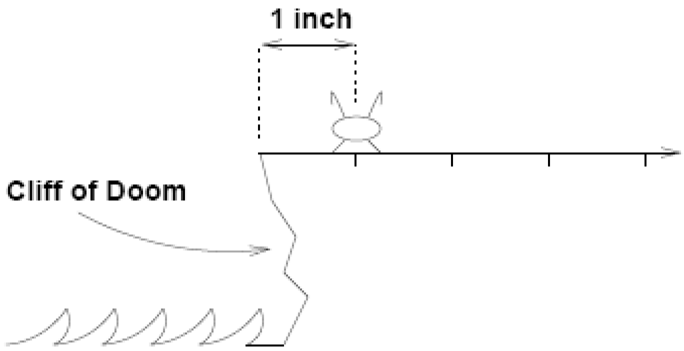
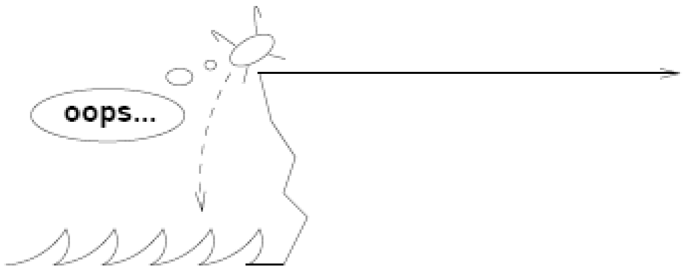
复习练习 23 的笔记

1．有一只小跳蚤名 Stencil 。在他的右边，有一个无尽的平原。他的左边的一英寸是死命峭壁，其下降到装满食跳蚤的妖怪的愤怒的海。

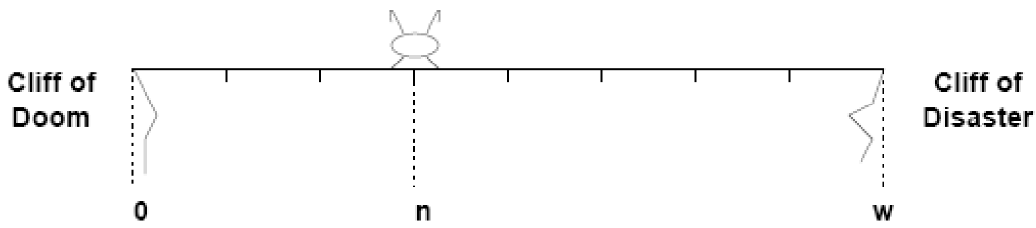


每一秒，Stencil 向左或向右以相同的概率跳 1 英寸，且和前面的跳跃是独立的。



我们的工作是分析 Stencil 的生活。有没有机会避免致命的下落?如果没有，在下落之前可跳跃多长时间?

问题 1 让我们从一个更简单的问题开始。假设 Stencil 是在 w 英寸宽的岛的左边的 n 英寸的位置。



换句话说，Stencil 从位置 n开始，$0 \leqslant n \leqslant w$ 且在位置0 和 w 有悬崖。令 R_n 是他掉入右边灾难悬崖的概率，给定开始的位置是 n。

R_0 和R_n 的值是什么？当$0 < n < w$ 的时候，您能根据R_{n-1} 和R_{n+1} 表示R_n 吗？（提示：全概率）

解：如果 n = w，他从位置 w 开始，立刻跌入 Disaster 悬崖，因此 R_w= 1。 另一方面，如果他从位置 0 开始，那么他立刻掉入到 Doom 悬崖，因此 R_0 = 0。

现在假设他站在岛的中央的某个位置，因此 0 < n < w。 那么我们能把他的命运的分析根据他的第一跳的方向可以分解成两种情况：

- 如果第一跳是到左边，那么他在位置 n -1 着陆，最终以概率 R_{n-1} 掉下 Disaster 悬崖。
- 另一方面，如果他的第一跳时向右，那么他着陆位置在 n + 1，且最终调入 Disaster 悬崖的概率是 R_{n+1}.

因此根据全概率定理，我们有：

$$R_n = \frac{1}{2}R_{n-1} + \frac{1}{2}R_{n+1}$$

(b) 求解线性递推(您没有看到任何线性递推?和您的助教谈话) 来发现 Rn。 （在最后一页有我们的一般指导。）
解：我们重新安排在递推等式中的项：

$$R_{n+1} = 2R_n - R_{n-1}$$

特征方程是：

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

这个方程有重根 x = 1。 没有非齐次部分，因此一般解有形式：

$$R_n = a \cdot 1^n + b \cdot n1^n = a + bn$$

替换边界条件 R_0 = 0 和 R_w = 1，给出两个线性方程：

$$\begin{aligned} 0 &= a \\ 1 &= a + bw \end{aligned}$$

这个系统的解是 a = 0, b = 1/w。 因此，递推方程的解释：

R_n = n/w

(c) 因此您们就知道 Stencil 落下右边的概率了。您能很快快速推导他将从左边掉落的概率？…或者永远活着的概率？

解：我们探索问题的对称性。他在位置 n 从左边掉落的概率和从位置 w –n 掉落的概率是一样的，是(w-n)/n。

这是一个坏消息。Stencil 最终从一个悬崖掉落或者从另一个悬崖掉落的概率是：

$$\frac{n}{w} + \frac{w-n}{w} = 1$$

没有希望了！他在岛上永远跳跃的概率是 0。

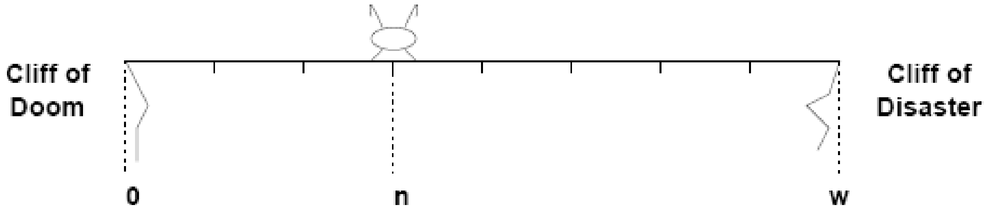
(d) 现在我们回到原始问题，这时 Stencil 离左边的无限平原有 1 英寸。 他永远生存的概率是多大?

解：他最终跳入到海的概率是：

$$\lim_{w \to \infty} \frac{w-1}{w} = 1$$

我们的小朋友是命中注定的。

问题 2 到现在您一定已经知道了等待我们可怜的小 Stencil 跳蚤的悲剧命运。在光明的一边，Stencil 也许在他沉入到波涛下面之前可以跳一会。让我们找出他到期望能活多久。我们将开始向以前一样更简单的开始：



令 X_n 是他跌入悬崖期望数目的跳。

(a) X_0 和 X_w 的值是什么？如果 $0 < n < w$， 您能根据 X_{n-1} 和 X_n 表示 X_n 吗？(提示：全期望)

解：如果他在岛的一边开始，那么他立刻死亡：

$$X_0 = 0$$
$$X_w = 0$$

如果他在到的中间某个地方开始($0 < n < w$)，那么我们能再次把分析分解成两种情况：

- 如果他的第一跳是向左，那么他登录到岛在位置 n -1，能期望生存另外 X_{n-1} 步。
- 如果他的第一跳时向右，那么他登录到岛在位置 n + 1, 且他的期望寿命是 X_{n+1}

因此，由全期望定理和线性，他期望的寿命是：

$$X_n = 1 + \frac{1}{2}X_{n-1} + \frac{1}{2}X_{n+1}$$

前面的 1 表示其第一跳！

(b) 现在您应该求解递推方程。

解：我们能重写最后一行为：

$$X_{n+1} = 2X_n - X_{n-1} - 2$$

正如以前，特征方程是：

$x^2-2x+1=0$

有重根 1，因此通解是：

$X_n = a + bn$

存在非齐次项，因此我们也需要发现特解。既然这个项是常数，我们应该尝试 $X_n = c$ 的形式的解。然后尝试 $X_n = c + dn$，等等。这说明，前两个可能不能工作，但是第三个可以。在这个猜测中替换给出：

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 2X_n - X_{n-1} - 2 \\ c + d(n+1) + e(n+1)^2 &= 2(c + dn + en^2) - (c + d(n-1) + e(n-1)^2) - 2 \\ e &= -1 \end{aligned}$$

所有的 c 和 d 项消除，因此 $X_n = c + d_n - n^2$ 是对所有的 c 和 d 的特解。因此我们的特解释 $X^n = -n^2$。 添加痛揭和特解，给出解的一般形式：

$$X_n = a + bn - n^2$$

带入边界条件：$X_0 = 0$ 和 $X_w = 0$， 给出两行等式。

$$\begin{aligned} 0 &= a \\ 0 &= a + bw - w^2 \end{aligned}$$

这个系统的解是： $a = 0$ 且 $B = w$。 因此，对递推方程的解释：

$$X_n = wn - n^2 = n(w-n)$$

（c） 返回到原始问题，当 Stencil 从其左边距离 Doom 悬崖 1 英寸，他期望的生存期是多久？

解：在这种情况下，他的期望寿命是

$$\lim_{w \to \infty} 1(w-1) = \infty$$

是的，Stencil 期望永生。

(d) 和前面问题的最后部分比较您的答案，有什么问题？

解：因此 Stencil 确定最终要掉落悬崖到海中的，但是他的期望的寿命确实永远！这个听起来像是茂东，但是两个答案都是正确的！

这里是一个非正式的解释。Stencil 在第 k 步掉落 Doom 悬崖的概率大约是 $1/k^{3/2}$。因此，他掉落的最终概率是：

$$\Pr(\text{falls off cliff}) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

您能通过积分验证这个和是收敛的。最终和收敛到 1。 在另一方面，直到他掉落的期望时间是：

$$\mathrm{Ex}(\text{hops until fall}) \approx \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

您能通过积分验证这个和是发散的。因此我们的答案是一致的。