Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Notas de aula
Sistemas p-fuzzy

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques
viniciuswasques@gmail.com

19 de janeiro de 2022

Os α-níveis de conjuntos fuzzy

Considere uma situação em que o modelador queira levar em conta apenas os elementos que cumprem uma propriedade, estabelecida pelo conjunto fuzzy A, com um certo grau de associação. Por exemplo, "considere o grupo de pessoas que pertencem ao conjunto dos jovens, com grau de pertinência de pelo menos $0,5$." Com isso fazemos um "corte" no conjunto fuzzy, de modo que apenas os elementos que possuem pertinência maior que aquele corte serão considerados na modelagem (veja Figura 1).

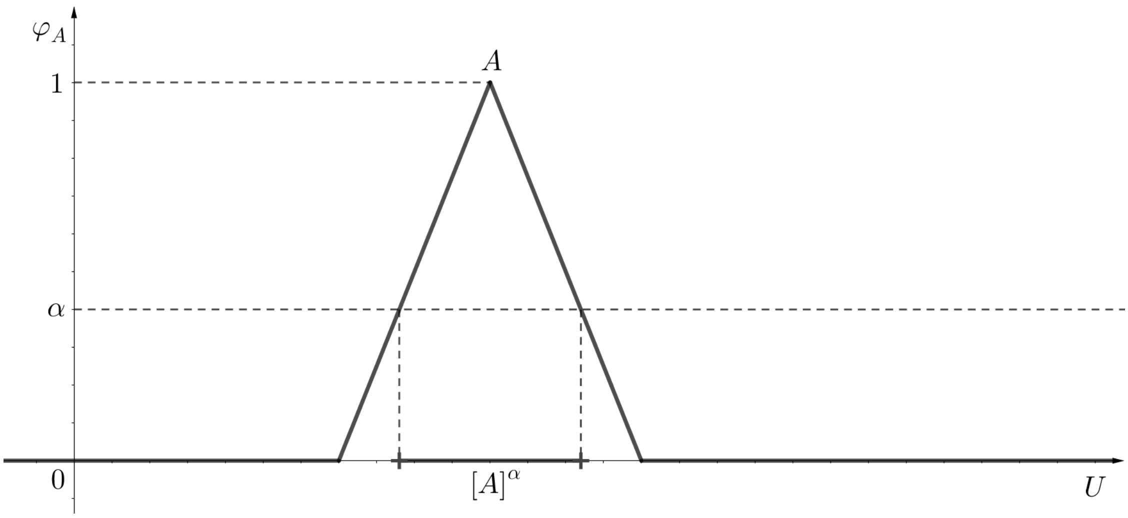

Figura 1: Corte do conjunto fuzzy A, em uma altura $\alpha \in [0, 1]$. O conjunto obtido no eixo-x, denotado por $[A]^\alpha$, representa o α-nível de A.

A partir da ideia de fixar níveis de associação de um elemento x em um determinando conjunto fuzzy A, definimos o conceito de α-níveis, em que $\alpha \in [0, 1]$ representa o grau de associação do elemento x em A. Assim,

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, \text{ se } \alpha \in (0, 1].$$

$$[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}}.$$

em que a notação $\overline{Y}$ representa o fecho de um subconjunto Y.

Observação 1: A fim de evitar que o 0-nível seja igual ao conjunto universo U, a definição do 0-nível é estabelecida de modo diferente da definição para os outros valores de $\alpha \in (0, 1]$, como visto acima.

Observação 2: é importante ressaltar que o 0-nível, assim como foi definido acima, é consistente apenas no caso em que U é um espaço topológico.

Pergunta: Quais propriedades os α-níveis possuem?

1. Se $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, então $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$.

   Dem: Vamos provar que esse resultado de fato é válido. Primeiro vamos supor $\alpha > 0$. Seja $x \in [A]^\beta$. Assim, temos que $\varphi_A(x) \geq \beta$. Por hipótese, temos que $\beta \geq \alpha$. Logo, $\varphi_A(x) \geq \beta \geq \alpha$. Portanto, $\varphi_A(x) \geq \alpha$, e assim, $x \in [A]^\alpha$.

   Por fim, vamos supor que $\alpha = 0$. Seja $x \in [A]^\beta$. Assim, $\varphi_A(x) \geq \beta$. Como $\beta \geq \alpha$, por hipótese, então $\varphi_A(x) \geq \beta \geq \alpha = 0$. Lembre-se que, para $\alpha = 0$, temos que $[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}}$.

Se $\varphi_A(x) > 0$, então $x \in \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\} \subseteq \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}} = [A]^0$.

Se $\varphi_A(x) = 0$, então $x \in [A]^\beta = [A]^0 = [A]^\alpha$.

2. Sejam A e B dois subconjuntos fuzzy de U. Assim, $A = B$ se, e somente se $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exercício (para entregar):

1. Prove a propriedade 2 acima.

   Vamos provar primeiramente a ida do resultado.

   Se $A = B$, então $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, para todo $x \in U$. Sendo assim, para $\alpha \in (0, 1]$

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in U : \varphi_B(x) \geq \alpha\} = [B]^\alpha$$

   Para $\alpha = 0$, temos que

$$\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\} = \{x \in U : \varphi_B(x) > 0\}.$$

   Portanto,

$$[A]^0 = \overline{\{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}} = \overline{\{x \in U : \varphi_B(x) > 0\}} = [B]^0.$$

   Logo, $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para $\alpha \in [0, 1]$.

   Vamos agora provar a recíproca do resultado (volta).

   Suponha que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Por absurdo, suponha que $A \neq B$. Isso significa que existe algum $x_0 \in U$ tal que $\varphi_A(x_0) \neq \varphi_B(x_0)$. Consequentemente, temos que $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$ ou $\varphi_A(x_0) > \varphi_B(x_0)$. Sem perda de generalidade, suponha que $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0)$. Tome então $\alpha = \varphi_B(x_0)$. Note que $x_0 \in [B]^\alpha = [B]^{\varphi_B(x_0)}$, pois $\varphi_B(x_0) \geq \varphi_B(x_0) = \alpha$. Por outro lado, $\varphi_A(x_0) < \varphi_B(x_0) = \alpha$, logo $x_0 \notin [A]^\alpha = [A]^{\varphi_B(x_0)}$. Portanto, temos que $[A]^\alpha \neq [B]^\alpha$, contradizendo a hipótese. Assim, concluímos que $A = B$.

2. O núcleo de conjunto fuzzy A é definido pelos elementos que tem total associação com o conjunto fuzzy A, isto é,

$$\text{Nuc}(A) = [A]^1.$$

   Por outro lado, o suporte de um conjunto fuzzy é definido pelos elementos que tem alguma associação não nula com o conjunto fuzzy A, isto é,

$$supp(A) = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}.$$

   Por fim, o diâmetro (ou chamado também de largura) de um conjunto fuzzy é definido pelo tamanho de seu 0-nível, e está associado com a maior incerteza que ele modela.

   Sabendo disso, considere o seguinte conjunto fuzzy:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 4 - x, & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{1}$$

   Determine o núcleo, suporte e o diâmetro do conjunto fuzzy A.

3. Desenhe um conjunto fuzzy que cumpre as seguintes propriedades:

   (a) O núcleo é vazio;

   (b) O $0,5$-nível é dado por dois intervalos disjuntos;

   (c) O 0-nível é dado pelo conjunto universo $U = \mathbb{R}$.