Seção 1.5. Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

By Gabriela Silva

26 de fevereiro de 2020

Exercício 2. Mostre que a torção τ é dada por

$$\tau(s) = -\frac{\alpha(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{|k(s)|^2}$$

Solução. Sabemos que a torção é definida por

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$$

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = \langle \alpha'(s) \wedge n'(s), n(s) \rangle = \det(\alpha'(s), n'(s), n(s)) =$$
$$= -\det(\alpha'(s), n(s), n'(s)) = -\langle \alpha'(s) \wedge n(s), n'(s) \rangle = -\langle b(s), n'(s) \rangle$$

Como o vetor aceleração é definido por $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, derivando mais uma vez, temos:

$$\alpha'''(s) = k'(s)n(s) + k(s)n'(s)$$

Logo,

$$\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle = \langle \alpha'(s) \wedge k(s)n(s), \alpha'''(s) \rangle = \langle k(s)\alpha'(s) \wedge n(s), \alpha'''(s) \rangle =$$

$$= \langle k(s)b(s), \underbrace{k'(s)n(s)}_{=0} + k(s)n'(s) \rangle = k(s)^2 \langle b(s), n'(s) \rangle = k(s)^2 - \tau(s)$$

Portanto, $\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{|k(s)|^2}$.