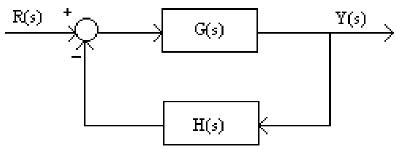
Método do Lugar das Raízes (Root-Locus)

Seja o seguinte sistema de controle



$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+A(s)} \quad \rightarrow \text{Função de Transferência de Malha Fechada}$$

$$A(s) = G(s)H(s) \quad \rightarrow \text{Função de Transferência de Malha Aberta}$$

Normalmente, A(s) encontra-se fatorada e, portanto, conhecemos seus zeros e pólos. Seja $G(s) = \dfrac{n_G(s)}{d_G(s)}$ e $H(s) = \dfrac{n_H(s)}{d_H(s)}$. Então,

$$A(s) = G(s)H(s) = \frac{n_G(s)n_H(s)}{d_G(s)d_H(s)} = \frac{n_A(s)}{d_A(s)}$$

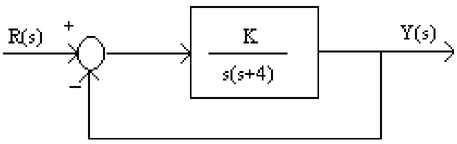
$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1+\dfrac{n_G(s)n_H(s)}{d_G(s)d_H(s)}} = \frac{n_G(s)d_H(s)}{d_G(s)d_H(s)+n_G(s)n_H(s)} = \frac{n_G(s)d_H(s)}{d_A(s)+n_A(s)}$$

Os pólos de $G_T(s)$ são as raízes de $d_A(s) + n_A(s) = 0$. O método do Lugar das Raízes permite a determinação gráfica dos pólos de $G_T(s)$ a partir da localização dos pólos e zeros de A(s).

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pólos}\\ \text{zeros}\end{array}\right. \text{de } A(s) \xrightarrow{\text{root-locus}} \text{pólos de } G_T(s)$$

Definição: Root-Locus (RL) é o lugar geométrico dos pólos de $G_T(s)$ obtidos a partir dos zeros e pólos de A(s).

Ex.:

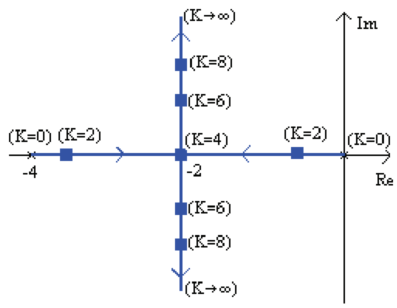


$$A(s) = \frac{K}{s(s+4)} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{zeros de } A(s): \text{---}\\ \text{pólos de } A(s): 0, -4\end{array}\right.$$

$$G_T(s) = \frac{K}{s(s+4)+K} = \frac{K}{s^2+4s+K}$$

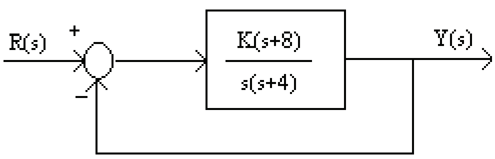
pólos de $G_T(s)$: raízes de $s^2 + 4s + K = 0 \Rightarrow s = -2 \pm \sqrt{4-K}$

K	s_1	s_2
0	0	-4
2	-0,586	-3,414
4	-2	-2
6	-2 + j1,414	-2 – j1,414
8	-2 + j2	-2 – j2



$0 < K < 4$ → caso sobre-amortecido
$K = 4$ → caso criticamente amortecido
$K > 4$ → caso sob-amortecido (se K aumenta então o sistema se torna mais oscilatório)

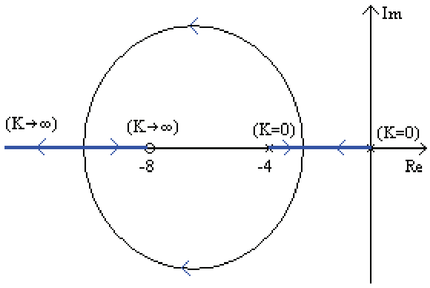
Ex.:



$$A(s)=\frac{K(s+8)}{s(s+4)} \quad \begin{cases} \text{zeros de } A(s): -8 \\ \text{pólos de } A(s): 0, -4 \end{cases}$$

$$G_T(s)=\frac{K(s+8)}{s(s+4)+K(s+8)}=\frac{K(s+8)}{s^2+(4+K)s+8K}$$

pólos de $G_T(s)$: raízes de $s^2 + (4 + K)s + 8K = 0$

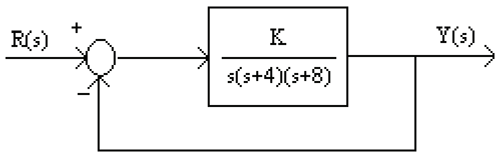


Um zero em A(s) atrai os ramos do RL (pólos de $G_T(s)$) e, portanto, melhora a estabilidade do sistema em malha fechada.

$$\begin{cases} \text{pequenos valores de } K \rightarrow \text{sistema não tem oscilações} \\ \text{grandes valores de } K \rightarrow \text{sistema não tem oscilações} \end{cases}$$

Existe uma faixa intermediária de valores de K para os quais o sistema em malha fechada apresenta oscilações.

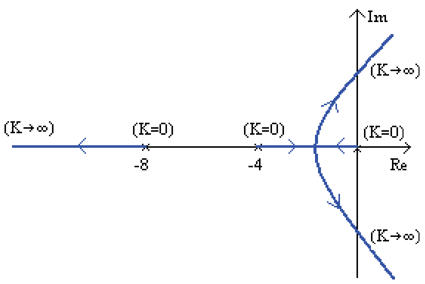
Ex.:



$$A(s)=\frac{K}{s(s+4)(s+8)} \quad \begin{cases} \text{zeros de } A(s): --- \\ \text{pólos de } A(s): 0, -4, -8 \end{cases}$$

$$G_T(s)=\frac{K}{s(s+4)(s+8)+K}=\frac{K}{s^3+12s^2+32s+K}$$

pólos de $G_T(s)$: raízes de $s^3 + 12s^2 + 32s + K = 0$



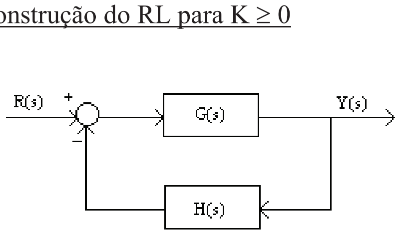
Um pólo em A(s) repele os ramos do RL (pólos de $G_T(s)$) e, portanto, piora a estabilidade do sistema em malha fechada.

$$\begin{cases} \text{pólo dominado} \rightarrow \text{não introduz oscilações} \\ \text{pólos dominantes} \rightarrow \text{sistema de segunda ordem} \end{cases}$$

Aumentando progressivamente o ganho K, a partir de K = 0, passamos do caso sobre-amortecido para o caso criticamente amortecido, a seguir para o caso sob-amortecido (que vai se tornando cada vez mais oscilatório) e podemos levar o sistema à instabilidade.

<u>Propriedade Importante</u>: $\begin{cases} \text{zeros em } A(s) \text{ atraem o RL} \\ \text{pólos em } A(s) \text{ repelem o RL} \end{cases}$

<u>Construção do RL para $K \geq 0$</u>



$$G_T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G(s)}{1+A(s)}$$

$A(s) = G(s)H(s)$

<u>Teorema</u>: Um número complexo $\mathbf{s_i}$ pertence ao RL (ou seja, é um pólo de $G_T(s)$) se e somente se $\mathbf{1 + A(s_i) = 0}$.

RL = {$s_i \in$ C | s_i é um pólo de $G_T(s)$} = {$s_i \in$ C | 1 + A(s_i) = 0} = {$s_i \in$ C | A(s_i) = -1}

$$\mathbf{s_i \in RL} \Leftrightarrow \begin{cases} |A(s_i)|=1 & \rightarrow \textbf{condição de magnitude} \\ \underline{|A(s_i)}=(2m+1)\pi \text{ rad, m inteiro} & \rightarrow \textbf{condição angular} \end{cases}$$

Forma Geral de A(s): $\mathbf{A(s)=\dfrac{K(s+Z_1)(s+Z_2)...}{s^n(s+P_1)(s+P_2)...}}$

$$\begin{cases} K & \rightarrow \text{ganho de } A(s) \\ -Z_1, -Z_2, ... & \rightarrow \text{zeros de } A(s) \\ -P_1, -P_2, ... & \rightarrow \text{pólos não nulos de } A(s) \\ n & \rightarrow \text{número de integradores de } A(s) \end{cases}$$

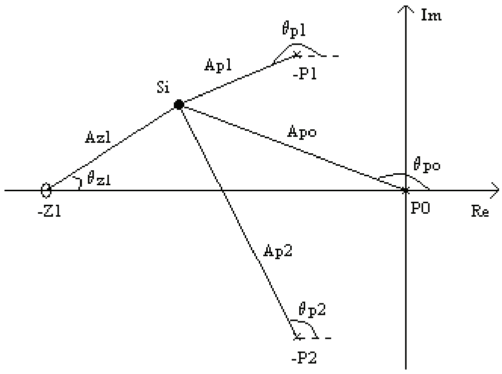
Para $s = s_i$ temos:

$$A(s_i)=\frac{K(s_i+Z_1)(s_i+Z_2)...}{s_i^{\,n}(s_i+P_1)(s_i+P_2)...} \Rightarrow \begin{cases} |A(s_i)| = \dfrac{K|s_i+Z_1||s_i+Z_2|...}{|s_i|^n|s_i+P_1||s_i+P_2|...} \\ \angle A(s_i) = \angle s_i+Z_1 + \angle s_i+Z_2 + ... - n\angle s_i - \angle s_i+P_1 - \angle s_i+P_2 - ... \end{cases}$$

Nomenclatura: $\begin{cases} |s_i+Z_1| = A_{Z1} \ , \ |s_i+Z_2| = A_{Z2} \ , \ ... \\ |s_i| = A_{P0} \ , \ |s_i+P_1| = A_{P1} \ , \ |s_i+P_2| = A_{P2} \ , \ ... \\ \angle s_i+Z_1 = \theta_{Z1} \ , \ \angle s_i+Z_2 = \theta_{Z2} \ , \ ... \\ \angle s_i = \theta_{P0} \ , \ \angle s_i+P_1 = \theta_{P1} \ , \ \angle s_i+P_2 = \theta_{P2} \ , \ ... \end{cases}$

Então, $\begin{cases} |A(s_i)| = \dfrac{K.A_{Z1}.A_{Z2}....}{A_{P0}^{\ n}.A_{P1}.A_{P2}....} = 1 & \rightarrow \text{condição de magnitude} \\ \angle A(s_i) = \theta_{Z1}+\theta_{Z2} + ... - n\theta_{P0} - \theta_{P1} - \theta_{P2} - ... = (2m+1)\pi, \ m \text{ inteiro} & \rightarrow \text{condição angular} \end{cases}$

Ex.: Seja $A(s)=\dfrac{K(s+Z_1)}{s(s+P_1)(s+P_2)}$.



$$\begin{cases} \dfrac{K.A_{Z1}}{A_{P0}.A_{P1}.A_{P2}} = 1 \\ \theta_{Z1} - \theta_{P0} - \theta_{P1} - \theta_{P2} = (2m+1)\pi, \ m \text{ inteiro} \end{cases}$$

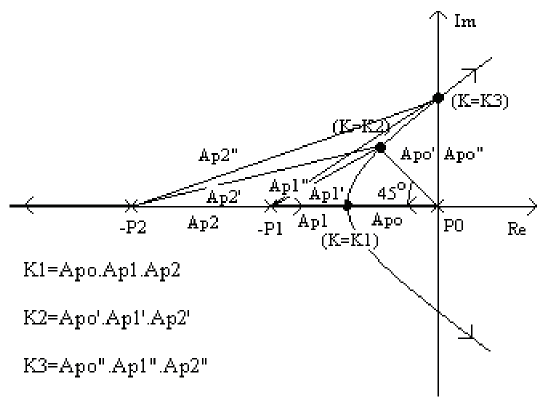
Traçado do RL: O RL é traçado através da determinação de todos os pontos s_i do plano complexo que satisfazem à condição angular $\theta_{Z1}+\theta_{Z2} + ... - n\theta_{P0} - \theta_{P1} - \theta_{P2} - ... = (2m+1)\pi, \ m \text{ inteiro}$.

Calibração do RL: Estando o RL completamente traçado, a condição de magnitude $K=\dfrac{A_{P0}^{\ n}.A_{P1}.A_{P2}....}{A_{Z1}.A_{Z2}....}$ nos dará o valor de K correspondente a cada pólo particular de $G_T(s)$ escolhido ao longo dos ramos do RL.

Ex.: $A(s)=\dfrac{K}{s(s+P_1)(s+P_2)}$, $P_2 > P_1 > 0$

1 pólo dominado (não causa oscilações)
2 pólos dominantes (sistema dominante de 2ª ordem)

$0 < K < K_1 \rightarrow$ caso sobre-amortecido
$K = K_1 \rightarrow$ caso criticamente amortecido
$K_1 < K < K_3 \rightarrow$ caso sob-amortecido
($K = K_2 \rightarrow$ caso sob-amortecido com PO=5% $\rightarrow \xi$=0,7 $\rightarrow \theta$=45°)
$0 < K < K_3 \rightarrow$ sistema estável
$K \geq K_3 \rightarrow$ sistema instável



<u>Regras para Construção do RL ($K \geq 0$)</u>: Baseiam-se nas condições angular e de magnitude e permitem a obtenção do RL de forma bastante simples.

$$\text{Convenção: } \begin{cases} x \rightarrow \text{pólo de } A(s) \\ o \rightarrow \text{zero de } A(s) \end{cases}$$

$$A(s) = \frac{K.n_A(s)}{d_A(s)} \qquad \text{grau}[d_A(s)] \geq \text{grau}[n_A(s)]$$

$$G_T(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \qquad d(s) = d_A(s) + K.n_A(s)$$

1) Cada ramo do RL começa em um pólo de A(s) para K = 0 e termina em um zero de A(s) ou tende a infinito (zero no infinito) para $K \rightarrow \infty$.

Obs.: N° de ramos do RL = N° de pólos de $G_T(s)$ = N° de pólos de A(s).

Prova: Seja $d(s) = d_A(s) + K.n_A(s)$. Para $K=0 \Rightarrow d(s) = d_A(s) \Rightarrow$ pólos de $G_T(s)$ são os pólos de A(s).

$$\text{Consideremos } \begin{cases} K = \dfrac{1}{\mu} \quad (\mu = 0 \Rightarrow K \rightarrow \infty) \\ d_A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \\ n_A(s) = s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m \quad ; \quad n \geq m \\ s = \dfrac{1}{z} \quad (z = 0 \;\Rightarrow |s| \rightarrow \infty) \end{cases}$$

$$d(s) = 0 \Rightarrow d_A(s) + K.n_A(s) = 0 \Rightarrow d_A(s) + \frac{1}{\mu}.n_A(s) = 0 \Rightarrow \mu.d_A(s) + n_A(s) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n) + (s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\left[\left(\frac{1}{z}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + a_n\right] + \left[\left(\frac{1}{z}\right)^m + b_1\left(\frac{1}{z}\right)^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\left(\frac{1}{z}\right) + b_m\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(1 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n) + (z^{n-m} + b_1 z^{n-m+1} + \ldots + b_{m-1}z^{n-1} + b_m z^n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(1 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n) + z^{n-m}(1 + b_1 z + \ldots + b_{m-1}z^{m-1} + b_m z^m) = 0$$

$K \rightarrow \infty \Rightarrow \mu = 0$. Então, $z^{n-m}(1 + b_1 z + \ldots + b_{m-1}z^{m-1} + b_m z^m) = 0 \Rightarrow$

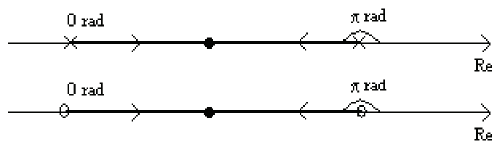
$$\Rightarrow \begin{cases} z^{n-m} = 0 \Rightarrow (n-m) \text{ raízes nulas } z = 0 \Rightarrow (n-m) \text{ raízes } s \text{ com } |s| \rightarrow \infty \\ 1 + b_1 z + \ldots + b_{m-1}z^{m-1} + b_m z^m = 0 \Rightarrow 1 + b_1\left(\dfrac{1}{s}\right) + \ldots + b_{m-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)^{m-1} + b_m\left(\dfrac{1}{s}\right)^m = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m = 0 \Rightarrow m \text{ raízes de } n_A(s) \end{cases}$$

Portanto, quando $K \rightarrow \infty$, temos:

$$\begin{cases} m \text{ pólos de } G_T(s) \text{ indo para os zeros de } A(s) \\ n-m \text{ pólos de } G_T(s) \text{ indo para infinito (indo para zeros no infinito)} \end{cases}$$

2) O RL passa em todo ponto do eixo real à direita do qual existir um número ímpar de singularidades (pólos mais zeros) de A(s).

Prova: Aplicação direta da condição angular.



3) Para K $\to \infty$, os ramos do RL que tendem a infinito são assintóticos às retas com ângulos dados por

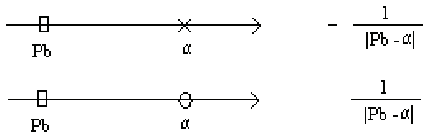
$$\boldsymbol{\theta_m = \frac{(2m+1)\pi}{NP - NZ}} \quad , \quad \mathbf{m = 0, 1, 2, \dots, (NP - NZ - 1)} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} NP \to N^o \text{ de pólos de } A(s) \\ NZ \to N^o \text{ de zeros de } A(s) \end{cases}$$

Obs.: O número de ramos que tende a infinito é dado por NP – NZ.

4) A intersecção das assíntotas está sobre o eixo real em um ponto chamado <u>Centro de Gravidade (CG)</u> do RL com abscissa dada por

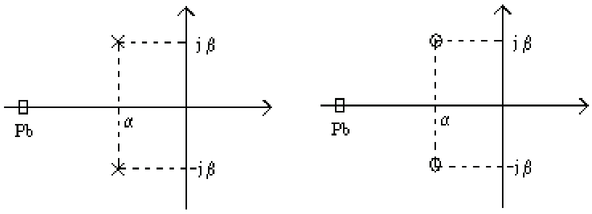
$$\boldsymbol{\sigma_{CG} = \frac{\sum \text{pólos de } A(s) - \sum \text{zeros de } A(s)}{NP - NZ}}$$

5) Cálculo de um <u>ponto de ramificação</u> (breakaway point) – Quando existem apenas pólos e zeros reais em A(s), o cálculo de um ponto de ramificação (ponto em que o RL deixa o eixo real ou volta a ele) é feito através de um processo de tentativas em que se tenta igualar a soma dos inversos das distâncias à esquerda e à direita de um ponto testado P_b, positivas para os zeros e negativas para os pólos.



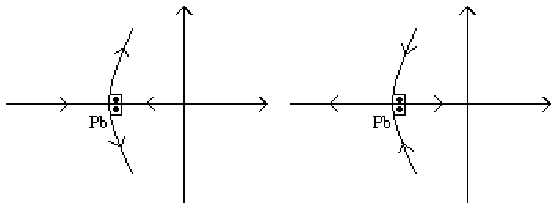
Obs.: Quando não houver singularidades à esquerda de um ponto testado, considere que o inverso da distância à esquerda do ponto testado é zero (inverso da distância do ponto a um zero no infinito).

6) Contribuição de pólos e/ou zeros complexos de A(s) no cálculo de um ponto de ramificação – O valor $\dfrac{2\,|P_b - \alpha|}{|P_b - \alpha|^2 + \beta^2}$ deve ser incluído nos somatórios com sinal **+** se for um par de zeros complexos e **–** se for um par de pólos complexos.

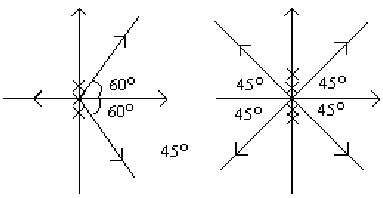


$$-\frac{2\,|P_b - \alpha|}{|P_b - \alpha|^2 + \beta^2} \qquad\qquad \frac{2\,|P_b - \alpha|}{|P_b - \alpha|^2 + \beta^2}$$

7) Quando dois ramos deixam o eixo real ou voltam a ele em um ponto de ramificação, eles o fazem com um ângulo de 90^o.



Exceções:



sistema tipo 3 sistema tipo 4

8) O RL é simétrico em relação ao eixo real (as raízes complexas de uma equação com coeficientes reais ocorrem aos pares conjugados).

9) Os ângulos de partida de pólos complexos e os de chegada a zeros complexos são determinados pela aplicação direta da condição angular a um ponto suficientemente próximo do pólo ou zero em questão.

10) Se pelo menos dois ramos do RL tendem a infinito, ou seja NP – NZ ≥ 2, a soma dos pólos de $G_T(s)$ correspondente a um determinado K é uma constante independente de K.

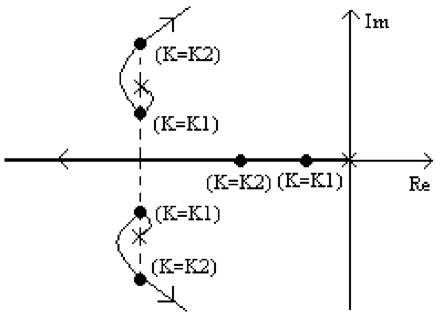
Prova: Seja $d(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$ e considere que as raízes de d(s) = 0 sejam $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Temos que $a_1 = -\sum_{i=1}^{n} s_i$ (relação de Girard). Como $d(s) = d_A(s) + K.n_A(s)$, com grau(d) = n, grau(d_A) = n e grau(n_A)= m, se m é no máximo n-2 (NP – NZ ≥ 2), $K.n_A(s)$ influencia os termos s^{n-2} em diante. Então, temos $a_1 = -\sum_{i=1}^{n} s_i$ = constante, ∀ K.

Portanto, sejam $s_1(K), s_2(K), \ldots, s_n(K)$ os pólos de $G_T(s)$ para um dado valor de K, temos $a_1 = -\sum_{i=1}^{n} s_i(K)$ = constante, ∀ K.

Obs.:

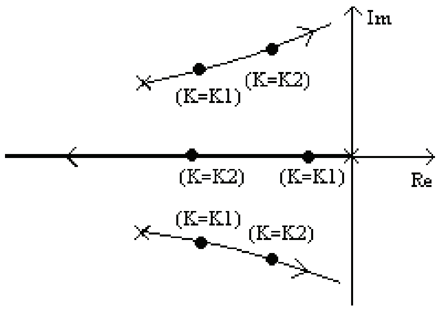
Esboço incorreto

$$\sum_{i=1}^{3} s_i(K = K_1) \neq \sum_{i=1}^{3} s_i(K = K_2)$$



Esboço correto

$$\sum_{i=1}^{3} s_i(K) = \text{constante}$$



11) A intersecção do RL com o eixo imaginário pode ser determinada através de dois métodos.

<u>Método Gráfico</u> – Aplicação direta da condição de magnitude $K_{cr} = \dfrac{A_{P0}^{\,n} . A_{P1} . A_{P2} \ldots}{A_{Z1} . A_{Z2} \ldots}$. As distâncias são medidas do ponto onde o RL cruza o eixo imaginário aos pólos e zeros de A(s). A freqüência de oscilação correspondente ω_{cr} é obtida por medição direta no RL (ordenada do ponto de cruzamento do RL com o eixo imaginário).

<u>Método Analítico</u> – Um número complexo $s_i \in$ RL e ao eixo imaginário se e somente se $1 + A(s_i) = 0$ e $s_i = j\omega$. Então, K_{cr} e ω_{cr} correspondentes à intersecção com o eixo imaginário são obtidas a partir de

$$\mathbf{1 + A(j\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Re[1 + A(j\omega)] = 0 \\ Im[1 + A(j\omega)] = 0 \end{cases}}$$