SISTEMAS DE CONTROLE II

03/03/2011

Método do lugar das raízes

Tópicos

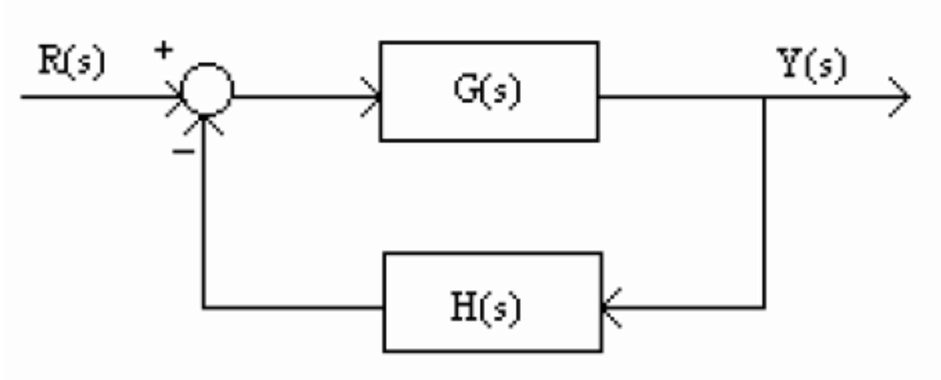
- Método do Lugar das Raízes (Root Locus)
  - Introdução
  - Exemplos e Regras Básicas
  - Condição de Magnitude e Condição Angular
  - Nomenclatura

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Introdução
  - Métodos de projeto mais comuns
    - Método do Lugar das Raízes
    - Métodos Freqüênciais
    - Método Polinomial
  - RL: Método de projeto mais intuitivo quando comparado aos demais.
  - Permite a determinação gráfica dos pólos da FTMF

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Introdução



$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+A(s)}$$ → Função Transferência de Malha Fechada

$$A(s) = G(s)H(s)$$ → Função Transferência de Malha Aberta

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Introdução

Seja, $G(s) = \dfrac{n_G(s)}{d_G(s)}$ e $H(s) = \dfrac{n_H(s)}{d_H(s)}$

Então, $A(s) = G(s)H(s) = \dfrac{n_G(s)n_H(s)}{d_G(s)d_H(s)} = \dfrac{n_A(s)}{d_A(s)}$

Função Transferência de Malha Fechada (FTMF)

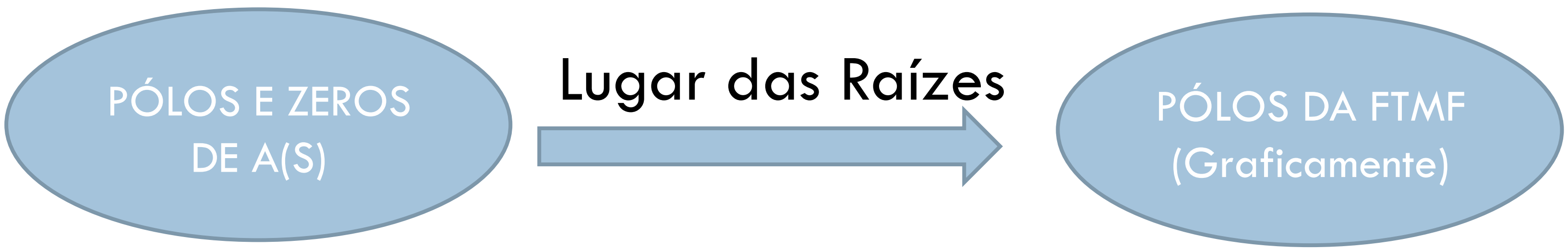
$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{n_G(s)}{d_G(s)}}{1+\dfrac{n_G(s)n_H(s)}{d_G(s)d_H(s)}}$$

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Introdução

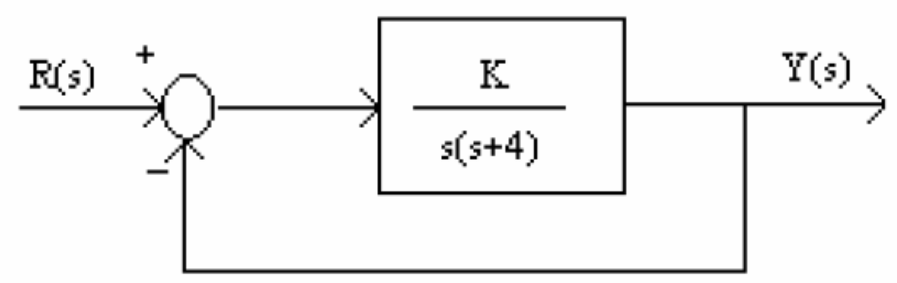
$$G_T(s) = \frac{n_G(s)d_H(s)}{d_G(s)d_H(s) + n_G(s)n_H(s)} = \frac{n_G(s)d_H(s)}{d_A(s) + n_A(s)}$$

- Idéia



Método do Lugar das Raízes (RL)

- Introdução
  - Definição:
    - R.L. é o lugar geométrico dos pólos da FTMF obtidos a partir dos zeros e pólos de A(s).
- Regras Básicas e Exemplos (Exemplo 1)



$$A(s) = \frac{K}{s(s+4)} \qquad \begin{cases} \text{zeros de } A(s): --- \\ \text{pólos de } A(s): 0, -4 \end{cases}$$

$$G_T(s) = \frac{K}{s(s+4)+K} = \frac{K}{s^2+4s+K}$$

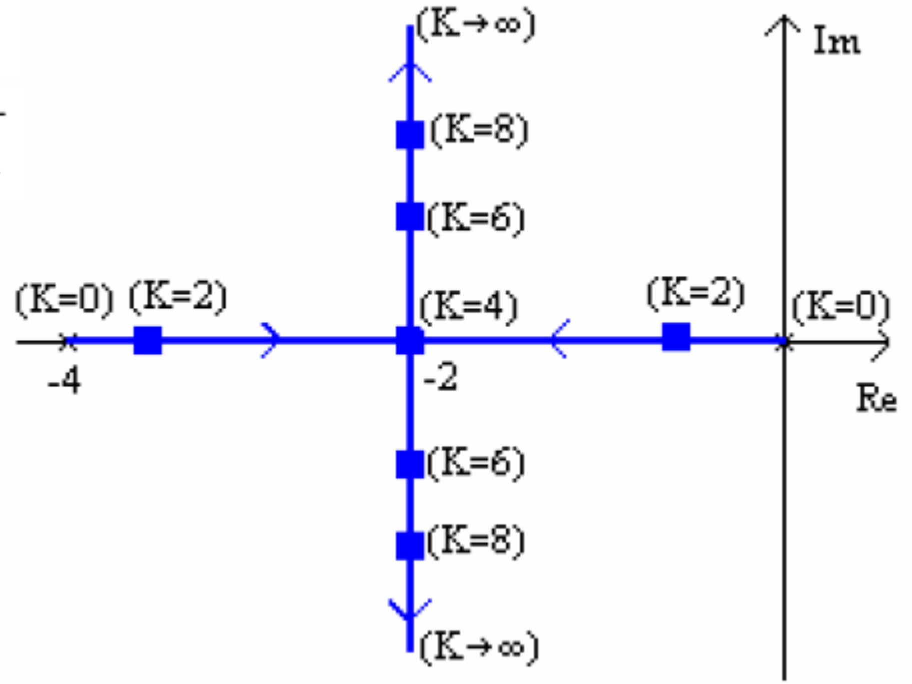
Método do Lugar das Raízes (RL)

- Exemplos e Regras Básicas (Exemplo 1)

$$G_T(s) = \frac{K}{s(s+4)+K} = \frac{K}{s^2+4s+K}$$

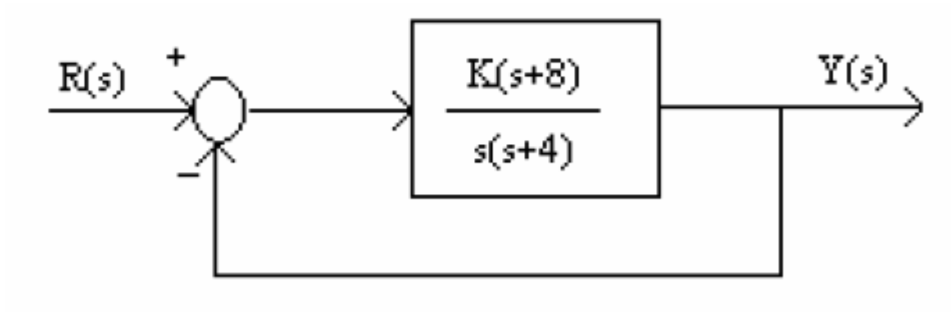
$$s^2 + 4s + K = 0 \Rightarrow s = -2 \pm \sqrt{4-K}$$

K	s_1	s_2
0	0	-4
2	-0,586	-3,414
4	-2	-2
6	-2 + j1,414	-2 – j1,414
8	-2 + j2	-2 – j2



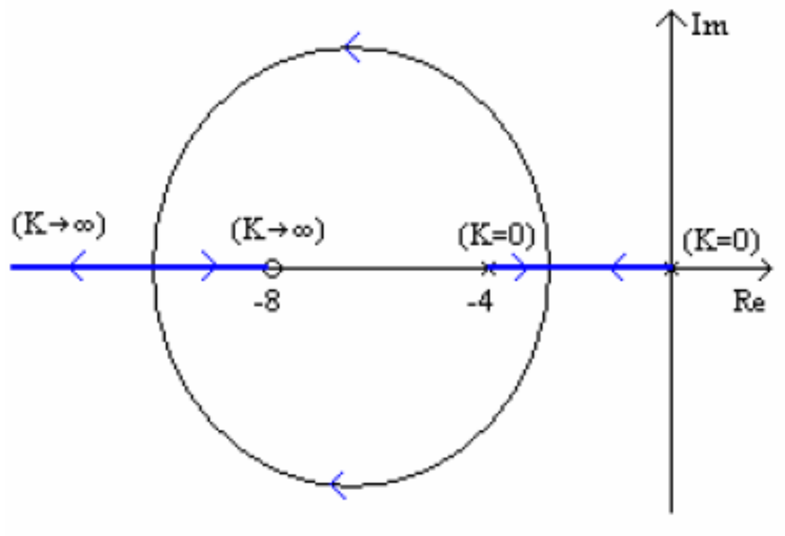
Método do Lugar das Raízes (RL)

- Exemplos e Regras Básicas (Exemplo 2)



$$A(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+4)} \qquad \begin{cases} \text{zeros de } A(s): -8 \\ \text{pólos de } A(s): 0, -4 \end{cases}$$

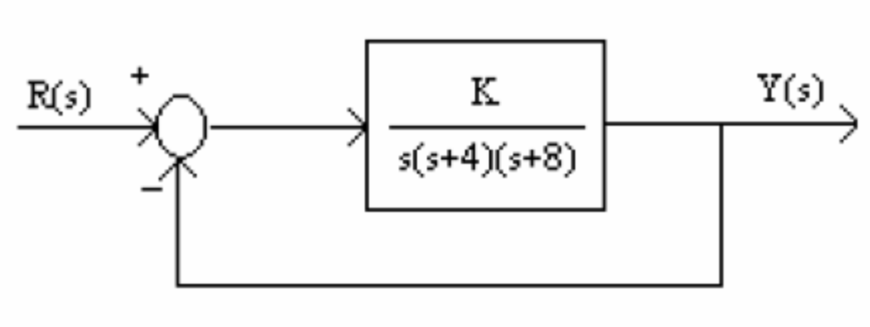
$$G_T(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+4)+K(s+8)} = \frac{K(s+8)}{s^2+(4+K)s+8K}$$



Obs: Um zero em A(s) atrai o lugar das raízes

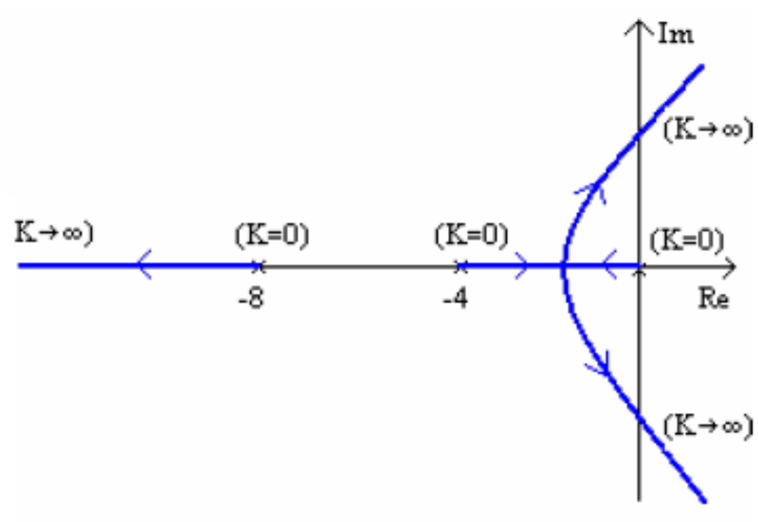
Método do Lugar das Raízes (RL)

- Exemplos e Regras Básicas (Exemplo 3)



$$A(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+8)} \begin{cases} \text{zeros de } A(s): --- \\ \text{pólos de } A(s): 0, -4, -8 \end{cases}$$

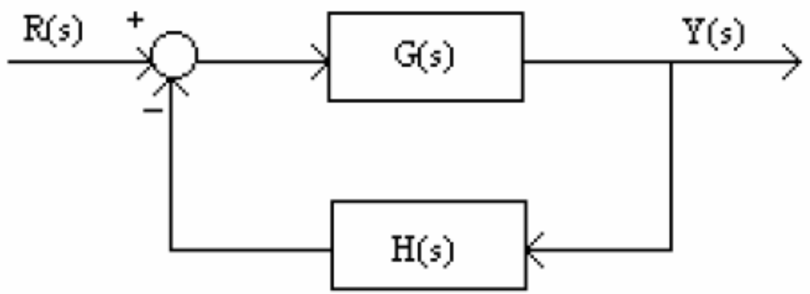
$$G_T(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+8)+K} = \frac{K}{s^3+12s^2+32s+K}$$



Obs: Um pólo em A(s) repele o lugar das raízes

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Condição de Magnitude e Condição Angular



$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+A(s)}$$

$$A(s) = G(s)H(s)$$

Teorema:

Um número complexo s_i pertence ao RL, se e somente se $1+A(s_i)=0$, ou seja, $A(s_i)=-1$

$$s_i \in \mathbf{RL} \Leftrightarrow \begin{cases} |\,\mathbf{A(s_i)}\,| = \mathbf{1} & \Rightarrow \text{Cond. de Magnitude} \\ \angle\,\mathbf{A(s_i)} = (\mathbf{2m+1})\pi \ \mathbf{rad} & \Rightarrow \text{Cond. Angular} \end{cases}$$

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Nomenclatura

Forma Geral de A(s)

$$\mathbf{A(s)=\frac{K(s+Z_1)(s+Z_2)\ldots}{s^n(s+P_1)(s+P_2)\ldots}}$$

$$\begin{cases} K & \rightarrow \text{ganho de } A(s) \\ -Z_1, -Z_2, \ldots & \rightarrow \text{zeros de } A(s) \\ -P_1, -P_2, \ldots & \rightarrow \text{pólos não nulos de } A(s) \\ n & \rightarrow \text{número de integradores de } A(s) \end{cases}$$

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Nomenclatura

$$A(s_i) = \frac{K(s_i + Z_1)(s_i + Z_2)\ldots}{s_i^{\,n}(s_i + P_1)(s_i + P_2)\ldots}$$

Módulo de $A(s_i)$

$$|A(s_i)| = \frac{K\,|s_i + Z_1|\,|s_i + Z_2|\ldots}{|s_i|^n\,|s_i + P_1|\,|s_i + P_2|\ldots} \;\Rightarrow\; |A(s_i)| = \frac{K.A_{Z1}.A_{Z2}\ldots.}{A_{P0}{}^{n}.A_{P1}.A_{P2}\ldots.}$$

Fase de $A(s_i)$

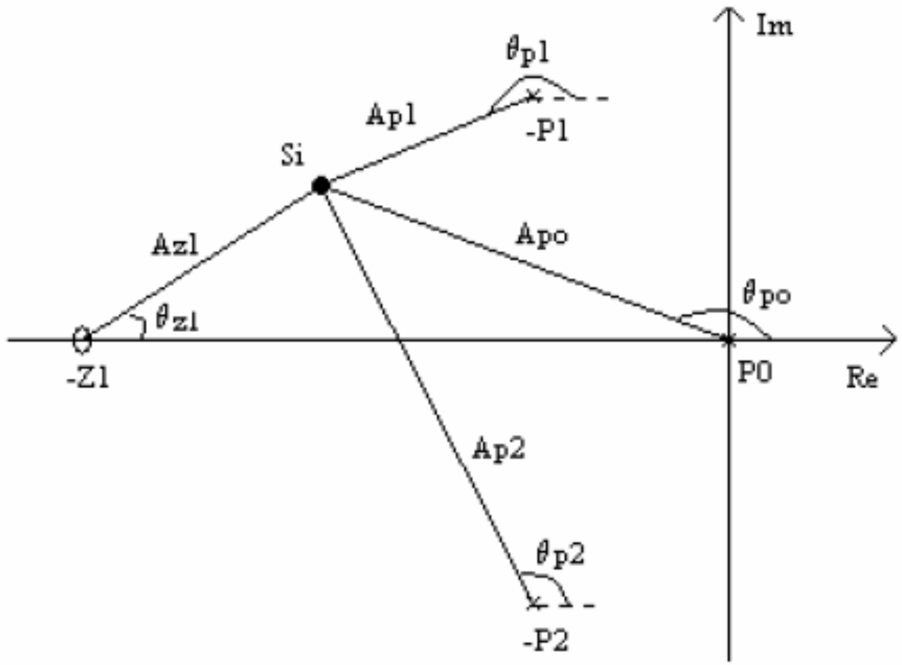
$$\angle A(s_i) = \angle(s_i + Z_1) + \angle(s_i + Z_2) + \ldots - n\angle s_i - \angle(s_i + P_1) - \angle(s_i + P_2) - \ldots \;\Rightarrow\; \angle A(s_i) = \theta_{Z1} + \theta_{Z2} + \ldots - n\theta_{P0} - \theta_{P1} - \theta_{P2} - \ldots$$

Método do Lugar das Raízes (RL)

- Nomenclatura (Graficamente)

Exemplo

$$A(s) = \frac{K(s+Z_1)}{s(s+P_1)(s+P_2)}$$



Condição de Magnitude

$$\frac{K.A_{Z1}}{A_{P0}.A_{P1}.A_{P2}} = 1$$

Condição de Angular

$$\theta_{Z1} - \theta_{P0} - \theta_{P1} - \theta_{P2} = (2m+1)\pi, \ \text{m inteiro}$$