问题集 9 的解

到期：星期一下午 9 点，4 月 25 日

问题 1 有三枚硬币：一枚 1 美分硬币，一枚 5 美分硬币，一枚 25 美分硬币。当这些硬币翻转的时候：

- 1 美分硬币出现正面的概率是 1/3，出现背面的概率是 2/3。
- 5 每分出现正面的概率是 3/4，出现背面的概率是 1/4。
- 25 每分出现正面的概率是 3/5，出现背面的概率是 2/5。

假设一枚硬币的落地不受其他硬币落地的影响。这个问题的目标是来判定奇数次硬币出现正面的概率。对于这个首要的问题，我们将紧密按照在演讲中描述的四步求解概率问题的过程。您的解应该包括一个树图。

(a) 这个试验的样本空间是什么？

解：我们能把每次结果当成一个显示 1 美分，5 美分，25 美分硬币方向的三元组。例如，三元组(H,T,H)是一个 1 美分为正面，5 美分为反面，25 美分为正面的三元组。样本空间就是所有的这些三元组的集合：$\{H,T\}^3$.

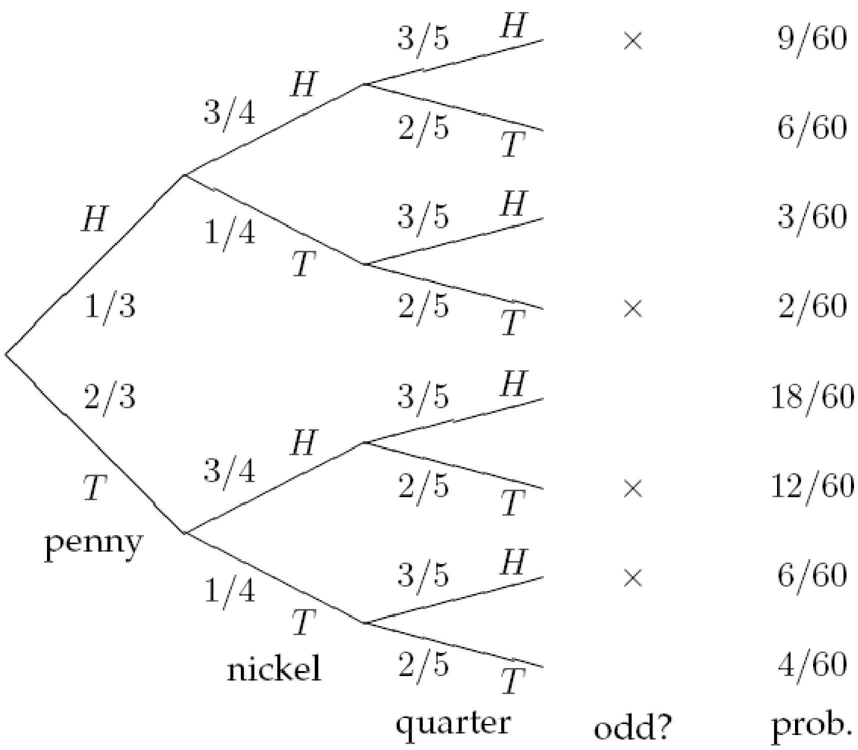
(b) 正面的奇数硬币正面的事件是样本空间的什么子集？

解：硬币出现正面的时间是子集：

{(H,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)}

(c) 在样本空间每个结果的概率是什么？

解：在树图中的边使用在问题陈述中给定的概率标签。每个结果的概率是沿着相应的根到叶结点对应路径的概率的乘积。结果产生的概率在树图中标注。



(d) 硬币奇数出现正面的概率是多少？
解：一个事件的概率是在那个事件中的结果的概率的和。在这种情况下：
Pr(奇数次正面) ＝

$$
\begin{aligned}
&= \Pr\left(\{(H,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}\right) \\
&= \Pr\left((H,H,H)\right)+\Pr\left((H,T,T)\right)+\Pr\left((T,H,T)\right)+\Pr\left((T,T,H)\right) \\
&= \frac{9}{60}+\frac{2}{60}+\frac{12}{60}+\frac{6}{60} \\
&= \frac{29}{60}
\end{aligned}
$$

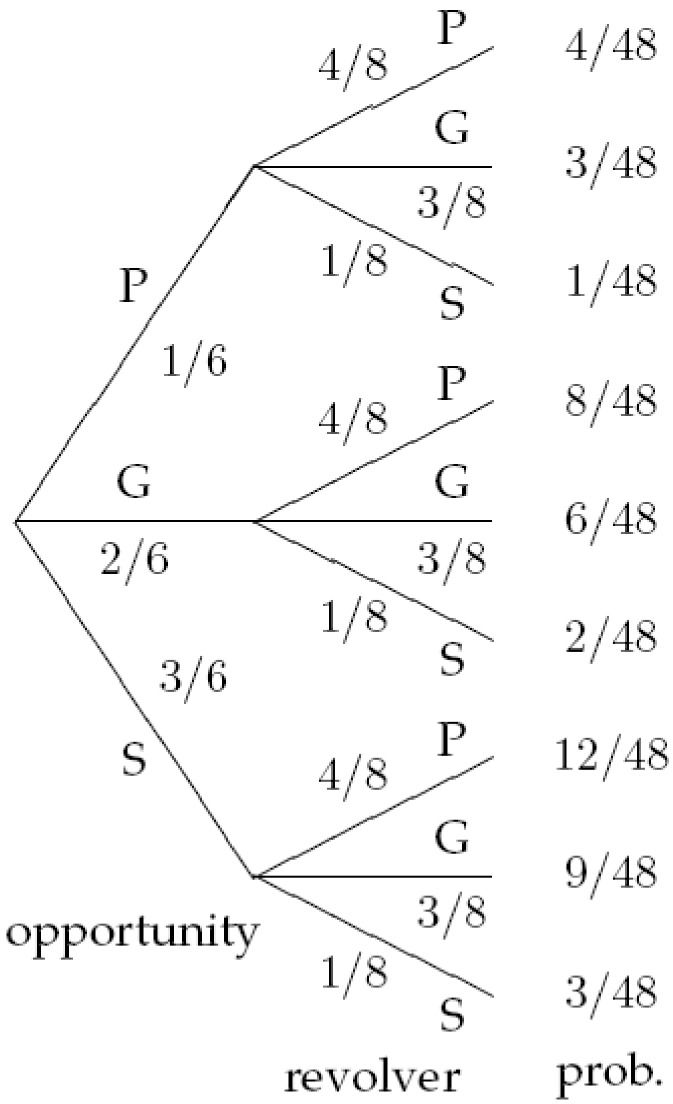
问题 2 教授 Plum, Green 先生以及 Scarlet 小姐一起密谋要射杀 Colonel Mustard. 如果这三个人中的一个有机会和左轮手枪，那么这个人第就射杀 Colonel Mustard。否则，Colonel Mustard 就逃跑了。三个中的一个有如下概率机会：

Pr(Plum 有机会) = 1/6
Pr(Green 有机会) = 2/6
Pr(Scarlet 有机会) = 3/6

恰好有一人拥有左轮手枪有如下概率，不考虑这个人是否有机会:

Pr(Plum 有左轮手枪) = 4/8
Pr(Green 有左轮手枪) = 3/8
Pr(Scarlet 有左轮手枪) = 1/8

(a) 为这个问题画一个树图。说明边和结果概率。
解：



(b) Colonel Mustard 被射杀的概率是什么？

解：使用一个对表示每个结果，说明谁有机会且谁有左轮手枪。在这个笔记中，Colonel Mustard 被枪杀的时间包括所有的结果，这里单独一个人有两个：

{(P, P),(G, G),(S,S)}

这个事件的概率是结果概率的和：

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\{(P,P),(G,G),(S,S)\}\right) &= \Pr\left((P,P)\right) + \Pr\left((G,G)\right) + \Pr\left((S,S)\right) \\
&= 4/48 + 6/48 + 3/48 \\
&= 13/48
\end{aligned}
$$

(c) Colonel Mustard 被射中的概率是什么，给出 Scarlet 小姐没有左轮手枪的概率？

解：令 S 是 Colonel Mustard 被射杀的概率，令 N 是 Scarlet 小姐没有左轮手枪的概率。解是：

$$
\begin{aligned}
\Pr(S \mid N) &= \frac{\Pr(S \cap N)}{\Pr(N)} \\
&= \frac{\Pr((P,P),(G,G))}{\Pr((P,P),(P,G),(G,P),(G,G),(S,P),(S,G))} \\
&= \frac{\frac{4}{48}+\frac{6}{48}}{\frac{4}{48}+\frac{3}{48}+\frac{8}{48}+\frac{6}{48}+\frac{12}{48}+\frac{9}{48}} \\
&= \frac{5}{21}
\end{aligned}
$$

(d) Green 先生有一个机会，给出 Colonel Mustard 被射杀的概率？

解：令 G 是 Green 先生有机会的时间，令 S 是 Colonel Mustard 被射杀的事件。那么解是：

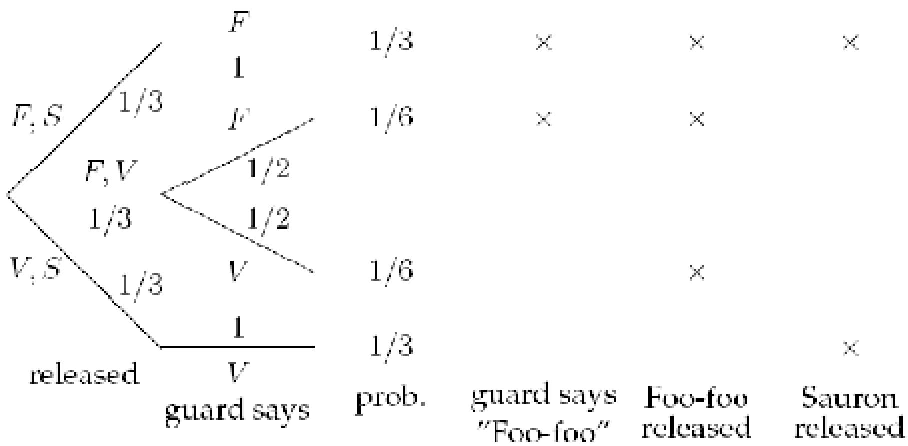
$$
\begin{aligned}
\Pr(G \mid S) &= \frac{\Pr(G \cap S)}{\Pr(S)} \\
&= \frac{\Pr((G,G))}{\Pr((P,P),(G,G),(S,S))} \\
&= \frac{\frac{6}{48}}{\frac{4}{48}+\frac{6}{48}+\frac{3}{48}} \\
&= \frac{6}{13}
\end{aligned}
$$

问题 3 有 3 个犯人在一个为最大恶人准备的最大安全的监狱：恶魔巫师 Voldemort, 黑暗地主 Sauron，以及小兔子 Foo-Foo。假释委员会声明它讲释放 3 个中的两个人，随机地非正式地选择，但是还没有透露他们的名字。自然的，Sauron 猜测他会被释放到他的在 Mordor 的家中，哪里隐蔽处的所在，有概率 2/3。

一个士兵企图告诉 Sauron 其他将被释放的犯人的名字(或者是 Voldemort 或者是 Foo-Foo)。然而，Sauron 拒绝这个帮助。他推测如果士兵说，例如，“小兔子 Foo-Foo 将会被释放”，那么他自己被释放的概率就降低到了 1/2。这是因为他将然后知道或者他或者 Voldemort 将被也释放，且这两个事件是大之上相等的。

使用树图和四步方法，或者证明黑暗抵住 Sauron 推理正确或者证明他是错误的。假设如果士兵有一个提名或者 Voldemort 或者 Foo-Foo（因为他们都将被释放）的选择，那么他随机非正式命名两个中的 1 个。

解：Sauron 被错误推断。为了理解他的错误，让我们开始通过算出样本空间，注明感兴趣的事件和计算概率结果：



定义事件 S,F，且"F"如下：

"F" ＝ 士兵说 Foo-Foo 被释放
F = Foo-Foo 被释放
S = Sauron 被释放

在每种情况的结果在树图中标注了。

Sauron 的错误是不能意识到事件 F(Foo-Foo 将被释放)是和事件"F"不同的（卫兵说 Foo-Foo 将被释放）。特别的，Sauron 被释放的概率，给出 Foo-Foo 被释放，是 1/2：

$$\Pr(S \mid F) = \frac{\Pr(S \cap F)}{\Pr(F)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

但是 Sauron 被释放的概率，给出士兵仅仅说如此仍然是 2/3：

$$\Pr(S \mid \text{“}F\text{”}) = \frac{\Pr(S \cap \text{“}F\text{”})}{\Pr(\text{“}F\text{”})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

因此，Sauron 的被释放的概率实际上没有被士兵的陈述改变。

问题 4 您洗一副牌，给您朋友发一把 5 张牌的牌。

(a) 假设您的朋友说，“我有方片 A。”那么她有其他 A 的概率是多少？

解：这个实验的样本空间是一手 5 张牌的集合。所有的结果是大概相等，因此每个结果的概率是 $1/\binom{52}{5}$。令 S 是您的朋友有方片 A 的事件，令 A 是您的朋友有另一个 A 的事件。我们的目标是计算：

$$\Pr(A \mid S) = \frac{\Pr(A \cap S)}{\Pr(S)}$$

包括方片 A 的牌把的数目等于从剩余的 51 张牌中选择 4 张牌的方式。因此，

$$\Pr(S) = \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$$

包括方片 A 的手牌和至少一个更多的 A 是的个数是：

$$|A \cap S| = \binom{3}{1}\binom{48}{3} + \binom{3}{2}\binom{48}{2} + \binom{3}{3}\binom{48}{1}$$

这里第一项计算有一个多余的 A 的把的个数，因为有 $\binom{3}{1}$ 方法来选择多于的 A，且有 $\binom{48}{3}$ 方式来选择剩余的其他牌。同样的，第二项计算有两个 A 的把的个数，最有一项计算有 3 个 A 的把的个数。在概率项中，我们有：

$$\Pr(A \cap S) = \frac{\binom{3}{1}\binom{48}{3} + \binom{3}{2}\binom{48}{2} + \binom{3}{3}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

替换这些结果到原来的方程中给出解：

$$\Pr(A \mid S) = \frac{\binom{3}{1}\binom{48}{3} + \binom{3}{2}\binom{48}{2} + \binom{3}{3}\binom{48}{1}}{\binom{51}{4}} = 0.2214\ldots$$

(b) 假设您的朋友说，“我有一个 A”，那么她有其他 A 的概率是多少？

解：样本空间和结果概率和以前一样。令 L 是您的朋友有至少一个 A 的事件，且 M 是您的朋友有之多一个 A 的事件。我们的目标是计算：

$$\Pr(M \mid L) = \frac{\Pr(M \cap L)}{\Pr(L)} = \frac{\Pr(M)}{\Pr(L)}$$

第二个等式成立因为您的朋友确定至少一个 A，如果她有多于一个 A；也就是，M ⊆ L。您的朋友至少有一个 A 的概率是：

$$\Pr(L) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

÷

第一项计算有一个 A 的牌把的个数，因为有 $\binom{4}{1}$ 方式来选择 A，且 $\binom{48}{4}$ 方式来选择剩余的 4 张牌。剩余的项是相似的。您的朋友有多于一个 A 的概率是：

$$\Pr(M) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

把这些结果带入到原来的等式给出：

$$\Pr(M \mid L) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{4}{1}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}} = 0.12285\ldots$$

(c) 您的(a)的结果和(b)的结果是否一样？解释为什么。

解：结果是不同的。有 4 个 A，因此您的朋友可能有 16 种不同的 A 的子集。

- 如果您的朋友说，"我有方片 A "，那么这些子集中的 8 个被派出在外：这些不包括方片 A。
- 然而，如果您的朋友说"我有一个 A"，那么仅有一个子集是被派出在外的，这个集合不包括 A。

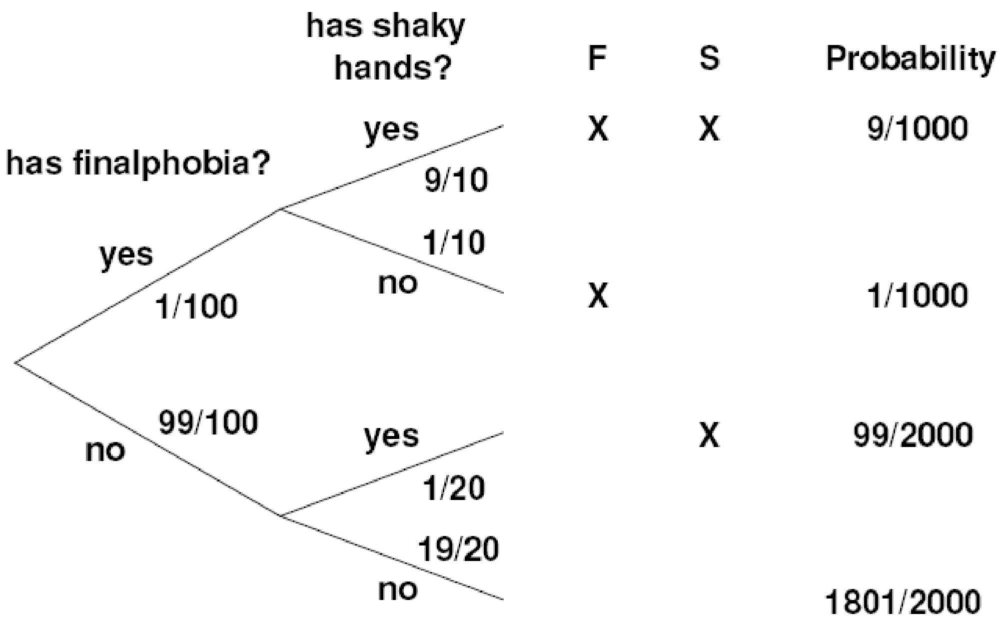
因此，您的朋友有第二个 A 的概率在这两种情况中的概率是不同的，因为我们在两个非常不同的事件上有条件。

问题 5（从一共老的期末考试.）Finalphobia 是一个稀有的疾病，在这里受害者有错觉他或者她受限于一个紧张的数学考试。

- 一个人随机的非正式的拥有 finalphobia 的概率是 1/100。
- 一个有 finalphobia 的人有颤抖手的概率是 9/10。
- 一个没有 finaphobia 的人有颤抖手的概率是 1/20。

这个人平均随机选择一个有 finalphobia 的概率是多少，给定他或他有颤抖的手。

解。令 F 是随机选择有 finaphobia 的人的事件，且令 S 是他或她有颤抖手的概率。一个如下的树图说明：



一个人有 finaphobia 的概率，给出他或她有颤抖手的概率：

$$\begin{aligned}\Pr(F \mid S) &= \frac{\Pr(F \cap S)}{\Pr(S)} \\ &= \frac{9/1000}{9/1000 + 99/2000} \\ &= \frac{18}{18+99} \\ &= \frac{18}{117}\end{aligned}$$

问题 6 他们的 hum-drum duties 外为 6.042 助教，Ishan 试图仅仅使用高度集中来移动物体，Grant 释放一个”Wang 2008” 的总统竞选。假设 Ishan 移动物体的概率是 1/6，Grant 变成总统的概率是 1/4，一个的成功并不改变另一个的机会。

(a) 如果至少他们中的一个成功，Ishan 学习移动物体的概率是多少？

解：令 L 是 Ishan 学习移物的事件，令 P 是 Grant 变成总统的事件。我们能按照如下方法算出想要的概率：

$$
\begin{aligned}
\Pr(L \mid (L \cup P)) &= \frac{\Pr(L \cap (L \cup P))}{\Pr(L \cup P)} \\
&= \frac{\Pr(L)}{1 - \Pr(\overline{L} \cap \overline{P})} \\
&= \frac{1/6}{1 - (1 - 1/6)(1 - 1/4)} \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

第一步使用条件概率的定义。在第二步，我们重写了分数的上面和下面，使用集合恒等式。然后，我们带入给定的概率和化简。

(b) 如果他们中的一个成功，Grant 变为美国总统的概率是多少？

解：和以前一样定义事件 L 和 P。

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(P \mid (\overline{L} \cup \overline{P})\right) &= \frac{\Pr\left(P \cap (\overline{L} \cup \overline{P})\right)}{\Pr\left(\overline{L} \cup \overline{P}\right)} \\
&= \frac{\Pr\left(P \cap \overline{L}\right)}{1 - \Pr(L \cap P)} \\
&= \frac{(1/4) \cdot (5/6)}{1 - (1/6) \cdot (1/4)} \\
&= \frac{5}{23}
\end{aligned}
$$

(c) 如果恰好他们中的一个成功，成功的是 Ishan 的概率是多少？
解：

$$\Pr\left(L \mid ((L \cap \overline{P}) \cup (\overline{L} \cap P))\right) = \frac{\Pr\left(L \cap \overline{P}\right)}{\Pr\left(((L \cap \overline{P}) \cup (\overline{L} \cap P))\right)}$$
$$= \frac{(1/6) \cdot (3/4)}{(1/6) \cdot (3/4) + (5/6) \cdot (1/4)}$$
$$= \frac{3}{8}$$

问题 7 我们计算机有一个游戏 Minesweeper。 在这个游戏中，有一个 8×8 的方格。是个随机选择的方格包括地雷，所有的地雷的配置都可能是相等的。

(a) 这个游戏的样本空间是什么，每个结果的概率是什么？

解：这本空间包括所有的把 10 个地雷放到 8×8 面板上的安排。所有这些配置有相同的概率，这个必须是：

$$1/\binom{64}{10}$$

(b) 当我制造少数移动，游戏板看起来像这样的：

			1	1	3		

现在我知道三个标数字的方块不包括地雷。更进一步说，每个数字表示有多少个方块和包括地雷的数字 d_0 相邻。（两个方块是相邻的，如果他们共享一条边或一个角。）令 E ⊆ S 是和这个数字一致的地雷配置。描述所有的在事件 E 中的结果。

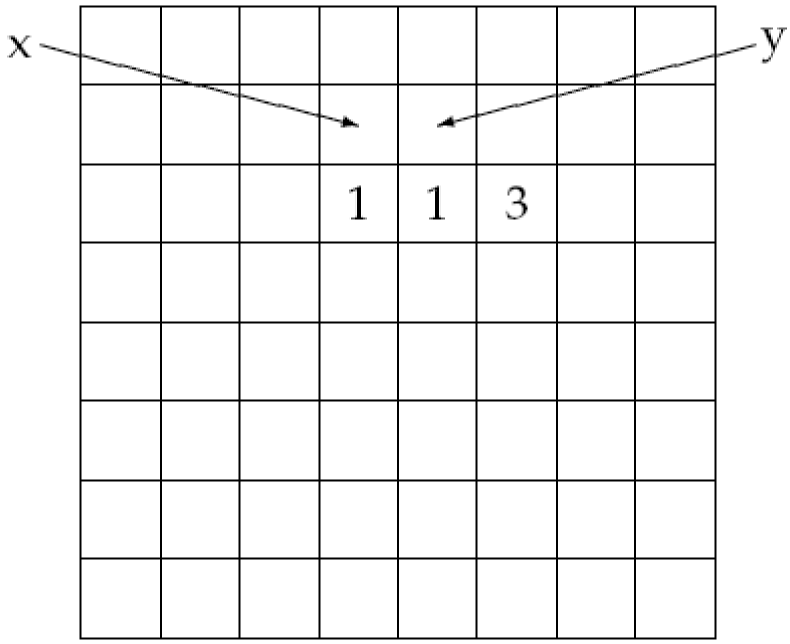
解：这里是一个为了讨论有一些标注的方块板面：

		a	b	c	d	e	
		a	1	1	3	e	
		a	b	c	d	e	

我们能在 E 中划分所有的结果为 3 组，基于在方块之间的地雷的分布，标记为 a,b,c,d 和 e，且 49 个空白方格。

# of mines						
a	b	c	d	e	other	# of configurations
1	0	0	1	2	6	$\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{49}{6}$
0	1	0	0	3	6	$\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{3}\binom{49}{6}$
0	0	1	0	2	7	$\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}\binom{49}{7}$

(c) 在下一次移动中，我们必须点击没有标记数字的方格。如果方格包括一个地雷，我们就输了！在下图中方格标记为 x 和 y 看起来是一个可行的选择。



在标记 x 的方块处有地雷的概率是什么？

解：如果在方块 x 处有地雷，那么所有的和数字相邻的其他方块的状态完全被判定，且其他 49 个方块中的 6 个被排雷。因此，x 被排雷的概率是：

$$\Pr(\text{x mined} \mid E) = \frac{\Pr(\text{x mined} \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\binom{49}{6}}{|E|} = 0.0175\ldots$$

(d)　在标记 y 的方格中有地雷的概率是多少？
解：如果在方格 y 中有地雷，那么 3 个方格中的 2 个标记为 e 被挖掘，剩余的 49 个方格中的 7 个也被挖掘。因此，在 y 处有一个地雷的概率是：

$$\Pr(\text{y mined} \mid E) = \frac{\Pr(\text{y mined} \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\binom{3}{2}\binom{49}{7}}{|E|} = 0.324\ldots$$

因此在 y 处地雷的概率是在 x 处有地雷的概率的 18＋倍。

(您也许以符号的形式给出答案，但是数字回答肯定是更有趣！)