Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira
Socorro Rangel
Departamento de Matemática Aplicada
antunes@ibilce.unesp.br, socorro@ibilce.unesp.br

AULA 2

Subgrafos, Operações com Grafos

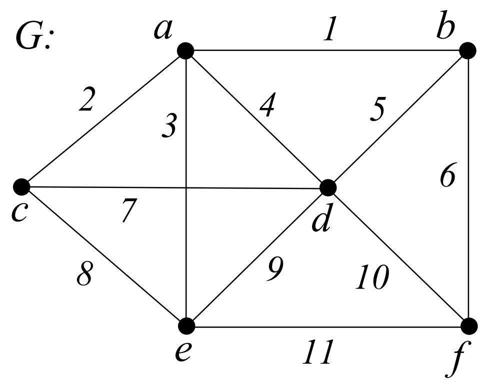
Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

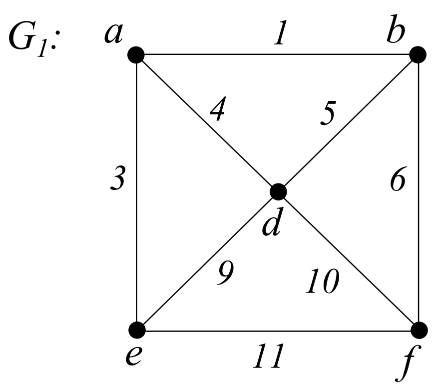
Subgrafos

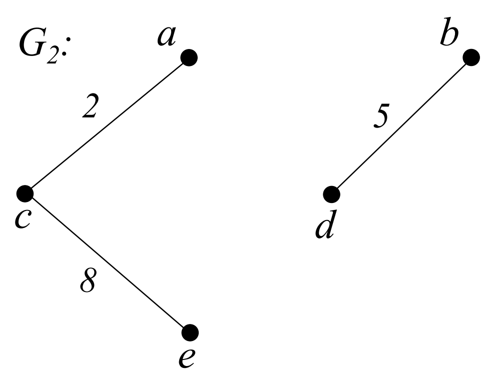
Definição 1. *Um grafo* $H(V', A')$ *é um subgrafo de um grafo* $G(V, A)$ *se todos os vértices e todas as arestas de* H *pertencem a* G *(*$V' \subseteq V,\ A' \subseteq A$*), e cada aresta de* H *possui as mesmas extremidades que em* G*. Denotamos um subgrafo através da mesma notação usada para conjuntos, isto é* $H \subset G$*.*

Exemplo 2. *Dado o grafo*



os seguintes grafos são subgrafos de G:





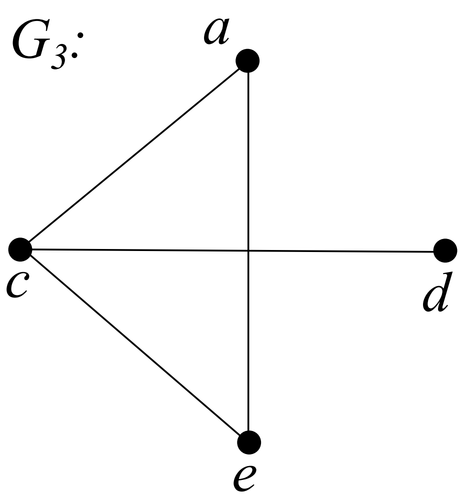
As seguintes observações podem ser feitas:

1. Todo grafo é um subgrafo de si próprio.
2. Um subgrafo de um subgrafo de um grafo G também é um subgrafo de G.
3. Um vértice de um grafo G é um subgrafo de G.
4. Uma aresta de um grafo G é um subgrafo de G.

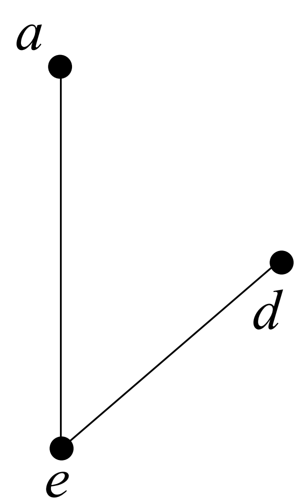
Definição 3. *Dois subgrafos de um grafo G, G_1 e G_2, são aresta-disjuntos se eles não possuem arestas em comum. Se G_1 e G_2 não possuírem vértices em comum, os dois subgrafos são chamados de vértice-disjuntos.*

Exercício: Considere os grafos

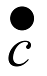
G_3:



G_4:



G_5:



Determine quais são:

- Aresta-disjuntos:

- Vértices-disjuntos:

Operações com grafos

Definição 4. *A união de dois grafos* $G_1(V_1, A_1)$ *e* $G_2(V_2, A_2)$ *é um grafo* $G_3(V_3, A_3)$ *onde:*

$$G_3 = G_1 \cup G_2,\ V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2.$$

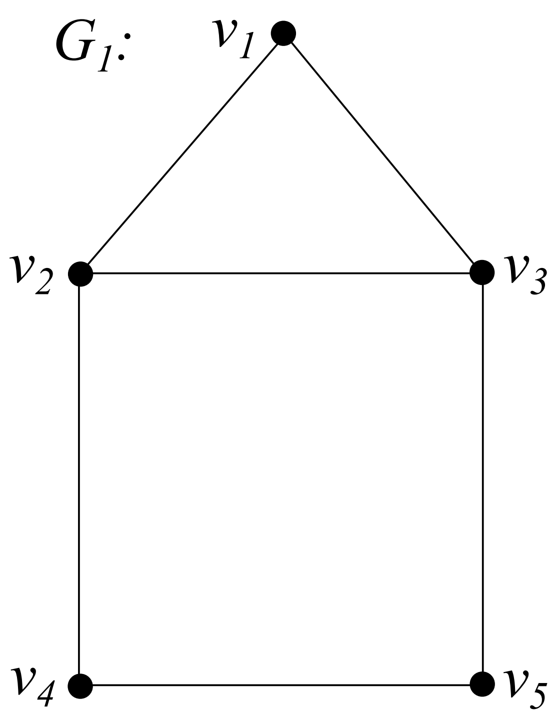
Definição 5. *A intersecção de dois grafos* $G_1(V_1, A_1)$ *e* $G_2(V_2, A_2)$ *é um grafo* $G_3(V_3, A_3)$ *onde:*

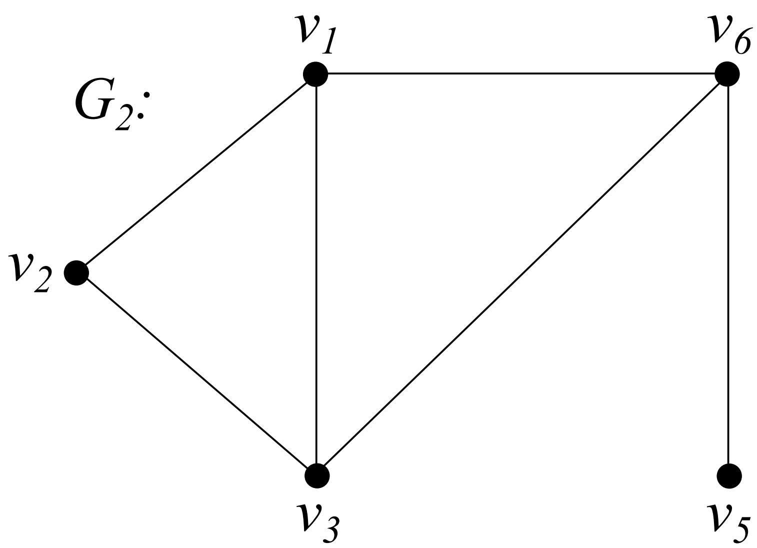
$$G_3 = G_1 \cap G_2,\ V_3 = V_1 \cap V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cap A_2.$$

Observação 6. *Se* $V_3 = \emptyset$*, dizemos que a intersecção entre* G_1 *e* G_2*,* $G_1 \cap G_2$*, é vazia.*
Pelas definições dadas é fácil verificar que as operações de união e intersecção de grafos são comutativas, isto é:

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1,$$
$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1.$$

Exemplo 7. *Determine a união e a intersecção dos grafos dados abaixo:*



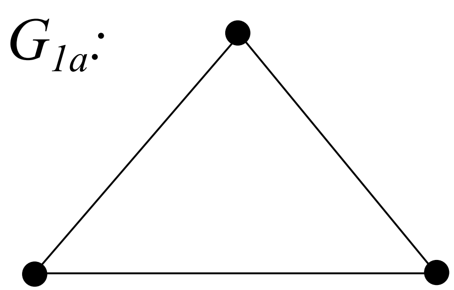


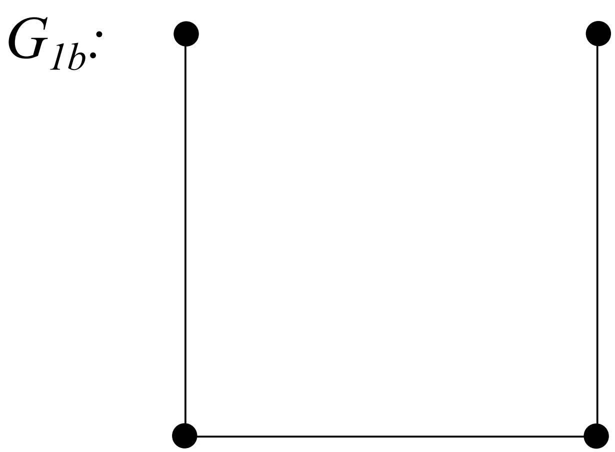
Definição 8. *Um grafo G é dito decomposto em dois sub-grafos G_1 e G_2 se:*

$$G_1 \cup G_2 = G \text{ e } G_1 \cap G_2 = \textit{grafo nulo}.$$

Ou seja, cada aresta de G pertence a G_1 ou a G_2. Alguns vértices no entanto podem pertencer aos dois.

Exemplo 9. *O grafo G_1 do exemplo anterior é decomposto nos subgrafos G_{1a} e G_{1b} abaixo:*





Definição 10. *Se a_j é uma aresta de um dado grafo G, então $G - a_j$ é um sub-grafo de G obtido pela remoção da aresta a_j do grafo G.*

Se v_i é um vértice de G, então $G - v_i$ é um sub-grafo de G obtido pela remoção do vértice v_i do grafo G.

• *A remoção de um vértice implica na remoção das arestas a ele incidentes.*

De maneira similar é possível incluir vértices e arestas em um grafo.

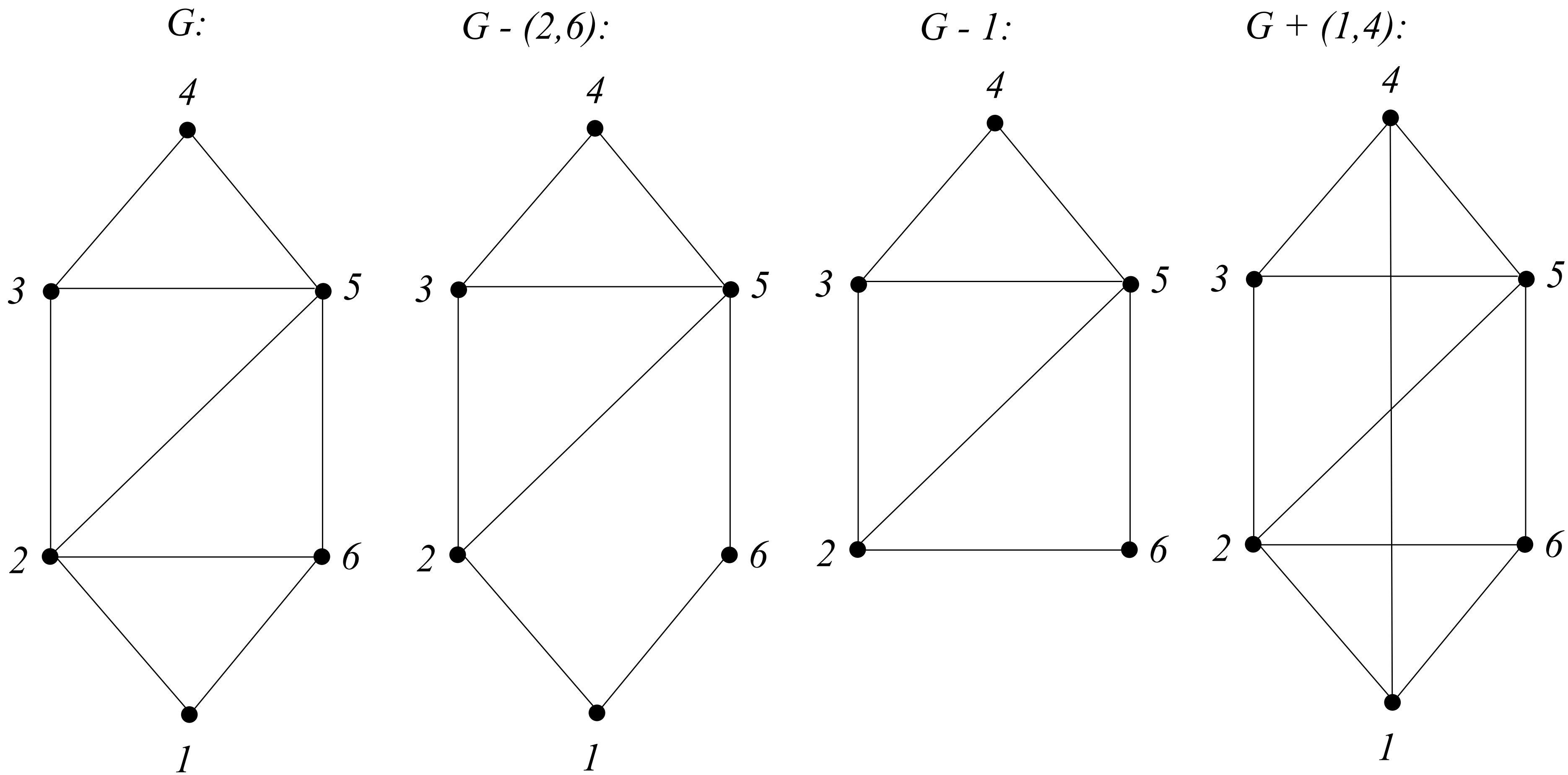
Definição 11. *A soma de dois grafos* $G_1(V_1, A_1)$ *e* $G_2(V_2, A_2)$ *é um grafo* $G_3(V_3, A_3)$ *onde:*

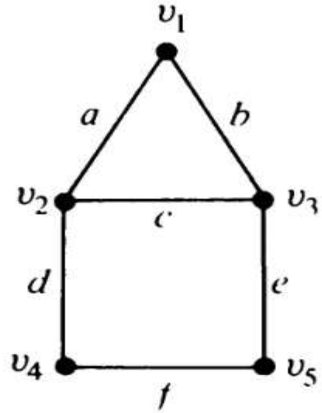
$$G_3 = G_1 + G_2,\ V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2 \cup \{(v_i, v_j) : v_i \in V_1,\ v_j \in V_2\}.$$

Definição 12. *A soma direta de dois grafos* $G_1(V_1, A_1)$ *e* $G_2(V_2, A_2)$ *é um grafo* $G_3(V_3, A_3)$ *onde:*

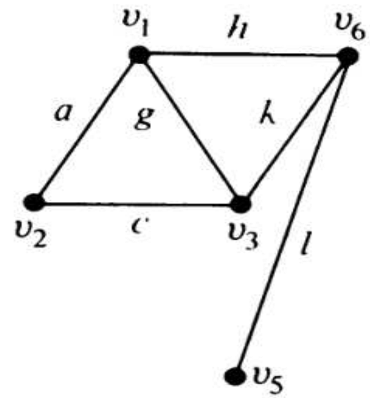
$$G_3 = G_1 \oplus G_2,\ V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = [A_1 \cup A_2] \setminus [A_1 \cap A_2]$$

Exemplo 13. *A seguir estão ilustradas algumas das operações definidas.*

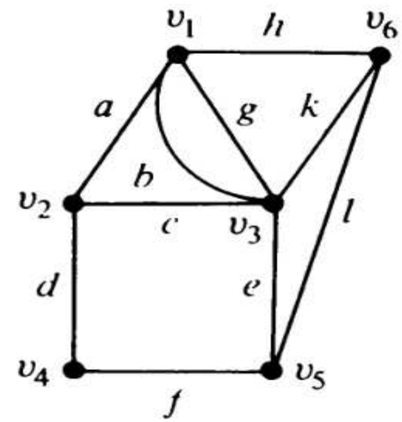




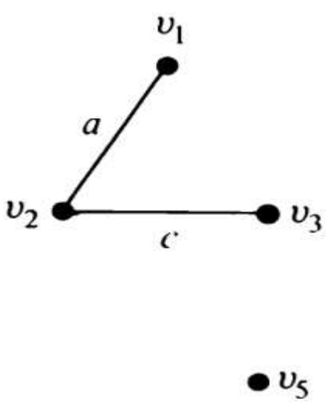
G_1



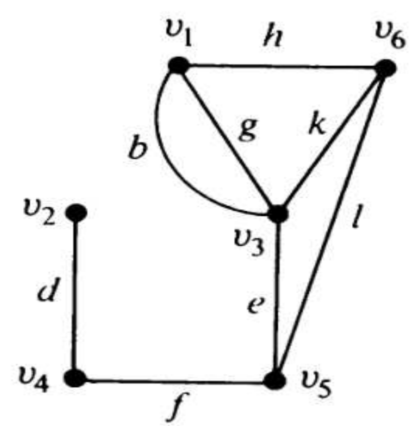
G_2



$G_1 \cup G_2$



$G_1 \cap G_2$



$G_1 \oplus G_2$

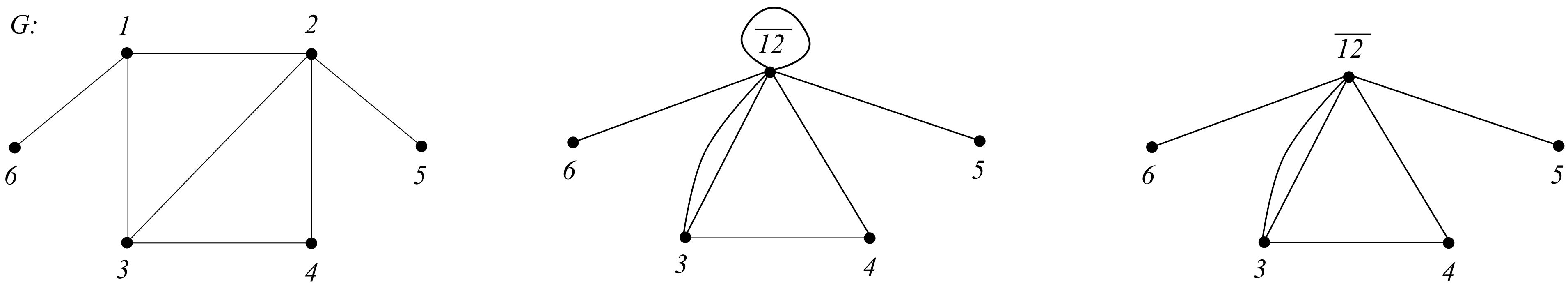
Definição 14. *A fusão de um par de vértices a e b em um Grafo G é feita substituindo os dois vértices por um único vértice $\overline{ab}$, de tal forma que toda aresta que era incidente no vértice a e/ou no vértice b passa a ser incidente no novo vértice $\overline{ab}$.*

Observação 15. *A fusão de vértices em um grafo não altera seu número de arestas, apenas diminui o número de vértices.*

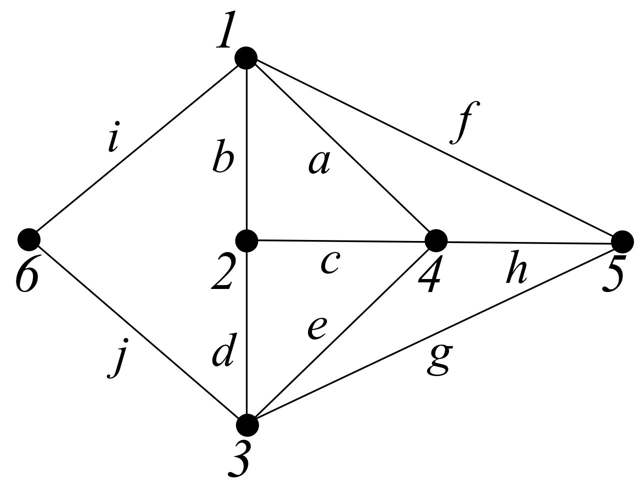
Definição 16. *A contração de dois vértices a e b é feita através da fusão dos vértices a e b e a remoção dos loops e arestas paralelas que são formadas no processo.*

Definição 17. *A contração de uma aresta (a, b) é feita removendo-se a aresta (a, b) e fazendo a contração dos vértices a e b. É denotado por $G \setminus (a, b)$.*

Exemplo 18. *Na figura abaixo temos, à esquerda, um grafo G; no centro, o grafo obtido após a fusão dos vértices 1 e 2; e à direita o grafo obtido após a contração da aresta* $(1,2)$.



Exercícios: Considere o grafo:



1. Remova o vértice 5 deste grafo e acrescente a aresta $(2, 7)$.
2. Decomponha este grafo em três sub-grafos.
3. Contraia a aresta $(2, 3)$.