Sejam:

$$k \in \mathbb{N},\ k > 0$$

$$a > 0$$

$$\alpha := a^{1/k} > 0$$

Considerando

$$x_1 = Cte > 0$$

$$x_{n+1} = \phi(x_n) := \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k} \quad (n \geq 1)$$

OBS: Acima temos o método de Newton Raphson para $f(x) = x^k - a$

Prova Convergência

1) Inequação AM-GM

↳ Estabelece que a média aritmética é sempre maior ou igual a geométrica, igual apenas quando todos números do conjunto são iguais.

$$\phi(x) = \frac{\underbrace{x + \cdots + x}_{k-1 \text{ termos}} + \frac{a}{x^{k-1}}}{k} \geq \left(x^{k-1} \cdot \frac{a}{x^{k-1}} \right)^{1/k} = a^{1/k} = \alpha$$

Igualdade ocorre se $x = \alpha$

Logo, $x_n \geq \alpha$ para todo $n > 2$

2) Monotonicidade para $x \geq \alpha$

↳ Monótona: mantém mesma direção

Para $x \geq \alpha$

$$x - \phi(x) = \frac{x^k - a}{kx^{k-1}} \geq 0$$

com igualdade somente em $x = \alpha$.

Dessa maneira, sempre que $x_n \geq \alpha$

$$\alpha \leq x_{n+1} = \phi(x_n) \leq x_n$$

Logo função é monotonicamente decrescente e limitada inferiormente por α.

Como no passo 1 temos que $x_2 \geq \alpha$ para qualquer chute $c > 0$, conclui-se que $\{x_n\}_{n \geq 2}$ é decrescente e limitada, logo converge para algum $L \geq \alpha$.

3) Identificação do limite

$$L = \phi(L) = \frac{(K-1)L + \frac{a}{L^{K-1}}}{K} \Rightarrow L^K = a \Rightarrow L = \alpha$$
$(\alpha > 0)$

Portanto, $x_n \to \alpha = a^{1/K}$

para todo $K \geq 1$

Logo, o método de Newton Raphson é convergente para a raiz K-ésima.