复习练习 14 的笔记

计数规则

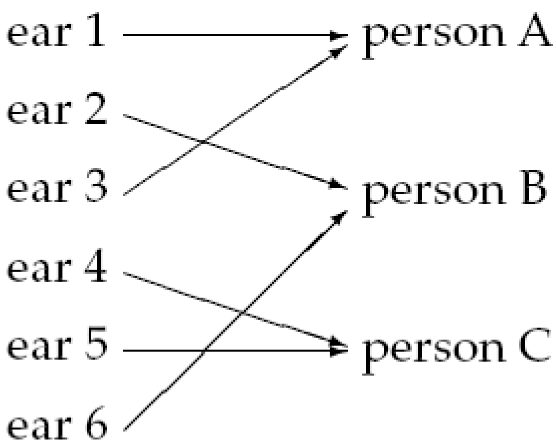
规则 1（一般乘法规则）。令 S 是长度为 k 的序列。如果存在

- n_1 可能的第一入口
- n_2 可能的对第一入口的第二入口
- n_3 可能的第一和第二入口的组合的入口，等等

那么：

$$|S| = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

一个 k 到 1 的函数映射 k 个定义域中的元素到每个那个范围内的元素。例如，函数映射每个耳朵到它的拥有者是 2 到 1 的映射：



规则 2（除法规则）。如果 f: A à B 是 k 到 1 的，那么|A| = k • |B|。

一般乘积规则

问题 1 求解以下计数问题，使用一般乘法规则。

(a) 下个星期，我们将很惬意。在第一天，我们连续 5 分钟。以后每天我们比前一天多练习 0，1，2 和 3 分钟。例如，我在下星期中的 7 年中的练习的分钟数可以是 5，6，9，9，9，11，22。多少这样的序列是可能的？

解：在第一天的分钟数可能在一种方式中选择。每个后学天的分钟数能在 4 种方式种选择。因此，通过扩展乘法规则练习的序列是 $1 \cdot 4^6$。

(b) 一个集合的 r 组合是那个集合的 r 个不同的元素的序列。例如这里有{a,b,c,d}的二组合：

$$
\begin{array}{ccc}
(a,b) & (a,c) & (a,d) \\
(b,a) & (b,c) & (b,d) \\
(c,a) & (c,b) & (c,d) \\
(d,a) & (d,b) & (d,c)
\end{array}
$$

一个 n 个元素集合种有多少个 r 组合？使用阶乘的方法表示您的答案。

解：存在 n 种方式选择第一个元素，n-1 种方式选择第二个，n-2 种方式选择第三个,…，有 n-r+1 种方式选择第 r 个元素。因此 n 个元素集合中存在：

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

有个 r 组合。

(c) 从{1,…,p}有不同的入口有多少个 $n \times n$ 个矩阵？这里 $p \geqslant n^2$?

解：有 p 种方式选择第一个入口，p-1 种方式选择第二个，同样有 p-2 种方式选择的第三个，依次类推。总共有

$$p(p-1)(p-2)\cdots(p-n^2+1) = \frac{p!}{(p-n^2)!}$$

种这样的矩阵。另一种可替换的，这是一个 p 个元素集合的 n^2 组合，也就是 $p!/(p-n^2)!$。

簿记员的道

问题 2 在这个问题中，我们通过对单词簿记员沉思来寻找启迪。

(a) 单词 POKE 中的字母有多少种排列方法？

解：有 4!种排列方法，对应于集合{P,O,K,E}的 4!种组合。

(b) 有多少种方式安排在单词 BO_1O_2K 中的字母中？观察我们的 O 通过下标来区分其是不同的符号。

解：有 4!种排列，对应于集合{B,O_1,O_2,K}的 4！ 种组合。

(c) 假设我们映射在 BO_1O_2K 中的字母到删除了下标的在 BOOK 的字母。用箭头说明怎么把在左边的排列映射到右边的排列？

$$O_2BO_1K$$
$$KO_2BO_1$$
$$O_1BO_2K$$
$$KO_1BO_2$$
$$BO_1O_2K$$
$$BO_2O_1K$$
$$\ldots$$

$$BOOK$$
$$OBOK$$
$$KOBO$$
$$\ldots$$

(d) 这个是什么类型的映射， 小蚂蚱？

解。2 对 1 的映射。

(e) 根据除法法则，在 BOOK 中有多少个排列？

解。 4！/2

(f)很好，年轻的师父！在 $KE_1K_2PE_3R$ 中的字母有多少个排列？

解： 6！

(g)假设我们通过删除下标映射每个 $KE_1E_2PE_3R$ 到 KEEPER。列举所有的 $KE_1E_2PE_3R$ 的不同的排列，以这样的方式映射到 REPEEK 中。

解：$RE_1PE_2E_3K$, $RE_1PE_3E_2K$, $RE_2PE_1E_3K$, $RE_2PE_3E_1K$, $RE_3PE_1E_2K$, $RE_3PE_2E_1K$。

(h)这个映射是什么类型的映射？

解：3！到 1 的映射。

(i) 在 KEEPER 中的字母有多少个平排列？

解：6! /3!

(j) 现在您准备面对簿记员！

$BO_1O_2K_1K_2E_1E_2PE_3R$ 的有多少个排列？

解： 10!

(k) $BOOK_1K_2E_1E_2PE_3R$ 的有多少个组合？

解：10! /2!

(l) $BOOKKE_1E_2PE_3R$ 的多少个安排有？

解： 10! /(2! · 2!)

(m) BOOKKEEPER 有多少个组合？

解. 10! /(2! 2! · 3!)

(n) VOODOODOLL 有多少个组合？

解：10! /(2! 2! · 5!)

(o) (重要)多少 n bit 序列包括 k 个 0 和(n-k)个 1？

解： n! /(k! · (n − k)!)

这个数量表示为 $\binom{n}{k}$ ，读了“n 选择 k”。从现在起，您几乎每天将看见它直到在 6.042 期末的结束。

记住你已经絮叨的东西：有下标、无下标。这就是簿记员的道。

问题 3 求解以下计数问题。在你知道大小的集合之间定义一个合适的映射（双射或者 k 到 1）且集合是在问题中的。

(a) (重要) 从 n 个元素的集合{x_1、x_2，…， x_n}有多少种方式选择 k 种元素？

解： 一个从 n bit 的序列有 k 个 1 的一双射。 序列(b_1，…， b_n)映射到包含 x_i 的子集，当且仅当 b_i =1。的子集。 所以，这样子集的个数是：$\binom{n}{k}$。

(b) 如果四个品种是可利用的，有多少个不同的方式选择一打油炸圈饼？

解：有从一打油炸圈饼的选择到对 15 bit 序列选择 3 个 1 的双射。 特别是，假设品种给上釉，巧克力、柠檬和波士顿奶油。 那么选择 g 上釉， c 巧克力、l 柠檬和 b 波士顿奶油映射对序列：

$$(g\ 0's)\ 1\ (c\ 0's)\ 1\ (l\ 0's)\ 1\ (b\ 0's)$$

所以，选择的数量与 15 bit 中有 3 个 1 的序列的个数恰好是相等的是：

$$\frac{15!}{3!\ 12!} = \binom{15}{3}$$

（c）从(0,0)到（10，20）有多少步，包括向右的步骤（增长第一个坐标）和向上步骤（增加第二个坐标）？

解：存在有从 10 个 0 和 20 个 1 的序列的双射。序列(b_1,..,b_{30})映射到一个路径，这里第 i 步是向右的如果 b_i=0，且如果 b_i=1 是向上的。因此路径的个数是 $\binom{30}{10}$。

（d）独立生活组是招待 8 个预科学生，亲切地称为 P_1,...,P_8，通过永久居民。每个预科学生必须分配一个任务，2 个必须洗盘子，2 必须清理厨房，1 必须清理卫生间，1 个必须清理普通区域，2 必须服务晚餐。P_1,...P_8 有多少中方式来有效地使用？

解：存在一个包括两个 P 两个 K 一个 B 一个 C 和两个 D 的一个映射。特别地，序列（t_1,..,t_8）对应于分配 P_i 洗碗如果 t_i=P，清理厨房，如果 t_i = K，清理卫生间，如果 t_i = B 等等。因此，可能的分配是：

$$\frac{8!}{2!\ 2!\ 1!\ 1!\ 2!}$$

(e) Grumperson 夫妇为了圣诞节有多少种方法把 13 块不可区分的媒分配到两个，不是，3 个孩子？

解：存在一个从有两个 1 的 15 bit 字符串的双射。特别是，bit 字符串 $0^a10^b10^c$ 映射到 a 煤块

到第一个孩子，b 块煤到第二个，c 块到第三个。因此有：$\binom{15}{2}$ 个分配。

(f) 在满足以下等式的自然数上的解有多少呢？

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \quad \leq \quad 100$$

解：从有 10 个 1 到 110 bit 序列到等式的双射。特别的 x_i 是在第 i 个 1 前面的 0 的个数，但是在(i-1)个 1 的后面（或者在序列的开设）。因此有 $\binom{110}{10}$ 个解。

(e) （测试 2， 03 年秋季）假设两个同样的 52 牌混合在一起。两个双倍大小的副牌种有多少种方式安排牌？

解：104 张包含每张牌 2 个是序列号的个数是：$104!/(2!)^{52}$ 。