Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Pólos, Zeros e Resposta do Sistema: Definições

- Resposta do sistema: soma da **resposta forçada + resposta natural**

  1. Resposta forçada é também chamada de resposta estacionária (ou solução particular);
  2. Resposta natural é também chamada de solução homogênea.

- **Pólos** de uma Função de Transferência:

  Os valores da variável, s, da transformada de Laplace que fazem com a FT se torne infinita.

- **Zeros** de uma Função de Tranferência:

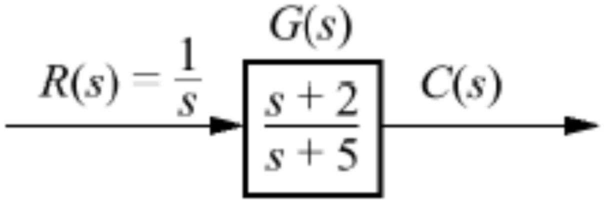
  Os valores da variável, s, da transformada de Laplace que fazem com a FT se torne igual a zero.

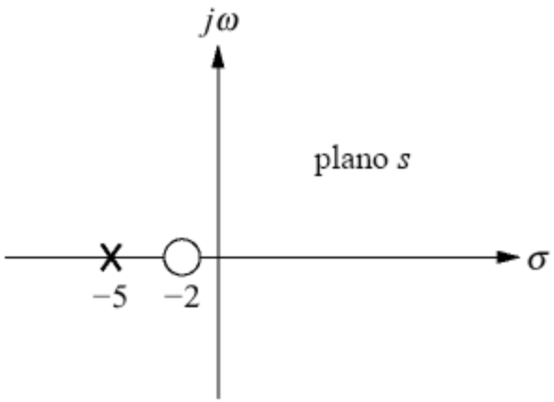
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Pólos, Zeros e Resposta do Sistema de Primeira Ordem

- Exemplo





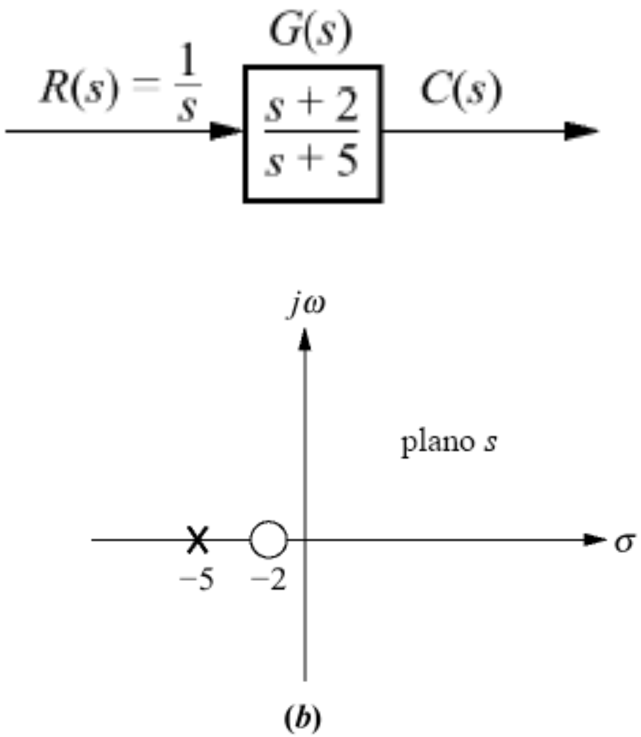
(b)

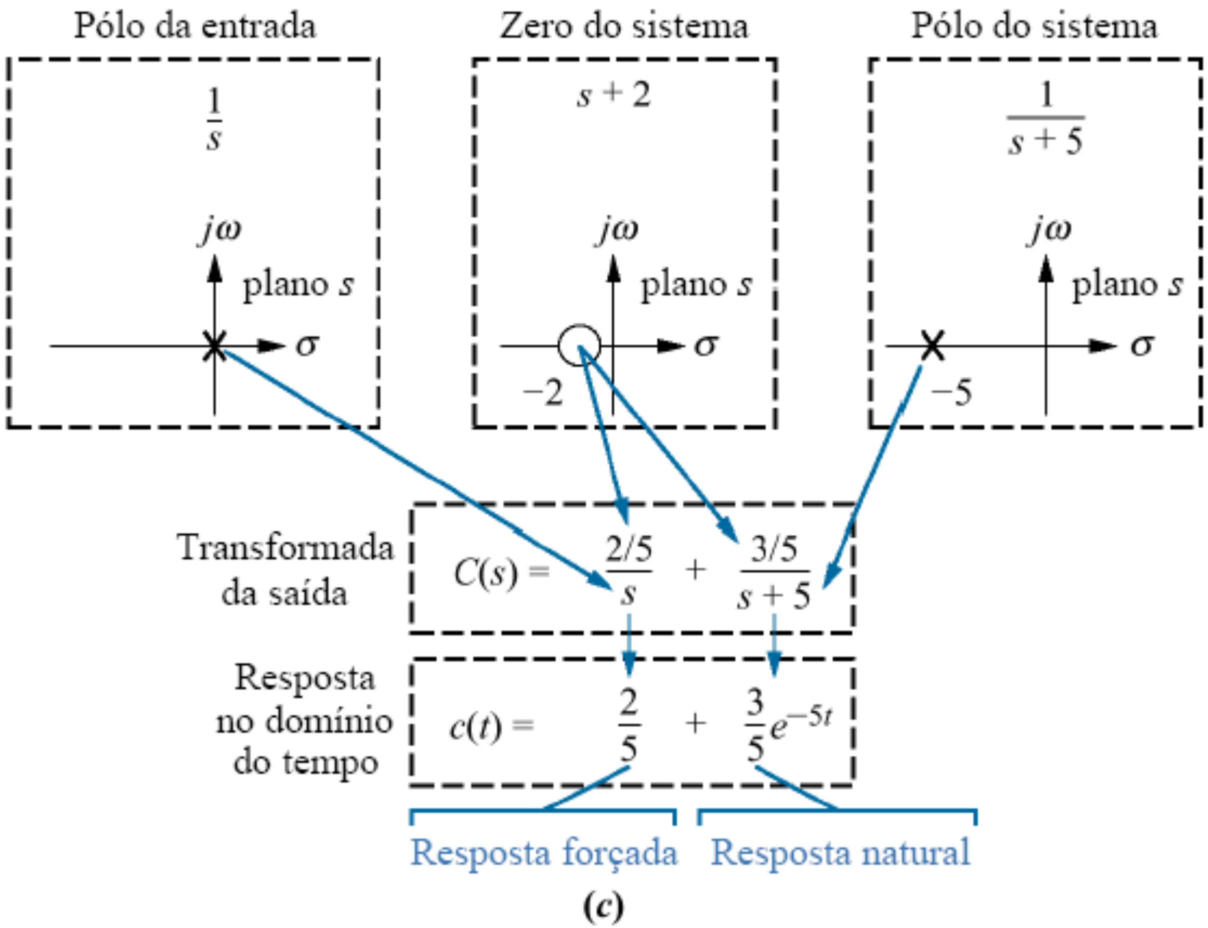
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Pólos, Zeros e Resposta do Sistema de Primeira Ordem

• Exemplo





Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Primeira Ordem

Considere os sistema cuja FT é dada por:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Se a entrada for um degrau unitário, ou seja: R(s)=1/s,

$$C(S) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtém-se que:

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at} \quad \text{em que} \quad c_f(t) = 1 \quad \text{e} \quad c_n(t) = -e^{-at}$$

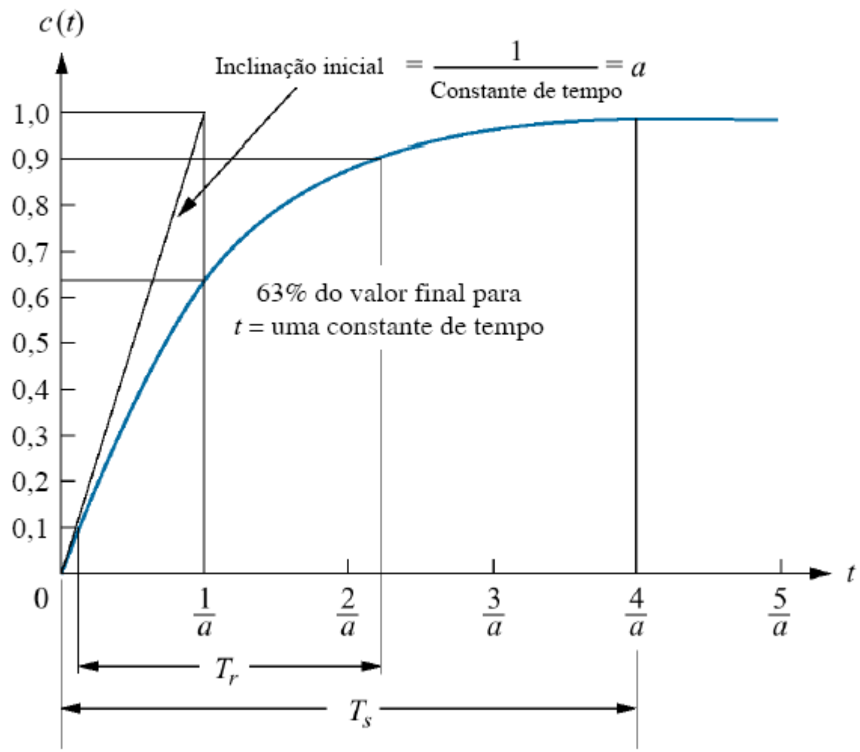
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Primeira Ordem

Três especificações de desempenho da resposta transitória:

1. Denomina-se 1/a de constante de tempo da resposta.
2. O tempo de subida (Tr) é o tempo necessário para o sistema vá de 0.1 a 0.9 do valor final.
3. Tempo de Estabilização (Ts) é o tempo necessário para que o sistema alcance 2% do valor final.



Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

• Formulação geral

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde:

- ➢ ω_n é freqüência de oscilação do sistema sem amortecimento.
- ➢ ζ é o coeficiente de amortecimento do sistema.

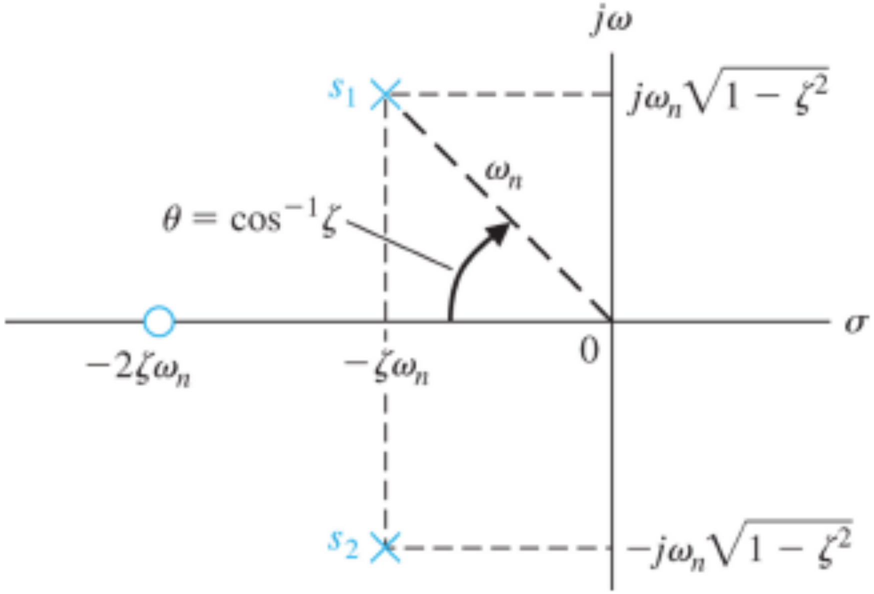
Sistemas de Controle e de Processos

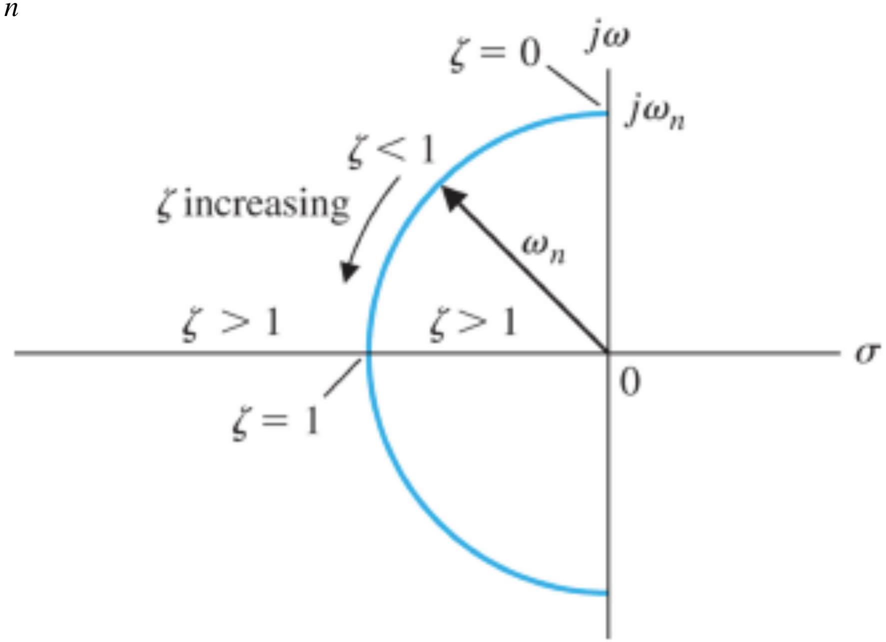
1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

- Formulação geral

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$





Sistemas de Controle e de Processos

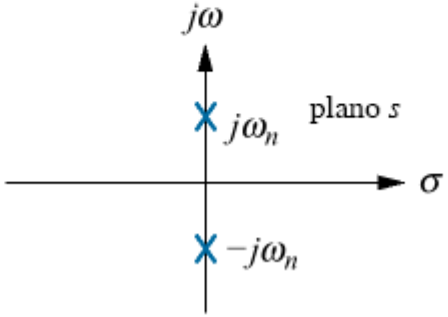
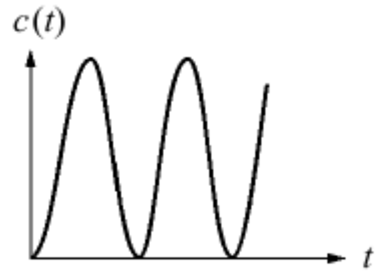
1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

- Formulação geral

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

* Classificação quanto ao coeficiente de amortecimento ζ:

ζ	Pólos	Resposta ao degrau
0		 Não-amortecido

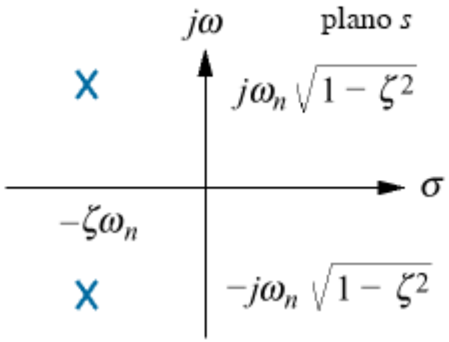
Sistemas de Controle e de Processos

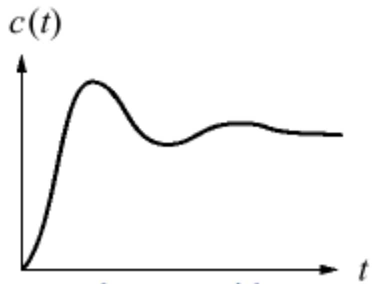
1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

ζ — Pólos — Resposta ao degrau

$0 < \zeta < 1$

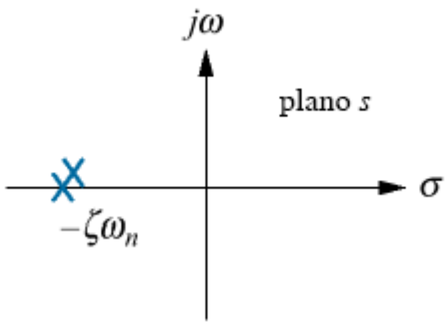


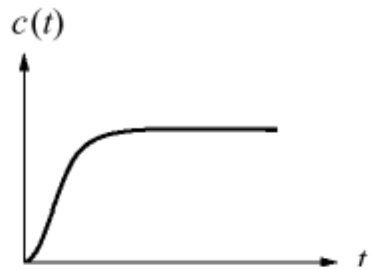


Subamortecido

ζ — Pólos — Resposta ao degrau

$\zeta = 1$



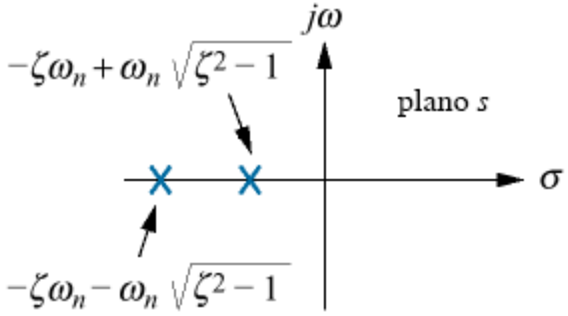
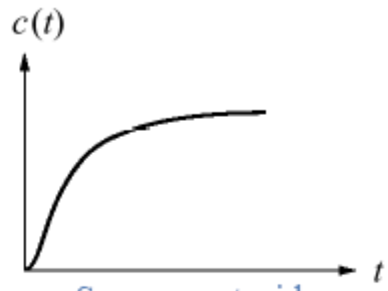


Criticamente amortecido

Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

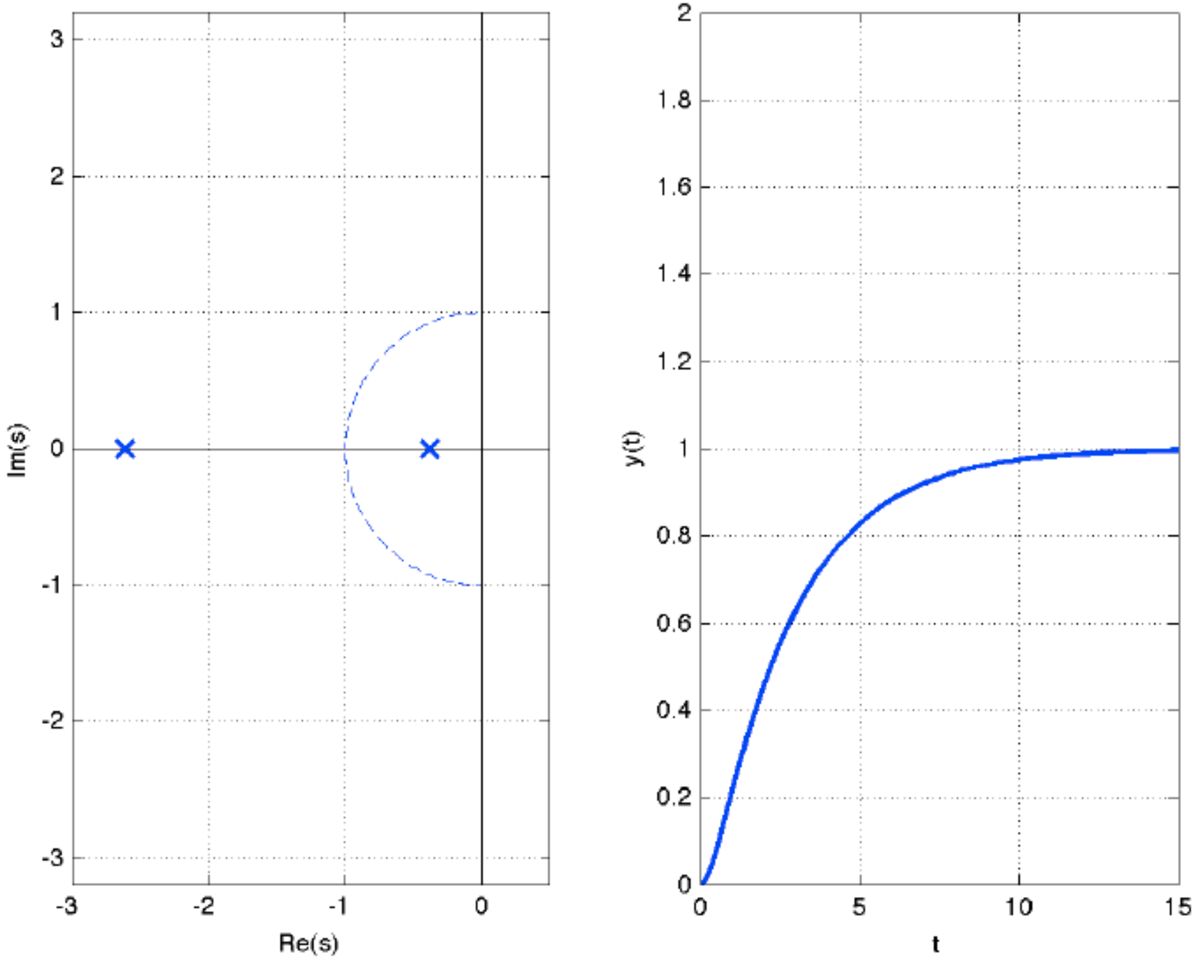
☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

ζ	Pólos	Resposta ao degrau
$\zeta > 1$		 Superamortecido

Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral** **SUPERAMORTECIDO**

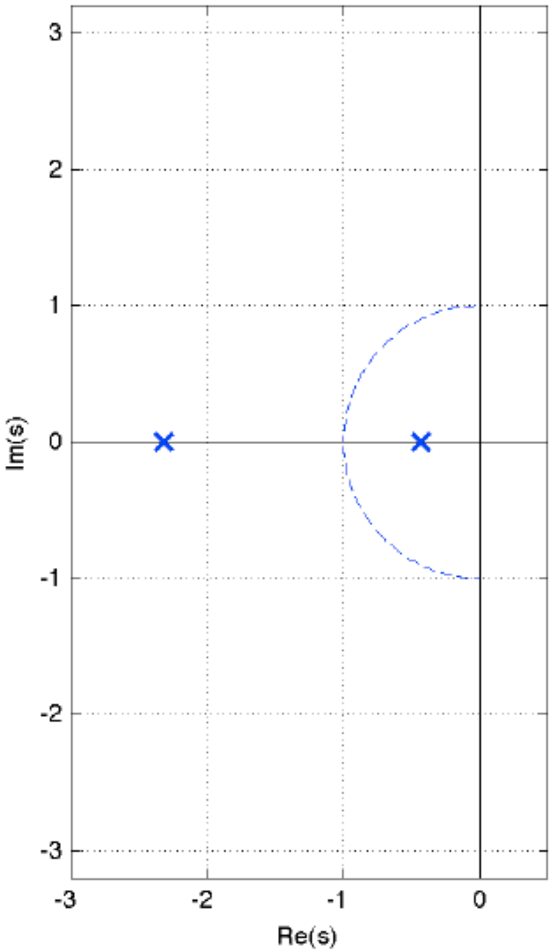


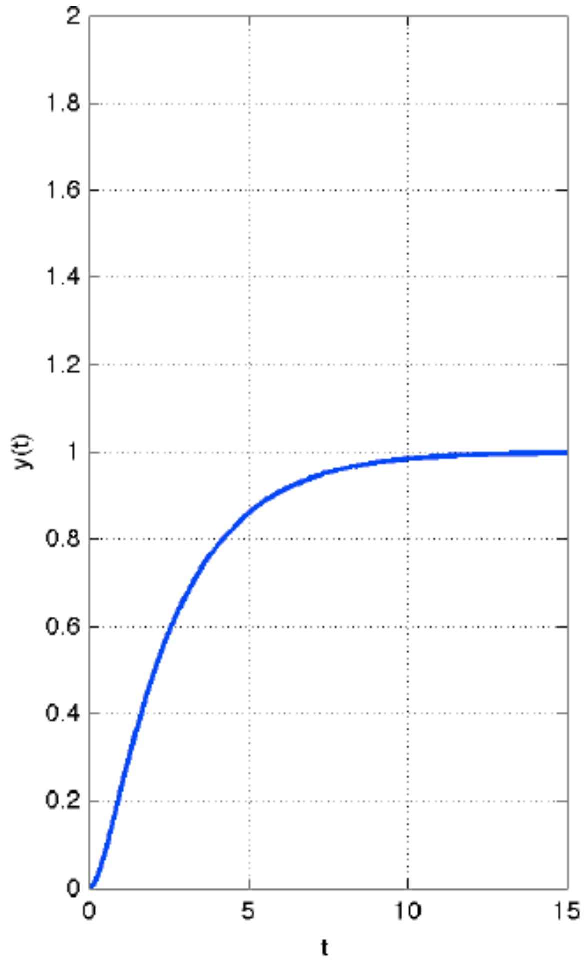
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

SUPERAMORTECIDO



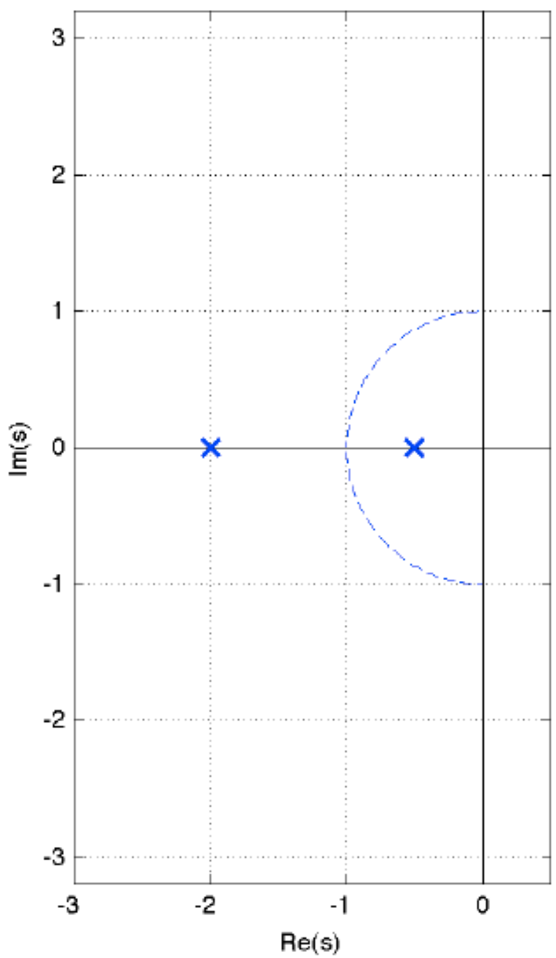


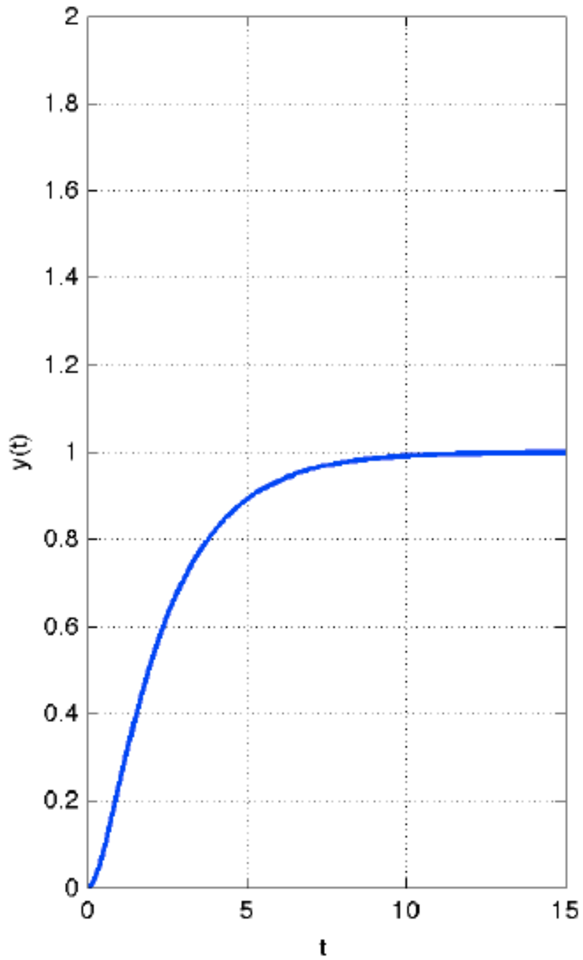
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

SUPERAMORTECIDO



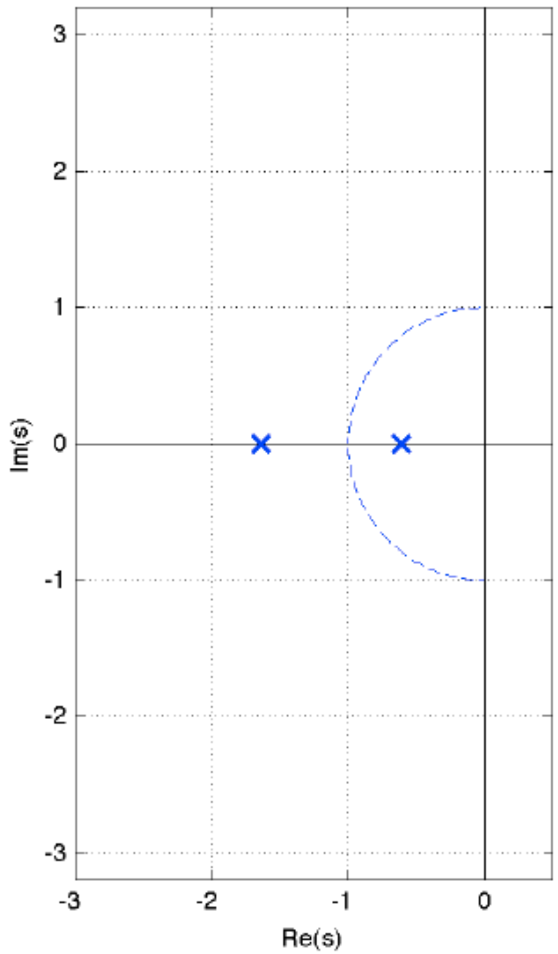


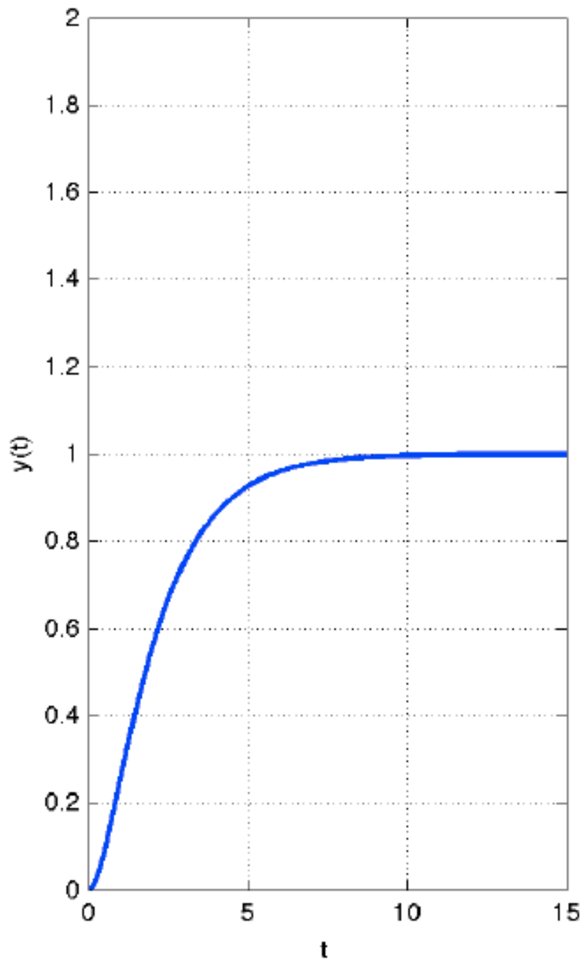
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

SUPERAMORTECIDO



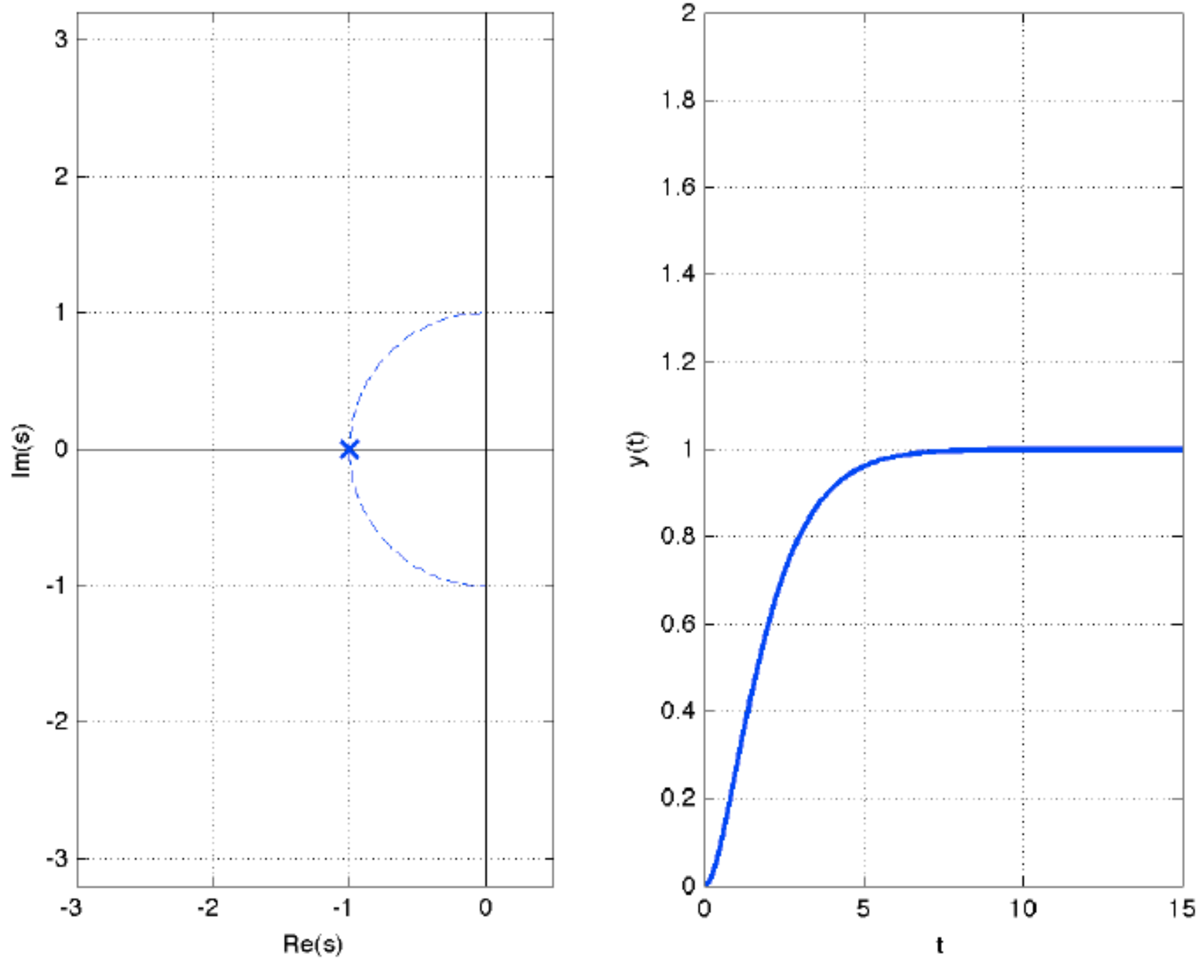


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

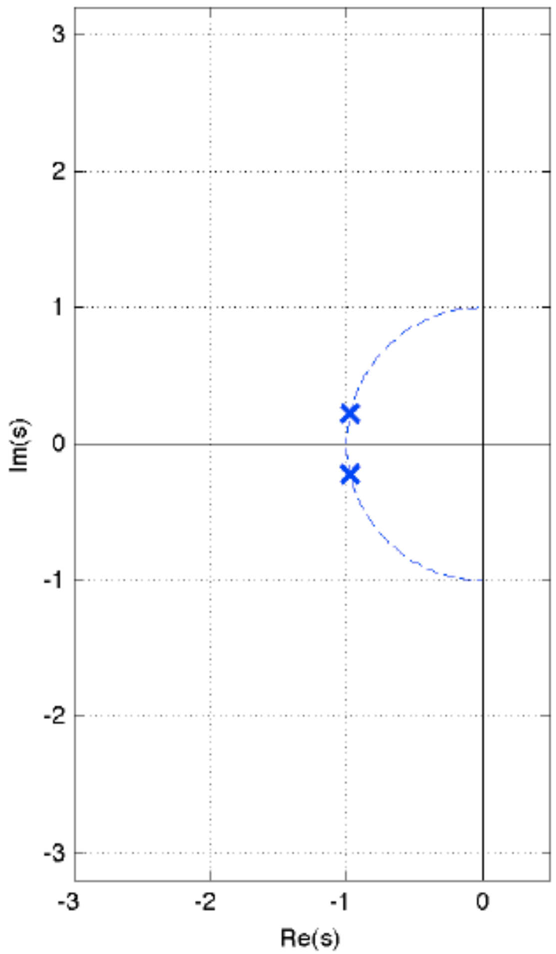
CRITICAMENTE

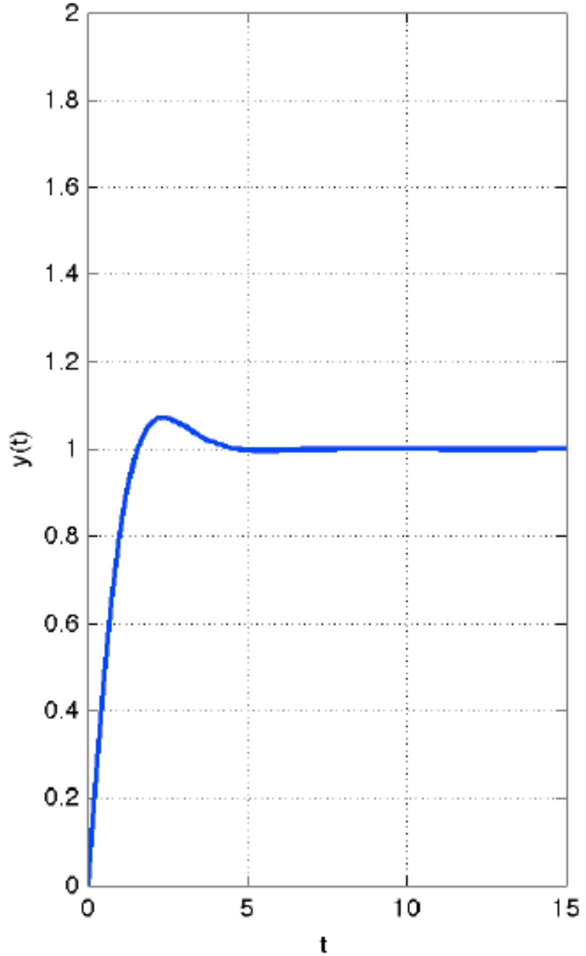


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral** **SUBAMORTECIDO**



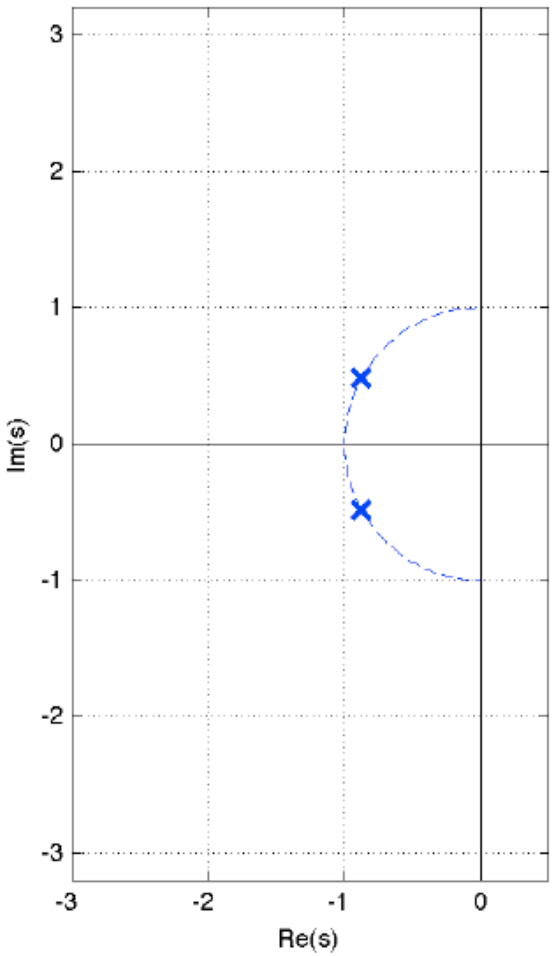


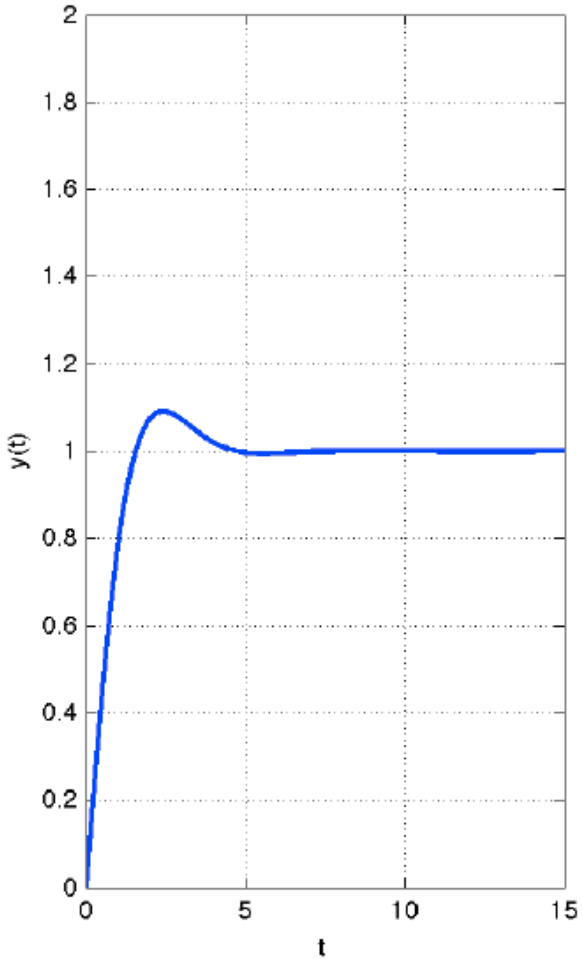
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

SUBAMORTECIDO

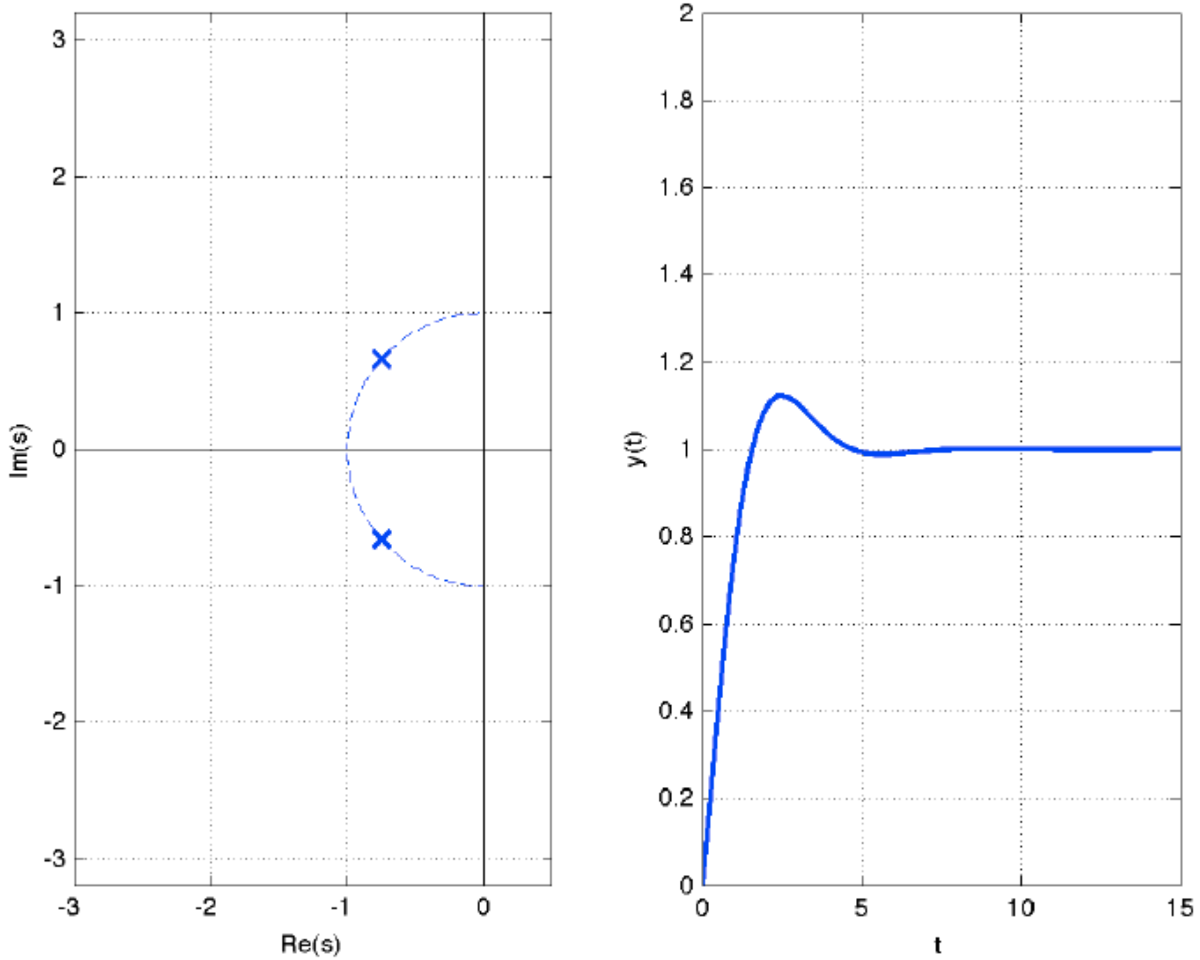




Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral** **SUBAMORTECIDO**

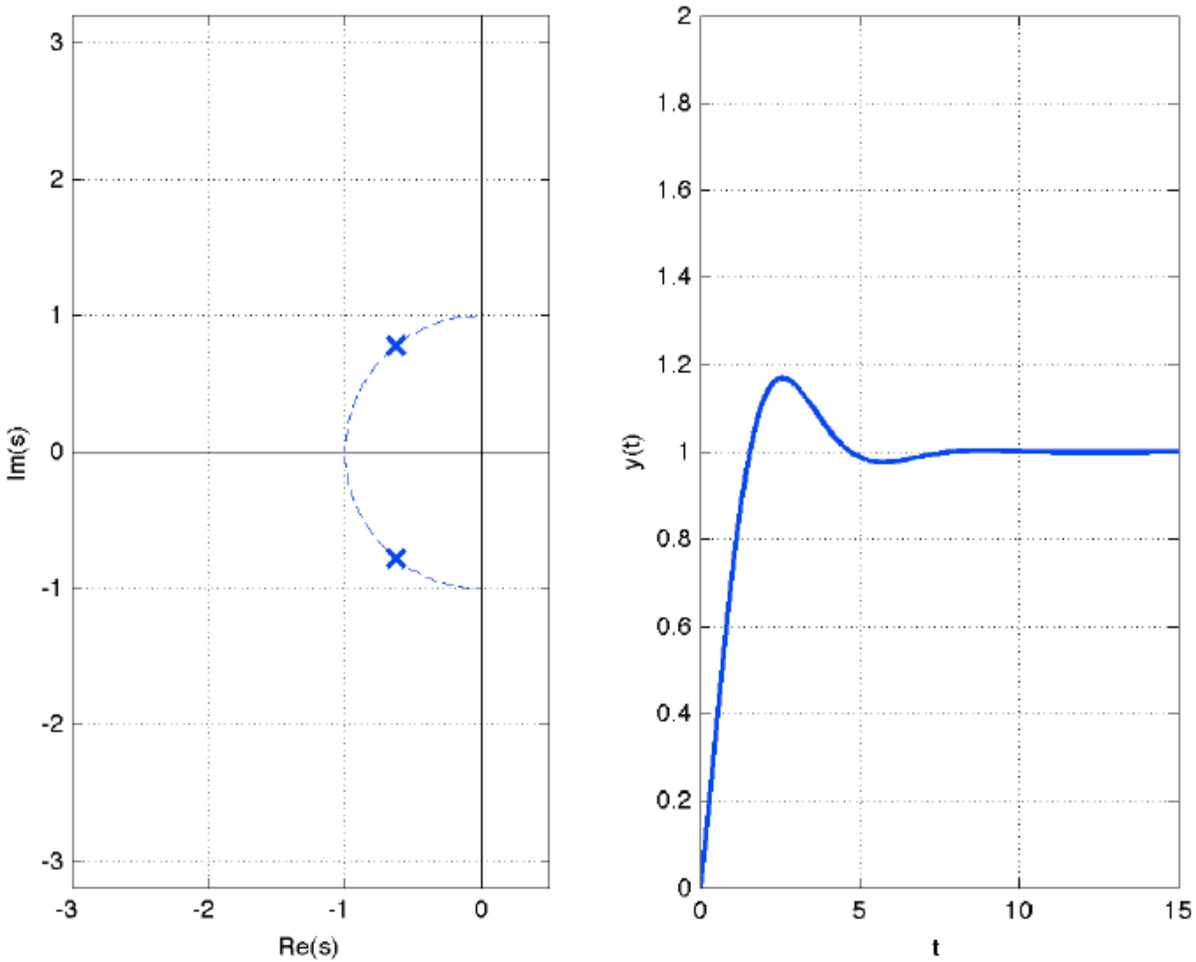


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

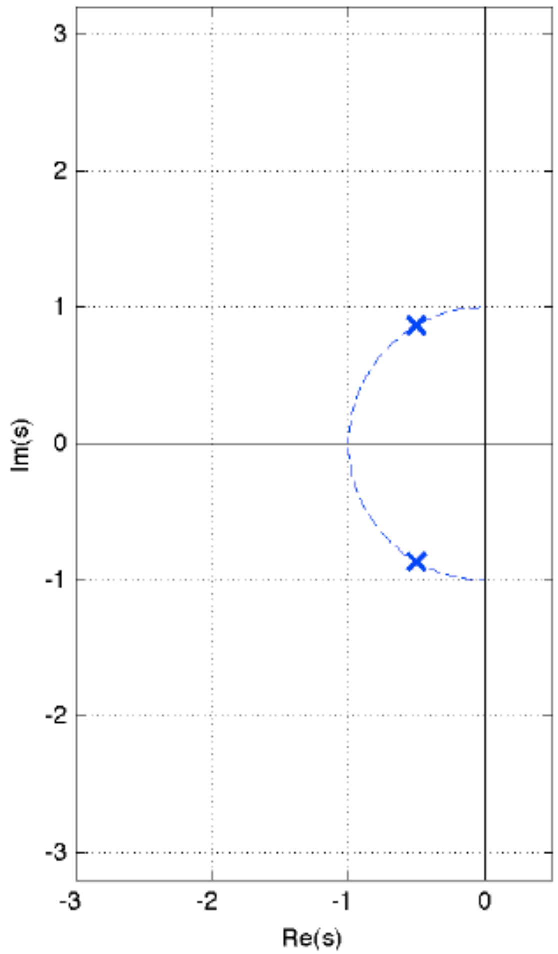
SUBAMORTECIDO

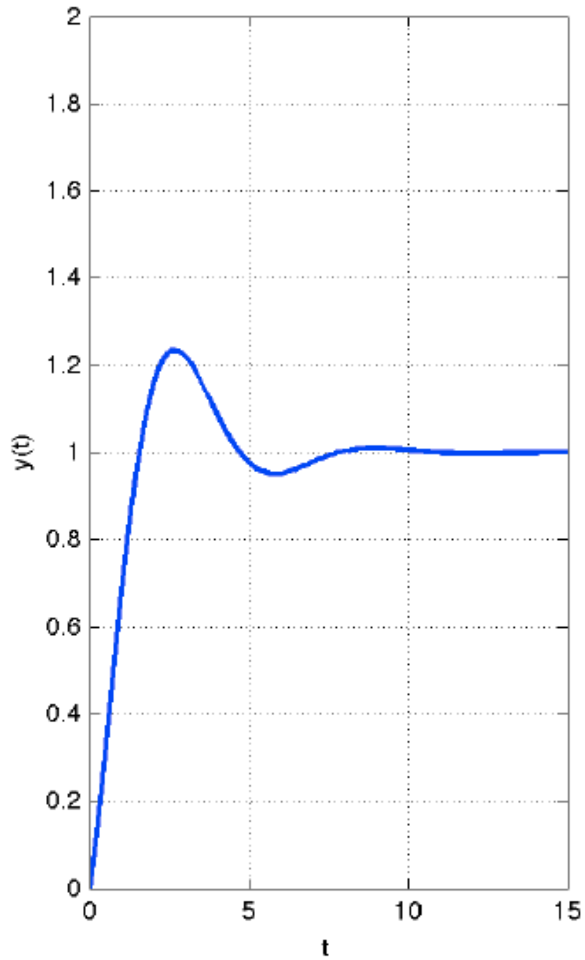


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral** **SUBAMORTECIDO**

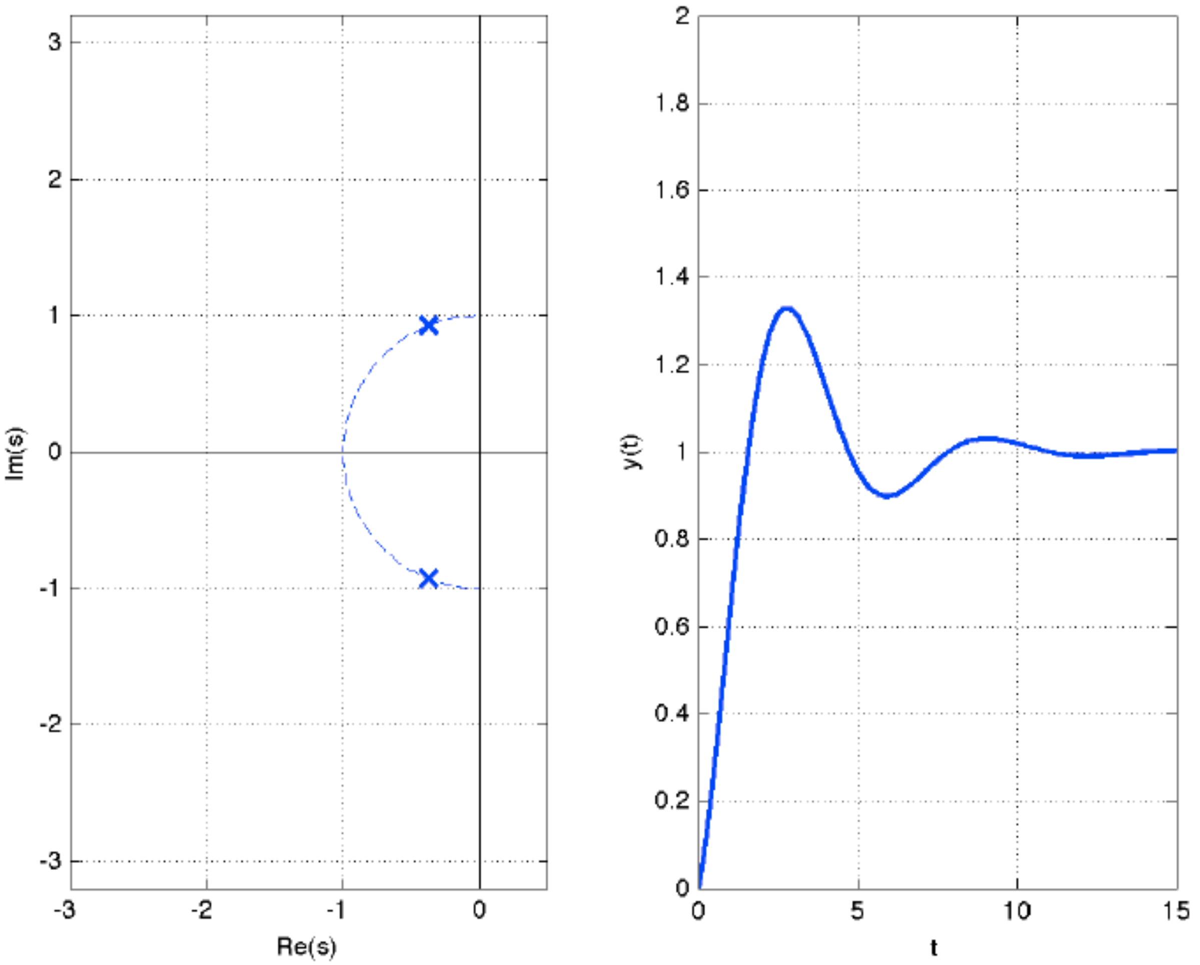




Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral** **SUBAMORTECIDO**

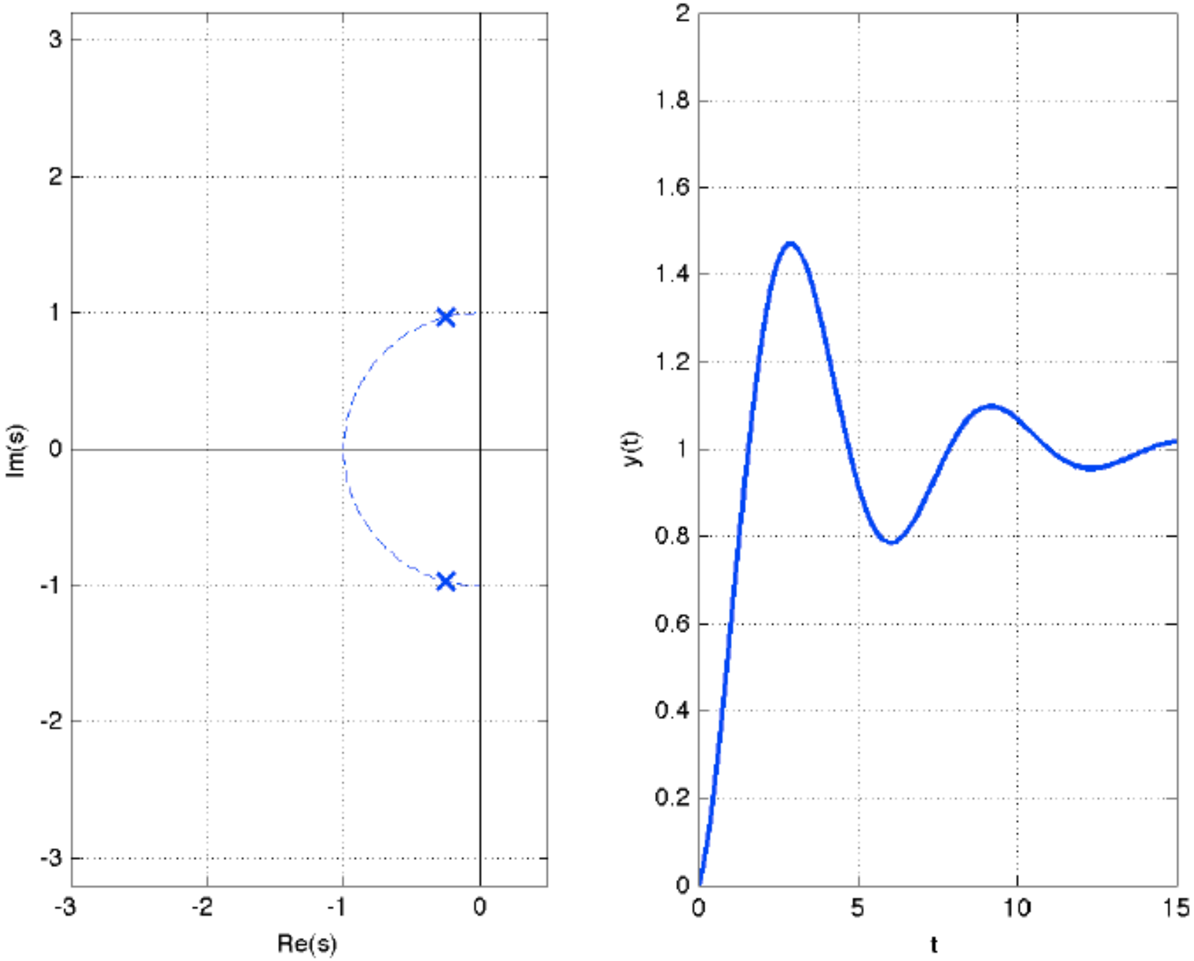


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

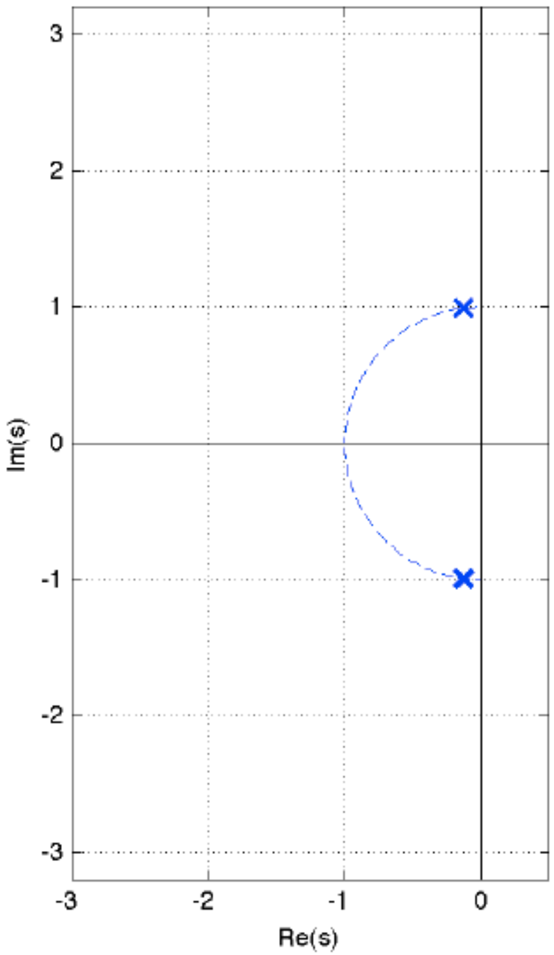
SUBAMORTECIDO

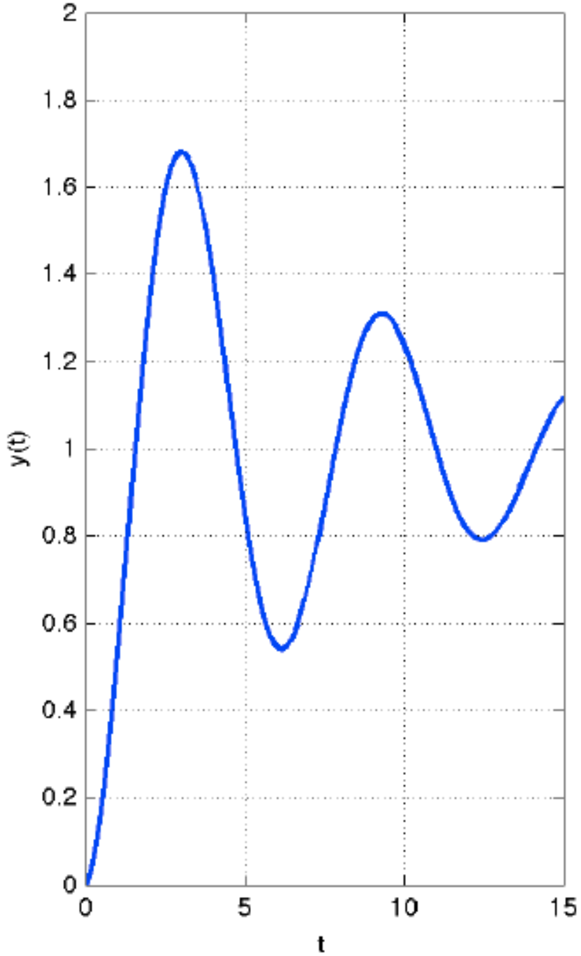


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral** **SUBAMORTECIDO**



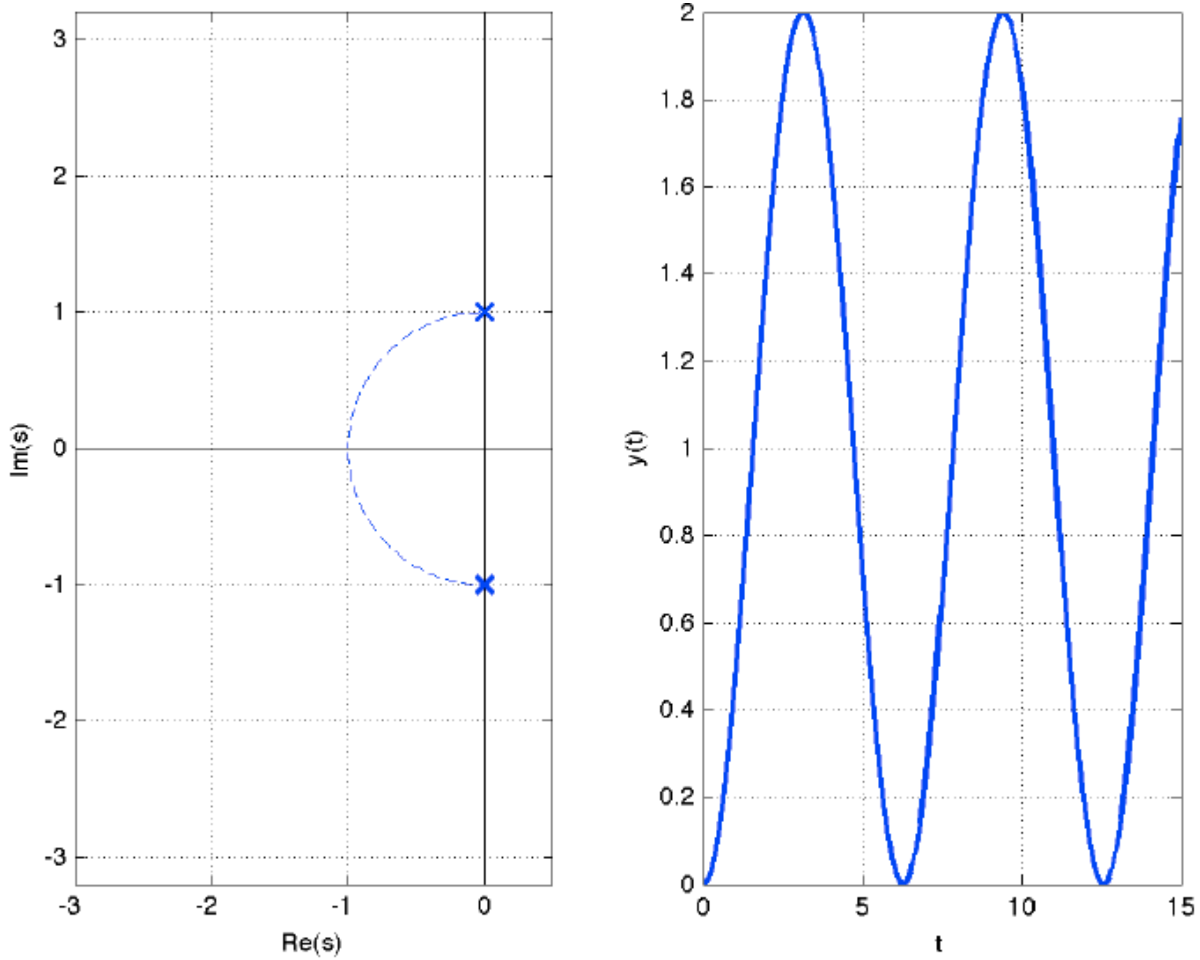


Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ **Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral**

SEM AMORTECIMENTO



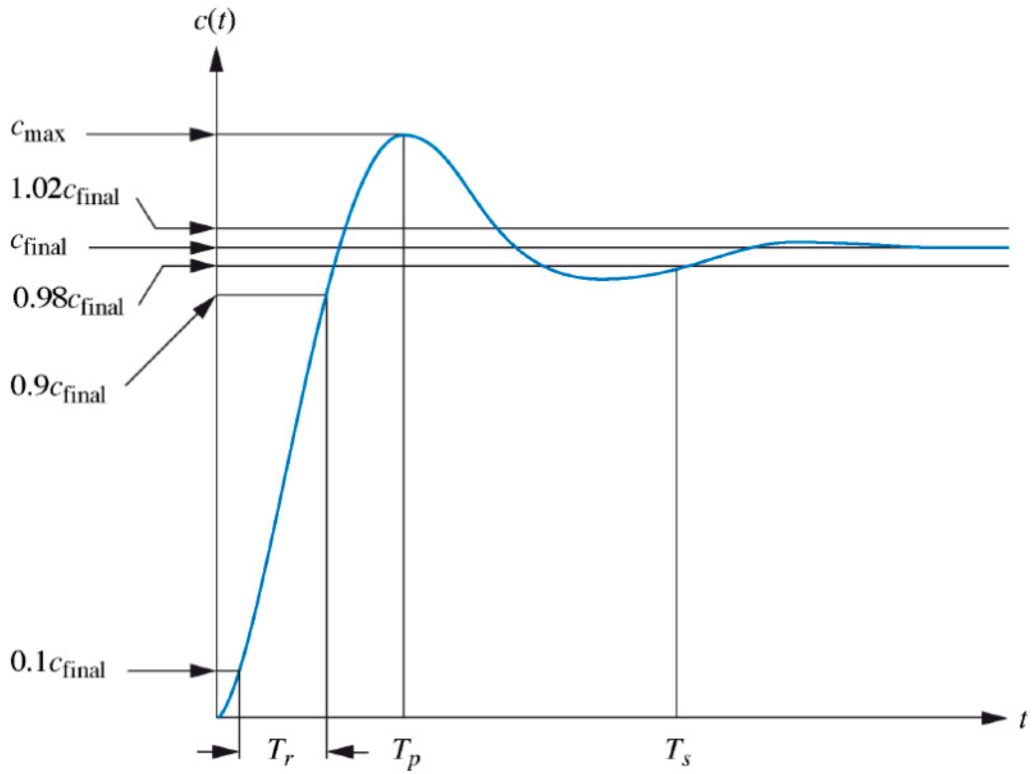
Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

Especificações do sistema de segunda ordem:

1. Instante de pico (Tp): tempo necessário para alcançar o primeiro valor de pico;
2. Sobre-sinal (%UP): percentual de ultrapassagem do valor de regime;
3. Tempo de estabilização (Ts): +/- 2% do valor estacionário; e
4. Tempo de subida (Tr): tempo necessário para que a saída vá de 0.1 a 0.9 do valor de regime permanente.



Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

- Cálculo de Tp

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Cálculo de %UP

O sobre-sinal percentual pode ser dado por:

$$\%UP = \frac{c_{\max} - c_{final}}{c_{final}} \times 100$$

Ou ainda,

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

Sistemas de Controle e de Processos

1. Resposta no Domínio do Tempo

☞ Sistemas de Segunda Ordem: Ordem Geral

- Cálculo de ζ:

Utilizando-se a equação de %UP pode-se determinar ζ como:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%UP/100)}}$$

Valores utilizados nos exercícios/avaliações:

$$\zeta = 0{,}5 \Rightarrow \%UP = 16{,}31\% \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\zeta = 0{,}7 \Rightarrow \%UP = 5\% \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

- Cálculo de Ts (pólos complexos):

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Sistemas de Controle e de Processos

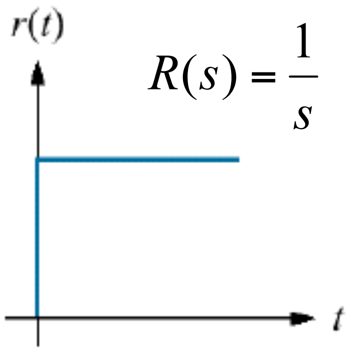
7. Erros de Estado Estacionário

☞ Definição

• O erro de estado estacionário é a diferença entre a entrada e a saída para uma entrada teste quando:

$$t \rightarrow \infty$$

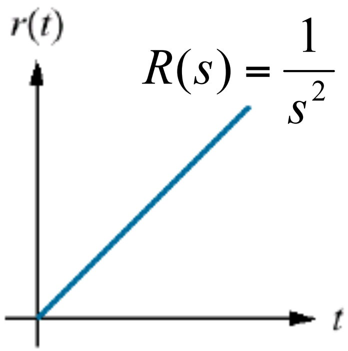
☞ Entradas de Teste



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Degrau unitário

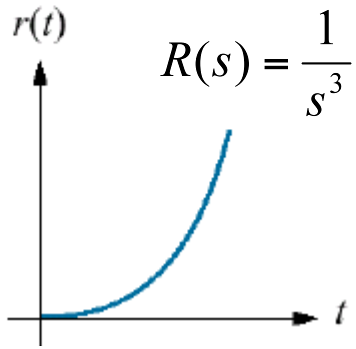
Posição constante



$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

Rampa unitária

Velocidade constante



$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

Parábola

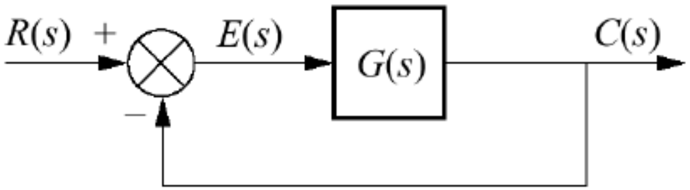
Aceleração constante

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ Erro Estacionário em Termos de G(s)

• Admita o sistema de controle com realimentação unitária dado por



• Escrevendo E(s) em termos de R(s) e C(s)

$$E(s) = R(s) - C(s) \qquad \text{mas como} \qquad C(s) = E(s)G(s)$$

Então: $$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

• O valor final de E(s) é dado por:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ Erro Estacionário em Termos de G(s)

• Entrada em DEGRAU

$$e(\infty) = e_{\deg rau}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

• Condição de Erro Nulo

$$\lim_{s \to 0} G(s) = \infty$$

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ Erro Estacionário em Termos de G(s)

• Entrada em RAMPA

$$e(\infty) = e_{rampa}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s^2)}{1 + G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)}$$

• Condição de Erro Nulo

$$\lim_{s \to 0} sG(s) = \infty$$

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ Erro Estacionário em Termos de G(s)

• Entrada em PARÁBOLA

$$e(\infty) = e_{rampa}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s^3)}{1 + G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^2 G(s)}$$

• Condição de Erro Nulo

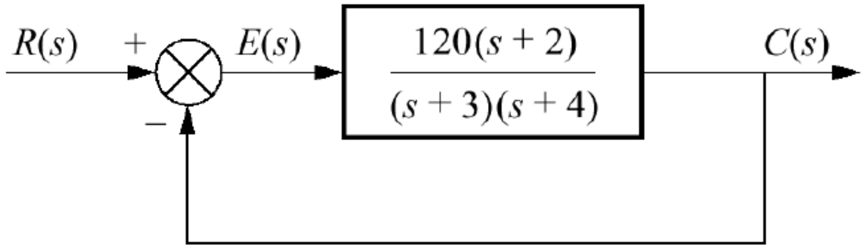
$$\lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \infty$$

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ Erro Estacionário em Termos de G(s)

• Exemplo: Determinar os erros de estado estacionário para as entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $2.5t^2u(t)$ de:



Solução:

$$e_{\deg rau}(\infty) = \frac{5}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21}$$

$$e_{rampa}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$e_{parábola}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{5}{0} = \infty$$

A transformada de Laplace de $5tu(t)$ e $2.5t^2u(t)$ são respectivamente:

$$R(s) = \frac{5}{s^2} \qquad \text{e} \qquad R(s) = \frac{5}{s^3}$$

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ Constante de Erro Estático

• Constante de Posição Kp

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

• Constante de Velocidade Kv

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

• Constante de Aceleração Ka

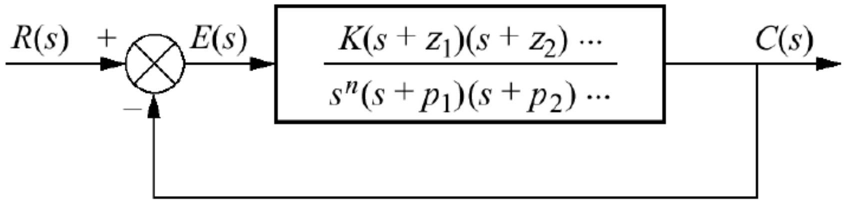
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

➢ Os termos em limite no denominador dos especificadores de erro estáticos, são denominados de constante de erro.

Sistemas de Controle e de Processos

7. Erros de Estado Estacionário

☞ **Tipo de Sistema**



		Tipo 0		Tipo 1		Tipo 2	
Entrada	Expressão do erro estacionário	Constante de erro estacionário	Erro	Constante de erro estacionário	Erro	Constante de erro estacionário	Erro
Degrau, $u(t)$	$\dfrac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constante	$\dfrac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $tu(t)$	$\dfrac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constante	$\dfrac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\dfrac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constante	$\dfrac{1}{K_a}$