Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

Capítulo 6: Operações com Grafos

Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

Outline

Definição

*A **união** de dois grafos* $G_1(V_1, A_1)$ *e* $G_2(V_2, A_2)$ *é um grafo* $G_3(V_3, A_3)$ *onde:*

$$G_3 = G_1 \cup G_2, \;\; V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2.$$

Definição

*A **intersecção** de dois grafos* $G_1(V_1, A_1)$ *e* $G_2(V_2, A_2)$ *é um grafo* $G_3(V_3, A_3)$ *onde:*

$$G_3 = G_1 \cap G_2, \;\; V_3 = V_1 \cap V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cap A_2.$$

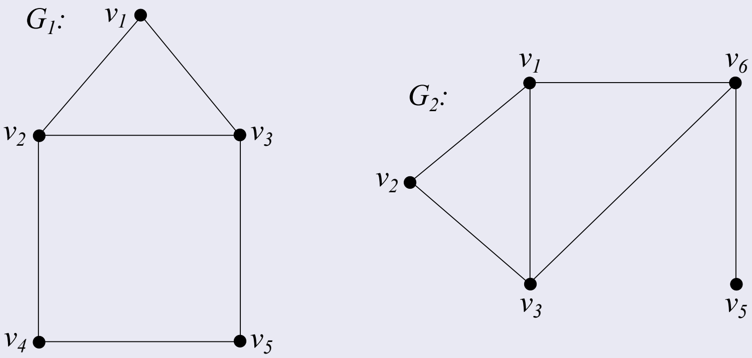
Observação

Pelas definições dadas é fácil verificar que as operações de união e intersecção de grafos são comutativas, isto é:

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1,$$
$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1.$$

Exercício

Determine a união e a intersecção dos grafos dados abaixo:



Definição

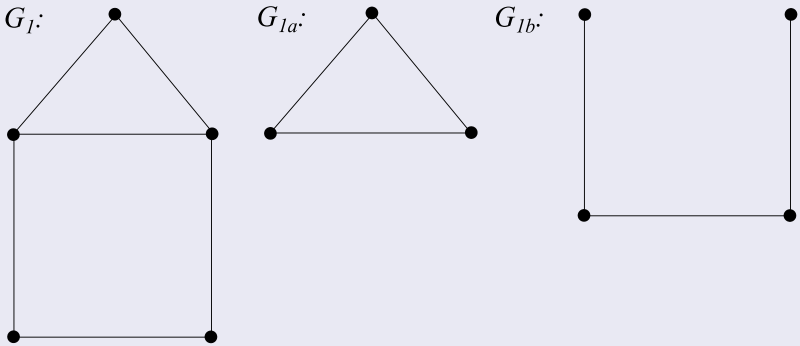
Um grafo G é dito ***decomposto*** *em dois sub-grafos G_1 e G_2 se:*

$$G_1 \cup G_2 = G \text{ e } G_1 \cap G_2 = \textit{grafo nulo}.$$

Ou seja, cada aresta de G pertence a G_1 ou a G_2. Alguns vértices no entanto podem pertencer aos dois.

Exemplo

O grafo G_1 do exemplo anterior é decomposto nos subgrafos G_{1a} e G_{1b} abaixo:



Definição

Se a é uma aresta de um dado grafo G, então $G - a$ é um sub-grafo de G obtido pela remoção da aresta a do grafo G.

Se v é um vértice de G, então $G - v$ é um sub-grafo de G obtido pela remoção do vértice v do grafo G.

• *A remoção de um vértice implica na remoção das arestas a ele incidentes.*

De maneira similar é possível incluir vértices e arestas em um grafo.

Definição

*A **soma** de dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ é um grafo $G_3(V_3, A_3)$ onde:*

$$G_3 = G_1 + G_2,$$
$$V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2 \cup \{(v_i, v_j) : v_i \in V_1,\ v_j \in V_2\}.$$

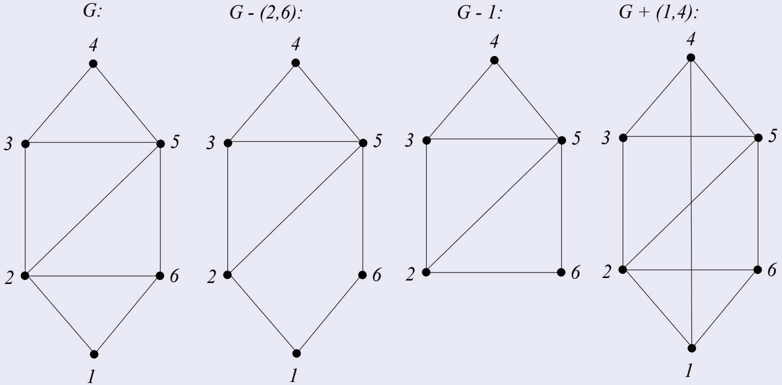
Definição

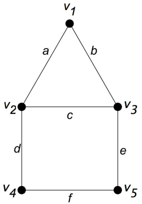
*A **soma direta** de dois grafos $G_1(V_1, A_1)$ e $G_2(V_2, A_2)$ é um grafo $G_3(V_3, A_3)$ onde:*

$$G_3 = G_1 \oplus G_2,\ \ V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = [A_1 \cup A_2] \setminus [A_1 \cap A_2].$$

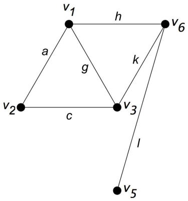
Exemplo

A seguir estão exemplificadas algumas das operações definidas.

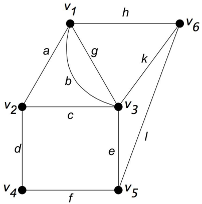




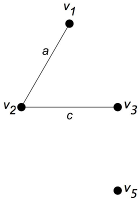
(a) Grafo G_1



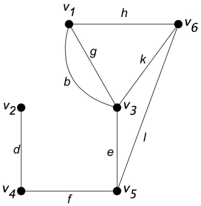
(b) Grafo G_2



(c) Grafo $G_1 \cup G_2$



(d) Grafo $G_1 \cap G_2$



(e) Grafo $G_1 \oplus G_2$

Definição

*A **fusão** de um par de vértices a e b em um Grafo G é feita substituindo os dois vértices por um único vértice $\overline{ab}$, de tal forma que toda aresta que era incidente no vértice a e/ou no vértice b ou em ambos passa a ser incidente no novo vértice $\overline{ab}$.*

Observação

A fusão de vértices em um grafo não altera seu número de arestas, apenas diminui o número de vértices.

Definição

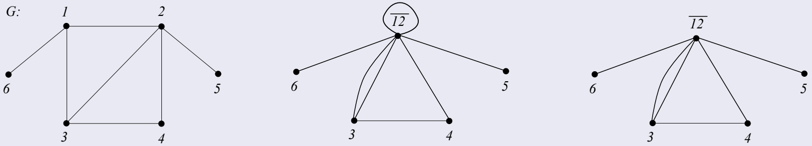
*A **contração de dois vértices** a e b é feita através da fusão dos vértices a e b e a remoção dos loops e arestas paralelas que são formadas no processo.*

Definição

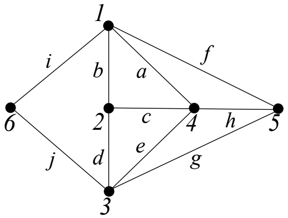
*A **contração de uma aresta** (a, b) é feita removendo-se a aresta (a, b) e fazendo a fusão dos vértices a e b. É denotado por $G \setminus (a, b)$.*

Exemplo

Na figura abaixo temos, à esquerda, um grafo G; no centro, o grafo obtido após a fusão dos vértices 1 e 2; e à direita o grafo obtido após a contração da aresta $(1, 2)$.



Exercícios: Considere o grafo:



1. Considere os caminhos definidos no exercício anterior (tópico Sub-grafos) para este mesmo grafo. Agrupe os caminhos obtidos em conjuntos de caminhos arestas disjuntos. Mostre que a união de dois caminhos aresta-disjuntos entre um par de vértices forma um circuito ou é a união de circuitos.
2. Remova o vértice 5 deste grafo. Acrescente a aresta $(2, 7)$. Contraia a aresta $(2, 3)$.
3. Decomponha este grafo em três sub-grafos.