复习练习 15 笔记

问题 1：用练习学会计数。

(a) Blockbuster 有多少种方法在书架上安排 13 个关于一件事情的谈话的 64 个拷贝，96 个 L’Auberge Espagnole 和 1 个 Matrix Revolutions 的拷贝？

解：对于一个书架，这是安排 64 个 C 和 96 个 A 以及 1 个 M 的方法。通过 Bookeeper 规则：

$$\frac{(64+96+1)!}{64!\,96!\,1!}$$

对于 5 个 书架，我们能引入在书架和新物体之间的间隔物做一些简单的技巧。也就是，我们想要安排 64 个 C，96 个 A 和 1 个 M 和 4 个 X（间隔物）。由 Bookkeeper 定理再次得到：

$$\frac{(64+96+1+4)!}{64!\,96!\,1!\,4!}$$

(b) 发现 5 张牌的一把中恰好有 3 个 A 的牌把数。

解：我们能在 $\binom{4}{3}$ 方式中选择 3 个 A，我们能以 $\binom{48}{2}$ 方式选择剩余的两张牌。因此，有 $\binom{4}{3}\binom{48}{2}$ 这样的牌把。

(c) 寻找 5 张牌的把牌，在其中每个花色出现至少两次。

解：有两种情况。或者一个花色出现两次，或者两个花色出现两次。牌把中出现花色的两次的个数是 $\binom{13}{2}\cdot 13^3\cdot 4$。既然有 4 种方法来选择双出现的花色，$\binom{13}{2}$ 方式来从这花色中选择选择两个值，13^3 方式来从三个剩余的花色中选择其他的牌。同样的，一把牌中两个花色出现两次的数量是：

$\binom{13}{2}^2\cdot 13\cdot\binom{4}{2}\cdot 2$。因此，总共有：

$$\binom{13}{2}\cdot 13^3\cdot 4+\binom{13}{2}^2\cdot 13\cdot\binom{4}{2}\cdot 2$$

把牌。

(d) 20 个不同的 pre-frosh 放在 4 个不同的板条箱中的方式，如果每个板条箱包括偶数个 pre-frosh 数字？

解：从恰好有 3 个 1 的 13-bit 的字符串有一个双射。特别的，字符串$0^a10^b10^c10^d$对应于在第一个板条箱中存放 2a 个 prefrosh，2b 个在第二个中，2c 个在第三个中，2d 个在第四个中。因此，存放 pre-frosh 的方式的数目等于有 3 个 1 的 13-bit 字符串的个数，也就是$\binom{13}{3}$。

(e) 从点(0,0)到(50,50)有多少条路径，如果每步增加一个坐标，且留下其他不改变，存在在点(10,10)和(20,20)上不能通过的边界吗？

解：我们使用容斥原理。总的路径个数是$\binom{100}{50}$。但是我们必须减去有阻隔的道路。存在$\binom{20}{10}\cdot\binom{80}{40}$条路径通过第一个边界，因为从开始到边界有$\binom{20}{10}$条路径，且从边界到结束有$\binom{80}{40}$条路径。同样的，通过第二个边界的有$\binom{40}{20}\cdot\binom{60}{30}$条路径。然而，我们必须减去穿越两个边界的路径，且这样的路径有$\binom{20}{10}\cdot\binom{20}{10}\cdot\binom{60}{30}$条。因此，总的路径的数目是：

$$\binom{100}{50}-\binom{20}{10}\cdot\binom{80}{40}-\binom{40}{20}\cdot\binom{60}{30}+\binom{20}{10}\cdot\binom{20}{10}\cdot\binom{60}{30}$$

(f) 在 6.042 中 72 个学生有多少种方式能分为每组有 4 个的 18 组？

解：从序列包含 4 个 1，4 个 2 和 4 个 18 的有 18！到 1 的映射。特别，序列$(t_1,\ldots,t_{72})$对应与每个学生 i 在组 t_i 中的分配。映射是 18！到 1 的，因为我们能排列组的数目(以 18!不同的方式)，而没有改变班级划分的方式。因此，由 bookeeper 规则和除规则则得我们想要的个数是：

$$\frac{72!}{(4!)^{18}18!}$$

(g) 集合 A 有 r 个元素，集合 B 有 n 个元素。从 A 到 B 的函数有多少?有多少个是单射的？有多少是双射的？

解：说 A = {a_1,…,a_r}，且 B ＝ {b_1,..,b_n}，考虑每个函数 f: A à B 到序列(f(a_1),…,f(a_r))的映射。这是一个从 A 到 B 的函数和 r 长的 B 中的元素组成的序列。通过乘法法则，这样的序列是

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r \text{ times}} = n^r.$$

对于单射，首先注意（通过鸽巢原理得到）没有 A 到 B 的单射，如果 B 比 A 的元素少。也就是，如果 r > n，从 A 到 B 的单射的个数是 0。如果 r ≤ n，尽管，和前面一样映射，因为从 A 到 B 的单射和由 B 中不同的元素形成的 r 长的序列。通过一般化乘法法则，这样的序列个数是：

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

也就是 n 个元素的 r 排列。

对于双射，我们一样注意 r ≠ n， 从 A 到 B 的双射的个数这种情况。如果 r = n，那么从 A 到 B 的函数是双射的，当且仅当它是一个单射。因此，双射的个数等于单射的个数：$n!/(n-n)! = n!$这也是 n 个元素组合的个数。

注意函数，单射和双射如何和序列，r-组合和组合相对应的。

问题 2：一个比萨屋由一个促销活动。他们的广告这样说：

我们为您的比萨提供 9 个不同的顶部！花常规的钱买 3 个大的比萨，您能定购免费的顶部的任何组合。有 22,369,621 种不同的方式来设计您的订单。

这个广告的作者是前哈佛大学的学生，其在她的计算器上求公式 $(2^9)^3/3!$ 的值，得到接近 22,369,621 的数值。不幸的是$(2^9)^3/3!$ 绝对不是一个整数，因此某些是错误的。是什么呢？特别的，她高估了或者低估了？正确的数字是什么？

解：为一个比萨选择不同的顶部的个数是 9 个顶部的可能的子集，也就是 2^9。广告的作者推测计算出可能有$(2^9)^3$ 种方法来放置三个匹萨的顺序。然后她可能推测三个顺序中的集合是 3!序列，因此根据除法发着，蕴涵次序的数目是$(2^9)^3/3!$。

每个 3 个不同顺序的集合给出 3！个 3 个顺序的不同序列。错误在于，如果三个顺序中的一些是一样的，那么 3 个顺序的集合，得出少于 3！个序列。例如，如果所有的比萨有同

样的顶部，对于它们仅有一个序列顺序。因此除以 3!是低估了结果了。

我们真的需要计数出扔出 3 个不同的球的方式。(三种顺序）到 2^9 不同的箱子中（不同的顶部)。因此，存在到恰好有 2^9-1 个 1 和 3 个 0 的(2^9+2)-bit 字符串数字的双射：

$$\binom{2^9+2}{2^9-1} = \binom{2^9+2}{3} = 22,500,864.$$

——

恒等式的组合证明

回忆基本的证明 x = y 的组合证明计划：

1. 定义集合 S。
2. 通过计数一种方式说明 |S| =x。
3. 通过计数另一种方式说明 |S| ＝ y。
4. 得出 x = y 的结论。

问题 3 你想要为您的开始公司从 n 个人的池子种选择 m 个人，从 m 个人中，您想要选择 k 个人为您的经理。您参加 6.042 课，因此您知道您能这样做的方式数是：

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

但是您的 CFO，他去过哈佛的商学院，出现公式

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

在做一个有理由的事情，在您的 CFO 或哈佛商业学校，您决定检查反对您的答案。

(a) 通过给出和您的一致的您的 CFO 的公式的代数证明和开始。
解：

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k)!}{(n-m)!k!(m-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{((n-k)-(m-k))!(m-k)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.
\end{aligned}
$$

(b) 现在给出证明同样的事实组合证明。

解：首先从 n 个选择的 m，然后从 m 中选择 k，您能可选择的从 n 个人中选择 k 个经理，且然后从剩下的 n-k 个人中选择 m-k 个人来填充团队。这个给您 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ 种方式选择您的队伍。既然您必须有同样数目的选择，不论您选择团队成员和经理的顺序，

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

问题 4： 现在尝试以下公式，更有趣的定理。

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

(a) 开始一个组合证明。提示：令 S 是在$\{0,1,*\}^n$中的包括 n 个* 的所有的序列的集合。
解：令 S 是所在$\{0,1,*\}^n$中的所有包括一个 * 的序列的集合。
一方面，$|S| = n2^{n-1}$，因为 * 能出现在 n 个位置，且对剩余的符号存在 2^{n-1} 设置。
另一方面，每个在 S 中的序列包括 1 到 n 之间的非 0 入口，因为*，至少，是非 0 的。在 S

中有 k 个非 0 的入口是 $k\binom{n}{k}$，因为有 $\binom{n}{k}$ 方式选择非 0 入口的方式，且 k 种方式选择这些入口为*。因此，通过加法法则：

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

为|S|求值这两个表达式是证明定理。

(b) 代数上如何证明？

解：我们计算：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!((n-1)-j)!} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

前面 3 步是代数：使用它的阶乘因子替换二项式系数，然后化解 k ，然后通过从 n!中取 n 尝试形成另一个系数（且最终从和中取）。在第四步，我们改变变量，从 k 到 j = k-1。在第 5 步，我们组织我们改变的系数。最后一步使用二项式定理。