Решения задач по курсу «Дискретные структуры»

Александра Винк

11 марта 2021 г.

Задача 5. Сформулируйте обратное утверждение к утверждению принципа Дирихле (для любой из формулировок принципа). Заметьте, что в любом случае можно сформулировать это обратное утверждение, хотя оно и будет неверным в общем случае для некоторых формулировок принципа Дирихле.

Решение. Сформулируем принцип Дирихле: если A и B – множества, такие, что $|A| > |B|$, тогда не существует инъекции $f : A \to B$.

Сформулируем обратное утверждение к принципу Дирихле: если A и B – такие множества, что не существует инъекции $f : A \to B$, тогда $|A| > |B|$.

Задача 10. В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном (ровно в одном) из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета строго больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Решение. В данной задаче выберем в качестве потенциала число дорог с концами в городах с разными цветами флагов. Это целое неотрицательное число. Пусть утром выбрали город, у которого n соседей с флагами с цветами, отличными от цвета флага выбранного города и k соседей с флагами того же цвета. Поменяли цвет флага выбранного города — потенциал уменьшился на $n - k$. И каждое утро он будет только уменьшаться. Значит, процесс, описанный в условии, конечен.

Задача 18. Сколькими разными способами можно расставить 30 томов на книжной полке, чтобы третий и четвёртый тома не стояли рядом?

Решение. Рассмотрим варианты расстановки томов по 30 местам.

1. Поставим третий том на первое место. Тогда на второе место не можем поставить четвёртый том, то есть имеем 28 вариантов, которые можем поставить на второе место. Далее расставляем 28 томов по оставшимся местам – имеем $28 \cdot 28!$ вариантов. Также поступаем с последним местом. Итого имеем $2 \cdot 28 \cdot 28!$ способов.

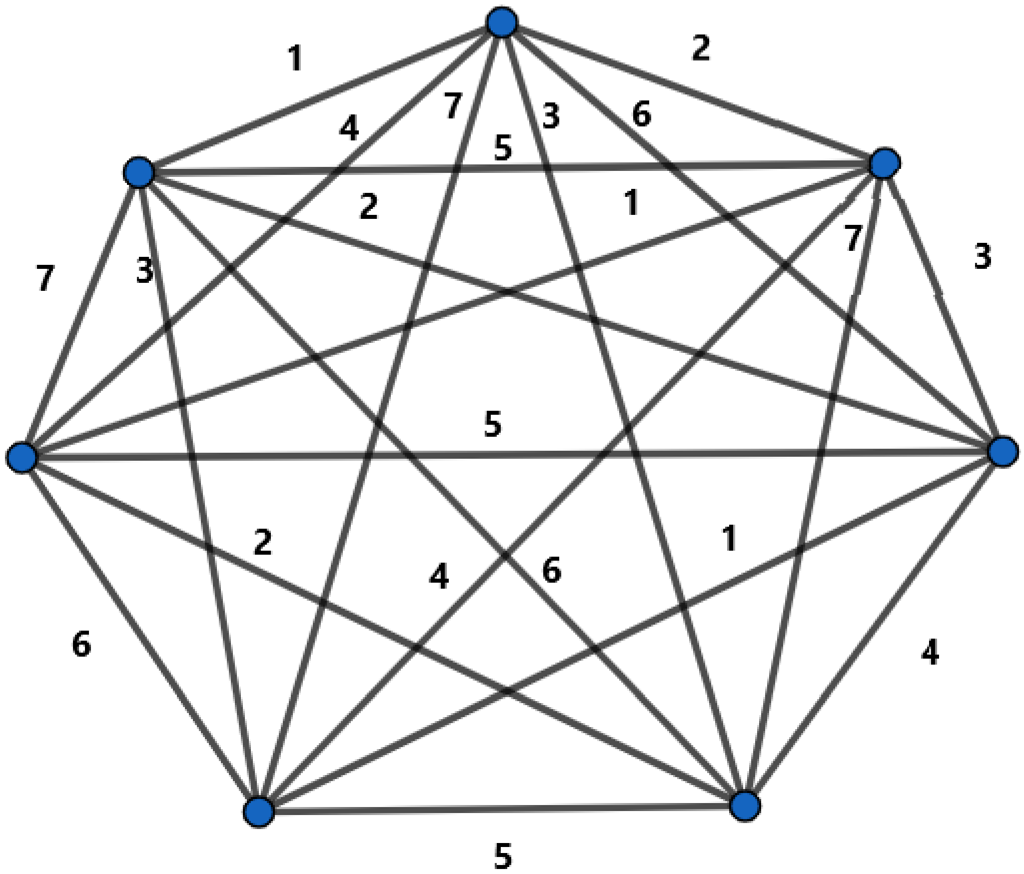
2. Рассмотрим расстановки, когда третий том стоит не на первом и не на последнем месте. Ставим третий том на второе место, значит четвёртый том не может стоять ни на первом, ни на третьем месте. Для первого места – 28 вариантов, для третьего – 27 вариантов. Далее расставляем 27 томов по оставшимся местам – имеем $27 \cdot 28!$ расстановок. Учитывая, что таких промежуточных положений 28, имеем $27 \cdot 28 \cdot 28!$ расстановок.

Суммируя количество способов для первого и второго случаев, получим ответ на задачу – $28 \cdot 29!$ способов.

Задача 65. В каких границах может быть хроматическое число связного графа на восьми вершинах? Тот же вопрос про хроматический индекс. Для каждого граничного значения хроматического числа/индекса необходимо привести пример, на котором это значение достигается.

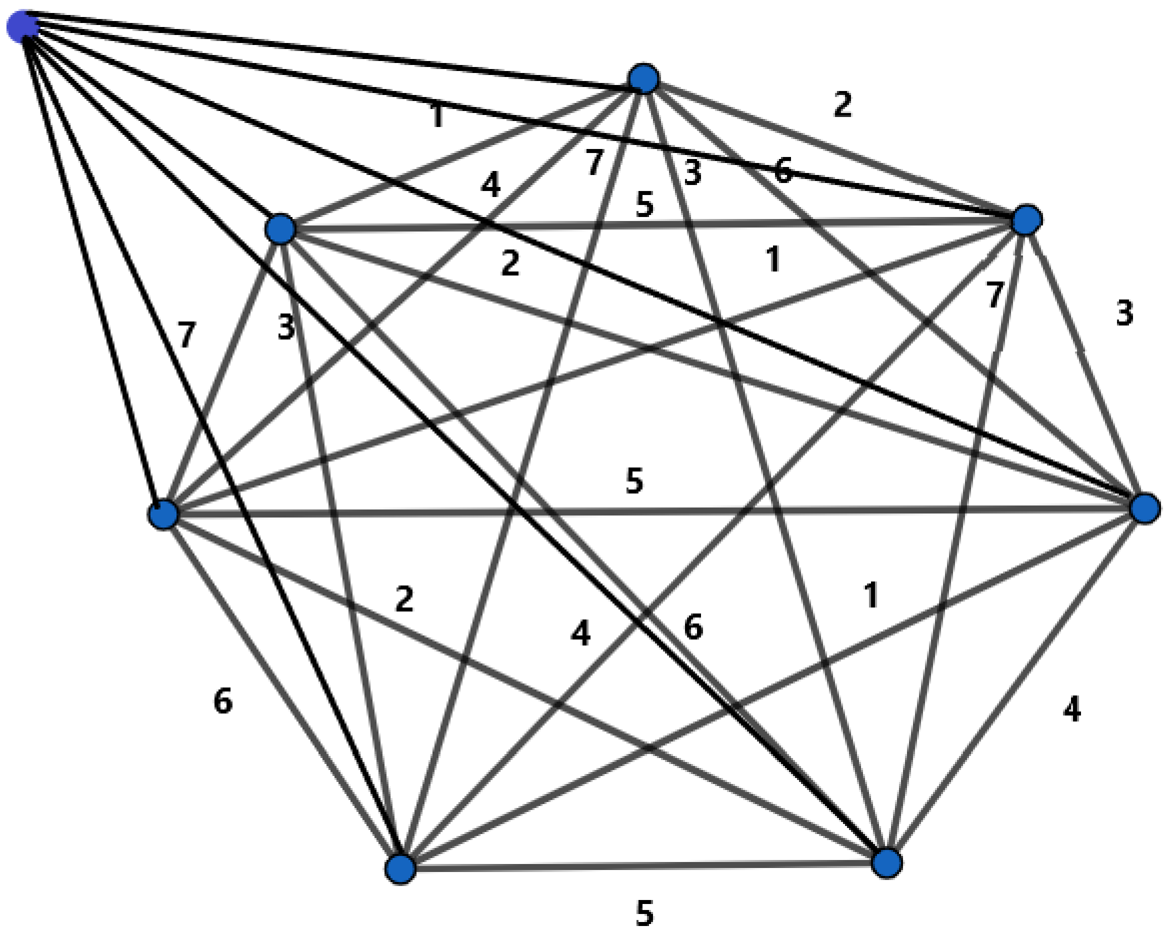
Решение. Сделаем подсчёт для максимального хроматического индекса графа K_8.

Сначала рассмотрим правильную раскраску рёбер для графа K_7, расположив вершины графа в виде правильного семиугольника:



Алгоритм раскраски такой: сначала окрашиваем каждую сторону семиугольника в свой цвет. Далее раскрашиваем каждую диагональ семиугольника в цвет параллельной ей стороны. Таким образом, для каждой вершины остался один неиспользованный цвет (из каждой вершины выходит шесть рёбер, а цветов семь).

Добавим одну вершину к многоугольнику и соединим ее с каждой вершиной семиугольника – получили полный граф на восьми вершинах:

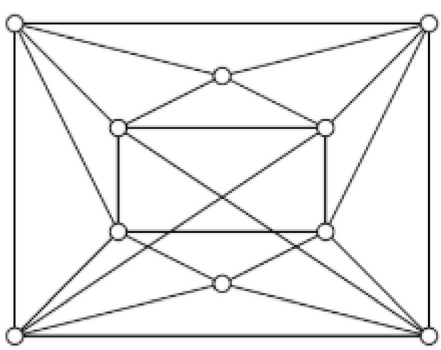


Далее раскрасим каждое ребро из только что добавленной вершины в неиспользованный цвет для той вершины, с которой это ребро соединяет добавленную.

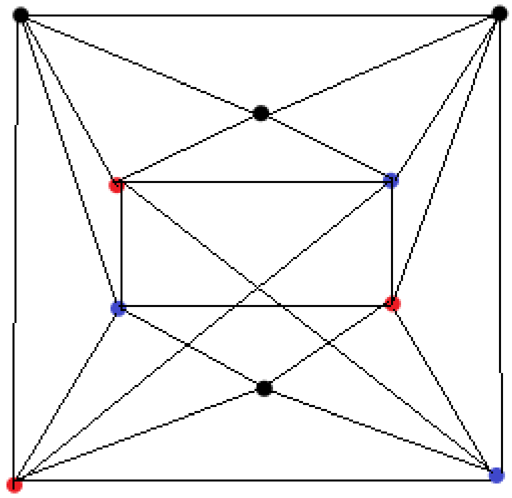
Получили раскраску рёбер в семь цветов, и меньше цветов использовать нельзя, так как будут рёбра, исходящие из одной вершины одного цвета.

Получили, что семь – максимальный хроматический индекс для графов на восьми вершинах.

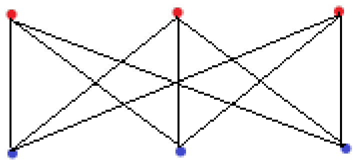
Задача 66. Планарен ли следующий граф? Если да, то нарисуйте его без самопересечений, если нет, то обоснуйте непланарность, найдя в нём подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$, и сославшись на теорему Куратовского.



Решение. Этот граф непланарен. Наш граф с раскрашенными вершинами:



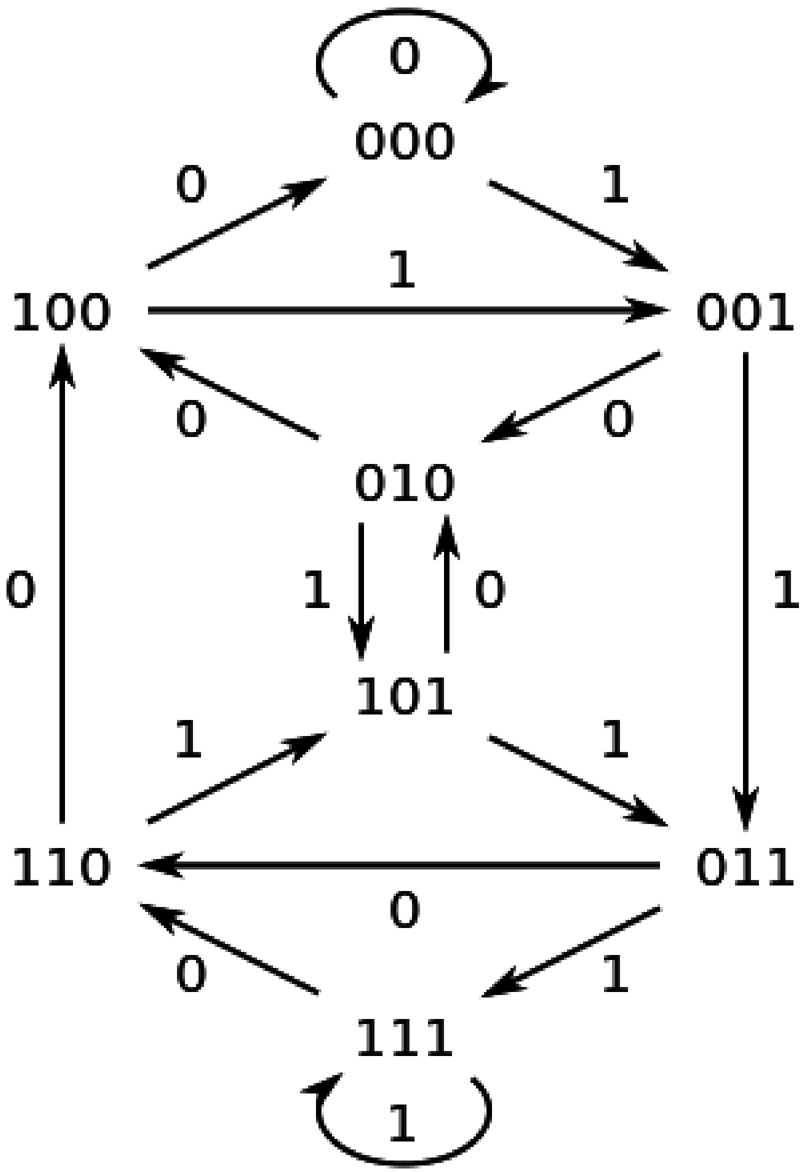
Нарисуем также граф $K_{3,3}$:



Вершинам нашего графа сопоставим вершины графа $K_{3,3}$. Синим вершинам нашего — синие графа $K_{3,3}$, красным — красные. Нашли подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$, значит наш граф непланарен.

Задача 88. С помощью графа де Брёйна постройте двоичную последовательность де Брёйна порядка четыре, заканчивающуюся последовательностью 000110.

Решение. Построим граф де Брёйна:



Найдем эйлеров цикл, заканчивающийся последовательностью 000110, этот цикл заканчивается в вершине 110. Значит начнём обход с этой вершины.

В результате получили последовательность 1101001011110000110.

Задача 120. Пусть в связном графе G есть мост (ребро, при удалении которого граф теряет связность). Докажите, что граф G не содержит гамильтонова цикла.

Решение. Пусть данный граф G содержит гамильтонов цикл и пусть есть мост, соединяющий две компоненты связности. Тогда при обходе графа в какой-то момент обязательно перейдём по мосту из первой компоненты связности во вторую. Тогда, сделав обход во второй компоненте связности, должны будем вновь пойти по мосту, чтобы вернуться в первую компоненту. Значит, гамильтонова цикла в графе G нет.

Задача 126. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей. В решении используйте принцип Дирихле в следующей формулировке: если A и B – множества, такие, что $|A| > |B|$, тогда не существует инъекции $f : A \to B$.

Решение. Выберем ученика (назовём его первый), у которого максимально возможное количество друзей, у него их не больше 11. И выберем ученика, который не дружит с первым, назовём его второй. Из оставшихся учеников каждый дружит с одним из этих двух, иначе имели бы тройку учеников, не дружащих между собой. Тогда второй должен дружить с теми учениками, с которыми не дружит первый. Осталось не менее 12 учеников, а максимально возможное количество друзей у второго 11.

Так как A – множество учеников, не дружащих с первым и не включающее второго ученика, и B – множество друзей второго таковы, что $|A| > |B|$, тогда по принципу Дирихле не существует инъекции $f : A \to B$. Пусть f ставит в соответствие элементу множества A элемент множества B, равный ему (сопоставляемый элемент и второй ученик образовывают дружащую пару). А f не является инъекцией, значит найдётся элемент множества B, имеющий два разных прообраза. Оба этих элемента образуют одну дружащую пару со вторым учеником, что невозможно. Получили противоречие, значит есть ученик с 12 друзьями.

Задача 142. Найдите асимптотику величины $\binom{3n+\log_2 n}{2n}$ при $n \to \infty$. Формула внутри себя не должна содержать никаких значков O-символики. Также не допускается наличие в формуле неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, 1^∞ и пр.

Решение.

$$\binom{3n+\log_2 n}{2n} = \frac{(3n+\log_2 n)!}{(n+\log_2 n)!\cdot(2n)!}.$$

Далее воспользуемся формулой Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Распишем через неё факториалы:

$$\binom{3n+\log_2 n}{2n} \sim \frac{\sqrt{2\pi\cdot(3n+\log_2 n)}\cdot\left(\frac{3n+\log_2 n}{e}\right)^{3n+\log_2 n}}{\sqrt{2\pi\cdot(n+\log_2 n)}\cdot\left(\frac{n+\log_2 n}{e}\right)^{n+\log_2 n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3n+\log_2 n}\cdot\left(\frac{3n+\log_2 n}{e}\right)^{3n+\log_2 n}}{\sqrt{n+\log_2 n}\cdot\left(\frac{n+\log_2 n}{e}\right)^{n+\log_2 n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}.$$

Так как $\log_2 n = o(n)$, то выражение выше асимптотически равно:

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\frac{(3n)^{3n+\log_2 n}\cdot\left(1+\frac{\log_2 n}{3n}\right)^{3n+\log_2 n}}{(n)^{n+\log_2 n}\cdot\left(1+\frac{\log_2 n}{n}\right)^{n+\log_2 n}\cdot(2n)^{2n}\cdot\sqrt{n}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\frac{3^{3n+\log_2 n}\cdot\exp\left((3n+\log_2 n)\cdot\ln\left(1+\frac{\log_2 n}{3n}\right)\right)}{\exp\left((n+\log_2 n)\cdot\ln\left(1+\frac{\log_2 n}{n}\right)\right)\cdot 2^{2n}\cdot\sqrt{n}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{3^{3n+\log_2 n} \cdot \exp\left((3n+\log_2 n)\cdot\left(\frac{\log_2 n}{3n} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\log_2 n}{3n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\right)}{\exp\left((n+\log_2 n)\cdot\left(\frac{\log_2 n}{n} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\right)\cdot 2^{2n}\cdot\sqrt{n}} \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{3^{3n+\log_2 n} \cdot \exp\left(\log_2 n + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\log_2 n)^2}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)}{\exp\left(\log_2 n + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\log_2 n)^2}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)\cdot 2^{2n}\cdot\sqrt{n}} \sim$$

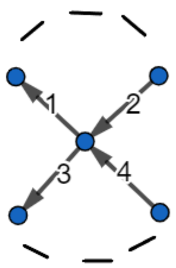
$$\sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{3^{3n+\log_2 n}}{\exp\left(\frac{(\log_2 n)^2}{2n} - \frac{(\log_2 n)^2}{6n}\right)\cdot 2^{2n}\cdot\sqrt{n}} \sim$$

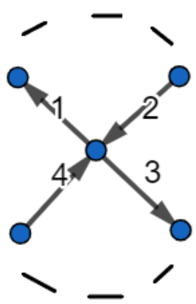
$$\sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{3^{3n+\log_2 n}}{\sqrt{n}\cdot 2^{2n}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot n^{\log_2 3 - \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{27}{4}\right)^n.$$

Задача 176. Докажите, что эйлеров граф содержит единственный эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф является простым циклом.

Решение. Утверждение, что если эйлеров граф является простым циклом, то этот граф содержит единственный эйлеров цикл, было доказано в контрольной. Докажем утверждение в обратную сторону.

Пусть граф не является простым циклом. Тогда в этом графе есть вершина степени хотя бы четыре. Покажем, что в таком графе эйлеров обход не единственен. Предъявим такие два обхода:





Начнём обход с вершины степени четыре. Сначала пойдём по первому ребру, закончим обход верхней части графа на втором ребре. Далее пойдём по третьему и закончим обход нижней части на четвёртом.

Такие два обхода на картинках выше разные, значит нашли различные эйлеровы обходы в этом графе. Значит, наше предположение неверно и если эйлеров граф содержит единственный эйлеров цикл, то граф является простым циклом.

Задача 184. Существует ли унициклический граф, последовательность степеней вершин которого будет равна (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)? Если да, то постройте такой граф.

Решение. Известно, что унициклический граф – связный граф, у которого количество рёбер совпадает с количеством вершин.

В графе из условия, который мы пытаемся построить, 11 вершин. Также, учитывая, что в любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер, находим количество рёбер графа – десять.

Получили, что количество рёбер графа не равно количеству вершин, что противоречит определению уницикличеcкого графа. Значит, такой граф построить нельзя.

Задача 263. Сколькими способами можно расставить две ладьи, два слона, два коня, ферзя и короля на первой линии шахматной доски так, чтобы король и ферзь занимали бы клетки разных цветов и стояли бы между ладьями, но не обязательно рядом? [Шахматно-смысловых ограничений типа «слоны обязаны стоять на клетках разного цвета» здесь нет; все фигуры считаются белыми.]

Решение. Будем рассматривать все расстановки. Нарисуем первую линию доски и пронумеруем клетки:

Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б
1	2	3	4	5	6	7	8

Рассмотрим всевозможные расположения ладей, короля и ферзя.

- Левая ладья – в клетке 1.
  - Правая ладья – в клетке 4. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки два и три. Всего расстановок будет $1 \cdot 2 = 2$.
  - Правая ладья – в клетке 5. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки два и три, три и четыре. Всего расстановок будет $2 \cdot 2 = 4$.
  - Правая ладья – в клетке 6. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки два и три, два и пять, три и четыре, четыре и пять. Всего расстановок будет $4 \cdot 2 = 8$.
  - Правая ладья – в клетке 7. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки два и три, два и пять, три и четыре, три и шесть, четыре и пять, пять и шесть. Всего расстановок будет $6 \cdot 2 = 12$.
  - Правая ладья – в клетке 8. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки два и три, два и пять, два и семь, три и четыре, три и шесть, четыре и пять, четыре и семь, пять и шесть, шесть и семь. Всего расстановок будет $9 \cdot 2 = 18$.
- Левая ладья – в клетке 2.
  - Правая ладья – в клетке 5. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки три и четыре. Всего расстановок будет $1 \cdot 2 = 2$.
  - Правая ладья – в клетке 6. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки три и четыре, четыре и пять. Всего расстановок будет $2 \cdot 2 = 4$.
  - Правая ладья – в клетке 7. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки три и четыре, три и шесть, четыре и пять, пять и шесть. Всего расстановок будет $4 \cdot 2 = 8$.
  - Правая ладья – в клетке 8. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки три и четыре, три и шесть, четыре и пять, четыре и семь, пять и шесть, шесть и семь. Всего расстановок будет $6 \cdot 2 = 12$.
- Левая ладья – в клетке 3.

– Правая ладья – в клетке 6. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки четыре и пять. Всего расстановок будет $1 \cdot 2 = 2$.

– Правая ладья – в клетке 7. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки четыре и пять, пять и шесть. Всего расстановок будет $2 \cdot 2 = 4$.

– Правая ладья – в клетке 8. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки четыре и пять, четыре и семь, пять и шесть, шесть и семь. Всего расстановок будет $4 \cdot 2 = 8$.

- Левая ладья – в клетке 4.

  – Правая ладья – в клетке 7. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки пять и шесть. Всего расстановок будет $1 \cdot 2 = 2$.

  – Правая ладья – в клетке 8. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки пять и шесть, шесть и семь. Всего расстановок будет $2 \cdot 2 = 4$.

- Левая ладья – в клетке 5.

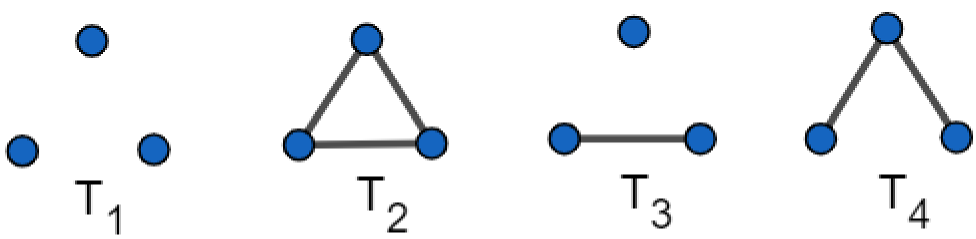
  – Правая ладья – в клетке 8. Рассмотрим варианты расстановок короля и ферзя: клетки шесть и семь. Всего расстановок будет $1 \cdot 2 = 2$.

Далее рассмотрим расстановки слонов и коней. Для каждого случая способов расставить их по оставшимся клеткам $\frac{4!}{2 \cdot 2} = 6$.

Рассмотрели все случаи. Для получения окончательного ответа нам нужно сложить все полученные расстановки ладей, королей и ферзей и умножить их на 6. Ответ на задачу – 552.

Задача 270. В группе 20 студентов, каждый из которых дружит ровно с шестью одногруппниками. Найдите количество компаний из трёх студентов, в которых либо все попарно дружат, либо все попарно не дружат.

Решение. Когда из 20 студентов выбираем компании по трое, рассматриваем несколько вариантов графов на трёх вершинах.



Мы хотим найти $|T_1| + |T_2|$. Для этого найдем $|T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4|$ и вычтем $|T_3| + |T_4|$.

Общее количество треугольников $|T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4| = \binom{20}{3} = 1140$.

По условию, каждый студент имеет ровно шесть друзей. Рассматриваем любую из 20 вершин, она соединена с шестью другими. Остается 13 вершин, с которыми она не соединена. Берём вершину из шести соединённых, и любую другую из оставшихся 13. Это и есть треугольники типа T_3 или T_4, так как в графе имеем хотя бы одно ребро и две не соединённые ребром вершины.

Количество таких треугольников $|T_3| + |T_4| = \dfrac{20 \cdot 6 \cdot 13}{2}$. Деление на два обусловлено тем, что при обходе вершин каждый треугольник мы посчитаем два раза, так как и в треугольнике типа T_3, и в треугольнике типа T_4 есть ровно две вершины со степенью один.

Таким образом, $(|T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4|) - (|T_3| + |T_4|) = 1140 - 780 = 360$.

Ответ на задачу – 360.

Задача 318. Сколько перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ представимы в виде композиции чётного количества транспозиций? Считайте, что $n \geq 2$.

Решение. На n элементах существует $n!$ перестановок. Докажем, что количество перестановок, представимых в виде чётного количества транспозиций, равно количеству представимых в виде нечётного.

Пусть множество A – множество перестановок, представимых в виде чётного количества транспозиций, множество B – в виде нечётного.

Пусть f – домножение слева на цикл (12), действующее из множества A в B. Такое домножение меняет чётность перестановки, то есть сопоставляет элементу из A элемент из B.

Возьмем элемент x множества B и домножим его слева на цикл (12). Так как такое домножение меняет чётность, то получим какой-то элемент y из A. Но домножив y слева на цикл (12), получим исходную перестановку x. Значит, f – сюръекция.

К тому же, f – инъекция, так как при повторном домножении перестановки слева на этот цикл получим исходную перестановку (в силу ассоциативности композиции).

Получили биекцию между перестановками первого и второго типа, значит этих перестановок одинаковое количество. Значит, перестановок, представимых в виде композиции чётного количества транспозиций $\dfrac{n!}{2}$.

Задача 320. Найдите количество таких элементов $x \in S_n$, для которых $x^3 = e$, где e – нейтральный элемент группы. Ответ можно выписать в виде формулы со знаком суммирования $\sum$ и вряд ли получится по-другому.

Решение. Рассмотрим циклы длины $k \geq 1$:

- При $k = 1$ цикл – тождественная перестановка, следовательно он подходит ($e^3 = e$)
- При $k = 2$ получим $c_2^3 = c_2 \neq e$
- При $k = 3$ имеем $c_3^3 = e$
- При $k \geq 4$ цикл не сумеет перевести элементы до начального положения.

Значит, подходят циклы 1 и 3, а подходящие нам элементы являются их композицией.

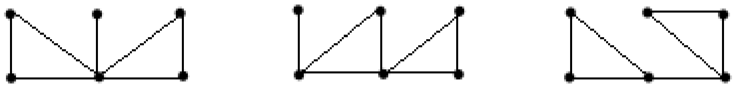
Произведём подсчёт элементов:

$$1 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \frac{2_k \cdot C_n^3 \cdot C_{n-3}^3 \cdot C_{n-6}^3 \cdot \ldots \cdot C_{n-3(k-1)}^3}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \frac{A_n^{3k}}{3^k \cdot k!}$$

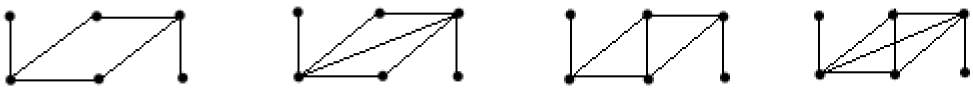
Задача 344. Перечислите все попарно неизоморфные связные простые графы на шести вершинах, в которых ровно три блока.

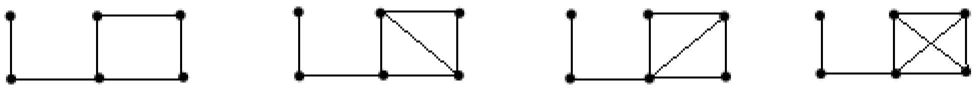
Решение. Нарисуем все такие графы.

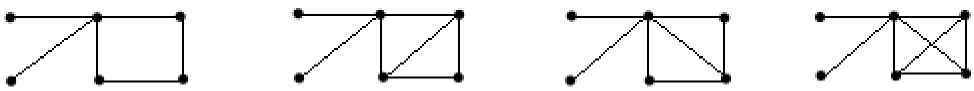
Графы, где два треугольника и ребро:

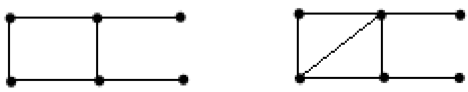


Далее соответственно графы, где есть циклический граф на четырёх вершинах и два диаметрально противоположных ребра, два последовательных ребра, два смежных ребра и рёбра, исходящие из двух соседних вершин циклического графа на четырёх вершинах :









Задача 345. Приведите пример двудольного графа, в котором 2019 вершин, из которых ровно 1000 центральные.

Решение. Разобьём все вершины на две доли – в первой 1000 вершин, во второй 1019. Назовём 500 вершин из первой доли и 500 из второй чёрными. Тогда соединим чёрные вершины первой доли со всеми вершинами второй, так же поступим и с чёрными вершинами второй доли. Получили, что эксцентриситет чёрной вершины – 2, а эксцентриситет остальных – 3. То есть получили 1000 центральных вершин в двудольном графе на 2019 вершинах.

Задача 362. В выпуклом многограннике все грани являются правильными 5-, 6- или 7-угольниками. Докажите, что пятиугольных граней ровно на 12 больше, чем семиугольных.

Решение. Представим выпуклый многогранник в виде планарного графа на плоскости. Пусть x – количество пятиугольников, y – количество шестиугольников, z – семиугольников. Количество рёбер этого графа $E = \dfrac{5x + 6y + 7z}{2}$ (считаем как сумму количества рёбер в каждом многоугольнике, но при таком подходе посчитаем каждое ребро два раза). Количество граней $F = x + y + z$ (суммарное количество пяти, шести и семиугольников). Количество вершин $V = \dfrac{5x + 6y + 7z}{3}$, так как сумма трёх внутренних углов пятиугольника меньше 360 градусов, а сумма четырёх углов больше (шести- и семиугольники не рассматриваем, так как внутренние углы у них больше), поэтому из каждой вершины выходит три ребра.

По формуле Эйлера: $V - E + F = 2$. Подставляя найденные V, E, F, получим: $x = 12 + z$. То есть, получили, что пятиугольных граней на 12 больше, чем семиугольных.