复习练习 22 的笔记

1. 条件期望和全期望

存在条件期望，正如有条件概率一样。如果 R 是一个随机变量且 E 是事件，那么条件期望 Ex(R|E) 被定义为：

$$\operatorname{Ex}(R \mid E) = \sum_{w \in S} R(w) \cdot \Pr(w \mid E)$$

例如，令 R 是一个骰子滚动的个数，另 E 是事件的个数。让我们计算 Ex(R|E)， 不动的骰子的期望值，给定结果是偶数。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ex}(R \mid E) &= \sum_{w \in \{1,\dots,6\}} R(w) \cdot \Pr(w \mid E) \\
&= 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 4
\end{aligned}$$

它帮助解释条件期望， Ex(R|E) 是 R 的期望根据定义在 PSet 10 中的概率测量 $\Pr_E()$ 。因此它是线性的：

$$\operatorname{Ex}(R_1 + R_2 \mid E) = \operatorname{Ex}(R_1 \mid E) + \operatorname{Ex}(R_2 \mid E).$$

条件期望真正对分解期望到不同情况的计算时有用的。分解通过相似于全概率定理的定理证明。

定理 1（全期望） 令 $E_1 \dots E_n$ 是特定取向空间的时间，且都有非 0 概率。如果 R 是随机变量，那么：

$$\operatorname{Ex}(R) = \operatorname{Ex}(R \mid E_1) \cdot \Pr(E_1) + \cdots + \operatorname{Ex}(R \mid E_n) \cdot \Pr(E_n)$$

例如，令 R 是在公平骰子之上的得到的数字且 E 是结果是偶数的事件。令 $\overline{E}$ 是结果是奇数的事件。因此全期望定理说明：

$$\underbrace{\operatorname{Ex}(R)}_{=7/2} = \underbrace{\operatorname{Ex}(R \mid E)}_{=4} \cdot \underbrace{\Pr(E)}_{=1/2} + \underbrace{\operatorname{Ex}(R \mid \overline{E})}_{=?} \cdot \underbrace{\Pr(E)}_{=1/2}$$

这里仅有的我们不知道的数是 $\operatorname{Ex}(R \mid \overline{E})$， 其是期望的投掷数，给出结果是奇数。为

未知数求解这个方程，我们得出结论是：$\operatorname{Ex}\left(\breve{R} \mid \overline{E}\right) = 3.$。

为了证明全期望定理，我们从一个引理开始。

引理 令 R 是随机变量， E 是由正概率的事件，且 I_E 是 E 的指示变量。那么，

$$\operatorname{Ex}(R \mid E) = \frac{\operatorname{Ex}(R \cdot I_E)}{\Pr(E)} \tag{1}$$

证明：对任何结果的注释， s， 在样本空间，

$$\Pr(\{s\} \cap E) = \begin{cases} 0 & \text{if } I_E(s) = 0, \\ \Pr(s) & \text{if } I_E(s) = 1, \end{cases}$$

且因此，

$$\Pr(\{s\} \cap E) = I_E(s) \cdot \Pr(s). \tag{2}$$

现在，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ex}(R \mid E) &= \sum_{s \in S} R(s) \cdot \Pr(\{s\} \mid E) && (\text{Def of } \operatorname{Ex}(\cdot \mid E)) \\
&= \sum_{s \in S} R(s) \cdot \frac{\Pr(\{s\} \cap E)}{\Pr(E)} && (\text{Def of } \Pr(\cdot \mid E)) \\
&= \sum_{s \in S} R(s) \cdot \frac{I_E(s) \cdot \Pr(s)}{\Pr(E)} && (\text{by } (2)) \\
&= \frac{\sum_{s \in S} (R(s) \cdot I_E(s)) \cdot \Pr(s)}{\Pr(E)} \\
&= \frac{\operatorname{Ex}(R \cdot I_E)}{\Pr(E)} && (\text{Def of } \operatorname{Ex}(R \cdot I_E))
\end{aligned}$$

□

现在我们证明全期望定理。

证明：既然 E_i 是样本空间分割，

$$R = \sum_i R \cdot I_{E_i} \tag{3}$$

对于任何随机变量， R。

因此，

$$\begin{aligned} \text{Ex}(R) &= \text{Ex}\left(\sum_i R \cdot I_{E_i}\right) && \text{(by (3))} \\ &= \sum_i \text{Ex}(R \cdot I_{E_i}) && \text{(linearity of Ex ())} \\ &= \sum_i \text{Ex}(R \mid E_i) \cdot \Pr(E_i) && \text{(by (1))} \end{aligned}$$

□

问题 1：在 6.042 期终考试根据一个严谨的过程评分:

- l 以概率为 4 /7 考试复习练习讲师给分，概率 2/7 有讲师给出成绩，以概率 1 /7，它偶然下落到辐射后面，任意给定成绩 84。

- l 复习练习讲师计分考试，通过单独地计分每个问题，然后求和。

  - n – 有十个真/假 问题，每个 2 分。对于每个问题，全部分数都给的可能性是 3 /4，且没有分给出的概率是 1 /4.
  - n –有四个问题每个 15 分。对于每个问题，比分是由滚动二个公平的骰子决定，求和结果，和加 3。
  - n –唯一 20 分问题被授予或 12 或 18 分，以相等的概率。

- l 讲师计分考试，通过滚动一个公平的骰子两次，倍乘结果，和然后增加一个“一般印象”分。

  –以概率 4/10，一般映像分是 40 。
  –以概率 3/10，一般映像分时 50。
  以概率 3/10，一般印象比分是 60 。

  假设所有任意选择在分级的过程期间相互独立。

(a) 复习练习讲师期望的分数是什么？

解：令 X 等于测验成绩和 C 是由复习练习讲师评分的考试的概率。我们想要计算 Ex(X | C) 。由(有条件) 期望线性定理，问题分数的期望的总和是的期待的问题分的总和。所以，我们有：

Ex(X |C)= 10· Ex(T/F 分数 |C)+4· Ex(15 分概率分数| C)+Ex(20 分概率分数|C)

$$= 10 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0\right) + 4 \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{2} + 3\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 18\right)$$
$$= 10 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 10 + 15 = 70$$

(b) 在一次考试上由讲师给出的期望分是什么？

解： 现在我们想要 $\text{Ex}\left(X \mid \bar{C}\right)$， 一个讲师给出的期望分数。再次使用线性定理，我们有：

$$\begin{aligned}\text{Ex}\left(X \mid \bar{C}\right) &= \text{Ex}\left(\text{product of dice} \mid \bar{C}\right) \\ &\quad + \text{Ex}\left(\text{general impression} \mid \bar{C}\right) \\ &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{4}{10} \cdot 40 + \frac{3}{10} \cdot 50 + \frac{3}{10} \cdot 60\right) \\ &= \frac{49}{4} + 49 = 61\frac{1}{4}\end{aligned}$$

（因为投掷是独立的）

（c） 在 6.042 考试中的期望分时什么？

解：令 X 等于真正的考试成绩。全期望定理蕴含：

$$\begin{aligned}\text{Ex}(X) &= \text{Ex}(X \mid C)\Pr(C) + \text{Ex}\left(X \mid \bar{C}\right)\Pr\left(\bar{C}\right) \\ &= 70 \cdot \frac{4}{7} + \left(\frac{49}{4} + 49\right) \cdot \frac{2}{7} + 84 \cdot \frac{1}{7} \\ &= 40 + \left(\frac{7}{2} + 14\right) + 12 = 69\frac{1}{2}\end{aligned}$$

问题 2 ：这里是另一种有趣的 6.042 游戏！你选择从 1 到 6 之间的数字。然后你滚三个公平的，独立的骰子。

- 如果你的数字没有出现，那么你就失去了一美元。
- 如果你的数字出现一次，那你赢一美元。
- 如果你的数字出现了两次，那么你就赢两美元。

• 如果你的数字出现了 3 次，你赢四元！

什么是你的预期收益呢？玩这个游戏可能会赚钱或者不能？

解:令随机变量 R 是由玩家在一个回合中赢得或失去的钱的数量。我们可以按照如下方法计算出期望值 R:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(R) &= -1\cdot\Pr(0\text{ matches}) + 1\cdot\Pr(1\text{ match}) + 2\cdot\Pr(2\text{ matches}) + 4\cdot\Pr(3\text{ matches})\\ &= -1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\cdot 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\cdot 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) + 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\\ &= \frac{-125+75+30+4}{216}\\ &= \frac{-16}{216}\end{aligned}$$

你在每轮中期望失去 16/216 美元（大约 7.4 美分）。这是一个可怕的游戏。

问题 3 每次 Monopoly 游戏前进的方格数由以下决定：

•滚动两个骰子，求得到的数目的和，前进这个数个方格。
•如果你滚双倍（即，相同数目的时候就都骰子），然后你滚动第三次，计算总数，并前进增加的个数的方格。
• 然而，作为一个特殊的情况下，如果你在第三次滚动两次，那你去坐牢。视此为整体前进零个方块。

（a）什么是两个骰子的期望和，在两边都给出同样的数字?

解：有六个相等概率和 2,4,6,8,10 和 12。因此，期望和是：

$$\frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \ldots + \frac{1}{6}\cdot 12 = 7$$

(c) 两个骰子的期望和是什么，给出不同的产生的数字？（使用你的前面的答案和全期望定理）。

解。 令随机变量 D1 和 D2 市两个骰子得到的数字。令 E 是他们相等的事件。全期望定理说：

$$\mathrm{Ex}(D_1+D_2) = \mathrm{Ex}(D_1+D_2 \mid E)\cdot\Pr(E) + \mathrm{Ex}\left(D_2+D_2 \mid \overline{E}\right)\cdot\Pr\left(\overline{E}\right)$$

两个骰子都是相等的概率 Pr（E） =1 / 6 ，这两个独立的骰子死亡期望和是 7 ，我们只显示 Ex（ D_1 + D_2|E） = 7 。把这些带入这些变量且求解方程，我们发现：

$$7 = 7 \cdot \frac{1}{6} + \mathrm{Ex}\left(D_2 + D_2 \mid \overline{E}\right) \cdot \frac{5}{6}$$

$$\mathrm{Ex}\left(D_2 + D_2 \mid \overline{E}\right) = 7$$

为了化简分析，假设，我们一贯滚骰子的 3 倍，但可能忽略了第二滚动或第三滚动，如果我们没有先前获得翻倍。令随机变量 X_i 是在第 i 次滚动的骰子的和，且令 E_i 是第 i 次滚动翻倍的事件。写出在这些项目中的期望数目的方格。

解：从全期望公式，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(\text{advance}) = {} & \mathrm{Ex}\left(X_1 \mid \overline{E_1}\right) \cdot \Pr\left(\overline{E_1}\right) \\ & + \mathrm{Ex}\left(X_1 + X_2 \mid E_1 \cap \overline{E_2}\right) \cdot \Pr\left(E_1 \cap \overline{E_2}\right) \\ & + \mathrm{Ex}\left(X_1 + X_2 + X_3 \mid E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) \cdot \Pr\left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) \\ & + \mathrm{Ex}\left(0 \mid E_1 \cap E_2 \cap E_3\right) \cdot \Pr\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3\right)\end{aligned}$$

使用全期望的线性定理，我们简化这个为：

$$\begin{aligned}& \mathrm{Ex}(\text{advance}) \\ & = \mathrm{Ex}\left(X_1 \mid \overline{E_1}\right) \cdot \Pr\left(\overline{E_1}\right) \\ & \quad + \left(\mathrm{Ex}\left(X_1 \mid E_1 \cap \overline{E_2}\right) + \mathrm{Ex}\left(X_2 \mid E_1 \cap \overline{E_2}\right)\right) \cdot \Pr\left(E_1 \cap \overline{E_2}\right) \\ & \quad + \left(\mathrm{Ex}\left(X_1 \mid E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) + \mathrm{Ex}\left(X_2 \mid E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) + \mathrm{Ex}\left(X_3 \mid E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right)\right) \\ & \qquad \cdot \Pr\left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) \\ & \quad + 0.\end{aligned}$$

使用互斥滚动的独立，我们简化这个为：

$$\begin{aligned}& \mathrm{Ex}(\text{advance}) \\ & = \mathrm{Ex}\left(X_1 \mid \overline{E_1}\right) \cdot \Pr\left(\overline{E_1}\right) \\ & \quad + \left(\mathrm{Ex}(X_1 \mid E_1) + \mathrm{Ex}\left(X_2 \mid \overline{E_2}\right)\right) \cdot \Pr(E_1) \cdot \Pr\left(\overline{E_2}\right) \\ & \quad + \left(\mathrm{Ex}(X_1 \mid E_1) + \mathrm{Ex}(X_2 \mid E_2) + \mathrm{Ex}\left(X_3 \mid \overline{E_3}\right)\right) \cdot \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2) \cdot \Pr\left(\overline{E_3}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

(d) 在 Monopoly 中期望的前进的方格数是什么？

解：我们把(a)和(b)带入到等式(4)中：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(\text{advance}) & = 7 \cdot \frac{5}{6} + (7+7) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + (7+7+7) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ & = 8\frac{19}{72}\end{aligned}$$