

# Lista Mínimos Quadrados - Prática

- Para cada conjunto de dados nos arquivos '`ex1_<item>.npz`', com os intes variandod e (a) até (d), leia os arquivos e aproxime os dados através de um polinômio. Justifique a escolha do grau do polinômio usando o plot dos dados e do modelo encontrado.

```
1 dados = np.load('ex1_a.npz')
2 x = dados['x']
3 y = dados['y']
```

Algoritmo 1: Exemplo de leitura de arquivo:

- Modelo polinomial com múltiplas variáveis.** A ideia de modelos polinomiais pode ser estendida a partir do caso em que há apenas uma variável (feature). Neste exercício, consideramos um modelo quadrático (de grau dois) com 2 variáveis, isto é,  $x$  é um vetor em  $\mathbb{R}^2$ . O modelo tem a forma

$$\hat{f}(x) = a + b_1x_1 + b_2x_2 + c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2$$

onde o escalar  $a$ , o vetor  $b \in \mathbb{R}^2$  e o vetor  $c \in \mathbb{R}^3$  são, respectivamente, os coeficientes de ordem zero, primeira e segunda do modelo.

- Leia os dados do arquivo '`ex2.npz`', que contem valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e encontre uma aproximação para  $f(x, y) = z$ .
- Calcule o rms entre o modelo encontrado e os dados.
- Plote a curva encontrada pelo seu modelo.

```
1 fig = plt.figure()
2 ax = fig.add_subplot(projection='3d')
3 surf = ax.plot_surface(X, Y, z, cmap='viridis', edgecolor='none',
4                         antialiased=True)
5 fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.6)
6 ax.set_xlabel('x')
7 ax.set_ylabel('y')
8 ax.set_zlabel('z')
9 ax.set_title('3D surface plot of f(x,y)')
```

Algoritmo 2: Exemplo de plot de superfícies

- O conjunto de dados contém o número de transistores  $N$  em 13 microprocessadores, e seu ano de lançamento.

- Encontre a melhor aproximação de mínimos quadrados para aproximar os dados. Justifique a escolha do modelo escolhido para aproximar os dados.
- Calcule o rms do erro da aproximação nos dados. Ploete o modelo que você encontrou junto com o conjunto de dados. *Dica:* Utilize `plt.yscale('log')` para melhor visualização.
- Use o seu modelo para prever o número de transistores em um microprocessador introduzido em 2015. Compare essa predição com o microprocessador IBM Z13, lançado em 2015, que possui cerca de  $4 \times 10^9$  transistores.

Ano	Transistores
1971	2,250
1972	2,500
1974	5,000
1978	29,000
1982	120,000
1985	275,000
1989	1,180,000
1993	3,100,000
1997	7,500,000
1999	24,000,000
2000	42,000,000
2002	220,000,000
2003	410,000,000

- (d) Compare o seu resultado com a lei de Moore, que afirma que o número de transistores por circuito integrado aproximadamente dobra a cada um ano e meio a dois anos.
4. Um laboratório está estudando a degradação da capacidade de baterias de íons de lítio utilizada em veículos elétricos. Para diferentes condições de uso, foram registradas medições ao longo do número de ciclos de carga/descarga.
- Os dados estão armazenados no arquivo `ex4.npz`, fornecido junto com esta lista. Os dados do arquivo são:

`cycle`      número de ciclos de carga/descarga (inteiro positivo)  
`temperature`    temperatura média de operação durante o ciclo (em °C)  
`capacity`     capacidade medida da bateria (em % da capacidade nominal)

Queremos ajustar um modelo que relate a capacidade da bateria com o número de ciclos e a temperatura, da forma

$$\hat{C}(n, T) = \theta_0 + \theta_1 n + \theta_2 T + \theta_3 n^2 + \theta_4 T^2 + \theta_5 nT,$$

onde  $n$  é o número de ciclos,  $T$  é a temperatura (em °C), e os coeficientes  $\theta_0, \dots, \theta_5$  serão obtidos por mínimos quadrados.

- (a) Escreva o problema de ajuste em mínimos quadrados na forma matricial

$$A\theta \approx C,$$

especificando explicitamente a matriz de projeto  $A \in \mathbb{R}^{N \times 6}$ , o vetor de parâmetros  $\theta \in \mathbb{R}^6$  e o vetor de observações  $C \in \mathbb{R}^N$ .

- (b) Calcule numericamente  $\hat{\theta}$ . Em seguida, calcule o erro RMS do ajuste:  
(c) Use o modelo ajustado para prever a capacidade da bateria nas seguintes situações:  
i.  $n = 500$  ciclos,  $T = 25^\circ\text{C}$ ;  
ii.  $n = 500$  ciclos,  $T = 45^\circ\text{C}$ ;  
iii.  $n = 1500$  ciclos,  $T = 25^\circ\text{C}$ .

Comente o efeito da temperatura e do número de ciclos sobre a capacidade prevista.

- (d) Plote, em um mesmo gráfico, os valores medidos de capacidade versus número de ciclos para uma faixa estreita de temperatura (por exemplo,  $T$  entre  $23^\circ\text{C}$  e  $27^\circ\text{C}$ ) e a curva correspondente dada pelo modelo  $\hat{C}(n, T)$  fixando  $T = 25^\circ\text{C}$ . Com base nesse gráfico, discuta qualitativamente se o modelo quadrático em  $n$  parece adequado.