MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO SUL DE MINAS GERAIS**
**CAMPUS PASSOS**
*Rua Mário Ribola, 409, Penha II, CEP 37.903-358, Passos-MG*
***(35) 3526-4856 -*** *www.ifsuldeminas.edu.br/passos*

# EDITAL Nº 02/2019
# PROGRAMA INSTITUCIONAL DE APOIO À INICIAÇÃO CIENTÍFICA VOLUNTÁRIA

## Geometria diferencial e suas aplicações na mecânica relativística: um estudo sobre modelos clássicos de buracos negros.

Física (1.05.00.00-6)
Física Geral (1.55.01.00-2)
Métodos Matemáticos da Física (1.55.01.01-0)

05 de dezembro de 2019
Passos/MG

## INFORMAÇÕES GERAIS

**Orientador:** Renan Servat Sander

**Telefone**: (35) 98820-7620

**E-mail**: renan.sander@ifsuldeminas.edu.br

**Endereço no Lattes**: *http://lattes.cnpq.br/1708048694986295*

**Estudante de Iniciação Científica:** Gabriela Cristina da Silva

**Telefone:** (35) 98855-2355

**E-mail:** gabriela.silva@alunos.ifsuldeminas.edu.br

**Endereço no Lattes:** *http://lattes.cnpq.br/7541637897269978*

**Membros do projeto**

| **Nome** | **Titulação máxima** | **Instituição pertencente** | **Função** | **E-mail** |
|---|---|---|---|---|
| Renan Servat Sander | Doutorado | IFSULDEMINAS, Campus Passos | Professor orientador | renan.sander@ifsuldeminas.edu.br |
| Gabriela Cristina da Silva | Ensino Médio completo | IFSULDEMINAS, Campus Passos | Estudante de Iniciação Científica | gabriela.silva@ifsuldeminas.edu.br |

**Local de Execução:** IFSULDEMINAS, Campus Passos

**Período de Execução do Projeto:**

**Início:** dezembro de 2019

**Término:** novembro de 2020

Renan S. Sander
SIAPE 1971039

Renan Servat Sander

Orientador

## 1. ANTECEDENTES E JUSTIFICATIVA

De forma geral, podemos afirmar que geometria diferencial é uma disciplina que estuda a geometria por meio de ferramentas e conceitos de cálculo diferencial e integral, álgebra linear e álgebra multilinear [Spivak, 1999]. Particularmente, esta área da Matemática encontra grande aplicação na Física [Burke, 1985], em importantes tópicos gerais tais como Eletrodinâmica clássica e Relatividade [Hartle, 2003]. Neste trabalho, estamos interessados em estudar as equações de campo da Relatividade Geral e aplicar o formalismo da geometria diferencial para casos particulares de solução das equações de campo, tais como modelos específicos de buracos negros [Chandrashekhar, 1998; Misner/Thorne, 2017; Weinberg, 1972], que começaram a ser desenvolvidos a partir da publicação das equações de campo da Relatividade Geral, em 1915.

Recentemente, o estudo de buracos negros ganhou alta visibilidade com a revelação pública da construção da primeira fotografia registrada pela humanidade de um buraco negro [Castelvecchi, 2019]. Isto colocou o tópico novamente em evidência, como já ocorrera em diversos momentos do século XX e início do século XXI. Por ser um objeto físico de grande relevância para a Física, Astronomia, Matemática, Química, dentre outras ciências mais específicas, faz-se importante que os desenvolvimentos teóricos e resultados relacionados à ciência dos buracos negros sejam bem difundidos na sociedade. Para esta finalidade é essencial que este assunto seja discutido de maneira abrangente com estudantes de cursos de Licenciatura na área de ciências exatas, já que no futuro estes serão importantes vetores destas informações.

Ainda por se tratar de um tema relativamente complexo, é necessário expor os principais resultados (que frequentemente são abstratos demais para o público médio compreender sem dificuldade) de formas mais didáticas e visuais do que normalmente é apresentado na literatura tradicional sobre o assunto. Por considerar tal importância, um dos focos deste trabalho será uma boa exposição gráfica dos resultados conhecidos para os modelos específicos de buracos negros abordados.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

No final do século XIX, ocorreu o fechamento da Teoria Eletromagnética, que ficou plenamente bem representada desde então pela reunião das leis do eletromagnetismo que foi efetivada pelas hoje conhecidas como equações de Maxwell [Feynman, 1964], comumente expressas em sua forma integral ou na sua forma diferencial. Um resultado marcante destas equações é a previsão teórica para a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética, como função unicamente das constantes fundamentais de permeabilidade elétrica e magnética. Verificou-se que a velocidade prevista é exatamente igual a velocidade da luz obtida experimentalmente (fornecendo forte evidência para a ideia de que a luz de fato é uma onda eletromagnética) e que este valor não depende de um referencial em particular, já que estas condições não são especificadas no cálculo da velocidade pela equação de onda.

De fato, logo foi verificado por Hendrik Lorentz que as equações de Maxwell não permaneciam invariantes sobre a aplicação de transformadas de Galileu (advindas da Relatividade de Galileu, base da mecânica newtoniana), permanecendo, porém, invariantes para um conjunto de transformações matemáticas atualmente conhecido como Transformadas de Lorentz [Griffiths, 2017]. Isso revelou uma inconsistência fundamental do Eletromagnetismo com a Mecânica Clássica, que mantinha suas equações invariantes sob aplicação das transformadas de Galileu. Com contribuições de Lorentz, Minkowski, e Poincaré [Hawking, 2004], Albert Einstein desenvolveu no início do século XX uma nova formulação da mecânica [Einstein, 1905] que é invariante sobre as transformações de Lorentz, estando assim de acordo com a Teoria Eletromagnética, e também descartando a hipótese de existência do meio material éter luminífero, sob o qual a luz se propagaria e que jamais fora observado experimentalmente. Esta nova teoria ficou conhecida como Relatividade Especial. Neste novo paradigma, espaço e tempo já não devem ser mais tratados separadamente e fazem parte de um *espaço-tempo contínuo*, um modelo matemático que funde as três dimensões espaciais já conhecidas com uma dimensão temporal extra. A relatividade especial corrige as equações da mecânica para altas velocidades de modo que, atualmente, consideramos a relatividade galileana e, consequentemente, a mecânica newtoniana, como boas aproximações que podem ser aplicadas para problemas que envolvem baixas velocidades, massas pequenas (em relação a estruturas de tamanho astronômico) e campos gravitacionais fracos. A palavra “especial” da teoria vem do fato de que ela é aplicável apenas para os casos em que o espaço tempo é considerado plano, ou seja, descrito pela métrica de Minkowski [Griffiths, 2017].

Nos anos seguintes à publicação da relatividade especial, Einstein dedicou seus esforços para desenvolver uma teoria relativística que fosse válida para qualquer referencial, com qualquer aceleração, ou seja, que levasse em conta quaisquer campos gravitacionais. Após quase 10 anos de trabalho neste problema Einstein revelou, no final de 1915, as equações de campo que descrevem a Teoria Geral da Relatividade, que também é conhecida como geometrodinâmica, por tratar a gravidade como um efeito geométrico da curvatura *riemanniana* gerada no espaço-tempo por objetos portadores de massa [Misner/Thorne, 2017]. Neste ponto, deve-se mencionar que no contexto de campos vetoriais ou tensoriais em variedades, ao contrário de funções escalares, não existe uma forma natural de se calcular as derivadas parciais (ou, taxas de variação) destes. Isto leva à necessidade de construção de uma estrutura adicional chamada *conexão*, que possibilita definir um tipo de derivada de campos tensoriais denominada derivada covariante. Em uma variedade geral, existem diversas possíveis conexões. Entretanto, no caso de variedades riemannianas, existe uma construção canônica de uma conexão compatível com a métrica e sem torção, a chamada conexão de Levi-Civita [Ricci, 1900]. A definição de uma conexão possibilita a definição e exploração dos conceitos de curvaturas e geodésicas em variedades.

Dado o fato que as equações de campo da relatividade geral são não lineares e difíceis de serem resolvidas analiticamente para a maior parte dos casos, Einstein utilizou aproximações numéricas para obter seus primeiros resultados práticos. Em 1916, o astrofísico Karl Schwarzschild obteve a primeira solução exata não trivial das equações de campo de Einstein [Schwarzschild, 1916]. A métrica de Schwarzschild descreve o campo gravitacional no exterior de uma esfera sem rotação e com carga elétrica nula. A solução de Schwarzschild apresenta singularidades (divisões por zero ou por infinito) para $r = 0$ e $r = r_s$, em que $r$ é a distância até o centro da esfera de massa. Atualmente esta solução também é conhecida como *buraco negro de Schwarzschild*. Nesta interpretação, a superfície hipotética esférica definida em $r_s$ é conhecida como horizonte de eventos, representando o ponto em que sequer a luz conseguiria escapar do campo gravitacional do objeto. Para a maior parte dos objetos esféricos no universo, como estrelas e planetas, o seu raio $R$ é maior do que o raio de Schwarzschild $r_s$. Por exemplo, o Sol tem aproximadamente 700.000 km de raio, enquanto $r_s$ é igual a 3 km. Porém, qualquer objeto suficientemente pequeno e denso tal que $R < r_s$, passará por um colapso gravitacional e se tornará um buraco negro [Brill, 2012].

Ainda em 1916, foram dados os primeiros passos no sentido de generalizar a métrica de Schwarzschild. Para objetos dotados de carga elétrica, foi obtida a solução estática hoje conhecida como métrica de Reissner-Nordström [Reissner, 1916; Weyl, 1917; Nordström, 1918; Jeffery, 1921], que descreve o campo gravitacional no exterior de uma esfera sem rotação carregada eletricamente. Sob outro ponto de vista, a métrica de Schwarzschild é generalizada pela métrica de Kerr [Kerr, 1963], na qual se considera explicitamente o efeito de rotação do corpo esférico. Unindo os resultados de Kerr com a energia do campo eletromagnético de um objeto carregado eletricamente, chega-se na solução assintoticamente plana e estacionária mais geral das equações de campo de Einstein, a métrica de Kerr-Newman [Kerr, 1963; Newman, 1965]. Esta solução é de grande interesse teórico e matemático já que provém uma boa base para estudos de soluções mais gerais, como por exemplo aquelas em que a constante cosmológica é não nula [Stephani, 2003].

# 3. OBJETIVOS

## 3.1 Objetivo geral:

**-** Estudar soluções analíticas das equações de campo de Einstein da Relatividade Geral por meio do formalismo da geometria diferencial.

## 3.2 Objetivos específicos:

- Compreender a fundamentação matemática e fenomenológica da mecânica newtoniana, bem como a geometria de seu espaço-tempo.

- Compreender a fundamentação matemática e fenomenológica da eletrodinâmica clássica e verificar a inconsistência existente com a mecânica newtoniana.

- Compreender os fundamentos da relatividade especial e estudar as principais características da métrica de Minkowski.

- Estudar a geometria do espaço-tempo curvo, que tem como fonte o tensor de energia-momento das equações de campo de Einstein.

- Estudar três casos fundamentais de soluções analíticas das equações de campo de Einstein que descrevem buracos negros: a métrica de Schwarzschild, a métrica de Reissner-Nordström e a métrica de Kerr-Newman.

- Apresentar os resultados de maneira didática e visual por meio de softwares gráficos específicos para aplicações em Matemática.

## 4. METODOLOGIA

O presente projeto, fundamentado por meio do método hipotético dedutivo, será realizado em quatro etapas: levantamento bibliográfico e complementação em tópicos básicos; estudo teórico 1 de tópicos específicos; estudo teórico 2: investigando o objeto de pesquisa, bem como a exposição e análise dos resultados.

A priori, será feito um levantamento bibliográfico para complementação em tópicos básicos, sendo desenvolvido majoritariamente com base na análise e reprodução dos principais resultados analíticos que constam em textos da literatura clássica sobre: mecânica newtoniana fundamental [Halliday, 2016; Goldstein, 2001]; eletrodinâmica clássica [Halliday, 2016; Griffiths, 2017]; tópicos de geometria diferencial [Manfredo, 1976; Spivak, 1999] e geometria riemanniana [Manfredo, 1976; Lee, 2006].

No estudo teórico 1 serão explorados, por meio de livros clássicos, conteúdos acerca de: métodos matemáticos da física gerais [Arfken 2012]; conexões de Levi-Civita e tensor de curvatura [Manfredo, 1976; Lee, 2006]; relatividade especial [Taylor, 1992] e relatividade geral [Hartle, 2003].

Posteriormente, para o estudo de caso de modelos de buraco negro, utilizaremos a literatura clássica sobre o assunto, como o livro "Black Holes: An Introduction" [Raine, 2005], em conjunto com artigos contemporâneos que tratam de observações experimentais mais recentes e/ou que contenham diferentes abordagens para o estudo das métricas clássicas de buracos negros.

Por último, utilizando recursos de plotagem e animação existentes em softwares específicos para aplicações de Matemática, como o Wolfram Mathematica® (disponível em: http://www.wolfram.com/mathematica/), serão apresentados os principais resultados de maneira gráfica e visualmente didática.

## 5. CRONOGRAMA

| **ATIVIDADES** | **MESES** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **12** | **01** | **02** | **03** | **04** | **05** | **06** | **07** | **08** | **09** | **10** | **11** |
| Levantamento bibliográfico; Complementação em tópicos básicos de Matemática e Física | X | X | X | | | | | | | | | |
| Estudo de tópicos específicos em Matemática e Física: transformadas de Galileu e de Lorentz, Relatividade restrita, Notação covariante. | | | X | X | X | X | | | | | | |
| Redação e submissão do Relatório Parcial; | | | | | | X | X | | | | | |
| Estudo de modelos clássicos de buracos negros sob diferentes condições de contorno. | | | | | | | X | X | X | X | | |
| Exposição e análise dos resultados por meio de ferramentas analíticas e computacionais | | | | | | | | | X | X | X | |
| Fechamento do trabalho, bem como a redação e submissão do Relatório Final e preparação de material para apresentação em eventos científicos. | | | | | | | | | | | X | X |

## 6. ORÇAMENTO FINANCEIRO

Para este projeto não serão necessários recursos financeiros e materiais do campus, além do material já disponível em biblioteca e dos computadores alocados nos laboratórios da instituição.

## 7. RESULTADOS ESPERADOS

Espera-se com este projeto obter uma melhor compreensão das bases da geometria diferencial por meio de estudos de caso de suas aplicações em uma das teorias mais bem-sucedidas da ciência, a Relatividade Geral. Em seguida, esperamos expor os principais resultados de maneira gráfica e visualmente didática por meio de recursos de plotagem e animação existentes em softwares específicos para aplicações de Matemática, como o Wolfram Mathematica®.

Especificamente, o estudo desenvolvido neste projeto irá aprimorar a compreensão da estudante bolsista em tópicos avançados de Matemática que não são comumente abordados em um curso de Licenciatura, como o que a estudante encontra-se atualmente matriculada, tais como: análise vetorial e tensorial; geometria diferencial; geometria de espaços curvos; métodos matemáticos aplicados à Física; instrumentação para ensino de Matemática.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

As referências bibliográficas utilizadas, abaixo listadas, estão organizadas na mesma ordem em que são citadas no texto.


SPIVAK, M.; “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry”, 3rd ed.; Publish or Perish, 1999.

BURKE, W. L.; “Applied Differential Geometry”, 1st ed; Cambridge University Press, 1985.

HARTLE, J. B; “Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity”; Addison-Wesley Professional; 2003.

CHANDRASEKHAR, S.; “The Mathematical Theory of Black Holes”; Oxford Classic Texts in Physical Sciences, 1998.

MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A.; “Gravitation”; Cambridge University Press, 2017.

WEINBERG, S.; “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”; John Wiley & Sons, 1972.

CASTELVECCHI, D.; “Black hole pictured for first time”; Nature **568**, 284-285, 2019.

FEYNMAN, R. P, LEIGHTON, R. B., SANDS, M.; “The Feynman Lectures on Physics”; Basic Books (AZ), New Millennium Ed., 2011.

GRIFFITHS, D. J.; “Introduction to Electrodynamics”, 4th ed.; Cambridge University Press, 2017.

HAWKING, S.; “Os Gênios da Ciência: Sobre os Ombros de Gigantes”; Ed. Campus, 2004.

EINSTEIN, A.; “On the electrodynamics of moving bodies” (trad. do original, em alemão); Annalen Der Physik **17** (10), 891-921, 1905.

RICCI, M. M. G., LEVI-CIVITA, T.; “Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications”; Mathematische Annalen **54**, (1-2), 125-201, 1900.

SCHWARZSCHILD, K.; “On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory” (trad. do original, em alemão); Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **7**, 189–196, 1916.

BRILL, D.; “Black hole horizons and how they begin”; Astronomical Review **7**, 25-35, 2012

REISSNER, H.; “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie”; Annalen der Physik **50**, 106–120, 1916.

WEYL, K.; “Zur Gravitationstheorie”; Annalen der Physik **54**, 117–145, 1917.

NORDSTRÖM, G.; "On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory"; Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk. **26**, 1201–1208, 1918.

JEFFERY, G. B.; "The field of an electron on Einstein's theory of gravitation". Proc. Roy. Soc. Lond. A **99**, 123–134, 1921.

KERR, R. P.; “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”; Physical Review Letters **11** (5), 237-238, 1963.

NEWMAN, E. *et al*; “Metric of a rotating, charged mass”; Journal of Mathematical Physics **6** (6), 918-919, 1965.

STEPHANI, H. *et al*; “Exact Solutions of Einstein’s Field Equations”, 2nd ed.; Cambridge University Press, 2003.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J.; “Fundamentos de Física 1: Mecânica”, 10a ed.; LTC, 2016.

GOLDSTEIN, H., POOLE, C. P., SAFKO, J. L.; “Classical Mechanics”, 3rd. ed.; Pearson, 2001.

DO CARMO, M. P.; “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies”; IMPA/RJ, 1976.

LEE, J. M.; “Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature”; Springer Science & Business Media, 2006.

TAYLOR, E. F., WHEELER, J. A.; “Spacetime Physics: An Introduction to Special Relativity”, 2nd ed.; W. H. Freeman, 1992.

RAINE, D., THOMAS, E.; “Black Holes: An Introduction”; Imperial College Press, 2005.

## 9. PLANO DE TRABALHO

| **TÍTULO DO PROJETO DE PESQUISA** | |
|---|---|
| Geometria diferencial e suas aplicações na mecânica relativística: um estudo sobre modelos clássicos de buracos negros. | |
| **Palavras-chave** | Geometria diferencial, relatividade geral, buracos negros |
| **Área de conhecimento (CNPq)** | Física (1.05.00.00-6); Física Geral (1.55.01.00-2)<br>Métodos Matemáticos da Física (1.55.01.01-0) |

| **DADOS DO COORDENADOR DO PROJETO** | |
|---|---|
| **Coordenador(a) do projeto** | Renan Servat Sander |
| **CPF** | 000.033.911-32 |
| **E-mail** | renan.sander@ifsuldeminas.edu.br |
| **Telefone** | (35) 988207620 |

| **DADOS DA BOLSISTA** | |
|---|---|
| **Nome** | Gabriela Cristina da Silva |
| **CPF** | 021.522.886-37 |
| **E-mail** | gabriela.silva@alunos.ifsuldeminas.edu.br |
| **Telefone (fixo/celular)** | (35) 98855-2355 |

| **PLANO DE TRABALHO** | |
|---|---|
| **Descrição das atividades** | **Mês/Ano** |
| Levantamento bibliográfico e revisão sobre tópicos de Física e Matemática fundamentais para a área a ser estudada: mecânica clássica, eletrodinâmica clássica, análise vetorial e fundamentos de geometria diferencial. | Dezembro, janeiro e fevereiro |
| Estudo de tópicos específicos em Física e Matemática: aplicações das transformadas de Galileu e de Lorentz, relatividade especial, tensores, notação covariante para a análise de problemas de geometria diferencial e Relatividade Geral. | Fevereiro, março, abril e maio. |
| Redação e submissão do Relatório Parcial. | maio e junho. |
| Estudo do formalismo matemático de modelos clássicos de buracos negros: uma massa esférica em repouso, sem carga elétrica (métrica de Schwarzschild); uma massa esférica em repouso, com carga elétrica (métrica de Reissner-Nordstrøm); uma massa esférica em rotação, com carga elétrica (métrica de Kerr/Newman) | junho, julho, agosto e setembro. |
| Exposição e análise dos resultados por meio de ferramentas analíticas e computacionais, tais como o software Wolfram Mathematica®. | setembro, outubro e novembro. |
| Fechamento do trabalho, bem como a redação e submissão do Relatório Final e preparação de material para apresentação em eventos científicos. | Novembro e dezembro |

| **Duração das atividades** | **Início** | **dezembro/2019** | **Término** | **novembro/2020** |
|---|---|---|---|---|

Os abaixo-assinados declaro que o presente Plano de Trabalho foi estabelecido de comum acordo, assumindo as tarefas e responsabilidades que lhes caberão durante o período de realização desse.

Passos/MG, 05 de dezembro de 2019.

Renan S. Sander
SIAPE 1971039

Renan Servat Sander

Orientador