Seção 1.3 Curvas Regulares; Comprimento de Arco

By Gabriela Silva

12 de fevereiro de 2020

Exercício 1. Mostre que as retas tangentes à curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y = 0$ e $z = x$.

Solução. A reta é dada por $\begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$, ou seja a reta, (x,0,x)=x(1,0,1), que passa pela origem e tem como vetor direcional (1,0,1). Assim, precisamos mostrar que o vetor velocidade da curva, α' forma um ângulo constante com o vetor $(1, 0, 1)$. O vetor velocidade de α é dado por $\alpha' = ((3t)', (2t^2)', (2t^3)') = (3, 6t, 6t^2)$. Então temos que:

$$cos(\theta) = \frac{\langle \alpha', (1,0,1) \rangle}{||\alpha'|| \cdot ||(1,0,1)||}$$

$$cos(\theta) = \frac{\langle (3, 6t, 6t^2), (1,0,1) \rangle}{||(3, 6t, 6t^2)|| \cdot ||(1,0,1)||}$$

$$cos(\theta) = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} \cdot \sqrt{2}}$$

$$cos(\theta) = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{(3 + 6t^2)^2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, θ é constante igual a 45° e não depende do parâmetro t da curva α.