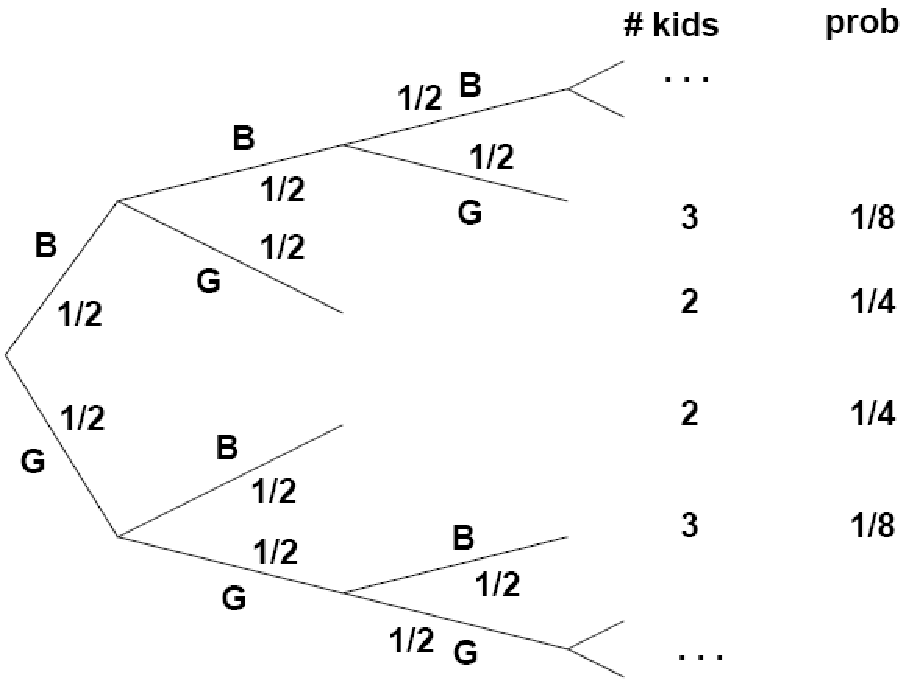
复习练习 21 的笔记

问题 1 ：一对夫妇决定要孩子，直到他们有一名男孩和一名女孩。他们最终的预期的子女数是什么？假定每个孩子是一个男孩或一个女孩的概率相同且性别是互相独立的。

解：有很多办法解决这个问题。我们从第一原理求解它。假设一对夫妇有子女，直到他们有两个男孩和一个女孩。这项实验的树图如下说明。



令随机变量 R 是这个夫妻有的孩子个数。从期望的定义得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R) &= \sum_{w \in S} R(w) \cdot \Pr(w) \\
&= \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \ldots\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \ldots\right) \\
&= 2\left(2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \ldots\right). \qquad (1)
\end{aligned}$$

仅有的困难是对和求值。我们能使用通用的公式：

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \ldots = \frac{1}{(1-r)^2}$$

通过对无限几何级数的和的微分获得。 设置 r = 1/2，给出

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots=4$$

我们必须思考一下得到我们感兴趣的和。 两边同时减去 1 并除以 2 得到：

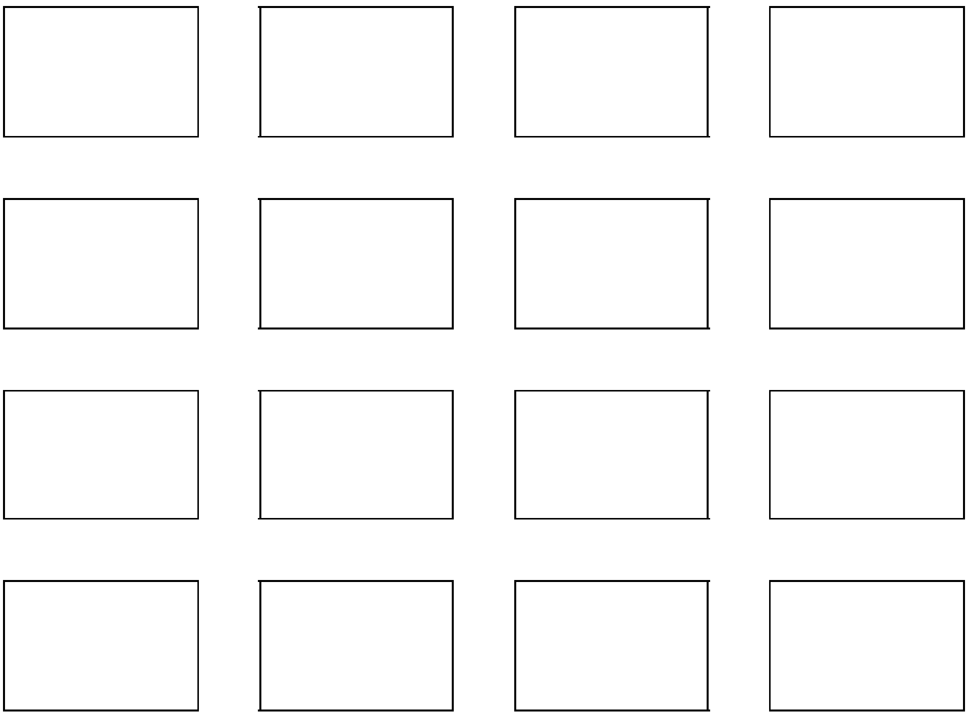
$$2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+\ldots=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

因此，从(1)我们有，

$$\operatorname{Ex}(R)=2\left(\frac{3}{2}\right)=3.$$

一个简单得多的方法使用事实，即"平均失败时间" 是 1 /p ，这里 P 是在一步中失败的概率。如果我们认为有一个异性孩子的为第一次的"失败"的儿童，则平均失败时间，是预期的子女人数，在第一次这对夫妇有两个男孩和一个女孩后。但在第一个孩子后的第 k 孩子后失败的概率，是 1 / 2 ，为所有的 k ⩾ 1 。因此，第一个后的预期的孩子数是 1 / （ 1 / 2 ）= 2 ，预期的子女人数，包括第一个是 1 +2 = 3 。

问题 2：一个教室有 16 个桌子，按照如下方法安排。



如果有一个女孩在前面， 后面，到左边，或在男孩右边，那么二他们调情。一名学生也许是在多个调情对中；例如，一名在教室角落的学生能和其他两人调情，当一名学生在中心能与多达四其他人调情。假设，书桌以相等概率和相互独立地由男孩和女孩使用。什么是调情的对的期望的数量?

解：首先，让我们计算毗邻书桌的对的数量。在各列和各行有 3 对。因为有四行和四列，有 $3 \cdot 4+3 \cdot 4 = 24$ 对比邻的桌子。

对毗邻书桌的编号是从 1 到 24 。令 F_i 是在第 i 个调情对的桌子的占有者的事件的指示符。我们要的概率是:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ex}\left(\sum_{i=1}^{24} F_i\right) &= \sum_{i=1}^{24} \operatorname{Ex}(F_i) \\ &= \sum_{i=1}^{24} \Pr(F_i = 1)\end{aligned}$$

第一步使用期望的线性，且第二个使用事实，指示器的期望等于概率，其是 1。

毗邻书桌的拥有者是调情的，如果第一个坐着的是女孩，第二个坐着的是男孩，反过来亦然。每个事件以 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 的概率发生，且拥有者调情的概率是 $\Pr(F_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$ 把这个带入前面的表达式得到：

$$\begin{aligned}\operatorname{Ex}\left(\sum_{i=1}^{24} F_i\right) &= \sum_{i=1}^{24} \Pr(F_i = 1) \\ &= 24 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 12\end{aligned}$$

.

问题 3： 有一个好的随机变量 R 的期望值得公式， 其只适用非负整数值：

$$\operatorname{Ex}(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(R > k)$$

证明：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \Pr(R > i) &= \underbrace{\Pr(R=1) + \Pr(R=2) + \Pr(R=3) + \cdots}_{\Pr(R>0)} \\
&\qquad\qquad + \underbrace{\Pr(R=2) + \Pr(R=3) + \cdots}_{\Pr(R>1)} \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \underbrace{\Pr(R=3) + \cdots}_{\Pr(R>2)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= \Pr(R=1) + 2 \cdot \Pr(R=2) + 3 \cdot \Pr(R=3) + \cdots \\
&= \mathrm{Ex}(R).
\end{aligned}
$$

□

假设滚动 6 个公平独立的骰子。令 R 是碰到的最大数字。使用以上公式计算 Ex(R)。

解： 首先的任务是计算 Pr(R> K); 也就是某个骰子大于 K 的概率。让我们切换到计算互补时间的概率。

$$\Pr(R > k) = 1 - \Pr(R \le k)$$

现在 $\Pr(R \le k)$ 是所有的骰子显示在集合{1,..,k}中的数字的概率。如果 k≥ 6，那么概率是 1。对于更小的 k ，在这个范围一个骰子显示的值的概率是 k/6。 既然骰子是独立的，所有在这个范围的 6 个骰子的概率是$(k/6)^6$。因此，我们有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ex}(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(R > k) \\
&= 1 + \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^6\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{6}\right)^6\right) + \ldots + \left(1 - \left(\frac{6}{6}\right)^6\right) \\
&= 7 - \frac{1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6}{6^6}
\end{aligned}
$$

问题 4 这里是 9 个命题。

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & \vee & x_3 & \vee & \neg x_7 \\ \neg x_5 & \vee & x_6 & \vee & x_7 \\ x_2 & \vee & \neg x_4 & \vee & x_6 \\ \neg x_4 & \vee & x_5 & \vee & \neg x_7 \\ x_3 & \vee & \neg x_5 & \vee & \neg x_8 \\ x_9 & \vee & \neg x_8 & \vee & x_2 \\ \neg x_3 & \vee & x_9 & \vee & x_4 \end{array}$$

注意到：

1. 每个命题是以 x_i 或$\neg x_i$ 形式的三项的或。
2. 在每个命题中的在三项中的变量是不同的。

假设 我们独立分配 真/假值到变量 $x_1,\ldots,x_9$，且有相同的概率。

(a) 为真的命题的期望数目是什么？

解： 每个命题为真，除非所有的三个它的项为假。因此每个命题为真的概率是

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

令 T_i 是第 i 个命题为真的事件的指示符。那么为真的命题是 $T_1 + .. + T_7$ ，期望值是

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}(T_1+\ldots+T_7) &= \mathrm{Ex}(T_1)+\ldots+\mathrm{Ex}(T_7) \\ &= 7/8+\ldots+7/8 \\ &= 49/8 = 6\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(b) 使用你的答案来证明存在到变量的赋值，让所有的命题为真。

解：一个随机的变量不能总是小于其期望值，因此必然有一些赋值，以至于

$$T_1+\ldots T_7 \geq 6\frac{1}{8}$$

这暗示对至少一个结果有 $T_1 +\ldots +T_7 = 7$。这个结果是对变量的赋值，以至于所有的命题是

为真的。