Embora não seja a mesma coisa, a formulação é parecida com o princípio de extensão de Zadeh para duas variáveis, isto é,

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \sup_{f(x,y)=z} \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}$$

Exercícios (para entregar):

1. O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy A de U e B de V é definido pela relação fuzzy $A \times B$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \times B}(x,y) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(y)\}.$$

Sabendo disso, considere $U = V$ o universo composto por pacientes de um hospital. Sejam A e B os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e tosse, respectivamente. Para diagnosticar um paciente em relação a determinada doença (Covid, por exemplo), o médico faz uma avaliação com alguns dos pacientes sobre os sintomas apresentados. A febre pode ser dada pelas temperaturas possíveis de um indivíduo e a tosse pela frequência de ocorrência. Após a avaliação, o médico obteve as seguintes respostas:

Paciente	(A) Febre	(B) Tosse
1	0,25	0,65
2	0,75	0,4
3	0,9	0,8

Responda:

a) Qual paciente tem um grau de pertinência maior em relação à febre?

b) Qual paciente tem o grau de pertinência menor em relação à tosse?

c) Qual o grau de pertinência de cada um dos pacientes no conjunto de pessoas que estão com febre e tosse?

2. Uma relação fuzzy binária R sobre $U \times U$ é chamada de:

   (a) reflexiva, se $\varphi_R(x,x) = 1$;

   (b) simétrica, se $\varphi_R(x,y) = \varphi_R(y,x)$;

   (c) transitiva, se $\varphi_R(x,z) \geq \varphi_R(x,y)$ e $\varphi_R(x,z) \geq \varphi_R(y,z)$.

   Responda:

   i) O exemplo de predador fornecido anteriormente, satisfaz alguma das relações acima? Se sim, quais?

   ii) Dê um exemplo de relação fuzzy para cada um dos casos acima e justifique.

3. Considere os seguintes universos $U = \{$Águia, Cobra, Inseto$\}$, $V = \{$Cobra, Inseto, Lebre$\}$ e $W = \{$Lebre, Sapo$\}$. Sejam R e S relações fuzzy de predação sobre $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente, cujas pertinências são dadas abaixo:

R	a	c	i
c	1	0,2	0
i	0,1	0	0,3
l	1	0,8	0

e

S	c	i	l
l	0,8	0	0
s	1	0	0

   Considere a relação $T = R \circ S$. Determine:

   a) $T($Águia,Lebre$)$

   b) $T($Cobra,Sapo$)$

   c) $T($Inseto,sapo$)$