Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

7 – Cardinalidade de Conjuntos

7 Cardinalidade de Conjuntos

7.1 Introdução

- **Cardinalidade de um conjunto**

uma medida de seu tamanho

- **Até o momento, cardinalidade de conjuntos**
  - tratada de forma informal ou semi-formal
  - exemplo de expressão usada com freqüência

número de elementos de um conjunto

◆ Foi afirmado que

um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos

- Finito
  - pode ser denotado por extensão
  - listando exaustivamente todos os seus elementos
- Infinito
  - caso contrário

- **Estudo formal: resposta a perguntas tipo**
  - como definir formalmente a cardinalidade de um conjunto?
  - quando dois conjuntos possuem o mesmo cardinal?
  - o que é um cardinal infinito?
  - existe mais de um (diferentes) cardinais infinitos?
  - nesse caso, existe uma ordem de cardinais infinitos?
- **Estudo mais completo ou aprofundado**
  - foge um pouco do escopo da disciplina
  - ênfase nos conceitos, resultados e interpretações usados em CC

- **Cardinalidade é definida usando funções bijetoras**
  - uso da bijeção é intuitivo
- **Comum em diferentes civilizações**
  - cardinalidade de conjuntos: bijeção entre
    - conjunto de objetos em questão (rebanho de ovelhas…)
    - subconjunto de dedos das mãos
  - quando os dedos não eram suficientes
    - conjunto de pedras, nós em cordas…
  - uma bijeção qualquer: basta existir uma bijeção
    - qualquer dedo (pedra ou nó) corresponde a qualquer animal
    - se sobra um dedo (pedra ou nó), então falta um animal

7 – Cardinalidade de Conjuntos

7.1 Introdução
7.2 Cardinalidade Finita e Infinita
7.3 Conjunto Contável e Não-Contável
7.4 Cardinalidade dos Conjuntos Não-Contáveis
7.5 Cardinal do Conjunto de Todos os Problemas Solucionáveis
7.5 Leitura Complementar: Máquina de Turing

Def: Cardinalidade Finita, Cardinalidade Infinita

Cardinalidade de um conjunto A

$$\#A$$

- Finita: existe bijeção entre A e $\{ 1, 2, 3, \ldots, n \}$

$$\#A = n$$

  * se $n = 0$?

- Infinita: existe bijeção entre A e um subconjunto próprio de A

◆ Portanto, um conjunto

- finito (cardinalidade finita): possível representar por extensão
- infinito: possível retirar elementos e ainda assim estabelecer uma bijeção com o próprio

Exp: Cardinalidade Infinita do Conjunto dos Números Inteiros

$f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ tal que

- se $a \geq 0$, então $f(a) = 2a$
- se $a < 0$, então $f(a) = |2a| - 1$

É bijetora e $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$

Logo, $\mathbf{Z}$ é infinito

7 – Cardinalidade de Conjuntos

7.2 Conjunto Contável e Não-Contável

- **Nem todos conjuntos *infinitos* possuem mesma cardinalidade**
  - contradiz a noção intuitiva

Def: Conjunto Contável, Conjunto Não-Contável, Conjunto Enumerável

A conjunto infinito

Finitamente Contável: finito

Infinitamente Contável ou Enumerável

- existe uma bijeção entre A e um subconjunto infinito de $\mathbf{N}$
- esta bijeção é denominada enumeração de A

Não-Contável

- caso contrário

◆ Infinitamente contável

- possível enumerar seus elementos como uma seqüência infinita

$$\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$$

◆ Termo "conjunto contável"

- usualmente significa finitamente ou infinitamente contável

Exp: Conjunto Infinitamente Contável

- **Z**
- **Q** (exercício)

◆ Prova de que um conjunto é não-contável

- pode ser realizada usando o método da Diagonalização de Cantor
  - Georg Cantor (1845-1918)
  - freqüentemente em provas na Computação e Informática.

Teorema: Conjunto Não-Contável

O seguinte conjunto é não-contável:

$$S = \{ x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1 \}$$

Prova: (*por absurdo – Diagonalização de Cantor*)

Suponha S *contável*

- existe uma enumeração de S

$$\langle s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle$$

Qualquer número $s \in S$: seqüência contável de decimais

- $s = 0,d_1\, d_2\, d_2 \ldots d_n \ldots$ (exemplo: $\pi / 10 = 0,31415\ldots$)

Portanto, a enumeração $\langle s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle$ pode ser representada por

- $s_1 = 0,\boldsymbol{d_{11}}\, d_{12}\, d_{13} \ldots d_{1n} \ldots$
- $s_2 = 0,d_{21}\, \boldsymbol{d_{22}}\, d_{23} \ldots d_{2n} \ldots$
- $s_3 = 0,d_{31}\, d_{32}\, \boldsymbol{d_{33}} \ldots d_{3n} \ldots$
- $\ldots$
- $s_n = 0,d_{n1}\, d_{n2}\, d_{n3} \ldots \boldsymbol{d_{nn}} \ldots$
- $\ldots$

Seja r o número real construído a partir da diagonal

$$r = 0,e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_n \ldots \qquad i \in \{ 1, 2, 3, \ldots \}$$

- $e_i = 1$, caso $d_{ii} \neq 1$
- $e_i = 2$, caso $d_{ii} = 1$

Claramente, $r \in S$

- r é diferente de qualquer número da enumeração $\langle s_1, s_2, s_3, \ldots \rangle$
- difere pelo menos no dígito destacado na diagonal

Portanto, $r \notin S$: contradição!

Logo, é uma absurdo supor que S é contável

Portanto, S é *não*-contável

- **Prova de que $\mathbb{R}$ é não-contável é simples**
  - antes, a seguinte definição

Def: Conjuntos Equipotentes

A e B conjuntos Equipotentes

- existe uma função bijetora entre A e B

- **Logo, conjuntos equipotentes: mesma cardinalidade**
  - todos conjuntos enumeráveis são equipotentes
  - todo conjunto indexado é equipotente ao seu conjunto de índices

Teorema: $\mathbf{R}$ é um Conjunto Não-Contável

O conjuntos dos números reais $\mathbf{R}$ é não-contável.

Prova: (*direta*)

Basta provar que $\mathbf{R}$ é equipotente a $S = \{ x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1 \}$

Seja $f: S \to \mathbf{R}$

- se $0 < s \leq 1/2$, então $f(s) = (1 / 2s) - 1$
- se $1/2 \leq s < 1$, então $f(s) = (1 / (2s - 2)) + 1$

a qual é uma bijeção (exercício)

Exp: Conjunto Não-Contável

- **I** (conjuntos dos números irracionais)
- **C** (conjunto dos números complexos)
- $\mathbf{R}^2$

7 – Cardinalidade de Conjuntos

7.3 Cardinalidade dos Conjuntos Não-Contáveis

- **Conjuntos não-contáveis: mesma cardinalidade?**

  nem todos os conjuntos não-contáveis tem a mesma cardinalidade

- **A tem pelo menos tantos elementos quanto B**

$$\#A \leq \#B$$

  - existe função injetora $f: A \to B$

- **Relação $\leq$ entre cardinais é de ordem parcial?**

◆ Relação $\leq$ entre cardinais: ordem parcial

- *reflexiva*: $\#A \leq \#A$
  - ∗ função identidade $id_A: A \rightarrow A$ é injetora
- *transitiva*: se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#C$, então $\#A \leq \#C$
  - ∗ composição de injetoras é injetora
- *anti-simétrica*: se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, então $\#A = \#B$
  - ∗ Teorema de Schröder-Bernstein
  - ∗ não será demonstrado

Teorema: Schröder-Bernstein

A e B conjuntos tq existem funções injetoras $f_1: A \rightarrow B$ e $f_2: B \rightarrow A$

Então existe uma função bijetora

$$g: A \leftrightarrow B$$

◆ Existem infinitos cardinais não-contáveis

- conjunto das partes de um conjunto tem sempre cardinalidade maior que este
- fato conhecido como Teorema de Cantor
- na demonstração, observe que

$$n < m \Leftrightarrow n \leq m \wedge n \neq m$$

(por quê?)

Teorema: Cantor

$$\#C < \#2^C$$

Prova:

Dividida em duas partes

- $\#C \leq \#2^C$: apresentar uma função injetora $f: \#C \rightarrow \#2^C$
- $\#C \neq \#2^C$: mostrar que *não* existe função bijetora entre $\#C$ e 2^C

Parte 1: (*direta*) função injetora $f: \#C \rightarrow \#2^C$

Seja $f: \#C \rightarrow \#2^C$ uma função tal que, para todo $s \in C$

$$f(s) = \{ s \}$$

- f é injetora (por quê?)
- portanto, $\#C \leq \#2^C$

Parte 2. (*por absurdo*) Suponha que *existe* função bijetora $g: \#C \leftrightarrow \#2^C$

Seja $A \subseteq C$ tq

$$A = \{ a \in C \mid a \notin g(a) \}$$

g é bijetora $\Rightarrow$ g é sobrejetora $\Rightarrow$ existe $c \in C$ tal que $g(c) = A$

Duas possibilidades

- $c \in A \Rightarrow$ $g(c) = A$
  - $c \in g(c) \Rightarrow$ pela definição de A
  - $c \notin A$
- $c \notin A \Rightarrow$ $g(c) = A$
  - $c \notin g(c) \Rightarrow$ pela definição de A
  - $c \in A$

Contradição! É absurdo supor que existe tal função bijetora

- logo, *não* existe função bijetora entre C e 2^C. Portanto, $\#C \neq \#2^C$

- **Este resultado permite pensar em**
  - classe *infinita* de números cardinais

Def: Cardinal

Cardinal: classe de equivalência de conjuntos equipotentes

- **Classe dos cardinais**
  - classe de todas as classes de equivalência dos conjuntos equipotentes
  - se a classe de todos os cardinais for um cardinal
    - semelhança com o Paradoxo de Russell
    - *não* é um conjunto

◆ Cardinais infinitos conhecidos

- $\aleph$
  - * ("alef"): primeira letra do alfabeto hebraico
  - * com índices
- cardinal de $\mathbf{N}$
  - * $\#\mathbf{N} = \aleph_0$
  - * menor cardinal dos conjuntos infinitos
  - * especial interesse para Computação e Informática
- $\aleph_0$
  - * cardinal de qualquer conjunto contável (infinito)
- $\aleph_{i+1}$: menor cardinal maior que $\aleph_i$

Cardinalidade do continuum

- Prova-se que $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ é equipotente ao $\mathbf{R}$
- Para $\#X = k$, prova-se que $\#\mathbf{P}(X) = 2^k$
- Portanto, $\#\mathbf{P}(\mathbf{R}) = 2^{\aleph_0}$

$\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$???

- Hipótese do Continuum
  - formulada como hipótese por Cantor
  - *não* conseguiu provar

- Gödel (década de 30) e Cohen (década de 50)
  - fato independente da Teoria dos Conjuntos
  - Hipótese do *Continuum* e sua negação
  - consistentes com o restante da Teoria dos Conjuntos

7 – Cardinalidade de Conjuntos

7.4 Cardinal do Conjunto de Todos os Problemas Solucionáveis

- **Estudo dos cardinais**
  - fundamental importância em Ciência da Computação
  - destaque: estudos dos problemas solucionáveis (computador)
- **Prova-se que**

existem $\aleph_0$ programas que podem ser definidos em qualquer linguagem de programação de propósitos gerais

- **Existem $2^{\aleph_0}$ funções de $\mathbf{N}$ para $\mathbf{N}$**
  - portanto, existem infinitas funções
    - *não* podem ser representadas algoritmicamente
    - *não* são computáveis
- **Conclusão**
  - existem infinitos mas contáveis problemas solucionáveis
    - existe algoritmo (Maquina de Turing)
  - existem infinitos e *não*-contáveis problemas não-solucionáveis
    - *não* existem algoritmos (Maquinas de Turing)
  - como $\#\mathbf{N} < \#\mathbf{R}$
    - cardinal dos não-solucionáveis *maior* que o dos solucionáveis

7 – Cardinalidade de Conjuntos

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS