03/02/2024

Teoria Dos Grafos

$G = (\overset{\neq \emptyset}{V}, E)$ → Um grafo é uma relação entre vértices e arestas.

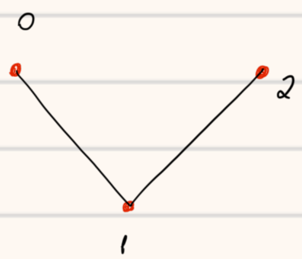
Grafo Direcionado: $E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$

Grafo não Direcionado: $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$

Grafo Ponderado: (G, w), ponderado no vértice ou aresta

Grafo Rotulado: (G, L)

$G = (V, E)$
$V = \{0, 1, 2\}$
$E = \{(0,1), (1,2)\}$



Arestas Paralelas →

→ $V = \{0, 1\}$
$E = \{(0,1), (0,1)\}$

Logo →

→ $V = \{0\}$
$E = \{(0,0)\}$

Multi-grafo: Grafo que permite aresta paralela ou loop.

Grafo-simples: Não permite aresta paralela ou loop.

Grafo-Nulo: Não tem aresta, mas tem vértice.

05/02/2024

Conjunto x Elemento

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 3\}$

a) $1 \in A$? (V)

b) $B \cancel{\in} A$? (F)
↳ $B \subseteq A$

c) $A \cancel{\subseteq} B$? (F)

d) $B \subseteq A$? (V)
↳ $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

$\in$ → elemento PERTENCE a um conjunto. ex.: $1 \in A$

$\forall$ → para todo

$\subseteq$ → subconjunto. ex.: $B \subseteq A$

$=$ → igual. $A = B$

$|C|$ → cardinalidade, quantidade de elementos diferentes

$f: A \to B$

A ↓ domínio

B ↓ contra-domínio (imagem)

- Sobrejetora
- Injetora
- Bijetora

- Sobrejetora
- Injetora
- Bijetora

Grafo Completo → Todos os elementos sem repetição estão presentes, além disso é um grafo simples, por definição.

- $|V| = n$
  - ↳ Grafo é não-direcionado
  - ↳ intervalo → $\emptyset \leq |E| \leq \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$

- Sub-Grafo: $G' \subseteq G$ se somente se:

$$V' \subseteq V$$
e
$$E' \subseteq E$$

10/02/2024

$G = (V, E)$ $\quad$ K_n ⇝ grafo completo com n vértices.

↳ grafo não-direcionado

a) Seja K_n um grafo completo com N vértices qual o número de arestas de K_n?

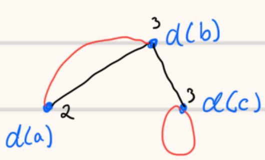
$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

DELTA

grau

b) Seja $\delta(v)$ o número de arestas "conectadas" ao vertice v. Encontr o número total de arestas de G considerados os "$d(v)$" $\forall v \in V$.

$E = \{\{a,b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,c\}\}$



↳ $\left.\begin{array}{l} d(a) = 2 \\ d(b) = 3 \\ d(c) = 3 \end{array}\right\} 8$

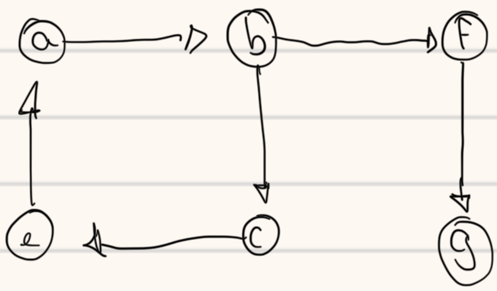
R: $\sum \delta(v) = 2 \cdot |E|$ ⇝ $\sum \frac{\delta(v)}{2} = |E|$

↳ $\frac{d(a) + d(b) + d(c)}{2} \rightarrow \frac{8}{2} = \boxed{4}$

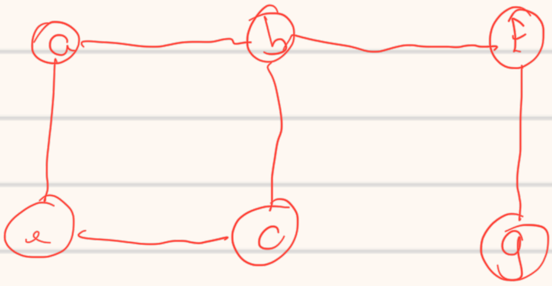
c) Mostre que o número de vértices de Grau ímpar é "par"

X é par $\Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{N} \mid 2i = X$
X é ímpar $\Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{N} \mid 2i+1 = X$

12/02/2024



$N(v) = \{u \mid \exists\, (v,u) \in E\}$
(Direcionado)



$N(v) = \{u \mid \exists\, \{u,v\} \in E\}$
(Não - direcionado)

Tarefa:

Seja $G=(V,E)$ e $x \in V$. Encontre todos os vértices vizinhos de X em G

R: $N(v): v \to v$

d = distância (dos vizinhos)

$d(u,u) = 0$ ⇝ Vértice para ele mesmo
$d(u, N(u)) = 1$ ⇝ Vizinho do vértice
$d(u, N(N(u))) \leq 2$ ⇝ vizinho do vizinho do vértice

walk

W ⇝ $v_0, v_1, v_2, \dots v_m$ (Sequência de vertices)

↳ $\exists (v_i, v_{i+1}) \in E$

Ex.: (a,b,c) ✓ (a,b,c,F) ✗

(a,c) ✗ (a,b,c,b,F) ✓

} Considerando o grafo não-direcionado acima.

walk (Pode repetir vertices) ⇝ (a,b,c,b,F)

Path (não pode repetir vertices) ⇝ (a,b,c)

cycle (repete só nas extremidades) ⇝ (a,b,c,a)

Encontre todos os vertices de v em que há um path de x para eles.

Feixo transitivo Direto = $\Gamma^+(x) = \Gamma_0^+(x) \cup \Gamma_1^+(x) \cup \Gamma_2^+(x) \cup \dots \Gamma_{|V|}^+(x)$

- Alcançavel = y é alcançavel a partir de x se $\exists$ path (x,y)

13/02/2025

- Comprimento = Quantidade de E de um path
- distância (x,y) = min {length (P)}, $P \in P_{xy}$
- $\Gamma^+(x)$ = fecho transitivo direto: é o conjunto de vértices alcançaveis.
- $\Gamma^-(x)$ = fecho transitivo inverso: é o conjunto de vértices que alcança.

Γ^- Γ^+

⇝ a → b ⇝ a é fecho transitivo inverso porque ele alcança b e b é fecho transitivo direto porque ele é alcançado por a

$u \to v$ $\quad (u,v) \Rightarrow v \in \Gamma^+(u)$

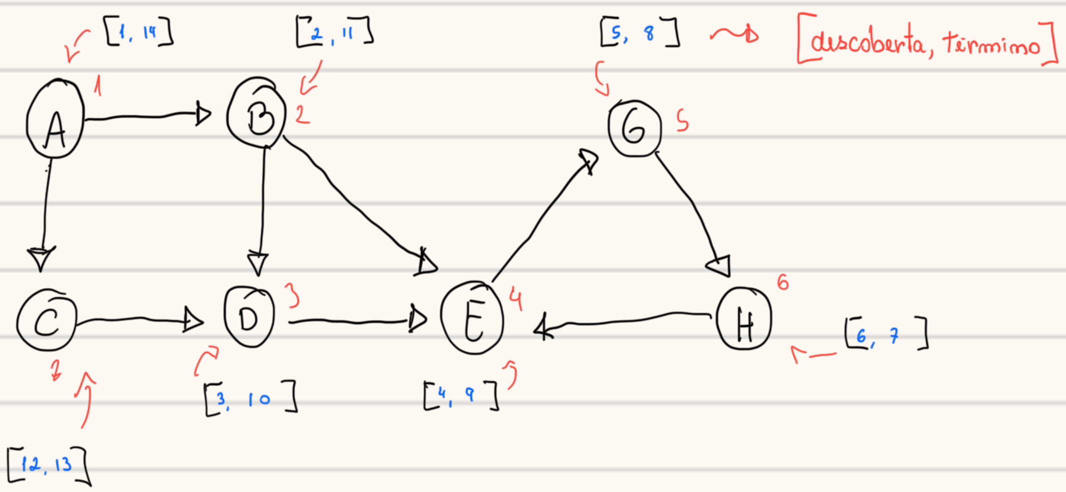
$\quad \Rightarrow u \in \Gamma^-(v)$

$u \leftarrow v$ $\quad (v,u) \Rightarrow u \in \Gamma^+(v)$

$\quad \Rightarrow v \in \Gamma^-(u)$

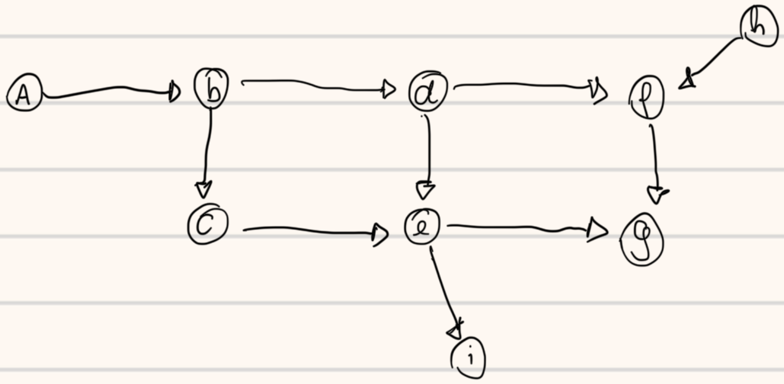
17/02/2024

Busca em Profundidade



Seja $G(V,E)$ e $x \in V$. Projete uma solução para fazer uma busca em profundidade a partir de x.

19/02/2025



Encontre Γ^+ e Γ^- para todos os vértices de G.

$\Gamma^+(a) = \{a, b, c, d, e, f, g, i\}$

$\Gamma^-(a) = \{a\}$

$\Gamma^+(b) = \{b, c, d, e, f, g, i\}$

$\Gamma^-(b) = \{a, b\}$

$\Gamma^+(c) = \{c, e, g, i\}$

$\Gamma^-(c) = \{a, b, c\}$

$\Gamma^+(d) = \{d, e, f, g, i\}$

$\Gamma^-(d) = \{a, b, d\}$

$\Gamma^+(e) = \{e, g, i\}$

$\Gamma^-(e) = \{a, b, c, d, e\}$

$\Gamma^+(f) = \{f, g\}$

$\Gamma^-(f) = \{a, b, d, f\}$

$\Gamma^+(g) = \{g\}$

$\Gamma^-(g) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

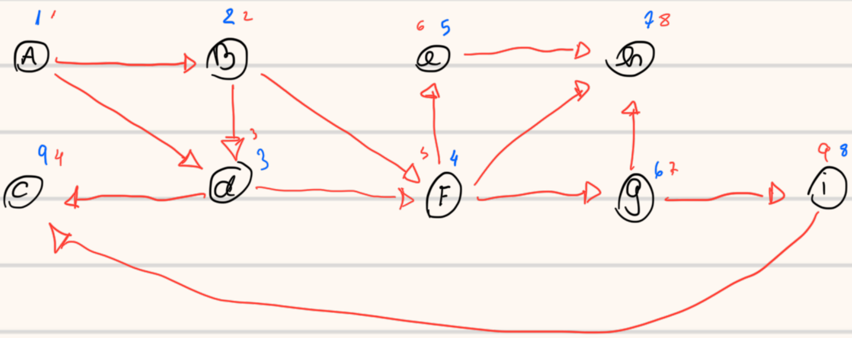
$\Gamma^+(h) = \{h, f, g\}$

$\Gamma^-(h) = \{h\}$

$\Gamma^+(i) = \{i\}$

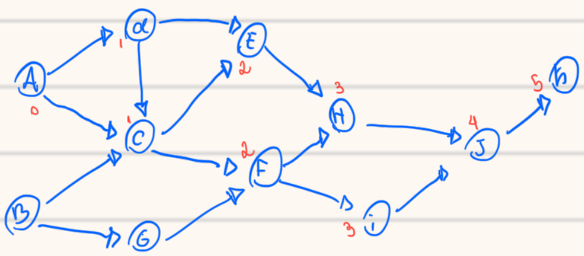
$\Gamma^-(i) = \{a, b, c, d, e, i\}$

20/02/2024



Seja $G=(V,E)$ um grafo direcionado. Considere que será atribuído um número natural para cada vértice por meio de uma função f.
Projete uma solução para atribuir este número de forma que se
$\forall u, v \in V,\ f(v) < f(u)$ então $\nexists\ (u,v) \in E$.

24/02/2025



Projete uma solução para encontrar o tamanho do "menor" caminho de "a" para "k", e de "a" para "k".
(∞)

○ → remove

	a	B	C	D	E	F	G	h	i	J	K
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	1	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	∞	1	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	0	∞	1	1	2	2	∞	∞	∞	∞	∞
4	0	∞	1	1	2	2	∞	3	∞	∞	∞
5	0	∞	1	1	2	2	∞	3	3	∞	∞
6	0	∞	1	1	2	2	∞	3	3	4	∞
7	0	∞	1	1	2	2	∞	3	3	4	∞
8	0	∞	1	1	2	2	∞	3	3	4	5

27/02/2025

Grafos Conexos

↳ $\forall u, v \in V \mid \exists \text{ path}(u, v)$

↳ Componentes Conexos: É um sub-grafo do grafo, que é conexo e o maior possível.

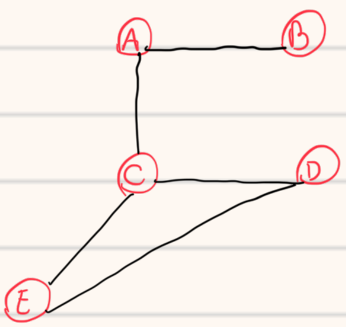
$G' = (V', E') \subseteq G$ que é conexo

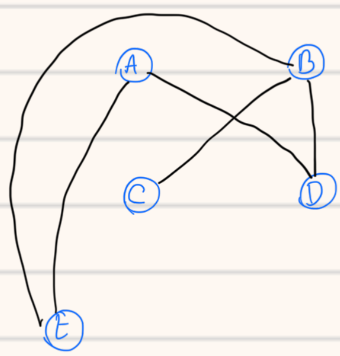
$V' \subseteq V,\ E' \subseteq E$

- Tamanho do Grafo: $|V| + |E|$

10/03/2025

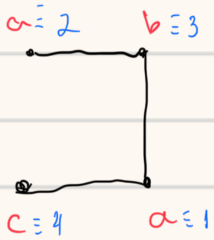
G ∪ G = Completo





G é um subgrafo induzido se: $\forall v$ e $u \in V$, $\exists (u, v) \in E, \leftrightarrow \exists (u, v) \in E$

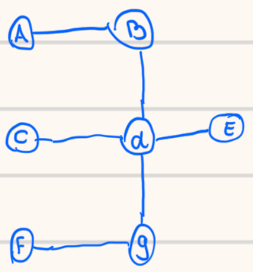
Isomorfismo: Não precisa ter vertices e nem arestas iguais, mas precisa manter a relação.



⇒ Encontre um grafo que seja isomorfo ao seu complemento com 5 vertices?

12/03/2025

1



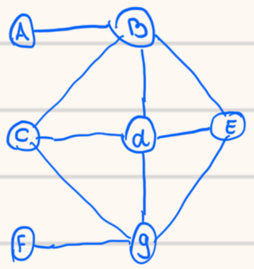
Seja $G=(V,E)$ um grafo acíclico, e seja $v \in V$ um vértice dado. Encontre a distância de v para todos os vértices $u \in V$.

Fazer um algoritimo

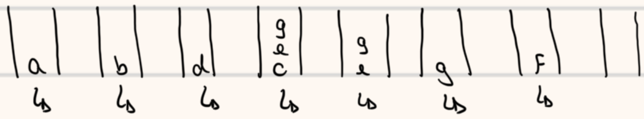
1- BFS → Busca em larguras

2- DFS → Busca em Profundidade

2



1*:



Atualiza na inclusão;

- $d[v] = \emptyset$

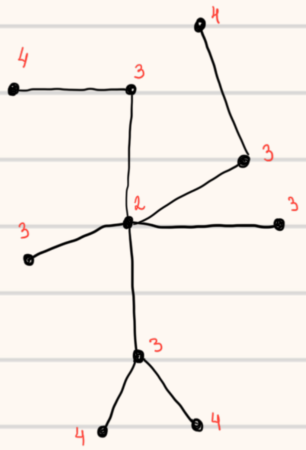
```
insere(v, fila)
marca v como visitado
While (! fila.empty())
    remove(fila)
    for u ∈ Vizinhos(v)
        if u não foi visitado
            d[u] = d[v] + 1
            marco u como visitado
            insere(u, fila)
```

- $X[v] = \max(d)$ → excentricidade.
- diâmetro(G) = maior $X(v)$, $v \in V$.
- raio(G) = menor $X(v)$, $v \in V$.

- Excentricidade → Vértice.
- Diâmetro e raio → Grafo.

- É chamado de centro o vértice com excentricidade igual ao raio.

13/03/2025



Quantos centros? Justifique sua resposta!

Excentricidade → diametro (4)

raio (2)

Existe apenas 1 centro neste grafo, pois existe apenas 1 vertice com excentricidade de raio(2).

↳ Árvore (É um grafo acíclico e possui um componente conexo.)

Quantidade mínima de arestas em um grafo

$|E| = |V| - |CC|$

↳ Componentes Conexos

19/03/2025

. Seja $(G = V, E)$ um grafo não-direcionado e simples. Mostre que NÃO é possível ter um grafo com $|V| > 1$ com todos os graus Diferentes.

Em um grafo simples, o grau de um vértice pode variar de 1 a $n-1$ ou de 0 a $n-2$, mas 0 e $n-1$ nunca poderia coexistir. Assim, se existem mais vértices do que graus possíveis, pelo menos um ...

$n = |V|$

Para n vértices: $\{1, 2, 3, 4 \ldots, n-1, n\}$, n valor diferente

$[1, n-1] \to (n-1)-1+1$ valores $= n-1$

$[\emptyset, n-2] \to (n-2)-0+1$ valores $= n-1$

. Modele um grafo que represente "o acesso de uma ambulancia"

↳ Garantir que o fecho transitivo direto de todos os vértices seja igual ao conjunto de vértices.

↳ Garantir que seja conexo.

20/03/2025

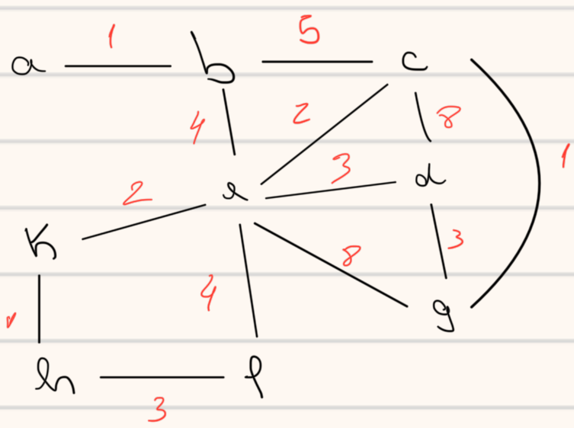
Seja $G=(V,E)$ um grafo direcionado. Projete uma solução caso exista, para encontrar o maior caminho entre dois vértices quaisquer

02/04/2025

Seja $G=(V,E)$ um grafo não-direcionado e simples. Seja (G,w) um grafo ponderado em que $w: E \to \mathbb{Z}^+$.
Projete uma solução para encontrar uma ~~floresta~~ geradora mínima.
↳ árvore

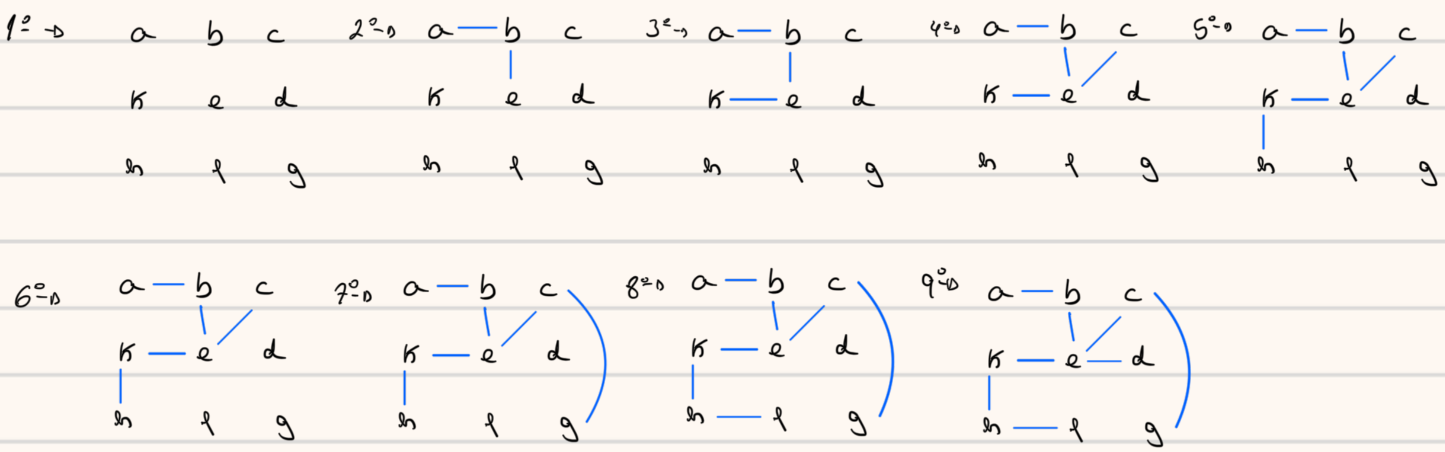
Seja $G=(V,E)$ um grafo não-direcionado e simples. Seja (G,w) um grafo ponderado em que $w: E \to \mathbb{Z}^+$.
A aplicação de um algoritmo que encontra uma árvore geradora mínima produz um grafo $T(V,\dot{E})$.
Se $w'(e) = w(e) + k$ $\forall e \in E$ em que $k \in \mathbb{Z}^+$ então a árvore geradora mínima T' de (G,w') é igual a T?

AGM = MST
↳ ordenação



Fazer a agm com Kruskel

Kruskell



03/04/2025

Seja $G=(V,E)$ um grafo não-direcionado e simples. Seja (G,W) um grafo ponderado em que $W: E \to \mathbb{Z}^+$.

Projete uma solução para encontrar "dois clusters" em G.

↳ Componente Conexo

07/04/2025

Seja $G=(V,E)$ um grafo não-direcionado. Seja (G,W) um grafo ponderado nas arestas. Seja $e \in E$ uma aresta qualquer de E.

Encontre uma "AGM" de (G,W) e force e estar presente nessa árvore.

↳ <u>Usar</u>

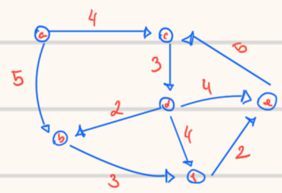
1) Entender o problema

2) "Modelar"

↳ $G=(V,E) - (G,W)$

3) "Adaptar" para algo pronto

09/04/2025

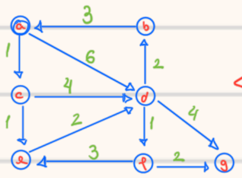


Seja $G=(V,E)$ um grafo direcionado. Seja (G,w) um grafo ponderado em que $w: E \to \mathbb{R}^+$

Projete uma solução para encontrar o menor caminho de "a" para "e".

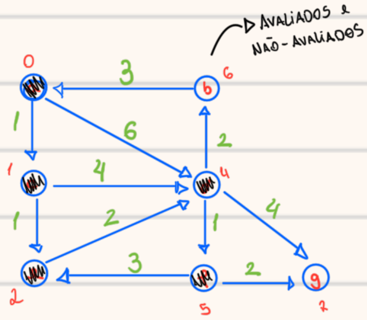
↳ BFS modificada, onde comparamos os pesos de todos os caminhos, e escolher o que tiver o menor peso final.

10/04/2025



← Faça passo-a-passo o "menor caminho" de "a" para todos os vértices.

	a	b	c	d	e	f	g
1°	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2°	0	∞	1	∞	∞	∞	∞
3°	0	∞	1	∞	2	∞	∞
4°	0	∞	1	4	2	∞	∞
5°	0	∞	1	4	2	5	∞
6°	0	∞	1	4	2	5	7
7°	0	6	1	4	2	5	7



Código:

$S' = V$

for each $v \in V$, $d[v] = \infty$

$d[u] = 0$

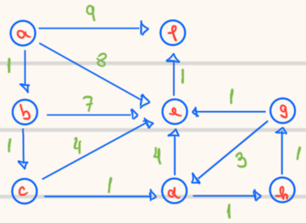
while $S' \neq \emptyset$

  v = extrair min de S'

  for each $v' \in N(v) \cap S'$

   $d[v'] = \min(d[v'], d[v] + w(v,v'))$

▷ DIJKstra!

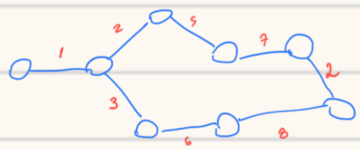


a	b	c	d	e	f	g	h
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	1	∞	∞	8	9	∞	∞
0	1	2	∞	7	9	∞	∞
0	1	2	3	6	9	∞	∞
0	1	2	3	6	9	∞	1
0	1	2	3	6	9	1	1
0	1	2	3	6	9	1	1
0	1	2	3	6	7	1	1

24/04/2025

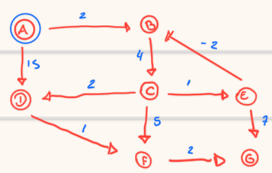
Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado, e (G, w) um grafo ponderado em que $w: E \to \mathbb{Z}^+$.

Projete uma solução para encontrar o menor caminho monotonicamente crescente entre dois vértices dados.

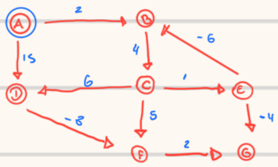


28/04/2025

Encontre o menor caminho entre A e G



	a	b	c	d	e	f	g
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	2	∞	15	∞	∞	∞
3	0	2	6	15	∞	16	∞
4	0	2	6	8	7	11	18
5	0	2	6	8	7	9	13
6	0	2	6	8	7	9	11

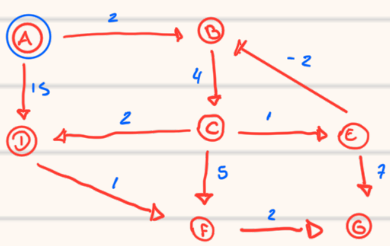


a	b	c	d	e	f	g
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	2	∞	15	∞	∞	∞
0	2	6	15	∞	7	∞
0	2	6	12	7	7	9
0	1	6	12	7	4	3
0	1	5	12	7	4	3
0	1	5	11	6	4	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

* Ciclo negativo não tem solução, pois entra em loop.

! Sabe-se que tem ciclo quando o número de iterações for maior que o número de vértices

a	b	c	d	e	f	g
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	2	∞	15	∞	∞	∞
0	2	6	15	∞	7	∞
0	2	6	12	7	7	9
0	2	6	12	7	4	3
0	2	6	12	7	4	3



	a	b	c	d	e	f	g
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	2	∞	15	∞	∞	∞
3	0	2	6	15	∞	16	∞
4	0	2	6	8	7	11	18
5	0	2	6	8	7	9	13
6	0	2	6	8	7	9	11
7	0	2	6	8	7	9	11

TERMINA O PROGRAMA