复习练习 16 的笔记

问题 1 对以下序列寻找闭形的生成函数。您不需要关心收敛的问题。

(a) <2,3,5,0,0,0,...>

解：

$$2 + 3x + 5x^2$$

(b) <1,1,1,1,1,1,…>

解：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

(c) <1,2,4,8,16,32,64,…>

解：

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots &= (2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + (2x)^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{1-2x} \end{aligned}$$

(d) <1,0,1,0,1,0,1,0,…>

解：

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

(e) <0,0,0,1,1,1,1,1,…>

解：

$$x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots = x^3(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \qquad = \frac{x^3}{1-x}$$

(f) <1,3,5,7,9,11,…>

解：

$$
\begin{aligned}
1 + x + x^2 + x^3 + \ldots &= \frac{1}{1-x} \\
\frac{d}{dx}\, 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots &= \frac{d}{dx}\, \frac{1}{1-x} \\
1 + 2x + 3x^2 + 4x^2 + \ldots &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
2 + 4x + 6x^2 + 8x^2 + \ldots &= \frac{2}{(1-x)^2} \\
1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots &= \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1+x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

问题 2 对序列寻找闭形生成函数：

$$(t_0, t_1, t_2, \ldots)$$

这里 t_n 是组成 n 个油炸圈饼的袋子的不同方式，受限与如下限制。

(a) 所有的油炸圈饼是巧克力的且至少有 3 个。

解：

$$\frac{x^3}{1-x}$$

(b) 所有的油炸圈饼是光滑的，至少有 4 个。

解：

$$\frac{1-x^5}{1-x}$$

(c) 所有的油炸圈饼是可可且恰好存在 2 个。

解：

$$x^2$$

(d) 所有的油炸圈饼是平的，且是 4 的倍数。
解：

$$\frac{1}{1-x^4}$$

(e) 油炸圈饼必须是巧克力，光滑，可可或是平的：且
必须至少有 3 个巧克力的油炸圈饼。
必须有至少 4 个光滑的。
必须恰有 2 个可可的。
必须有 4 的倍数的平的。
解：

$$\frac{x^3}{1-x}\frac{1-x^5}{1-x}x^2\frac{1}{1-x^4}=\frac{x^5(1+x^2+x^3+x^4)}{(1-x)(1-x^4)}$$

问题 3：[20 分] 前面的问题给我们引入 Catalan 数字，C_0,C_1,C_2，…，这里它们中的第 n 个等于平衡字符串的个数，能使用 2n 个括号构造。这里是它们中前面的几个：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012

那么，在演讲中，我们都惊奇地看到无理数 $500000-1000\sqrt{249999}$ 的十进制扩展。

$$1.000001000002000005000014000042000132000429001430004862016796058786208012\ldots$$

编码这些数字！现在存在许多原因使得让某人相信宗教，但是这个关系可能不是好的。让我们解释为什么。

(a) 令 p_n 是包含 n 的平衡字符串。（解释为什么以下递推成立：

$$p_0=1, \qquad \text{(the empty string)}$$

$$p_n=\sum_{k=1}^{n} p_{k-1}\cdot p_{n-k}, \qquad \text{for } n\geq 1.$$

解：注意到每个非空平衡字符串包含一个或多个平衡字符串。在序列中的第一个平衡字符串必须以 a（且以“匹配”结束)。也就是，任何平衡字符串，r_n，有 n≥1 个(包括平衡字符串，s_{k-1}，用括号包括，包括 k-1 个（，通过平衡字符串得到，t_{n-1}，有 n-l 个 (：

R_n = (s_{k-1}) 有 t_{n-k} 得到。这里 1≤k ≤n。这个观察直接导致递推。

(b) 现在考虑对平衡字符串的数字的生成函数：

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots .$$

证明：

$$P(x) = xP(x)^2 + 1.$$

解：我们能使用递推关系来验证这个等式。

$$\begin{aligned}
xP(x)^2 + 1 &= x(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots)^2 + 1 \\
&= x(p_0^2 + (p_0 p_1 + p_1 p_0)x + (p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0)x^2 + \cdots) + 1 \\
&= 1 + p_0^2 x + (p_0 p_1 + p_1 p_0)x^2 + (p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0)x^3 + \cdots \\
&= 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots \\
&= P(x)
\end{aligned}$$

(c) 对生成函数 P(x)寻找一个闭形表达式。

解：给出 $P(x) = xP(x)^2 + 1$，二次方程式蕴涵

$$P(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

如果 x 是小的，那么 P(x)应该是关于 $p_0 = 1$。因此，正确的选择符号是：

$$P(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

(d) 说明 $P(1/1000000) = 500000 - 1000\sqrt{249999}.$

解：

$$\begin{aligned}
P(1/1000000) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4/1000000}}{2/1000000} \\
&= 500000 - 500000\sqrt{\frac{249999}{250000}} \\
&= 500000 - 1000\sqrt{249999}
\end{aligned}$$

(e) 解释为什么无理数数字编码这些平衡字符串的连续数字。

解：假设我们象征性地进在前面问题部分进行替换。

$$\begin{aligned} P(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots \\ P(10^{-6}) &= p_0 + p_1 10^{-6} + p_2 10^{-12} + p_3 10^{-18} + \cdots \end{aligned}$$

因此 p_0 出现在单元位置，p_1 出现在百万位置，p_2 出现在千万位置，等等。

问题 4：考虑以下递推方程：

$$T_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 2T_{n-1} + 3T_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases}$$

令 f(x)是对序列<T_0,T_1,T_2,T_3,…>的生成函数。

(a) 根据 f(x)对以下序列给出生成函数：

$$\langle 1, \quad 2, \quad 2T_1 + 3T_0, \quad 2T_2 + 3T_1, \quad 2T_3 + 3T_2, \ldots \rangle$$

解：我们能把这个分解为 3 个序列的线性组合：

$$\begin{array}{lllllllll} \langle & 1, & 2, & 0, & 0, & 0, & \ldots & \rangle & = 1 + 2x \\ \langle & 0, & T_0, & T_1, & T_2, & T_3, & \ldots & \rangle & = xf(x) \\ \langle & 0, & 0, & T_0, & T_1, & T_2, & \ldots & \rangle & = x^2 f(x) \end{array}$$

特别是，我们想要的序列非常近似通过 $1+2x+2xf(x)+3x^2f(x)$生成。然而，第二个项不是正好正确的；我们生成 $2+2T_0 = 4$，替换正确的值，也就是 2。我们通过从生成函数中减掉 2x，也就留下：

$$1 + 2xf(x) + 3x^2 f(x)$$

(b) 形成在 f(x)中的等式，求解获得生成函数 f(x)的闭形。

解：等式为：

$$f(x) = 1 + 2xf(x) + 3x^2 f(x)$$

等于所有定义有右边序列 T_0,T_1,T_2，…等式的左边。为 f(x)求解给出闭形生成函数：

$$f(x) = \frac{1}{1-2x-3x^2}$$

(c) 为 f(x)扩展闭形，使用部分分数。

解：我们能写：

$$1-2x-3x^2 = (1+x)(1-3x)$$

那么，存在限制 A 和 B，以致于：

$$f(x) = \frac{1}{1-2x-3x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-3x}$$

现在替换 x = 0 和 x = 1 给出方程系统：

$$1 = A + B$$
$$-\frac{1}{4} = \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

求解这个系统，我们发现 A = 1/4，且 B ＝ 3/4。因此，我们有：

$$f(x) = \frac{1/4}{1+x} + \frac{3/4}{1-3x}$$

(d) 从部分分数扩展寻找 T_n 的闭形表达式。

解：使用无限几何基数的求和公式给出：

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\right) + \frac{3}{4}\left(1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + 3^4x^4 + \ldots\right)$$

因此，x^n 的系数是：

$$T_n = \frac{1}{4}\cdot(-1)^n + \frac{3}{4}\cdot 3^n$$