Retas e planos

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Campus Rio Claro

06 de julho de 2020

Estudo de reta

Qualquer vetor não nulo paralelo a uma reta é chamado de *vetor diretor*.

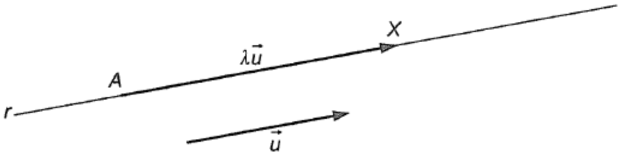
Seja $\vec{u}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r. Um ponto X pertence a r se, s somente se, os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\vec{u}$ são L.D.

Isso significa dizer que existe um escalar (número real) λ tal que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}$$

Forma vetorial de uma equação da reta

$$X = A + \lambda\vec{u}$$



Costumamos denotar também a forma vetorial de uma reta por:

$$r : A + \lambda\vec{u}$$

Observação

A forma vetorial de uma reta pode ser dada de diferentes formas, escolhendo diferentes vetores diretores e pontos iniciais.

Por exemplo:

$$r : A + \lambda\overrightarrow{AB}$$

$$r : A + \lambda\overrightarrow{BA}$$

$$r : B + \lambda\overrightarrow{AB}$$

$$r : B + \lambda\overrightarrow{BA}$$

Sejam $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$. Assim, a equação da reta na forma paramétrica é dada por:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$

Ou na forma de sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

chamado de *sistema de equações paramétricas da reta.*

Equação da reta na forma paramétrica

- Para uma dimensão:

$$x = x_0 + \lambda a$$

- Para duas dimensões:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$

- Para três dimensões:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

Exemplo:

A forma paramétrica da reta

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, -1)$$

é dada por

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda 4 \\ y = 2 + \lambda 5 \\ z = 3 + \lambda(-1) \end{cases}$$

Equação da reta na forma simétrica

Isolando os λ em cada uma das equação do sistema na forma paramétrica, temos:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \lambda \\ \frac{y-y_0}{b} = \lambda \\ \frac{z-z_0}{c} = \lambda \end{cases}$$

Assim, igualando todas as equações, temos:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

que é conhecida como equação da reta na forma *simétrica*

Exemplo:

A forma simétrica da reta

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, -1)$$

é dada por

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{(-1)}$$

Exemplo:

Seja uma reta r determinada pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, -2, 3)$.

a) Obtenha a equação da reta na forma vetorial, paramétrica e simétrica:

Exemplo:

Seja uma reta r determinada pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, -2, 3)$.

a) Obtenha a equação da reta na forma vetorial, paramétrica e simétrica:

Primeiro vamos determinar o vetor diretor da reta:

$$\overrightarrow{AB} = (3, -2, 3) - (1, 0, 1) = (2, -2, 2)$$

Exemplo:

Assim, obtemos:

Forma vetorial: $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -2, 2)$

Forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda 2 \\ y = 0 - \lambda 2 \\ z = 1 + \lambda 2 \end{cases}$$

Forma simétrica:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

Exemplo:

b) Verifique se o ponto $P = (-9, 10, -9)$ pertence a r.

Exemplo:

b) Verifique se o ponto $P = (-9, 10, -9)$ pertence a r.

Forma paramétrica:

$$\begin{cases} -9 = 1 + \lambda 2 \\ 10 = -\lambda 2 \\ -9 = 1 + \lambda 2 \end{cases}$$

Obtemos que $\lambda = -5$ satisfaz as três equações simultaneamente, portanto é um ponto da reta.

Forma simétrica:

$$\frac{-9-1}{2} = \frac{10-0}{-2} = \frac{-9-1}{2} = -5$$

Portanto, é um ponto da reta.

Vantagens de cada forma

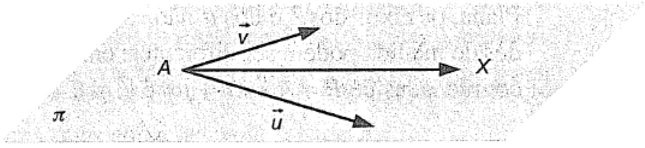
• A forma vetorial é intrínseca, isto é, não depende de um sistema de coordenadas. Útil para situações teóricas;

• A forma paramétrica permite a caracterização dos pontos da reta com o auxílio de uma única variável λ. Transfere o problema de três variáveis x, y e z para apenas uma, o escalar λ;

• A forma simétrica exibe as relações entre as coordenadas dos pontos que devem ser mantidas. Não depende do parâmetro λ.

Equações do plano

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. e paralelos a um mesmo plano π, o conjunto dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é chamado de vetores *diretores* de π



Forma vetorial

Sejam A um ponto do plano π, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π. Um ponto X pertence a π se, e somente se, o conjunto X, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é L.D.

Isso significa que existem λ e μ escalares tais que:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Assim, a forma vetorial do plano é dada por:

$$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Forma paramétrica

Sejam $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Assim, a equação do plano na forma paramétrica é dada por:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p)$$

Ou na forma de sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}$$

chamado de *sistema de equações paramétricas do plano.*

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

a) Obtenha uma equação vetorial do plano π

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$.

a) Obtenha uma equação vetorial do plano π

$$X = (3,7,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(1,1,0)$$

b) Obtenha uma equação paramétrica do plano π

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

a) Obtenha uma equação vetorial do plano π

$$X = (3, 7, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 1, 0)$$

b) Obtenha uma equação paramétrica do plano π

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda 1 + \mu 1 \\ y = 7 + \lambda 1 + \mu 1 \\ z = 1 + \lambda 1 + \mu 0 \end{cases}$$

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$.

c) Verifique se o ponto $(1,2,2)$ pertence ao plano π

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$.

c) Verifique se o ponto $(1,2,2)$ pertence ao plano π

$$\begin{cases} 1 = 3 + \lambda 1 + \mu 1 \\ 2 = 7 + \lambda 1 + \mu 1 \\ 2 = 1 + \lambda 1 + \mu 0 \end{cases}$$

que é um sistema impossível verifique esse fato. Portanto o ponto dado não pertence ao plano π.

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$.

d) Verifique se o vetor $\vec{w} = (2,2,5)$ é paralelo ao plano π

Exemplo:

Seja π o plano que contém o ponto A=(3,7,1) e é paralelo a $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,0)$.

d) Verifique se o vetor $\vec{w} = (2,2,5)$ é paralelo ao plano π

$$det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

verifique essa conta. Portanto o vetor $\vec{w} = (2,2,5)$ é paralelo ao plano π.

Equação geral do plano

Vamos apresentar uma equação do plano que não depende dos parâmetros λ e μ.

Dados um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e os vetores diretores $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Como definimos anteriormente, um ponto $X = (x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.D.

Assim,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

Através do determinante via cofatores, temos:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}}_{=a}(x - x_0) - \underbrace{\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}}_{=b}(y - y_0) + \underbrace{\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}}_{=c}(z - z_0) = 0$$

Assim,

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{=d} = 0$$

e portanto obtemos a equação geral do plano.

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exemplo:

Determine a equação geral do plano π que contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Seja $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer. Assim, a matriz que gera a equação geral do plano é dada por:

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+1 & z-0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ e $d = -9$, logo a equação geral do plano é dada por

$$x - z - 9 = 0$$

Dizemos que um vetor $\vec{n}$ é normal a um plano, se tal vetor é ortogonal a todos os vetores do plano.

Proposição: Sejam $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π e um vetor $\vec{u} = (m, n, p)$. Então $\vec{u}$ é paralelo a π se, e somente se, $am + bn + cp = 0$.

Veja que

$$\langle (a, b, c), (m, n, p) \rangle = am + bn + cp$$

Em outras palavras, o vetor (a, b, c) é normal ao plano π, pois o produto escalar entre (a, b, c) e qualquer vetor do plano é igual a 0, conforme a proposição acima.

Referências

BOULOS, P., CAMARGO, I. Introdução à Geometria Analítica no Espaço, Editora Makron Books, 1997.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H. e COSTA, R.C.F. Álgebra Linear, 5a. edição. São Paulo

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. Álgebra Linear, 2a. edição. São Paulo: Harper & How do Brasil, 1980.

STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. Geometria Analítica. Makron Books, 1987.

Contato

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: viniciuswasques@gmail.com

Departamento de Matemática

site: `https://viniciuswasques.github.io/home/`