Segundo semestre - 2021

7600036 - Eletromagnetismo Computacional

Lembre-se de ler as instruções gerais que valem para todos os projetos da disciplina.

Esse documento é apenas um guia. Os detalhes do projeto foram discutidos em aula.

Projeto 4: Cargas em movimento

É aconselhável fazer uma revisão da teoria relacionada com esse projeto. Aqui eu só vou reproduzir algumas equações usando a notação do *Griffiths*.

Seja $\mathbf{w}(t)$ a trajetória de uma carga pontual q. O tempo retardado t_r é dado implicitamente pela equação

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r), \tag{1}$$

onde $\mathbf{r}$ é o ponto de observação. Vamos chamar $\mathbf{w}(t_r)$ de posição retardada da carga, e

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \tag{2}$$

é o vetor da posição retardada até o ponto $\mathbf{r}$.

O *Griffiths* deriva os potenciais de Liénard-Wiechert e utiliza-os para calcular os campos de uma carga em movimento. O resultado para o campo elétrico é:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathscr{r}}{(\boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\mathscr{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})], \tag{3}$$

onde $\mathbf{u} \equiv c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}}$ é a aceleração da partícula calculada no tempo retardado. E o campo magnético é dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{4}$$

A componente do campo elétrico responsável por radiação é dada por

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathscr{r}}{(\boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{u})^3} [\boldsymbol{\mathscr{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})], \tag{5}$$

o que faz com que a componente do vetor de Poynting relacionada com radiação seja

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} E_{\text{rad}}^2 \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}. \tag{6}$$

Não vamos nos preocupar com unidades por enquanto. Uma escolha conveniente (porém não a única) é utilizar unidades tais que $c = 4\pi\epsilon_0 = 1$. Como de costume, deixe claro os dados de entrada utilizados no programa.

1) Escreva um programa para calcular os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ de uma carga pontual que se move com velocidade $\mathbf{v}$ constante. Utilize o método da bisseção para resolver a equação implícita para o tempo retardado[1].

Utilizando o seu programa investigue o problema de uma carga se movendo no eixo x em direção à origem,

$$\mathbf{w}(t) = (x_0 + v_0 t)\hat{\mathbf{x}}. \tag{7}$$

Para o relatório, escolha um valor[2] de $x_0 > 0$ e $v_0 < 0$. Calcule[3] $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)$ onde t_0 é o instante de tempo em que a partícula passa pela origem, $\mathbf{w}(t_0) = 0$.

a) Faça um gráfico $y \times x$ representando o campo elétrico $\mathbf{E}(x, y, z = 0, t_0)$ como vetores (setas). A orientação das setas deve ser dada pela direção de $\mathbf{E}$ no ponto (x, y), e o tamanho da seta proporcional à sua magnitude.

b) Faça um gráfico da componente z do campo magnético em $x = z = 0$ como função de y, $\mathbf{B}(x = 0, y, z = 0, t_0) \cdot \hat{\mathbf{z}}$.

c) Compare os seus resultados com o que se esperaria de uma carga pontual estacionária na origem. Discuta o que acontece nas direções paralela e perpendicular à velocidade.

2) Escreva um programa para calcular os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ de uma carga pontual que se move com aceleração $\mathbf{a}$ constante.

Utilizando o seu programa investigue o problema de uma carga se movendo no eixo x em direção à origem,

$$\mathbf{w}(t) = \left(x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)\hat{\mathbf{x}}. \tag{8}$$

Para o relatório, escolha um valor de $x_0 > 0$ e $v_0, a < 0$. Calcule[4] $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)$ onde t_0 é o instante de tempo em que a partícula passa pela origem, $\mathbf{w}(t_0) = 0$. Escolha seus valores de maneira que a velocidade da carga quando ela passar pela origem seja a mesma do item 1).

a-c) Mesmo enunciado que os itens 1-a,b,c). No item c) também faça uma comparação com os resultados do item 1-c).

3) Escreva um programa para calcular a componente devido à radiação do campo elétrico $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ e vetor de Poynting $\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$ de uma carga pontual que oscila próxima à origem,

$$\mathbf{w}(t) = A\cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}}. \tag{9}$$

[1]Dica: Nesse caso, a expressão analítica para t_r é conhecida e relativamente simples. Ela pode ser usada para conferir os resultados do seu programa.

[2]Atenção: Esses valores vão depender das unidades escolhidas. Se $c = 1$, então v_0 deve ser menor que c, mas de ordem comparável para observarmos efeitos relativísticos.

[3]Dica: Esses resultados também são conhecidos e podem ser utilizados para conferir a saída do programa.

[4]Dica: As expressões para o campo elétrico e magnético de uma partícula se movendo apenas em um eixo são relativamente simples para os pontos no referido eixo. Só é necessário saber se o ponto está à direita ou à esquerda da partícula.

a) Escolha um valor de A (tal que $A \ll c/\omega$), um valor de ω e uma direção $\hat{\mathbf{r}}$ fixa no plano xy. Calcule a média temporal durante um período de oscilação de $|\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)|^2$ para vários pontos ao longo dessa direção (contanto que o campo elétrico não seja identicamente nulo ao longo dessa direção). Os seus resultados para $|\mathbf{r}| \gg c/\omega$ concordam com a previsão teórica?

b) Escolha um valor de A e um ponto $\mathbf{r}$ no plano xy tal que $|\mathbf{r}| \gg c/\omega \gg A$ (novamente, não estamos interessados nas direções onde o campo elétrico é nulo). Calcule a média temporal durante um período de oscilação do módulo do vetor de Poynting no ponto $\mathbf{r}$, $|\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)|$, para vários valores de ω. Qual é a dependência dessa quantidade com ω?

Seu relatório deve ter no **máximo** 6 páginas.

Bibliografia:

- An Introduction to Computer Simulation Methods, H. Gould, J. Tobochnik e W. Christian (terceira edição, Addison-Wesley, 2006). Seção 10.7 "Fields due to moving charges".

- Introduction to electrodynamics, David J. Griffiths (terceira edição). Seção 10.3 "Point charges" e Capítulo 11 "Radiation".