DISCIPLINA: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

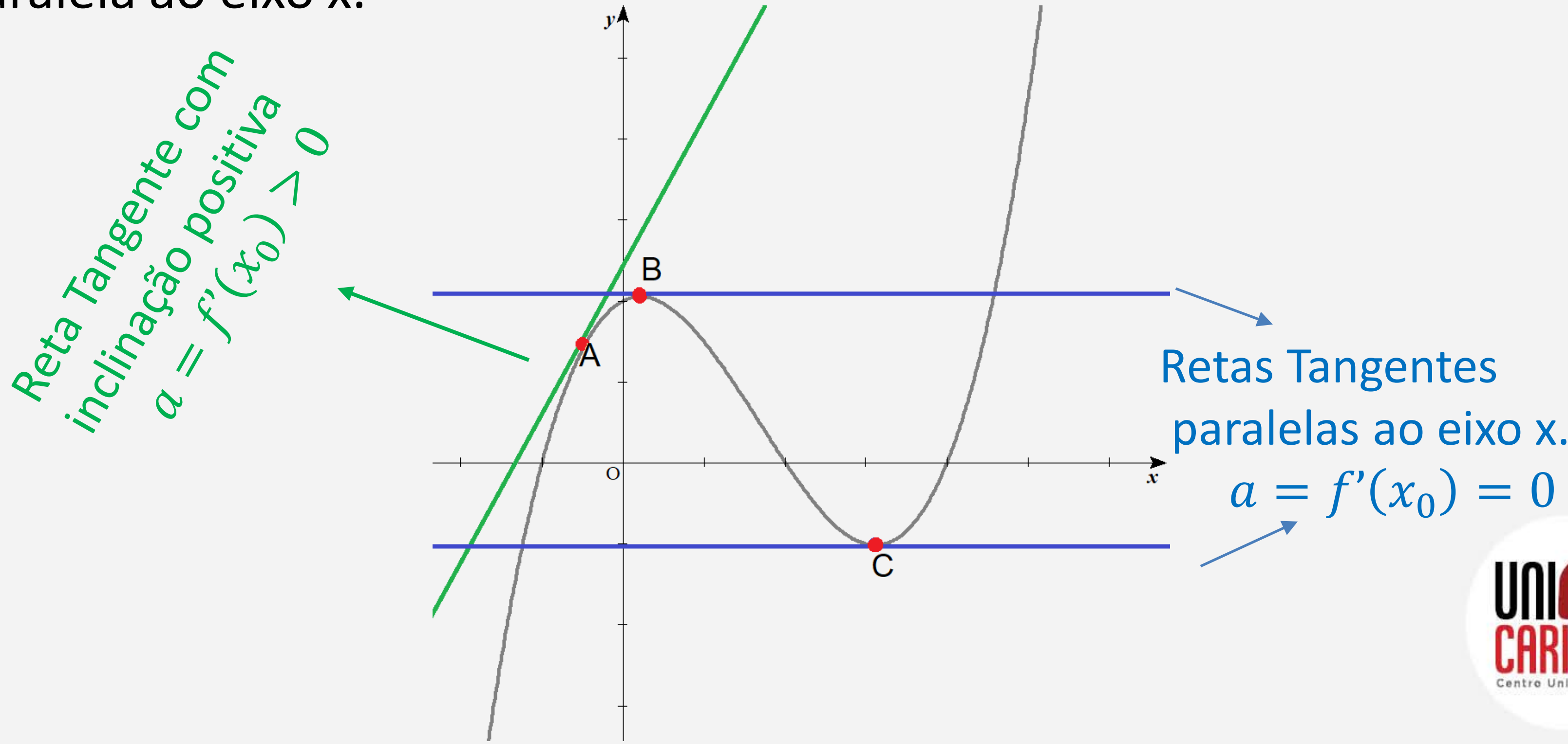
TEMA 08: ESTUDOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO

Objetivo do Tema:

Usar a derivada de uma função para expressar os pontos críticos da mesmas e classifica-los, quando possível, como pontos de máximo ou mínimo; identificar derivada como ferramenta para solução de problemas que podem ser formulados por funções.

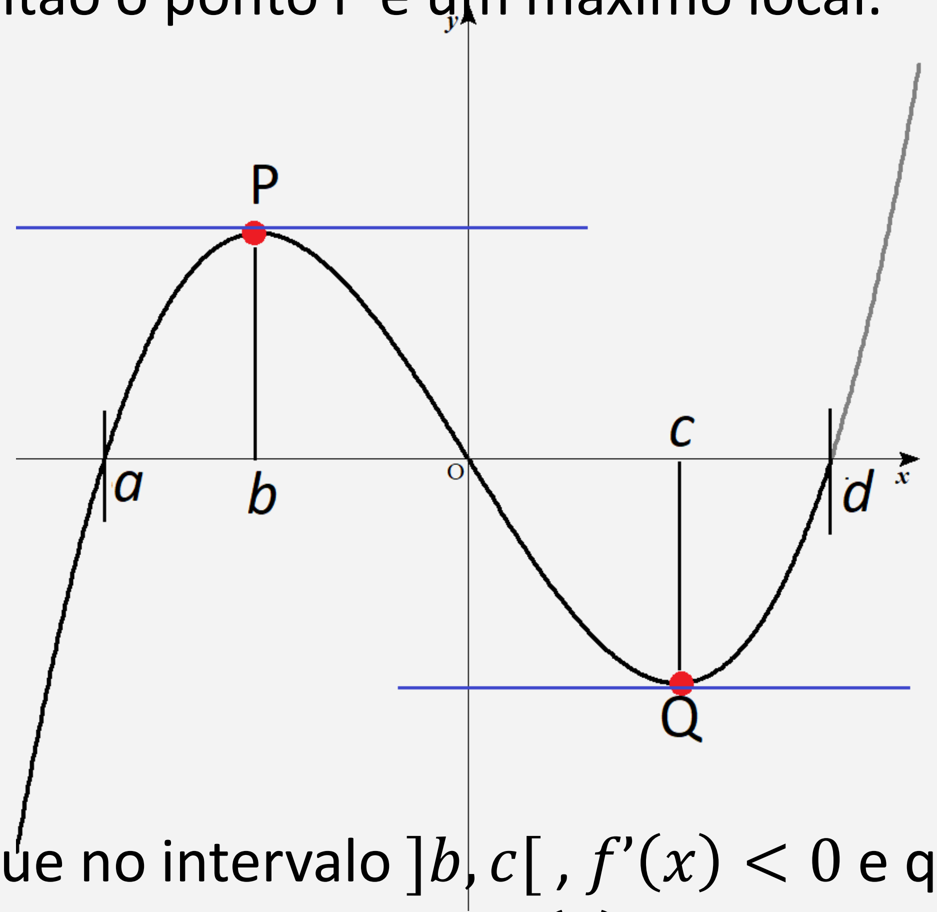
Problemas de Máximos e Mínimos

A interpretação geométrica da derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Este fato possibilita aplicar a derivada como apoio no desenvolvimento de gráficos de funções. Por exemplo, a derivada por ser usada para determinar os pontos onde a reta tangente é paralela ao eixo x.



Observe que no intervalo $]a, b[$, $f'(x) > 0$ e que no intervalo $]b, c[$, $f'(x) < 0$.

Então o ponto P é um máximo local.

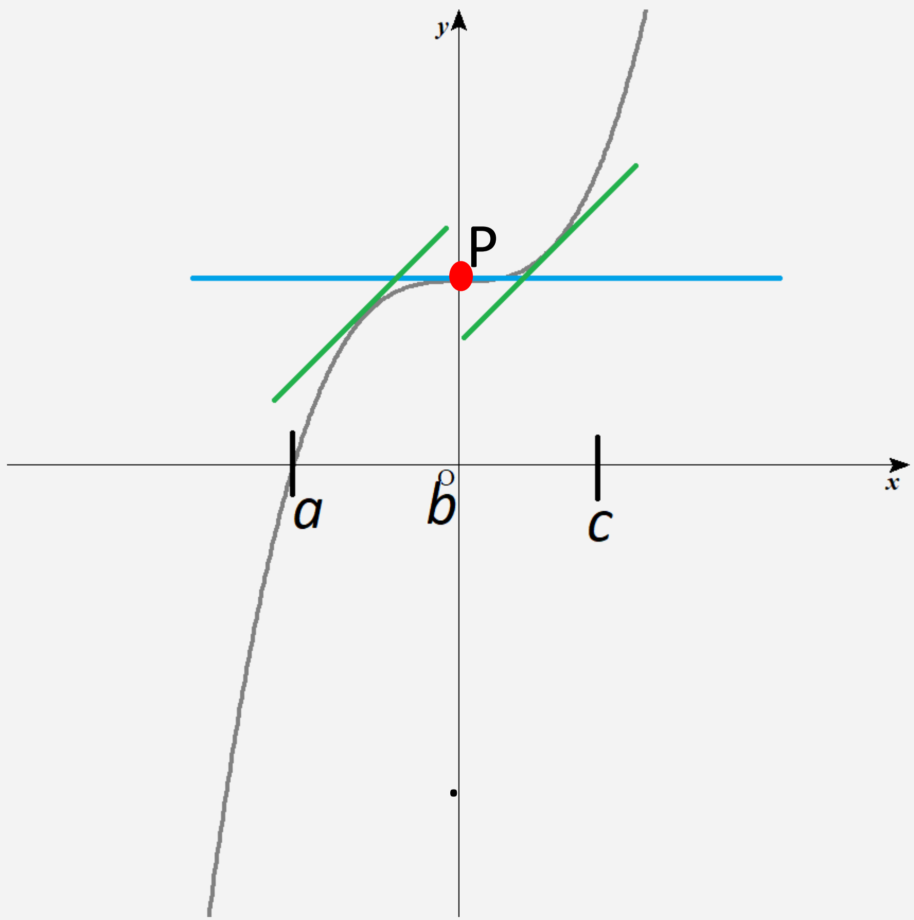


Observe que no intervalo $]b, c[$, $f'(x) < 0$ e que no intervalo $]c, d[$, $f'(x) > 0$.

Então o ponto Q é um mínimo local.

Observe que no intervalo $]a, b[$, $f'(x) > 0$ e que no intervalo $]b, c[$, $f'(x) > 0$.

Então o ponto P não é máximo nem mínimo.



Para saber se um ponto é Máximo, Mínimo ou apenas um ponto crítico, devemos:

1º) Determinar $f'(x)$

2º) Realizar a análise do sinal da derivada.

Se houver troca de sinal, há um ponto de máximo ou de mínimo.

Considere $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$:

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \epsilon\ ]\mathrm{a}, \mathrm{c}[$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \epsilon\ ]\mathrm{c}, \mathrm{b}[$, então o ponto é máximo relativo;

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \epsilon\ ]\mathrm{a}, \mathrm{c}[$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \epsilon\ ]\mathrm{c}, \mathrm{b}[$, então o ponto é mínimo relativo.

Se não houver troca de sinal, é apenas um ponto crítico.

Ou ainda, podemos realizar o teste da derivada segunda:

1º) Determinar $f'(x)$

2º) Calcular os valores de x, tais que $f'(x) = 0$.

3º) Determinar $f''(x)$

Se $f''(c) < 0$, o ponto é máximo relativo .
Se $f''(c) > 0$, o ponto é mínimo relativo.

Determine os pontos críticos de cada função e ,informe se é um máximo relativo, mínimo relativo ou apenas um ponto crítico.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

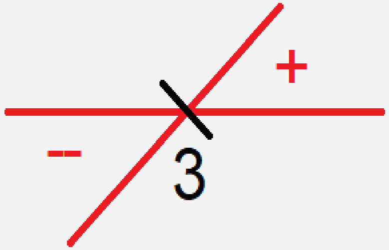
Determine os pontos críticos de cada função e ,informe se é um máximo relativo, mínimo relativo ou apenas um ponto crítico.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

$$f'(x) = 2x - 6$$

Análise da função $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

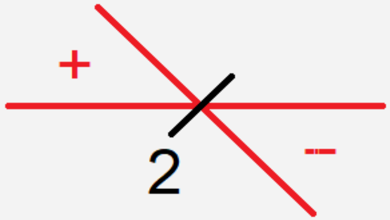


De acordo com o sinal da função $f'(x), x = 3$ é um ponto de mínimo relativo.

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$$f'(x) = -2x + 4$$



Análise da função $f'(x)$.

$$f'(x) = -2x + 4 = 0$$
$$x = 2$$

De acordo com o sinal da função $f'(x)$, $x = 2$ é um ponto de máximo relativo.

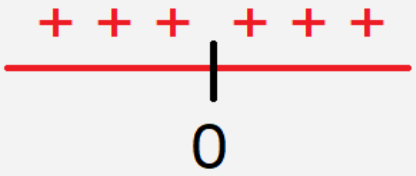
c)$f(x) = x^5$

c)$f(x) = x^5$

$$f'(x) = 5x^4$$

Análise da função $f'(x)$.

$$f'(x) = 5x^4$$
$$x = 0$$



De acordo com o sinal da função $f'(x)$, $x = 0$ é apenas um ponto crítico. .

2) Usando o teste da derivada segunda, determines os pontos de um máximo relativo e mínimo relativo da função abaixo:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

2) Usando o teste da derivada segunda, determines os pontos de um máximo relativo e mínimo relativo da função abaixo:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

Determine a derivada primeira: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

Calcule os valores x tais que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0$$
$$3(x^2 - 6x + 8) = 0$$
$$3(x-2)(x-4) = 0$$
$$x_1 = 2 \quad e\ x_2 = 4$$

Determine a derivada segunda $f''(x)$: $f''(x) = 6x - 18$

Realize o teste:

$$f''(2) = 6.2 - 18 = -6$$

Como $f''(2) < 0, x = 2$ é um máximo relativo.

$$f''(4) = 6.4 - 18 = 6$$

Como $f''(4) > 0, x = 4$ é um mínimo relativo.

3) Determine a área de um retângulo de perímetro igual a 12cm, de modo que esta área seja máxima.

3) Determine a área de um retângulo de perímetro igual a 12cm, de modo que esta área seja máxima.

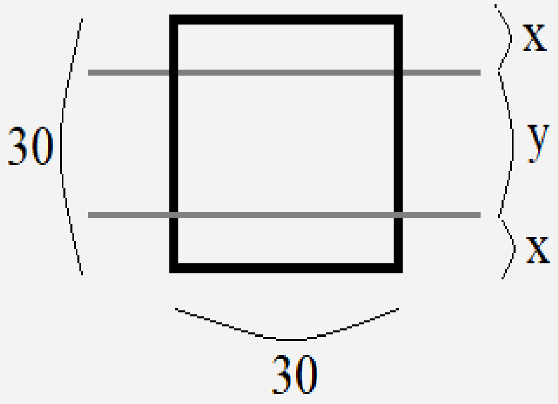
$$Área = A(x,y) = x\,.\,y$$
$$Perímetro = 2x + 2y = 12 \implies x + y = 6 \implies y = 6 - x$$

$$A(x) = x\,.\,(6 - x) = 6x - x^2$$
$$A'(x) = 6 - 2x$$
$$6 - 2x = 0$$
$$x = 3$$

$$y = 6 - x = 6 - 3 = 3$$
$$Área = x\,.\,y = 3.3 = 9cm^2$$

4) De uma longa folha quadrada de metal de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima?

4) De uma longa folha quadrada de metal de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima?



$$Capacidade = C = 30y.x$$
$$y = 30 - 2x$$

$$C = 30(30 - 2x).x$$

$$C = 900x - 60x^2$$
$$C' = 900 - 120x = 0$$
$$x = 7{,}5\ cm$$

PRÓXIMA AULA:
TEMA 09: INTEGRAIS INDEFINIDA E DEFINIDA