特殊主题

1 条纹

下面的 H 和 T 的表是由翻转一枚公平的硬币 100 次得到， 或某人在类似于随机的方式下产生的？

HTTTHTHTTHTTHTHTHTHT
TTTHHTHHTHTHTTHHHTHT
HHTHHTTTHHHTHTTHHHHT
THTTHHTHTHTHTHTTHTHH
HTTHHHTHTHHHTHTHHHTH

没有方式是肯定的。但是， 这个序列有一个特点，它在"随机" 人为产生序列中是普通的和在真实的任意序列中是不寻常的： 即， 没有 H 或 T 的长条纹。实际上， 没有符号在上面的条纹中的一行里连续出现多余四次的。那有多大可能? 如果我们翻转一枚公平的硬币 100 次， 我们连续不得到五个正面的概率是多大?

1.2 从概率问题到计数问题

这个实验的样本空间是$\{H, T\}^{100}$； 那是所有长度为 100 的 H 和 T 的序列的集合。如果抛硬币是公平的和独立的， 然后所有 2^{100} 个这样序列是有相等的可能。所以， 我们只需要计数没有五个正面条纹的序列的数量； 给出这个，一个不包含这样的条纹的任意长度 100 序列的概率是：

Pr (没有 HHHHH 的序列) = (没有 HHHHd 的序列数) / 2^{100}

这是一个常见的情况。我们把概率问题归结到计数问题。不幸的是， 我们没有希望由直接计算解决计数的问题。没有计算机能考虑 H 和 T 的所有 2^{100} 个序列， 跟踪有多少缺乏五个正面条纹。但是， 在光明的一面， 有一大堆为解决计数的问题数学技巧。在这种情况下， 我们将使用递推方程。递推方程方法涉及到两步：

1. 解决一些小问题。
2. 使用在之前的解答解决第 n 个问题。

我们看怎么这种方法实施在对条纹的分析。

1.2 步骤 1：求解小的实例

令 S_n 是不包含五个正面的长度是 n 的 H 和 T 的序列的集合。我们最终的目标是计算 $|S_{100}|$ 。但暂时， 让我们先计算一些有非常小的值的 n 的 $|S_n|$ ：

$|S1| = 2$ (H 和 T)
$|S2| = 4$ (HH， HT， TH， 和 TT)
$|S3| = 8$
$|S4| = 16$
$|S5| = 31$ (不包含 HHHHH！)

这些称为基例。

1.3 步骤 2：使用前面的解求解第 n 个问题

我们能分类在 S_n 中的序列为五个小组：

1. 以 T 结束的序列。
2. 以 TH 结束的序列。
3. 以 THH 结束的序列。
4. 以 THHH 结束的序列。
5. 以 THHHH 结束的序列。

在 S_n 的每个序列恰好分在这些小组的当中一个。因而， 在 S_n 的大小是这些五个小组的大小的和。

多少个序列有是在第一小组？那是，有多少个在 S_n 中的序列以 T 结尾？ 在前面这样序列中的 n - 1 符号不能包含有五个正面条纹。所以， 那些 n- 1 符号是在 S_{n-1} 中一个序列。另一方面， 把 T 放入在 S_{n-1} 中的任一个序列的结尾得到一个在 S_n 中的序列。所以， 在第一组中的序列的数字恰好等于 $|S_{n-1}|$。

多少个序列有是在第二个小组？和前面一样论证， 在之前在各个这样的序列中的 n-2 个标志必须形成一个在 S_{n-2} 中序列。另一方面， 对任一个序列在 S_{n-2} 中的任何序列附加 TH 给出一个在第二个小组的一个序列。所以， 在第二个小组中恰有 $|S_{n-2}|$ 个序列。

通过相似的推理， 在第三个小组中序列的数量是 $|S_{n-3}|$， 在四组中的序列的数字是 $|S_{n-4}|$， 并且在第五组中序列的数字是 $|S_{n-5}|$ 。所以， 我们有：

$$|Sn| = |Sn-1| + |Sn-2| + |Sn-3| + |Sn-4| + |Sn-5| \text{ (对于 } n > 5)$$

这个递推方程表达了对一个大问题($|S_n|$)的求解， 根据对更小的问题(S_{n-1} ，S_{n-2}， . . .)的求解：通过结合基例和递推方程， 我们能计算 $|S_6|$， $|S_7|$， $|S_8|$，等等，直到我们得到 $|S_{100}|$ 。

$$|S6| = |S5| + |S4| + |S3| + |S2| + |S1|$$
$$= 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$
$$= 62$$
$$|S7| = |S6| + |S5| + |S4| + |S3| + |S2|$$
$$= 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2$$
$$= 123$$
$$|S8| = \ldots$$

计算的$|S_{100}|$ 仍然要求大约500 次加法， 因此计算机可以帮助。把 $|S_{100}|$ 的值代入我们更加早期的概率公式， 我们发现：

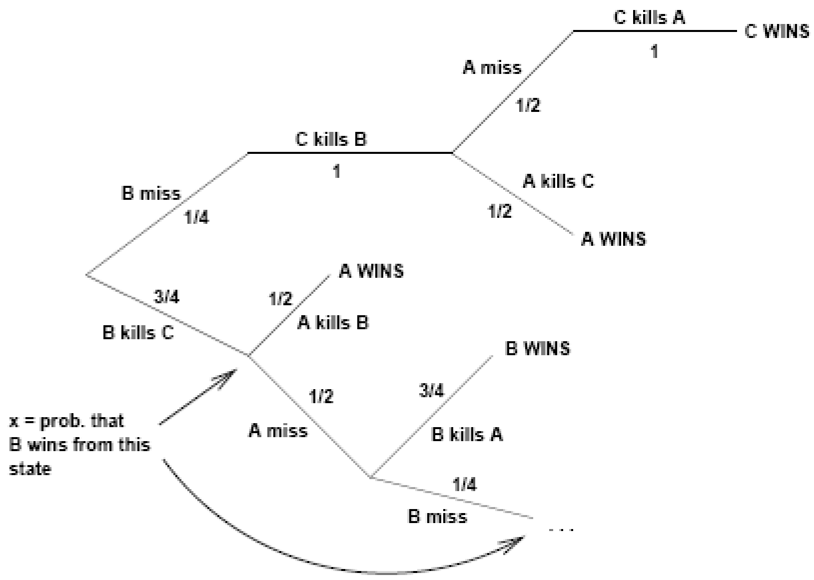
$$\Pr(\text{序列没有HHHHH}) = 0.193\ldots$$

因而， 抛100次 硬币得到的序列中，5个序列中的4个序列就包含5个正面条纹。根据对称， 我们也知道，5个中有4个包含5个反面的条纹。如果我们假设，这两次事件几乎独立， 那么只大约在二十五个序列中大概只有一个随机序列不包含5个正面或5个反面条纹。这是这个部分开始部分给出的序列情况。足够肯定的是，我通过“随机”按键得到了那个序列由。

2 三人决斗(Truel)

三位枪手见面为了决斗， 一场三人决斗。枪手 A 击中他的目标由 50% 时间， 枪手 B 击中 75% 时间， 并且枪手 C 击中 100% 时间。 枪手们以次序 A 、B 、C 、A 、B 、C， 等轮流射击。当然， 死的枪手就错过轮换次序。最后一个站着的枪手就是优胜者。

A 的最佳的战略是什么? 如果 A 杀害 C， 那么 B 在下射击可能将杀死 A。另一方面， 如果 A 杀死 B， 那么 C 一定在下射击的时候将会杀死 A。这看起来不是很好。但有一种其它可概率： A 能故意地错过， 让 B 和 C 射击， 和然后设法杀害优胜者! 我们评估这个战略， 假设 B 和 C 实际尝试互相击中。



从树图我们得到：

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{C wins}) &= \frac{1}{4}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{1}{8} \\
&= 12.5\%
\end{aligned}
$$

现在令 x 是在 C 是死的和的，A 有下射击的情况下 B 最终获胜的概率。这个情况出现在我们的树形图的两个不同点。我们可能利用这个事实，根据本身获得的表达式 x 的方程：

$$
x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot x
$$

求解方程，我们得到 x = 3/7。B 获胜的全局概率是：

$$
\begin{aligned}
\Pr(\text{B wins}) &= \frac{3}{4}\cdot x \\
&= \frac{9}{28} \\
&\approx 32.1\%
\end{aligned}
$$

最终，我们有：

$$\begin{aligned}\Pr(\text{A wins}) &= 1 - \Pr(\text{B wins}) - \Pr(\text{C wins}) \\ &\approx 55.4\%\end{aligned}$$

令人惊讶地， 最坏的射击者有赢的最佳的机会， 并且最佳的射击者有最坏的赢的机会!

当然， 在这分析中的一个明确假设是， B 和 C 是两个都射杀， 不同于在第一轮的 A。如果 B 和 C 没有这样的要求， 那么问题是没有不定的； 没有确定的数学解。每个枪手也许推理 他最好不射击，且他们也许去喝酒，并且在在篝火旁边唱歌。

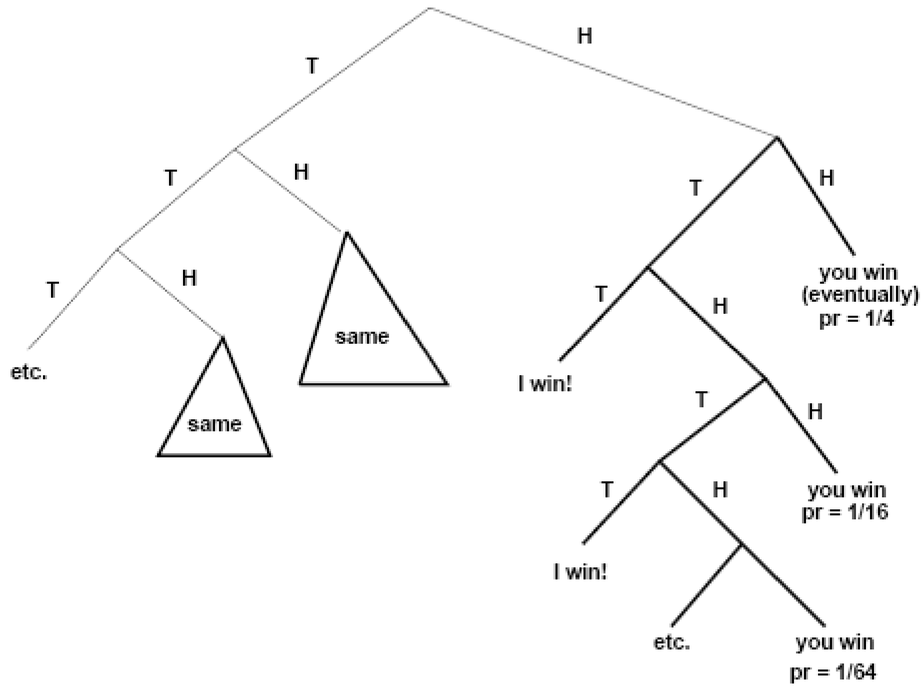
3 Penney-Ante

让我们玩游戏! 我们一再翻转一枚公平的硬币。您有序列HHT， 并且我有序列HTT 。如果第一个得到您的序列， 您赢。如果首先得到我的序列，那么我赢。例如，如果抛硬币的序列是：

$$TTHTHT\underline{HHT}$$

那么您赢。这个问题是棘手的， 因为游戏能持续为一任意地时间。画足够树图来看模式， 然后总结在结果(无限地许多)中您赢取的概率。

下面被显示是一个部分树图。所有边的概率是1/2。



让我们首先关注被黑体显示子树。注意，如果二个正面被翻转在同一行，那么您保证最终会赢。在这子树中，所有您能赢结果的概率是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

最上面标记为“same”的字数，和以黑体显示的一样，除了各个结果可能性按1/2 减少，因为这是一条根更远的一条边。因而，在这子树中得到的您赢的结果的总和是1/6。同样，在下一个标记为“same”的下一子树中，您赢取的结果同样是1/12，等等。总之，您赢的概率是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-1/2}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

实际上，只要您首先选取序列，并且我然后选取序列，我总能有至少2/3 获胜的概率。

这怎么是可能？我们知道，各个序列长度三是相等地可能的，因此不应该有一个序列比另一个序列更有优势，且首先选取序列一定没有不利的。但是，如同我们已经看见，这看来是不真实的。

一种观察的方式是， 我总能至少2/3的概率获胜，如果您首先选择序列HHH。我然后选择序列THH。我声称在这个情况， 我的获胜的概率是7/8。

为什么这真的? 在前面的三次抛硬币是HHH 的情况中， 概率是 1/8， 您立刻获胜。剩余的7/8时间， 游戏仍然继续。

假设以后的同一点， 从第30次抛硬币开始， 序列HHH 第一次出现。这意味着， 在第30次抛硬币前，我们无法观察到 HHH。如此， 第29抛一定包含一个T。但是， 这意味序列THH 出现在序列HHH前， 那么我就获胜了! 使用这逻辑， 不论何时出现 HHH，THH 一定比HHH首先出现，除了HHH是首先的3个硬币的反转。

如此，7/8 时间之前，THH 比HHH发生， 并且我获胜了! 相当好可能性。

相似的逻辑可能使用到被我的对手选择的长度是三的序列上。关键是我必须在我的对手选择序列后我选择我的序列，目的是为了保证我的优势。表1 包含了确保您能继续成功的相关信息。

表1：在 Penny-ante 中，您响应对手的选择最佳方法，以及相对应您的首先出现的的机会

Opponent's Choice	Your Choice	Chance of Winning
HHH	THH	7/8
HHT	THH	3/4
HTH	HHT	2/3
THH	TTH	2/3
HTT	HHT	2/3
THT	TTH	2/3
TTH	HTT	3/4
TTT	HTT	7/8