问题集 11 的解

到期：星期五下午 5 点，5 月 6 日

这是一个迷你的问题集。第一问题回顾关于期望的基本事实。第二和第三个问题是典型的期末考试问题。

问题 1 回答以下关于期望的问题。

(a) 存在几个随机变量的期望的定义。如果 R 是在样本空间 S 上的随机变量，那么我们能通过在独立结果上的求和或者通过在 R 的范围之内的值上来计算 Ex(R) 。写出 Ex(R)的等价的定义。

解：

$$\operatorname{Ex}(R) = \sum_{w \in S} R(w) \Pr(w) \qquad = \sum_{v \in \text{Range}(R)} v \cdot \Pr(R = v)$$

(b) 给出 Ex(R)的另一个表达式，当 R 是自然随机变量的时候它成立

解：

$$\operatorname{Ex}(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(R > k)$$

(c) 给出对 Ex(R)的简单的表达式，它是当 R 是一个随机变量指示器的时候是有效的。

解：

$$\operatorname{Ex}(R) = \Pr(R = 1)$$

(d) 随机变量的期望经常从简单的随机变量的计算得到。根据 Ex(R)和 Ex(S) 重写以下的表达式。注意任何 R 和 S 的条件必须满足，为了你的方程能成立。这里的 c 是常量。

$$\operatorname{Ex}(cR) \qquad \operatorname{Ex}(R + S) \qquad \operatorname{Ex}(R \cdot S)$$

解：

$$\operatorname{Ex}(cR) = c\operatorname{Ex}(R)$$
$$\operatorname{Ex}(R + S) = \operatorname{Ex}(R) + \operatorname{Ex}(S)$$
$$\operatorname{Ex}(R \cdot S) = \operatorname{Ex}(R) \cdot \operatorname{Ex}(S)$$

第三个等式当且仅当 R 和 S 是独立的成立。

(e) 随机变量 R 的期望值给出某一事件 E 发生表示 Ex(R|E)。写下两个基于你的对部分(a)的回答的 Ex(R|E)等价的表达式。

解：

$$\mathrm{Ex}(R \mid E)=\sum_{w \in S} R(w) \operatorname{Pr}(w \mid E) \qquad =\sum_{v \in \operatorname{Range}(R)} v \cdot \operatorname{Pr}(R=v \mid E)$$

(f) 有些时候，计算 Ex(R)的工作是最好分解成情况。令 $E_1,\ldots,E_n$ 是分解样本空间的事件。假设你能计算 Ex(R $|E_k$)和 Pr(E_k)，对于所有的 k。你如何计算 Ex(R)？

解。

$$\mathrm{Ex}(R)=\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ex}\left(R \mid E_{k}\right) \operatorname{Pr}\left(E_{k}\right) \tag{1}$$

(g) 许多问题涉及到独立事件的序列，它们中的每个都以概率 p 成功。获得一个成功的试验的期望数是什么？

解：1/p.

问题 2 MIT 的学生延时洗衣几天。假设所有以下描述的随机变量是独立的。

(a) 一个忙的学生在洗衣服之前必须完成 3 个问题集合。每个问题集合需要 1 天完成的概率是 2/3，需要 2 天完成的概率是 1/3。令 B 是一个忙的学生的天数。Ex(B)是什么？

例子：如果第一个问题集需要 1 天，第二个问题和第三个问题集合需要 2 天，那么学生延长 B＝5 的天。

解：完成一个问题集合的期望事件是：

$$1 \cdot \frac{2}{3}+2 \cdot \frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

因此，期望的完成 3 个问题集合的时间是：

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}(B) &=\mathrm{Ex}(\text{pset1})+\mathrm{Ex}(\text{pset2})+\mathrm{Ex}(\text{pset3}) \\ &=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} \\ &=4 \end{aligned}$$

(b) 一个放松的学生在早上滚动一个公平的，6 边的骰子。如果他滚动一个 1，那么他立刻洗衣服（0 天的延时）。否则他延长一天然后在后面的早晨重复试验。令 R 是放松学生延迟洗衣服的天数。Ex(R)是什么？

例子：如果学生在第一个早上滚动骰子得到 2，在第二个早晨得到 5，在第三个早晨得到 1，那么延迟 R=2 天。

解：如果我们把洗衣服认为是一个失败，那么平均时间失败是 1(1/6) = 6。然而这个依赖洗衣的被完成的天，因此，延迟的天数是 6-1=5。另一种，我们能按照如下来得出答案。

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ex}(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(R > k) \\
&= \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots \\
&= \frac{5}{6} \cdot \left(1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots\right) \\
&= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - 5/6} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

(c) 在洗衣服的前，一个不幸的学生必须从疾病中恢复很多天等于在两个公平的 6 面的骰子滚动的数字的乘积。令 U 是一个不幸的学生延长洗衣服的期望的天数。Ex(U)是什么？

例如：如果滚动是 5 和 3，那么学生延长 U=15 天。

解：令 D_1 和 D_2 是两个骰子滚动。回忆一个骰子滚动的期望是 2/7。因此：

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ex}(U) &= \operatorname{Ex}(D_1 \cdot D_2) \\
&= \operatorname{Ex}(D_1) \cdot \operatorname{Ex}(D_2) \\
&= \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \\
&= \frac{49}{4}
\end{aligned}
$$

(d) 一个学生忙的概率是 1/2，放松的概率是 1/3，不幸的概率是 1/6。令 D 是学生延迟洗衣服的天数，Ex(D)是什么？

解：

$$\mathrm{Ex}(D) = \frac{1}{2}\mathrm{Ex}(B) + \frac{1}{3}\mathrm{Ex}(R) + \frac{1}{6}\mathrm{Ex}(U)$$

问题 3 我们由 12 张卡片：

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

我洗牌它们并把它们放为一行。例如，我们也许得到：

1	2	3	3	4	6	1	4	5	5	2	6

相邻对有相同的值的期望值是什么？在这个例子中，由两个相邻的对由同样的值，是 3 和 5。

解：考虑一个相邻对。在左边牌仅匹配其他 11 张牌的一张，等于在 11 个其他位置中的任何一个位置。因此，相邻对匹配的概率是 1/11。因为由 11 相邻的对，通过线性期望得到期望的匹配是 11 • 1/11 = 1。