Lista de Exercícios 3

Disciplina de Redes Complexas - PESC - COPPE - UFRJ

Vinícius W. Salazar, Prof. Daniel R. Figueiredo

Dezembro de 2019

Questão 1

Para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer, precisamos da seguinte condição:

$$E[d_i \mid i - j] > 2$$

para todos os vértices dentro da GCC, o que é equivalente a:

$$\kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

Logo, digamos que temos a distribuição de grau original (antes da falha) como $P[D = \kappa]$ e a distribuição após a falha como $P[D\ ' = \kappa]$, podemos expressar a probabilidade do grau ser $\kappa\ '$ dado o grau original κ:

$$P[D\ ' = \kappa\ '|\ D = \kappa] = (\frac{\kappa}{\kappa\ '})(1-p)^{\kappa\ '}p^{k-k\ '}$$

Calculando os momentos de $D[\ ']$

$$E[D\ '] = E[D](1-p)$$
$$E[D\ '^2] = E[D^2](1-p)^2 + E[D]p(1-p)$$

Finalmente, podemos determinar o ponto crítico p_c:

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

1.1 Modelo G(n,p)

Se no modelo $G(n,p)$ o grau esperado é igual a $E[D] = (n-1)p$, podemos expressar o ponto crítico como:

$$p_c = 1 - \frac{(n-1)p}{((n-1)p)^2 - (n-1)p}$$

1.2 Modelo BA

No modelo BA, o grau médio é dado p$\bar{d} = \frac{2m}{n}$ e a distribuição de grau.

1.3 Distribuição de grau zeta com parâmetro α

Caso $\alpha < 3$, os momentos divergem e $p_c = 1$, e a GCC nunca se desintegra.

Para $\alpha > 3$, quanto maior o valor de α, menor é o valor de p_c.

1.4 Grafo k-regular

Assim como o $G(n,p)$, o ponto crítico será dado por:

$$p_c = 1 - \frac{k}{k^2 - k}$$

Questão 2

2.1 Quando um divórcio ocorre em um vértice i, ocorrem divórcios em todos os casais de i até k.

2.2 O valor esperado será na ordem de $\log_2 k$. Ou seja, se a rede tiver $k = 32$, o esperado será que após um divórcio teremos 16, 8, 4, 2, 1 sucessivamente até o casal u_1 e v_1 se divorciarem, logo o valor esperado será $\approx \log_2 k$. O cenário de melhor caso será de 1 (se o casal u_1 e v_1 se divorciarem, todos se divorciam) e o pior caso será de k divórcios, quando o casal k se divorcia, e depois $k-1 \dots$ sucessivamente até o casal 1.

2.3 Um único divórcio entre a mulher u_1 e o homem v_1.

Questão 3

Podemos considerar as ideias de duas formas: separadas ou isoladas, e de duas formas: em uma rede com distribuição homogênea (Poisson, binomial) ou de cauda pesada (BA, distribuição de grau Zeta).

Para redes de distribuição homogênea, a condição 1) faz pouca diferença, pois ela só será útil quando estivermos no vértice vizinho do resultado desejado da busca, logo, pode encurtar o caminho em no máximo 1 passo. Isso pode ser uma desvantagem se o custo de armazenar a informação dos vizinhos for considerável, dado que fará uma diferença muito pequena. Considerando a condição 2), o cenário será parecido: fará pouca diferença dada que a distribuição da rede é homogênea. Na verdade, pode trazer uma pequena desvantagem uma vez que se o resultado da busca estiver em um vértice de grau pequeno, será menor a chance de alcançá-lo. Considerando as condições 1) e 2) juntas, também teremos pouca diferença no desempenho, pois se o resultado estiver em um vértice de grau pequeno, cujos vizinhos também tem grau pequeno, caíremos no mesmo problema da condição 2) isolada.

Para redes com distribuição em lei de potência, a condição 1) isolada pode ser vantajosa, pois existem alguns poucos vértices com um grau muito grande, e se nosso resultado for vizinho de um desses *"hubs"*, chegaremos nele rapidamente. No entanto, isso também pode causar um congestionamento na rede, uma vez que os *hubs* vão ter que carregar uma carga alta de informações (de todos os seus vizinhos), e é justamente por eles que existe um tráfego maior, pois é mais alta a chance de estar em um caminho mínimo. A condição 2) isolada nessa rede trará uma grande desvantagem, pois o passeio aleatório terá a tendência de ficar limitado entre os vértices de grau alto e, se o resultado da busca estiver em um vértice de grau baixo, será difícil alcançá-lo. No entanto, juntar as condições 1) e 2) nessa rede pode trazer grandes vantagens, pois os *hubs* vão armazenar as informações de muitos vizinhos, o que pode encurtar significativamente os caminhos mínimos.

Questão 4

Podemos simplificar a modularidade de uma partição como:

$$M = \sum_k \left(\frac{m_k}{m} - \left(\frac{d_k}{2m} \right)^2 \right)$$

aonde m_k é o número de arestas dentro da parte k, d_k é a soma dos graus dos vértices da parte k.

4.1

Considerando essas condições, substituindo os valores temos:

$$M = N_c \left(\frac{\binom{k}{2}}{N_c\binom{k}{2} + N_c} - \left(\frac{k(k-1)+2}{2(N_c\binom{k}{2} + N_c)} \right)^2 \right)$$

Se tivermos, por exemplo, $N_c = 3$ e $k = 4$, $M \approx 0.55$

4.2

Basta substituirmos m_k e d_k:

$$M = \frac{N_c}{2}\left(\frac{2\binom{k}{2}+1}{N_c\binom{k}{2}+N_c} - \left(\frac{2k(k-1)+3}{2(N_c\binom{k}{2}+N_c)}\right)\right)$$

Questão 5

Em um sistema SI, temos, basicamente:

$$I(t) = \beta IS$$

Em nosso modelo, temos mais um parâmetro a que captura as arestas entre possíveis animais. Precisamos, ainda, levar em conta a direcionalidade das conexões, pois $\beta_{i \to j}$ pode ser diferente de $\beta_{j \to i}$. Derivando $I(t)$ em função de t, temos:

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial I_i(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I_i(t)}{\partial t} = \sum_i \alpha_{j,i}\beta_{j,i}I_j(t)S_i(t)$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \sum_i \sum_i \alpha_{j,i}\beta_{j,i}I_j(t)S_i(t)$$