测试 2

您的名字：____________________________

- 计算器在考试中是不允许使用的。
- 您可以使用一张在两侧都由您自己写的笔记的 8.5 × 11” 的纸，但是不能有其他的信息源。
- 您可以假设所有的结果来自讲座、笔记、问题集以及复习练习。
- 在提供的空格处写出您的解答。如果需要更多的空间，写在包括问题的纸的背面。
- 保持整洁和写作清晰。您不仅会根据您的答案给分，也根据您表达它们的清晰程度给分。
- 考试在下午 9:30 结束
- 祝您好运！

问题	分值	得分	评分者
1	10		
2	10		
3	15		
4	15		
5	20		
6	15		
7	15		
总分	100		

注释：这次考试中，一个“闭形”是一个没有求和符号、乘积符号或者…符号的数学表达式。阶乘和二项式系数可以出现在闭形中。如下面显示的例子。

闭形	非闭形
42	$\sum_{k=0}^{n} k^2$
$(\sqrt{x}+1)^n$	$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right)$
$n!+\binom{n}{3}$	$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$

问题 1 [10 分] 令 S 包括所有的没有大于 3 质因子的正整数，然后定义：

$$X = \sum_{k \in S} \frac{1}{k}$$

因此，前面的几个和的项是：

$$X = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$$

(a) 在方格中写出一个闭形表达式，使得以下等式为真。

$$X = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\phantom{\frac{1}{2^j 3^k}}}$$

解：每个没有质因数大于 3 的正整数有形式 $2^j 3^k$，对于某些非负整数 j 和 k。因此，表达式

$$\frac{1}{2^j 3^k}$$

使得等式为真。

(b) 写一个闭形表达式到方格中使得等式为真：

$$X = \boxed{\phantom{\frac{1}{2^j 3^k}}}$$

解：我们对无限几何和应用公式两次。

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^j3^k} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(\frac{1}{1-1/3}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1-1/3}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\\
&= \left(\frac{1}{1-1/3}\right)\left(\frac{1}{1-1/2}\right)\\
&= 3
\end{aligned}
$$

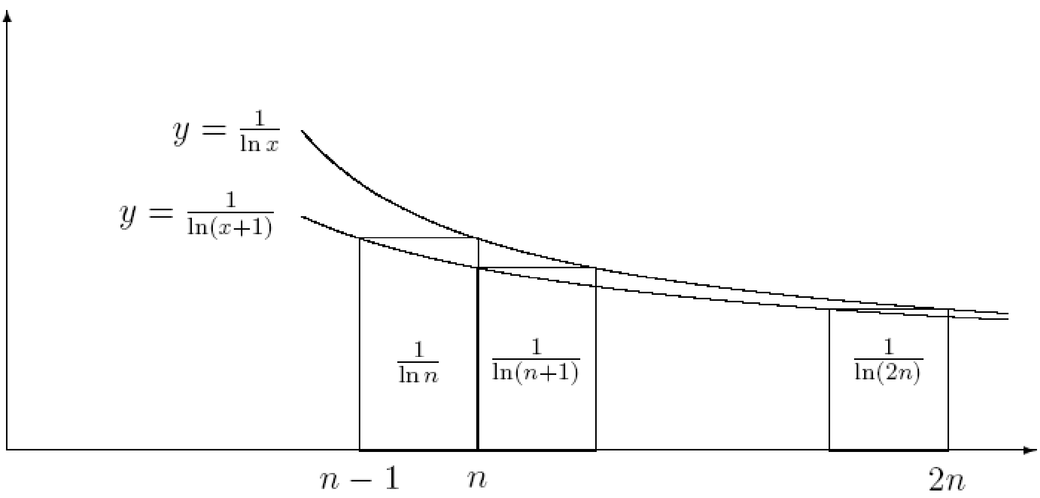
问题 2 [10 分] 推导在和

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\ln k}$$

上的紧匹配上下界的积分式，这里 n ⩾ 3。使用图证明您的答案。不要求积分。您的答案应该是没有求值的积分。

(a) 在下面空白处画出您的图。（为了获得完整分数，图必须清楚地说明为什么您的积分界限是正确的。）

解：



(b) 在这里写出您的积分下界 $\longrightarrow$ $\boxed{\int_{n-1}^{2n} \frac{1}{\ln(x+1)}\, dx}$

(c) 在这里写出您的基本上界 $\longrightarrow$ $\boxed{\int_{n-1}^{2n} \frac{1}{\ln x}\, dx}$

问题 3： [15 分] 求解以下涉及到渐近符号的如下问题。这里 H_n 是第 n 个调和数；因此，$H_n = 1/2 + 1/2 + \ldots + 1/n$。

(a) 在右边的能在同行的方格中恰当出现的符号上画圈。（可能超过一个！）

$n^2 = \square\left(\frac{n^2 \log n}{\sqrt{n+1}}\right)$	Θ	O	Ω	o
$2^n = \square\left(3^n - n^3\right)$	Θ	O	Ω	o
$2H_n = \square(\ln n)$	Θ	O	Ω	o
$n^{0.01} = \square\left((\ln n)^{100}\right)$	Θ	O	Ω	o

解：(1) Ω (2) O, o (3) Θ, O, Ω (4) Ω (5) Ω.

假设 $f(n) \sim g(n)$。在下面的每个陈述如果为真，那么在 “true”上画圈。剩余的陈述在 “false”上画圈。

$f(n)^2 \sim g(n)^2$	**true**	**false**
$f(n) = O(g(n))$	**true**	**false**
$f(n) = o(g(n))$	**true**	**false**
$2^{f(n)} = \Theta(2^{g(n)})$	**true**	**false**

解：(a) True. (b) True (c) 对于所有的 f，g 为 false (d) false。 令 f(n) = n，g(n) = n + logn。

问题 4 [15 分] 一个误导的 MIT 学生设计了一个自我复制的 6.270 的机器人。这个学生每天都构造了这样的机器人，从天 0 开始。在机器人构建之后的天，它建造两个它自己的复制。（在所有的后续天中，机器人忙于搜索乒乓球——有 6.270 机器人，毕竟）。这是前面几天发生的事情：

第 0 天： 学生构造机器人 R_1。

第1天. 学生构造机器人 R_2。机器人 R_1 构造机器人 R_3 和 R_4.

第2天. 学生构造机器人 R_5。机器人 R_2 构建 R_6 和 R_7，机器人 R_3 构造 R_8 和 R_9，且机器人 R_4 构建 R_{10} 和 R_{11}。机器人 R_1 搜索乒乓球。

第3天. 学生构建 R_{12}。机器人 R_5，...，R_{11} 构建机器人 R_{13}，…，R_{26}。机器人 R_1，R_2，R_3，和 R_4 搜索乒乓球。

令 T_n 是在 n 天结束的时候存在的机器人的个数。因此 T_0＝1，T_1＝4，T_2=11，T_3=26。

(a) 在天 n-1 的时候有多少新的机器人被构建？根据变量 T_{n-1}，T_{n-2}，…和假设 n≥2 表示您的答案。

解：在天 n-1 和天 n-2 存在的数字的差，也就是 $T_{n-1} - T_{n-1}$

(b) 用递推方程表示 T_n 和充分基例。不要求解递推方程。

解：在天 n 的机器的数量等于在 n-1 天机器人的数量，加上两倍昨天构造的机器人的数量($T_{n-1} – T_{n-2}$)，加上 1 个学生构造的机器人的数量。因此，我们有：

$$T_0 = 1$$
$$T_1 = 4$$
$$T_n = 3T_{n-1} - 2T_{n-2} + 1 \quad (\text{for } n \geq 2)$$

(c) 一个更被误知道的 6.270 学生设计了另一个自我复制的机器人来捕捉和破坏第一种机器人。在天 n 结束的时候的这种类型的机器人的数量是 P_n，这里：

$$P_0 = 0$$
$$P_1 = 1$$
$$P_n = 5P_{n-1} - 6P_{n-2} + 1 \quad (\text{for } n \geq 2)$$

为 P_n 找到一个闭形表达式。清楚地说明您的工作来获得部分分数。

解：特征方程是 x^2 -5x +6 = 0。右边的因子是(x-2)(x-3)，因此根是 2 和 3。对于特解，让我们首先猜测 P_n = c。替换这个递推方程给出 c = 5c – 6c + 1，这按暗示 c = 1/2。因此，解的一般形式是：

$$P_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + 1/2$$

带入 P_0 = 0 和 P_1 = 1 给出方程：

$$0 = A + B + 1/2$$
$$1 = 2A + 3B + 1/2$$

其解这个系统给出 A = -2 且 B ＝ 3/2。因此，解是：

$$P_n = -2 \cdot 2^n + \frac{3}{2} \cdot 3^n + 1/2$$

问题 5 [20 分] 求解以下计数问题。您的答案必须是闭形的，但是不需要化简。特别的，您可以在您的回答中留下阶乘和二项式系数。为了符合部分分数，您必须解释您是如何得到您的答案的。

(a) 四个牌玩家(Alice，Bob，Carol 和 Dave)是从一副 52 张牌中分发 7 张牌一把。这能有多少种不同的方法来完成？

解：有 52 个包括 7 个 A，7 个 B 和 7 个 C，7 个 D，24 个 X(表示在桌子上剩余的扑克)的符号序列。由 Bookkeeper 规则得，因此分发牌的方法有：

$$\frac{51!}{7!^4\ 24!}$$

(b) Stinky Peterson 决定在他的床下面开设一个虫子农场。他打算从 4 个基本物种选择 100 个虫子饲养：creepy， crawly， fuzzy 和 slimey。假设他想要每种至少选 10 个，有多少种不同的可能的分布呢？(例如，一种可能的是 20 个 creepy，20 个 crawly，10 个 fuzzy 和 50 个 slimey。)

解：首先，他在他的床上每种放 10 个样本。然后他必须从 4 种虫子中选择剩余的 60 个虫子。在这种选择和 63 比特的恰好有 3 个 1 的序列有一个双射，因此通过 Bookkeeper 规则得到分布的数目是：

$$\frac{63!}{60!\ 3!} = \binom{63}{60}$$

(c) 在比赛中有 n 个跑步运动员。在比赛前，每个选手分配一个 1 到 n 的数字。选手在 n! 之一中的任何顺序完成比赛。在多少这些顺序是第一个完成者不是＃1，第二个完成者不是#2，第三个完成者不是#3?

解：令 P_k 是在选手#k 是第 k 个完成者的完成顺序的集合。在这些项中，解是：

$$\begin{aligned} n! - |P_1 \cup P_2 \cup P_3| = n! - (&|P_1| + |P_2| + |P_3| \\ &- |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| \\ &+ |P_1 \cap P_2 \cap P_3|) \\ = n! - 3(n-1)! &+ 3(n-2)! - (n-3)! \end{aligned}$$

(d) 存在多少种方法来停放 4 个相同的 SUV 和 10 个相同的汽车在有 20 个停放空间的一行中，如果 SUV 是太宽以致于不能挨着停放？例如这里是一个可能的停放：

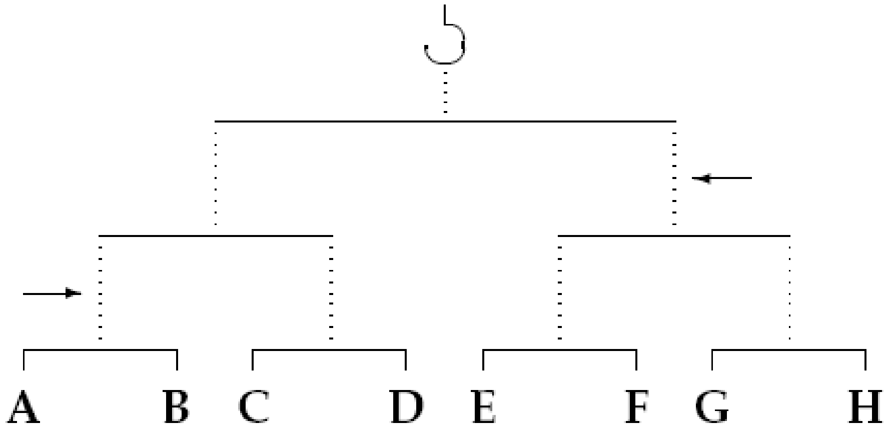
SUV		car	car			car	SUV	car	SUV		car	car		car		car	SUV	car	car

解：首先，让我们停放 SUV。完成这件事情的方法等于从书架上选择 20 本数，使得相邻的书不被选择－－ 一个你以前见到的问题。答案是 $\binom{17}{4}$。现在，10 量车能在 16 个剩余的空

间以$\binom{16}{10}$方式停放。因此总的停放的可能数是：

$$\binom{17}{4} \cdot \binom{16}{10}$$

(e) 一个可移动物悬挂结构从 7 个横着放着的杆（用实线表示），7 个垂直的绳子（用点线表示），和 8 个玩具（用字母 A-H 表示）。



许多不同的玩具安排能通过扭曲绳子来得到。例如，扭曲标号—>箭头的绳子能交换玩具 A 和 B。扭曲标记 ß-的绳子能翻转玩具 E，F，G 和 H。令一方面没有扭曲交换玩具 B 和 C 的组合。两个移动物是不同的，如果一个能通过扭曲绳子获得另一个。有多少个不同的可能的移动物？

解：有 8！种不同序列的万绝。每种移动物能被配置 2^7 不同的方式，通过扭转或者不扭转 7 个上面的绳子。因此，存在 2^7 到 1 的从序列到移动物的映射。通过除法规则，不同的移动物的数量是 $8!/2^7 = 315$。

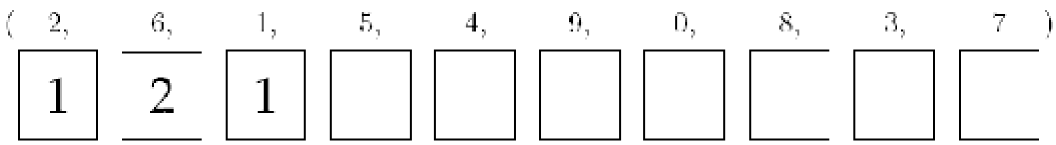
问题 6 [15 分] 一个序列通过从另一个序列中删除一个或更多的项。例如，序列(1，2，3，4，5)包括(2，4，5)为子序列。

定理 每个 n^2+1 的序列不同的整数包括程度为 n+1 的子序列的增加或降低。

例如，在 32+1=10 项序列(5，6，1，4，9，0，2，7，8，3)，下划线项形成一个长度为 3+1=4 的增长序列。填写在下面提供的证明的大纲中。

证明：

(a) 标签在序列中的每个长度是最长增长的以这个项结束的子序列。例如，这里是下面列举的有相应标签在的序列。



解： 1，2，1，2，2，3，1，3，2，3

(b) 现在有两种情况。如果某项标签 n＋1 或者更高，那么定理为真，因为：
解：这意味着长度至少是 n＋1 的增长序列以这项结束。

(c) 否则，至少 n＋1 项必须有同样的标签 b ∈{1，2，…，n} 因为鸽巢原理。
解：把标签为鸽子，数字 1，2，…，n 是鸽巢。把每个标签分配到它的值。因为有 n^2+1 个鸽子且仅有 n 个鸽巢，一些 n+1 个鸽子必须分配到同样的鸽巢 b。

(d) 在这种情况下也为真，因为
解：N+1 项的每个都标签 b 必须小于前面的一个。(否则，标前为 b 的项可能被添加到长度 b 增长的在它前面结束的序列来获得一个长度-(b+1)增长的序列。但是那么，项应该实际标签为 b +1。）因此，标签为 n+1 的项形成一个递减的序列。

问题 7 [15 分] 在危险的 Dan 的生命中的每天都有潜在的灾难：

Dan 可能或不可能把他的早餐燕麦泼到他的电脑键盘上。

Dan 可能或不可能在出门的路上掉落到前面的楼梯。

Dan 戳到他的脚趾头 0 次或更多次。

Dan 脱口说出某些愚蠢的事情偶数次。

令 T_n 是 Dan 在一天中遭受到的 n 个不幸的不同组合。例如，$T_3=7$，因为存在 3 个不幸的 7 种可能的组合：

泼	0 1 0 1 1 0 0
跌	0 0 1 1 0 1 0
戳	3 2 2 1 0 0 1
脱口说出	0 0 0 0 2 2 2

(a) 给出 对序列{T_0，T_1，T_2，…}的生成函数 g(x)。

解：我们对泼(1+x)，跌(1+x)，戳($1+x+x^2+\ldots= 1/(1-x)$)，以及脱口说出($1+x^2+x^4+\ldots= 1/(1-x^2)$)做生成函数乘法：

$$\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

(b) 把整数放入方格种，让等式为真：

$$g(x) = \frac{\boxed{}}{1-x} + \frac{\boxed{}}{(1-x)^2}$$

解：－1，2。

(c) 在方格中放入闭形表达式，让等式为真：

$$T_n =$$

记住 $1/(1-x)^2$ 生成序列<1，2，3，…>.
解：2（n+1） -1 = 2n + 1