Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

Capítulo 3: Isomorfismo

Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

Outline

Nós já vimos que é possível representar um mesmo grafo de várias maneiras.

Como determinar se dois grafos são equivalentes, ou seja, se possuem as mesmas propriedades? Isto é, como determinar se dois grafos são isomorfos?

A palavra isomorfismo vem do grego *iso* (mesmo) e *morfo* (mesma forma).

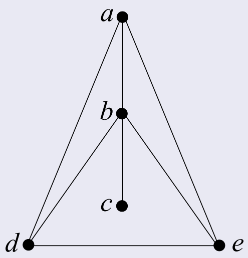
Definição

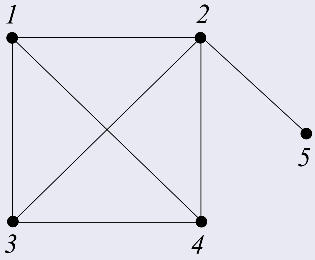
Dizemos que dois grafos G e H são isomorfos se existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de G e os vértices de H que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.

Em outras palavras, é possível obter o grafo H a partir de uma nova rotulação dos vértices de G.

Exemplo

Considere os grafos da Figura abaixo. Construir a correspondência biunívoca.





Aplicações: O estudo de isomorfismo pode ser aplicado na descoberta de novos compostos orgânicos.

Os químicos mantém uma tabela de compostos orgânicos.

Cada vez que um novo composto é descoberto é necessário determinar se ele é isomorfo a algum composto já existente.

Determinar se dois grafos são isomorfos não é uma tarefa muito simples.

De fato, a determinação de isomorfismos é uma área de intensa pesquisa em Teoria de Grafos.

Condições necessárias para que dois grafos sejam isomorfos são facilmente determinadas através da definição de isomorfismo:

Aplicações: O estudo de isomorfismo pode ser aplicado na descoberta de novos compostos orgânicos.

Os químicos mantém uma tabela de compostos orgânicos.

Cada vez que um novo composto é descoberto é necessário determinar se ele é isomorfo a algum composto já existente.

Determinar se dois grafos são isomorfos não é uma tarefa muito simples.

De fato, a determinação de isomorfismos é uma área de intensa pesquisa em Teoria de Grafos.

Condições necessárias para que dois grafos sejam isomorfos são facilmente determinadas através da definição de isomorfismo:

Condições necessárias para isomorfismo entre dois grafos G e H:

1. G e H devem possuir o mesmo número de vértices;
2. G e H devem possuir o mesmo número de arestas;
3. G e H devem possuir o mesmo número de vértices com um determinado grau.

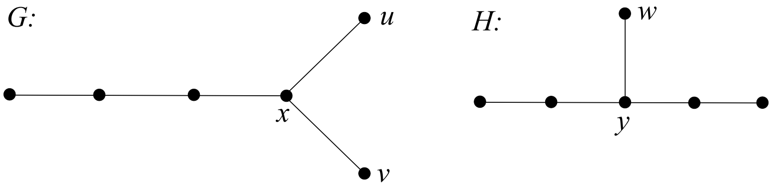
- As condições 1, 2 e 3 acima são suficientes?

Condições necessárias para isomorfismo entre dois grafos G e H:

1. G e H devem possuir o mesmo número de vértices;
2. G e H devem possuir o mesmo número de arestas;
3. G e H devem possuir o mesmo número de vértices com um determinado grau.

- As condições 1, 2 e 3 acima são suficientes?

Vamos verificar este fato através do seguinte exemplo:



Observe que G e H:

a) possuem mesmo número de vértices;

b) possuem mesmo números de arestas;

c) possuem: 3 vértices com grau 1; 2 vértices com grau com grau 2; 1 vértice com grau 3. Porém...

Porém estes dois grafos não são isomorfos!

Não é possível fazer uma correspondência biunívoca entre os vértices que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.

Observe que é necessário associar o vértice x do grafo G ao vértice y do grafo H, pois não existe nenhum outro vértice com grau 3 em H.

Mas o vértice y é adjacente a apenas um vértice de grau 1, enquanto que x em G é adjacente a dois vértices de grau 1.

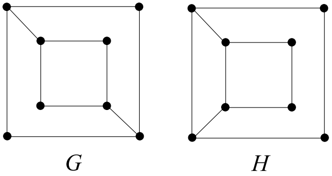
Portanto, não é possível fazer uma correspondência biunívoca entre os vértices de G e H que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.

No Capítulo 11, Seção 11.7 de [N. Deo, Graph Theory with applications to engineering and computer science, 1974] é feita uma discussão a respeito de algoritmos para se determinar isomorfismos entre grafos.

Exercícios:

1. Desenhe todos os grafos simples, não isomorfos com 1,2, 3 e 4 vértices.
2. Verifique se os grafos abaixo são isomorfos:

(a)



(b)