Seção 1.5. Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

By Gabriela Silva

26 de fevereiro de 2020

Exercício 4. Suponha todas as normais a uma curva parametrizada passem por um ponto fixo. Mostre que o traço da curva está contido em um círculo.

Solução. Seja r_s o conjunto das retas que passa por $\alpha(s)$ e tem como vetor diretor $n(s)$.

$$r_s(\lambda) = \alpha(s) + \lambda n(s)$$

Como para todo s essas retas passam por um ponto fixo p, temos que existe um $\lambda_s \in \mathbb{R}$ tal que $p = r_s(\lambda_s) = \alpha(s) + \lambda_s n(s)$. Então,

$$p = \alpha(s) + \lambda(s)n(s) \tag{1}$$

onde $\lambda(s) = \lambda_s$. Derivando a equação 1 em relação a s, temos:

$$0 = \alpha'(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)n'(s)$$

$$0 = \alpha'(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)(-k(s)\alpha'(s) - \tau(s)b(s))$$
$$0 = \alpha'(s) + \lambda'(s)n(s) - \lambda(s)k(s)\alpha'(s) - \lambda(s)\tau(s)b(s))$$
$$0 = \alpha'(s)(1 - \lambda(s)k(s)) + \lambda'(s)n(s) - \lambda(s)\tau(s)b(s))$$

$$0 = (1 - \lambda(s)k(s))\alpha'(s) + \lambda'(s)n(s) - \lambda(s)\tau(s)b(s))$$

Como os vetores $\alpha'(s), n(s)$ e $b(s)$ são L.I. (linearmente independentes), temos que:

$$\begin{cases} 1 - \lambda(s)k(s) = 0 \Rightarrow k(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \\ \lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda = c \\ -\lambda(s)\tau(s) = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0 \end{cases}$$

Logo, $k(s) = \frac{1}{c}$. Portanto, podemos concluir que α é uma curva plana com curvatura constante igual a $\frac{1}{c}$. Logo, o traço de α está contido num círculo.