问题集 10 的解

到期：星期一下午 9 点，5 月 2 日

问题 1 证明以下关于独立性的问题的答案。

(a) 假设你滚动一个有六面的骰子，标号为 1，2，…，6。在顶部的数字是 2 的倍数的事件是独立于在顶部的数字是 3 的倍数的事件？

解：令 A 是顶部是 2 的倍数的事件，令 B 是顶部是 3 的倍数的事件。我们有：

$$\Pr(A)\cdot\Pr(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}=\Pr(A\cap B)$$

因此，这些事件是独立的。

(b) 现在假设你滚动一个有 4 个面的骰子，标号为 1，2，3，4。在顶部的数字是 2 的倍数的事件是独立于在顶部的数字是 3 的倍数的事件？

解：和以前一样，令 A 是顶部是 2 的倍数的事件，且令 B 是顶部是 3 的倍数的事件。现在，然而，我们有：

$$\Pr(A)\cdot\Pr(B)=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

但是：

$$\Pr(A\cap B)=0$$

因为这些结果不一致，事件不是独立的。

(c) 现在假设你滚动一个有 8 个面骰子，标数为 1，2，…，8。再一次，顶部是 2 的倍数的事件是独立于顶部是 3 的倍数的事件吗？

解：正如以前一样，令 A 是顶部是 2 的倍数的事件，且令 B 是顶部是 3 的倍数的事件。这次，我们有：

$$\Pr(A)\cdot\Pr(B)=\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{8}$$

且：

$$\Pr(A\cap B)=1/8$$

因此，这个事件是独立的。

(d) 最后，假设我们再一次滚动 8 个面的骰子，令随机变量 X 是当顶部能被 2 整除后得到的余数，令随机变量 Y 是顶部被 3 整除后得到的余数。随机变量 X 和 Y 是独立的吗？

解：首先，让我们表格化 X 和 Y 的值：

die roll	X	Y
1	1	1
2	0	2
3	1	0
4	0	1
5	1	2
6	0	0
7	1	1
8	0	2

从表格工作，我们得到：

$$\Pr(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{2}{8}$$

但是：

$$\begin{aligned}\Pr(X = 1) \cdot \Pr(Y = 1) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{16}\end{aligned}$$

既然这些结果是冲突的，随机变量不是独立的。

问题 2 Philo T.Megabrain， 一个著名的超心理学研究者，发现一个惊奇的现象！他在一个不透明的，隔音的物体两边各放一个超能力者。每个超能力者滚动一个骰子，看着它，并试图用心灵感应方法猜测另一侧的数字。既然骰子是公平的和独立的，超能力应该 6 次中有一次正确猜测。然而，在扩展测试后，Philo 已经发现他们事件上能做更好。

(a) Philo 的一些任意的策略是运行测试一次有一次，直到两个超能力者在同一次滚动一个 6。然后他立刻终止这天的测试，在超能力这猜测之前。解释 Philo 的试验在定性上的瑕疵。

解：如果一个超能力者看到在她自己一边的骰子上的 6，她知道不用能猜测另一侧也是 6。

(b) 如果一个超能力者乐观地探索这一瑕疵，她猜测对方骰子的数字的概率是什么？

解：如果她可能到一个 1，2，3，4，或者 5，那么她的猜测其他骰子的概率是正常的 1/6。然而，如果她看到一个 6，那么她知道其他骰子不是 6，且因此她的猜测其他骰子的概率是 1/5。通过全概率定理，她正确猜测其他骰子的概率是：

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{31}{180}$$

问题 3 有一个集合 P 包括 1000 人。

20%的人最喜欢的颜色是蓝色。

30%的人最喜欢的颜色是绿色。

50%的人最喜欢的颜色是红色。

(a) 假设我们平均和随机地选择两各人的集合$\{p_1,p_2\} \subseteq P$。令随机变量是 C_1 和 C_2 表示最喜欢的颜色。C_1 和 C_2 是独立的吗？证明你的答案。

解：不。例如，$Pr(C_1=$ 蓝色$)$ ＝ 200/1000.。然而

$$Pr（C_2=蓝色|C_1=蓝色) ＝ 199/999。$$

既然剩余的 999 个人中的 199 个人喜欢蓝色，在一个喜欢蓝色的人被选定后。

(b) 假设我们均匀和随机的选择两个人$(p_1,p_2) \in P\times P$。令随机变量 C_1 和 C_2 表示他们最喜欢的颜色。现在是 C_1 和 C_2 独立的吗？证明你的回答。

解：是的。令 c(n)是地 n 个人喜欢的颜色。随机变量 p_1 和 p_2 是独立的。独立随机变量的函数是独立的，因此 $C_1=c(p_1)$且 $C_2 = c(p_2)$是独立的。

问题 4 秘密文档从 CIA 的总部消失了。一些档案简单地以为放错地方了。但是安全长官怀疑其他人开始通过特工 X 偷窃，然后传递到 Liechtenstein 政府来进一步它的无关的全球信息的搜集。两个调查员分配来调查这件事情。

- 调查员 AM 在给定的天中判定档案消失的事件是独立于特工 X 在这些天中在总部的事件。
- 同样，调查员 PM 判定在给定夜晚期间档案小时的事件独立于特工 X 那晚在周围的事件。

安全长官得出的结论式档案的消失是独立于特工 X 出现的事件的。因此特工 X 可能是无辜的。

(a) 构建一个情况的概率模型。说明调查员的判定和安全长官的结论为概率。

解：令样本空间 S 是白天和夜晚的集合。定义如下 3 个事件。

D = 秘密档案消失

X = 特工 X 在总部

A ＝ 现在是白天

在折现项中，调查员 AM 说：

$$\Pr(D\cap X \mid A)=\Pr(D\mid A)\cdot\Pr(X\mid A)$$

调查员 PM 说：

$$\Pr\left(D \cap X \mid \overline{A}\right) = \Pr\left(D \mid \overline{A}\right) \cdot \Pr\left(X \mid \overline{A}\right)$$

且安全长官得出结论：

$$\Pr(D \cap X) = \Pr(D) \cdot \Pr(X)$$

(b) 安全长官的推理是正确的吗？证明你的回答。
解：安全长官是错误的。例如，假设 S 包括一个单独的白天和夜晚：

S = {day,night}

分配夜晚和白天每个概率是 1/2。现在假设特工 X 是在夜晚是在周围且档案在夜晚消失了：

D = {夜晚}
X= {夜晚}
A = {白天}

进一步说，假设 Pr(白天)= Pr(夜晚) = 1/2。这些假设是和长官的判定是一致的：

$$\Pr(D \cap X \mid A) = \frac{\Pr(D \cap X \cap A)}{\Pr(A)} = 0$$

$$\Pr(D \mid A) \cdot \Pr(X \mid A) = \frac{\Pr(D \cap A)}{\Pr(A)} \cdot \frac{\Pr(X \cap A)}{\Pr(A)} = 0$$

$$\Pr\left(D \cap X \mid \overline{A}\right) = \frac{\Pr\left(D \cap X \cap \overline{A}\right)}{\Pr\left(\overline{A}\right)} = 1$$

$$\Pr\left(D \mid \overline{A}\right) \cdot \Pr\left(X \mid \overline{A}\right) = \frac{\Pr\left(D \cap \overline{A}\right)}{\Pr\left(\overline{A}\right)} \cdot \frac{\Pr\left(X \cap \overline{A}\right)}{\Pr\left(\overline{A}\right)} = 1$$

然而，安全长官的结论是错误的，因为：

$$\Pr(D \cap X) = \Pr(\text{night}) = 1/2$$

但是:

$$\Pr(D) \cdot \Pr(X) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$$

因此，特工 X 最终将是有罪的！

问题 5 假设你翻转 n 个公平，独立的硬币。令随机变量 X 是出现正面的次数。

(a) Pr(X≤ k)的值是什么，翻转 k 或者更少的正面的概率是多少？你的回答不需要在闭形。
解：

$$\frac{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}+\ldots+\binom{n}{0}}{2^n}$$

(b) 假设 k<n/2 证明：

$$\Pr(X\le k)\le\frac{n-k+1}{n-2k+1}\cdot\Pr(X=k)$$

(给出你的前面的回答的带有无限几何上界且求和)
解：我们能按照如下方法给出在前面的回答中上界：

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}+\ldots+\binom{n}{0}\\&=\binom{n}{k}+\frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k}+\frac{k(k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)}\binom{n}{k}+\frac{k(k-1)(k-2)}{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}\binom{n}{k}+\ldots\\&\le\binom{n}{k}\cdot\left(1+\frac{k}{n-k+1}+\frac{k^2}{(n-k+1)^2}+\frac{k^3}{(n-k+1)^3}+\ldots\right)\\&=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{n-k+1}}\\&=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k+1}{n-2k+1}\end{aligned}$$

(注释：几何和收敛当且仅当 k < n/2。)因此，

$$\Pr(X\le k)\le\frac{n-k+1}{n-2k+1}\cdot\Pr(X=k)$$

(c) 如果你翻硬币 100 次，翻转恰好有 30 个正面的概率大约是 100 万分之 23。给出翻转 30 或者更少正面的概率的上界。
解：应用前面给出的上界：

$$\left(23\cdot10^{-6}\right)\cdot\frac{100-30+1}{100-2\cdot30+1}\approx40\cdot10^{-6}$$

实际值大约是 $39.25\cdot10^{-6}$.

问题 6 许多最好的计算机算法依赖于随机性。然而，产生均匀的，互斥的独立随机比特不是很简单的！（数学家 John von Neumann 说，“任何人考虑产生随机数的数学方法，当然是一种罪恶的状态。”）幸运的是，一些算法和成双独立随机比特能很好地工作，这也相对“廉价”。特别，一个人能把一个集合的相互独立的比特转化为指数级的大集合的二位独立随机比特。

令 B 是 n 非一致，相互独立的 0-1 随机变量集合。

(a) 令 S 在 B 中的比特的是非空子集。令随机变量 S 是在 S 中所有比特的 XOR。说明 s 在{0,1}上是均一分布的。

(暗示：令 b 是在 S 中的一个比特，令 s 是 XOR 所有其他在 S 中的比特。

解　。

$$\begin{aligned}
\Pr(s=0) &= \Pr(s'=0\cap b=0)+\Pr(s'=1\cap b=1)\\
&= \Pr(s'=0)\Pr(b=0)+\Pr(s'=1)\Pr(b=1)\\
&= \frac{1}{2}\Pr(s'=0)+\frac{1}{2}\Pr(s'=1)\\
&= \frac{1}{2}(\Pr(s'=0)+\Pr(s'=1))\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

我们首先重写事件 s= 0，然后使用 b 和 s’的独立性。剩余的步骤使用 b 是 0 或 1 等概率的事实，且 s 或者是 0 或者是 1（有不可知的概率）。既然有 1/2 的概率 s=0，我们必有 s=1 也有 1/2 的概率，因此 s 是在{0,1}上的均匀分布。

(b) 现在令 T 是在 B 中的比特的另一个非空子集。令随机变量 t 是在 T 中的所有的比特的 XOR 的值。说明 s 和 t 是独立的。

（提示：定义 s’是 S-T 中的所有的比特的 XOR，t’是在 T-S 中的所有比特的 XOR，且 i 是在 S∩T 中的比特。现在考虑三种情况：(1) S∩T= ∅ ,(2) S∩T = S 或者 S∩T= T，且(3) S ∩ T≠∅,S，或者 T）

解：我们必须说明 Pr(s=a∩t=b)= Pr(s=a)Pr(t=b)对于所有的 a 和 b。通过前面问题部分，Pr(s=a) = Pr(t=2)= 1/2。因此我们真正仅仅需要说明对于所有的 a 和 b:

Pr(s= a∩ t= b)= 1/4

定义随机变量 s’,t’和 i 正如以上描述的。这些随机变量是相互独立的，因为他们是相互独立的比特的函数。我们能重我们尝试分析的数量，Pr(s=a∩t=b)，根据如下的那些变量：

$$\begin{aligned}\Pr(s=a\cap t=b) &= \Pr(s'=a\cap t'=b\cap i=0)\\ &+\Pr\left(s'=\overline{a}\cap t'=\overline{b}\cap i=1\right)\\ &=\Pr(s'=a)\Pr(t'=b)\Pr(i=0)\\ &+\Pr(s'=\overline{a})\Pr\left(t'=\overline{b}\right)\Pr(i=1) \qquad (*)\end{aligned}$$

现在我们分析三种情况：

1. 如果 S∩T = ∅，那么 Pr(i=0)=1 且 Pr(i=1)=0。然而，集合 S-T 和 T-S 是非空的，因此由前面部分得到 Pr(s’=a)=Pr(t’=b)=1/2，替换到(*)给出：

$$\Pr(s=a\cap t=b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{4}$$

2. 如果 S∩T=S，那么 S-T= ∅，且 Pr(s’=0)=1 且 Pr(s’=1)=0.集合 S∩T 和 T-S 是非空的，因此由前面部分得 i 和 t’是均匀分布的。代入(*)给出：

$$\Pr(s=a\cap t=b)=0\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

如果 S∩T=T，那么堆成得证明成立。

3. 如果 S∩T ≠∅，S,或者 T，那么集合 S-T,T-S,和 S∩T 都是非空的。因此，s’,t’和 i 都是均匀分布的。代入到（*）给出：

$$\Pr(s=a\cap t=b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

因此，s 和 t 是独立的。

(c) 解释如何从 n 个均匀互相独立的 0-1 随机变量的集合上构造 2^n-1 均匀，二值独立的 0-1 随机变量。

解：取所有的非空子集的和模 2。在两个前面的部分，我们证明了这些随机变量是均匀和二值独立的。

（数量 a_1 XOR a_2 XOR … XOR 是等于*(a_1 +a_2 +…+a_3) rem 2。）