Seção 1.5. Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

By Gabriela Silva

26 de fevereiro de 2020

Exercício 1. Dada a curva parametrizada (hélice)

$$\alpha(s) = \Big(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\Big), s \in \mathbb{R}, \text{ onde } c^2 = a^2 + b^2$$

(a) Mostre que o parâmetro s é o comprimento de arco.

Solução. O parâmetro s é o comprimento de arco, isto é, α está parametrizada por comprimento de arco se, e somente se, $|\alpha'(s)| = 1$. Assim, calculando o vetor velocidade $\alpha'(s)$, temos:

$$\alpha'(s) = \Big(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\Big)$$

Então calculando o a norma do vetor velocidade:

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\Big(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{b}{c}\Big)^2}$$

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\Big(-\frac{a}{c}\Big)^2 \underbrace{\Big(\sin^2\frac{s}{c} + \cos^2\frac{s}{c}\Big)}_{=1} + \Big(\frac{b}{c}\Big)^2}$$

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \underbrace{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}}}_{\text{por hipótese } c^2 = a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2}} = 1$$

(b) Determine a curvatura e a torção de α.

Solução. A curvatura é definida por $k(s) = |\alpha''(s)|$. Então por meio do vetor velocidade α' derivamos as funções cooordenadas e obtemos o vetor aceleração α'':

$$\alpha''(s) = \Big(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\Big)$$

Calculando a norma do vetor aceleração, obetemos a curvatura:

$$k(s) = |\alpha''| = \sqrt{\Big(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}\Big)^2 + \Big(-\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}\Big)^2 + 0^2} =$$

$$k(s) = \sqrt{\Big(\frac{a}{c^2}\Big)^2 \Big[\cos^2\frac{s}{c} + \sin^2\frac{s}{c}\Big]} =$$

$$k(s) = \sqrt{\Big(\frac{a}{c^2}\Big)^2} = \frac{|a|}{c^2}$$

A torção é definida por $\tau = \langle b'(s), n(s)\rangle$. Então, vamos calcular o vetor normal, lembre-se que $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, logo

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \Big(-\frac{a}{|a|}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{|a|}\sin\frac{s}{c}, 0\Big)$$

Precisamos também encontrar o vetor binormal ($b(s)$) que é definido pelo produto vetorial entre o vetor velocidade e o vetor normal:

$$b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\frac{a}{|a|}\cos\frac{s}{c} & -\frac{a}{|a|}\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$b(s) = \Big(\frac{ab}{|a|c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{ab}{|a|c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a^2}{|a|c}\Big)$$

Assim,

$$b'(s) = \Big(\frac{ab}{|a|c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{ab}{|a|c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\Big)$$

Finalmente vamos calcular a torção:

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s)\rangle = \langle\Big(\frac{ab}{|a|c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{ab}{|a|c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\Big), \Big(-\frac{a}{|a|}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{|a|}\sin\frac{s}{c}, 0\Big)\rangle$$

$$\tau(s) = -\frac{b}{c^2}\cos^2\frac{s}{c} - \frac{b}{c^2}\sin^2\frac{s}{c} = -\frac{b}{c^2}\Big(\cos^2\frac{s}{c} + \sin^2\frac{s}{c}\Big) = -\frac{b}{c^2}$$

(c) Determine o plano osculador.

Solução. O plano osculador de $\alpha(s)$ é determinado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$, que já foram calculados. A equação do plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde (a,b,c) é o vetor normal. Para o plano oculador o vetor normal é $b(s)$. Assim, para encontrarmos d basta substituir (x, y, z) por $\alpha(s)$, já que $\alpha(s)$ é um ponto do plano osculador

$$\frac{ab}{|a|c}\sin\frac{s}{c}a\cos\frac{s}{c} - \frac{ab}{|a|c}\cos\frac{s}{c}a\sin\frac{s}{c} + \frac{a^2b}{|a|c^2}s + d = 0$$

$$d = -\frac{a^2b}{|a|c^2}s$$

Portanto, a equação geral do plano osculador é dado por

$$\frac{ab}{|a|c}\sin\frac{s}{c}x - \frac{ab}{|a|c}\cos\frac{s}{c}y + \frac{1}{c}z + -\frac{a^2b}{|a|c^2}s = 0$$

(d) Mostre que as retas contendo $n(s)$ e passando por $\alpha(s)$ encontram o eixo Oz sob um ângulo constante igual a $\frac{\pi}{2}$.

Solução. Para cada s temos uma reta contendo $n(s)$ e passando por $\alpha(s)$. O ângulo $o(s)$ da reta passando por $\alpha(s)$ contendo $n(s)$ com o eixo Oz é o ângulo formado pelo vetor diretor da reta e o vetor direto de Oz. Como o vetor diretor da reta é $n(s)$ e o vetor diretor de Oz é (0,0,1), temos:

$$\cos(o(s)) = \frac{\langle n(s), (0,0,1)\rangle}{|n(s)||(0,0,1)|} = 0$$

$$\cos(o(s)) = 0$$

$$o(s) = \arccos(0)$$

$$o(s) = \frac{\pi}{2}$$

para todo s. Portanto, as retas contendo $n(s)$ e passando por $\alpha(s)$ encontram o eizo Oz sob um ângulo constante igual a $\frac{\pi}{2}$.

(e) Mostre que as retas tangentes a $\alpha(s)$ fazem um ângulo constante com o eixo Oz.

Solução. A reta tangente a $\alpha(s)$ tem como vetor diretor o vetor $\alpha'(s)$. Logo, o ângulo $o(s)$ formado pelas retas tangentes a $\alpha(s)$ e o eixo Oz é:

$$\cos(o(s)) = \frac{\langle \alpha'(s), (0,0,1)\rangle}{|\alpha'(s)||(0,0,1)|} = \frac{b}{c}$$

Portanto, para todo s, o ângulo $o(s) = \arccos \frac{b}{c}$, as retas tangentes a α fazem um ângulo constante com o eixo Oz.