Lista de Exercícios

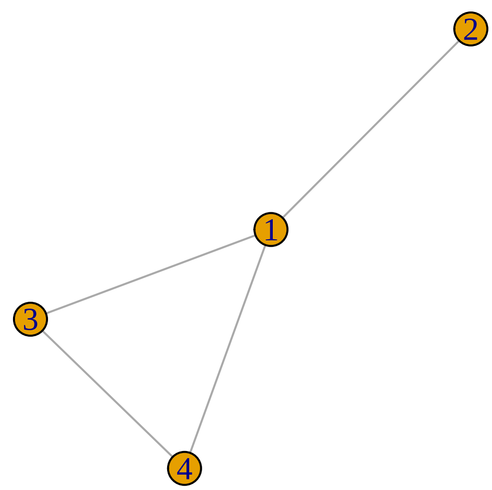
Disciplina de Redes Complexas - PESC - COPPE - UFRJ

Vinícius W. Salazar, Prof. Daniel R. Figueiredo

Novembro de 2019

Questão 1

Vamos supôr o seguinte grafo e sua respectiva matriz de adjacência A:




```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    0    1    1    1
## [2,]    1    0    0    0
## [3,]    1    0    0    1
## [4,]    1    0    1    0
```

1.1) Para uma matriz $B^{(k)}$ onde k representa alcançabilidade em exatamente k passos, é fácil notar que para $k = 1, B^{(k)} = A$, ou seja, a matriz de adjacência codifica alcançabilidade em exatamente 1 passo. Logo, $B^{(k)}$ codifica alcançabilidade em exatamente k passos. Podemos verificar isso multiplicando a matriz por ela mesma para $k = 2$. Observemos $B^{(2)}$, tomando todos os inteiros positivos como iguais a 1 e a diagonal como 0:

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    3    0    1    1
## [2,]    0    1    1    1
```

```
## [3,]    1    1    2    1
## [4,]    1    1    1    2
```

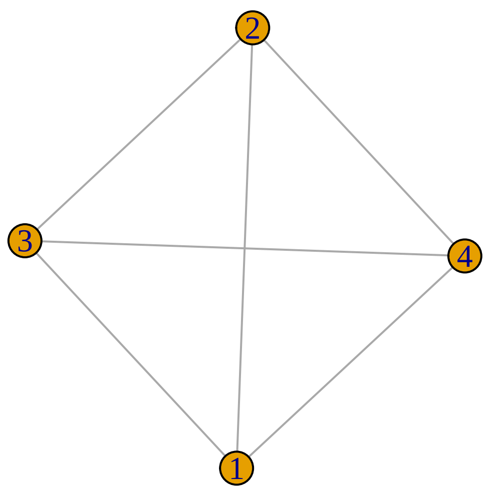
1.2) O caminho entre V_1 e V_2 é o único que não pode ser alcançado em exatamente 2 passos. Para codificar a matriz $C^{(k)}$ onde k representa alcançabilidade em k ou menos passos, basta somar as matrizes anteriores, ou seja $C^{(k)} = \sum_{k=1}^{k} B^{(k)}$. Por exemplo, para $k = 3,\ C^3 = B^3 + B^2 + A$.

1.3) Assumindo um algoritmo ingênuo para a multiplicação de matrizes, para $B^{(k)}$, $\mathcal{O}(n^3)$, onde n a dimensão da matriz. Para $C^{(k)}$, $\mathcal{O}(kn^3)$, pois a operação de multiplicação de matrizes é realizada k vezes.

1.4) Para diminuir significativamente o tempo de computação, podemos aproveitar as contas que fizemos antes, criando uma solução de programação dinâmica. Por exemplo, digamos que precisamos calcular $C^{(8)}$. Podemos começar calculando B^2. Para B^4, fazemos $B^4 = B^2 \times B^2$, assim aproveitando a operação do B^2, e sucessivamente para $C^{(8)} = B^4 \times B^4$. Aproveitando as operações, o custo computacional baixa significativamente, para $\mathcal{O}(log(kn^3))$.

Questão 2

Sim, é possível! Em redes pequenas e altamente conectadas, é perfeitamente possível ter um grau médio pequeno $\overline{g} = 3$ e densidade $\rho = 1$:



No entanto, em redes reais, com um número muito grande de vértices, é mais fácil que o contrário aconteça: o grau médio aumente e a densidade diminua.

Podemos definir o grau médio como $\overline{g} = 2m/n$ e a densidade do grafo como $\rho = \frac{2m}{n(n-1)}$. Logo, existe uma relação analítica entre essas duas medidas, com a densidade aumentando em função do grau médio ($\overline{g}$) e diminuindo em função do número de vértices (n) pois $\rho = \overline{g} \times (n-1)^{-1}$. Logo, se o grau médio não aumentar junto com o número de vértices, a densidade diminui.

Questão 3

3.1.a) Clusterização local determinada por $C_i = \frac{2E_i}{d_i(d_i-1)}$ para cada vértice a, b, c, d, e, f respectivamente:

```
## [1] 1.0000000 0.3333333 0.3333333 1.0000000 0.3333333 0.0000000
```

3.1.b) Clusterização média:

```
## [1] 0.5
```

3.2) Clusterização global:

```
## [1] 0.4
```

$Cglobal < \overline{C_i}$

3.3) Densidade:

```
## [1] 0.5333333
```

Questão 4

4.4)
$APD(L_{3,1}) = 1.\overline{3}$
$APD(L_{3,2}) = 1.7$
$APD(L_{4,1}) = 1.3$
$APD(L_{4,1}) = 1.\overline{6}$

Questão 5

Grafo completo com $|V| = n$ vértices:

$b_v(i, j) = 0$ pois como o grafo é completo, não existem caminhos mínimos pois todas os vértices são vizinhos

Para os outros casos, sendo k a partição do grafo:

Def. 1: $b_{v_k}(i, j) = 1$ caso $i, j \notin V_k$, pois se i e j estão na mesma partição, precisam passar por outra partição V_k e por isso $b_{v_k}(i, j) = 1$. Se estão em partições diferentes, $b_{v_k}(i, j) = 0$ pois i e j são vizinhos.

Def. 2: $b_v(i, j) = \frac{1}{|V| - V_k}$ se $i, j \in V_k$, pois a carga é o total de vértices $|V|$ menos os vértices que estão na partição V_k que contém i, j.

Def. 3: $b_v(i, j) = 0$ pois como todos os vértices entre diferentes partições estão ligados, um vértice só está em uma fração $\frac{1}{|V| - Vk}$ dos caminhos mínimos, conforme a Definição 2.