随机行走

1 随机行走

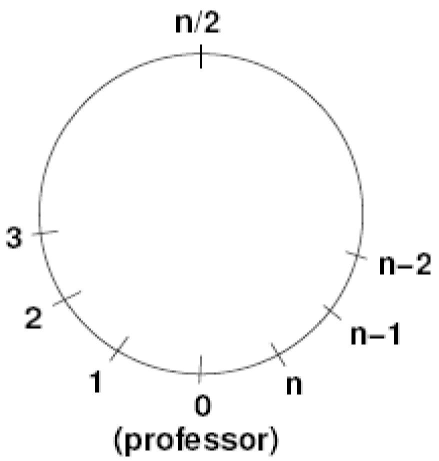
醉汉绊倒在酒吧外面。每一秒钟， 他以相等概率或摇摆一步到左边或摇摆一步在右边。他的家到他的左边有 x 步， 并且一条运河到他的右边有 y 步。这里有几个自然问题：

1. 醉汉安全地到家而不掉入到运河的概率是什么?
2. 他的旅途，也就是旅行结束的期望的持续时间是什么?

醉汉的蜿蜒地的路径称随机行走。随机行走是重要主题， 因为它们能建模很多现象。例如， 在物理中， 在三维空间随机行走被使用建模气体扩散。在计算机科学方面， Google 搜索引擎使用随机行走通过网链接图来确定网站的相对重要性。在财经理论上， 随机行走对于市场价的波动可能起一个模型作用。并且， 在这次演讲中， 我们将探索有些美味的应用。

2 传递糖果

传递糖果是游戏涉及到 n 学生、一位教授， 和一碗糖果。学生从 1 到 n 编号， 并且教授编号为 0 。大家站在一个圆圈中，如下图显示。



最初地， 教授有糖果碗。他拿出一块糖果和然后以相等的概率把碗传递到或者左边或者右边。尔后接受碗的每个人做同样事： 他或她从碗拿出一块糖，然后以相同的概率把碗传递到或者右边或者左边的人。实际上， 碗在游戏者形成的圈中随机行走。最后接受糖的人，被称为优胜者且可得到保留整个碗。哪个游戏者最可能胜利?

一个自然猜测是游戏者 n/2。她似乎最有可能最后得到碗，因而赢得游戏， 因

为她是离教授最远的。另一方面， 游戏者 1 和 n 看样子在过程中几乎无疑拿到碗太早，而不能赢得游戏。我们看是否这种直觉是正确或错误的!

2.1 更简单的问题

让我们首先通过看比较简单的问题。假设游戏者是被安排成一条直线，而不是圈：

$$\begin{array}{cccccc} A & S1 & S2 & \ldots & Sk & B \\ & \uparrow & & & & \\ & 糖 & & & & \end{array}$$

游戏者命名为 A， S_1， S_2...， S_k， 和 B， 正如显示的那样。最初地，游戏者 S_1 有糖碗。每当之前游戏者得到碗，他或她取糖，然后以相同概率的把碗传递到左边或右边。A 在 B 之前得到糖的概率是什么?

令 P_k 是 A 在 B 之前得到糖果的概率。首先， 假设 k = 1：

$$\begin{array}{ccc} A & S_1 & B \\ & \uparrow & \\ & \text{candy} & \end{array}$$

这里， 或者 A 或者 B 在下步得到碗， 以相等的概率。因而， $P_1 = 1/2$ 。

现在假设 k > 1。 在第一步， 有二种可能： 碗或者向左移动到游戏者 A，或者移动向游戏者 S_2 。我们使用全概法则，能分解 P_k 的估值为两种情况：

Pk = Pr(第一步是左边) • Pr(A 在 B 之前得到糖| 第一步是左边) +Pr(第一步是右边) • Pr(A 在 B 之前得到糖| 第一步是右边) = (1/2) • 1+ (1/2) • Pr(A 在 B 之前得到糖| 第一步是右边)

为了估算最后项， 我们必须从这种配置中发现 A 在 B 之前得到糖的概率：

$$\begin{array}{cccccc} A & S_1 & S_2 & \ldots & S_k & B \\ & & \uparrow & & & \\ & & \text{candy} & & & \end{array}$$

这是有一点棘手的。从这里， 糖果必须最终到达或 S_1 或 B 。实际上， 我们知道， S_1 在 B 之前得到糖的概率是 P_{k-1} 。(实际上， 我们考虑问题的一个更小的版本， S_1 充当 A 的角色。) 如果这发生， 我们然后回来在原始的配置， 且因此 A 继续在 B 之前以概率 P_k 得到糖。所以， 从上面配置开始， A 在 B 之前得到糖的概率是 $P_{k-1} \cdot P_k$. 。把这个结果代入上面方程给出：

$$P_k = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot P_{k-1} \cdot P_k$$

为 P_k 求解，添加基例给出一个完整的递推方程：

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \\ P_k &= \frac{1}{2 - P_{k-1}} \quad (k \geq 0) \end{aligned}$$

2.2 求解递推方程

我们现在有 P_k 的递推方程， A 在游戏者 B 之前得到糖的概率。递推方程是好的， 但一个明确 P_k 的公式会是更好。从递推方程获得一个明确公式的最简单的技术叫做**猜测和验证法**。名字说明了一切： 我们计算几个项， 猜测一个一般的模式， 和然验证实结果。

我们对我们的问题**猜测和验证法**。首先， 我们使用递推方程计算几个项：

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \\ P_2 &= \frac{1}{2 - P_1} \\ &= \frac{2}{3} \\ P_3 &= \frac{1}{2 - P_2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

一般模式看来是：

$$P_k = \frac{k}{k+1}$$

所有剩下的将验证我们的猜测是正确的。我们在 k 上使用归纳法，也就是 $P_k = k/(k+1)$ 。这里对 $k = 1$ 成立， 因为 $P_1 = 1/2$ 是递推的初值。其次， 我们假设 $P_k = k/(k+1)$，为了证明证明 $P_{k+1} = (k+1)/(k+2)$ 。我们能按照如下推理：

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{1}{2-P_k} \\ &= \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

第一步使用递推方程，第二步使用归纳假设， 并且第三步只使用代数。因而， 由归纳法得， $P_k = k/(k+1)$，对于所有 $k \geqq 1$.

所以， 游戏者 A 在游戏者 B 之前得到糖的概率是 k/(k+1)。在下个部分中，我们一再将使用这个结论。

2.3 分析游戏

现在我们返回到原始的问题。有 n 游戏者和教授站立在圈子。如果教授最初有糖果， 哪个游戏者最可能最后得到糖果因而获胜?

我们开始由考虑游戏者 n， 正好站立在教授右边。游戏者 n 能获胜的唯一方式是如果碗一直旅行顺时针周游在圈上在 n 接触它之前到达游戏者 n-1。那可能性是多少? 我们通过"切断"在游戏者 n 和 n-1 之间的圈得到另一个角度，且安排它们为一条直线：

$$\begin{array}{cccccc} n & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 \quad n-1 \\ & \uparrow & & & & \\ & \text{candy} & & & & \end{array}$$

我们请求在 n 之前的 n-1 获得糖的概率。但这恰恰是我们已经解决的问题! 这里游戏者 n 扮演 A 的角色，游戏者 n -1 扮演 B 的角色，且在他们之间我们有 k = n -1 游戏者。所以， 游戏者 n 在游戏者 n 之前的概率是 (n - 1)/n 。用补项，游戏者 n - 1 在游戏者 n 前得到糖的概率是 1/n 。因而， 游戏者 n 赢得游戏的概率是 1/n 。

这是一个使震惊的结论! 在课堂开始， 我们猜测， 游戏者 n 有少许赢游戏的机会， 因为他离紧挨教授站得太近。但我们刚说明， 游戏者 n 有一 1/n 机会获胜。不坏， 因为有 n 游戏者!

其他游戏者获胜的机会是什么？由对称可知，游戏者 1 获胜的概率是 1/n 。如此我们考虑游戏者 i 获胜的概率。这里 1<i<n。有两种情况：或者游戏者 i+1 在游戏者 i-1 前得到碗，或者相反。应用总概率法者，我们得到：

Pr(i 获胜) = Pr(i+1 在 i-1 之前得到糖) • Pr(i 获胜| i+1 在 i-1 之前得到糖) |

+Pr(i- 1 在 i+1 前得到糖) • Pr(i 获胜 | i-1 在 i+1 之前得到糖)

我们开始判定 i 获胜的概率，给出那个在游戏者 i 之前的游戏者 i+1 得到糖的概率。(这是公式的第二行。) 在那个游戏者 i+1 首先得到糖之时，这必须是游戏的配置：

$$\begin{array}{ccccccccc} i & i+1 & \ldots & n & 0 & 1 & \ldots & i-1 \\ & \uparrow & & & & & & \\ & \text{candy} & & & & & & \end{array}$$

现在游戏者 i 赢得游戏，当且仅当只戏者 i - 1 在游戏者 i 之前得到糖。再，我们能调用我们的更加早期的结果。现在 i 有 A 角色，i-1 承担 B 的角色，在他们之间存在 k = n-1 游戏者。所以，游戏者 i 在游戏者 i 之前得到糖的概率 (n-1)/n 。这意味着游戏者 i 获胜游戏的概率是 1/n，给定 i +1 在 i-1 之前得到糖.

另一方面，我们能使用同样论证说明游戏者 i 有 1/n 的概率胜利，给定游戏者 i-1 在游戏者 i +1 之前获得糖.。把这些结果替换到前面的方程得到：

Pr(i 胜利) = Pr(i +1 在 i-1 之前得到糖) • (1 /n) +
Pr(i-1 在 i +1 前得到糖) • (1/ n)
=1/ n

我们不知道游戏者 i +1 在游戏者 i-1 前得到糖的概率，反之亦然，但是我们不需要；不管怎样，游戏者 i 获胜的概率是 1/n 。所以，游戏者 i 获胜的整个概率是 1/n 。

令人惊讶地，每个游戏者是相等概率获胜通过的糖，不管他或她站在什么地方!

3 巧克力或硬花甘蓝

在巧克力或硬花甘蓝游戏，n 游戏者立刻被授予巧克力块并且残余的 m 游戏者被授予硬花甘蓝。但游戏不结束那里! 我们翻转硬币。如果硬币是正面，一个有巧克力的游戏者必须交换她的奖为硬花甘蓝。如果硬币是反面，一个有硬花甘蓝的游戏者必须交换她的奖为巧克力块。这个硬币翻转和奖交换的过程，直到或者所有游戏者拥有巧克力或所有游戏者拥有食用硬花甘蓝。那时，游戏者能把他们的奖拿回家。游戏持续多久?

令随机变量 $T_{c,\ b}$ 是游戏的长度，如果 c 游戏者食用巧克力并且 b 游戏者有硬花甘蓝。如果两个变量有一个是零，那么游戏的长度是零：

$$
\begin{aligned}
T_{c,0} &= 0 \\
T_{0,b} &= 0
\end{aligned}
$$

否则， 我们翻转硬币并且奖被交换， 花费一单位时间。有现在二种概率：

1. 以概率 1/2， 有 c – 1 巧克力块和 b +1 硬花甘蓝。
2. 以概率 1/2， 有 c +1 巧克力块和 b - 1 硬花甘蓝。

游戏的总期间是 1 (翻转硬币和交换一个奖) 加上游戏的剩余的长度， 我们使用全期望法则能表达：

$$
\mathrm{Ex}\left(T_{c,b}\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ex}\left(T_{c-1,b+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ex}\left(T_{c+1,b-1}\right)
$$

现在我们有为游戏的期望的持续时间的递推方程。但这不是一个非常令人满意的答案； 即使有递推方程在手中， 仍然有没有明显的方式计算 $T_{3,1}$ 。然而，我们能应用猜测的形式以及验证。在这种情况下， 我们也许需要使用仿真结果作为猜测的依据：

$$
\mathrm{Ex}(Tc，b)= cb
$$

我们然后能验证， 这是一个递推方程的解，通过代入我们的猜测到右边，说明我们得到左边。

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ex}\left(T_{c-1,b+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ex}\left(T_{c+1,b-1}\right) &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (c-1)(b+1) + \frac{1}{2} \cdot (c+1)(b-1) \\
&= cb \\
&= \mathrm{Ex}\left(T_{c,b}\right)
\end{aligned}
$$

(有我们搁置一边的技术考虑： 我们未说明这种解答是唯一的。)

3.1 一种惊奇暗示

假设， 您有$1 并且我有$1，000，000 。我们重复做正好 $1 的赌注。什么是赌注的期望的数量直到一个或我们中的另一个破产? 直觉地， 看起来游戏应该是相当短的， 因为在您打一次赌之后有一半的机会您破产。但是， 这与玩巧克力或硬花甘蓝游戏是等效的，这里 1 个游戏者从巧克力开始，而一百万游戏者从硬花甘蓝开始。所以， 打赌的期望的数量实际上是百万!