复习练习 19 的笔记

问题 1 假设你翻转 3 个公平、相互独立的硬币。定义以下事件：

令 A 是第一个硬币是正面的事件。

令 B 是第二个硬币是正面的事件。

令 C 是第三个硬币是正面的事件。

令 D 是偶数个硬币是正面的事件。

(a) 有没有成对独立事件？
解：样本空间包括 8 个等概率的结果：

$$\{H,T\}^3 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

三个符号的每个序列指定三个硬币投掷的结果。

前面的三个事件（A，B 和 C）是成对独立的，因为它们是相互独立的。所有剩下的事情的是检测这些中的每个是独立于 D 的。通过对称性得，我们仅仅需要检测三个值中的一个，说 A：

$$\Pr(A) = \frac{1}{2}$$
$$\Pr(D) = \Pr(\{HHT, HTH, THH, TTT\}) = \frac{1}{2}$$
$$\Pr(A \cap D) = \Pr(\{HHT, HTH\}) = \frac{1}{4}$$

因此，$\Pr(A \cap D) = \Pr(A) \cdot \Pr(D)$，且因此这些事件是独立的。我们得出结论所有 4 个事件成对独立的。

(b) 这些事件是三方独立的？也就是，

$$\Pr(X \cap Y \cap Z) = \Pr(X) \cdot \Pr(Y) \cdot \Pr(Z)$$

总是成立得，当 X,Y 和 Z 是从{A,B,C,D} 集合得到的可区分事件。

解：因为硬币投掷是相互独立的，我们知道：

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C)$$

剩余得事情就是检测三个事件的其他子集成立的相等性：{A,B,D},{A,C,D},且{B,C,D}。由对称性，再一次，我们需要检测一个，说第一个。

$$\Pr(A \cap B \cap D) = \Pr(\{HHT\}) = \frac{1}{8}$$

因为这个等于$\Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(D)$，这三个事件是独立的。我们得出结论所有的四个事件是三路独立的。

(c) 这些事件式相互独立得吗?

解：不是的。因为：

$$\Pr(A \cap B \cap C \cap D) \neq \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C) \cdot \Pr(D)$$

左边的概率是 0，但是在右边的乘积等于 1/16。

从讲座来的事实。如果在一年中存在 N 天和 m 个人在一个房间中，那么没有两个人在这个房间中由同样生日的概率大概是：

$$e^{-m^2/(2N)}$$

问题 2 假设我们创建一个国家的 DNS 档案数据库。让我们做一些简单的假设：

每个人能被划分为 200 亿分之 1 不同的“DNA 类型”。（例如，你也许是类型#13,646,572,661 且和你相邻的人也许是类型#2,785,098。）令 T(x) 表示人 x 的类型。

每个 DNA 类型等概率。

美国人的 DNA 类型是相互独立的。

(a) 一个国会议员声称只存在 250 百万美国人，因此即使对每个美国人的一个档案被存放到数据库中，碰巧的匹配的概率是很小的。数据库实际上必须由多少个档案，使得碰巧匹配的概率是 1/2?

解：由生日原理，由 1/2 匹配的概率，档数目是：

$$\sqrt{2 \ln 2 \cdot 20,000,000,000} = 166,511$$

(b) 人 x 由于 y 的犯罪而被逮捕了。在审判的时候，法官必须判定是否 x=y。犯罪实验室说 x 和 y 有一样的 DNA 类型。检察官论证 x 和 y 是不同的人的概率是 1 比 200 亿。用数学符号写出检察官的断言，且解释她的错误。

解:检察官声称：

$$\Pr(x \text{ and } y \text{ are different people} \mid T(x) = T(y)) = 2 \cdot 10^{-10}$$

这个断言是假的，且论证甚至不是一个良好形式的数学陈述。或者 x 和 y 是同一个人或者不同的人，不论在世界上的所有的 DNA 类型。因此，或者 x 和 y 是在每个结果是同一个人，或者他们是不同的人。结果是，以上的概率或者是 0 或 1，但是我不知道是哪个。

检察官论证挺起来和正确的断言令人迷惑的相似：如果 x 和 y 是不同的人，那么：

$$\Pr\left(T(x) = T(y)\right) = 2 \cdot 10^{-10}$$

检察官能有效地论证或者一个令人惊奇的涉及到碰到的 DNA 的 1 比 200 亿的巧合，或者 x 和 y 是同样的人。在这个基础上，法官可以的出结论，x 几乎是可以确定是有罪的，但是在我们的概率模型中没有什么能直接验证那个结论。

问题 3 假设有 100 个人在屋子里。 假设，他们的生日是独立的且是一致地分布的。 如演讲笔记所述，有两个人有同一个生日的概率将是> 99%。

现在假设您在的屋子里发现除了名字为“Jane”的所有人的生日——且发现全部 99 个日期是不同的。

(a) 与以下的论点有什么错误：

有大于 99%的概率，在屋子里的某对人有同一个生日。 因为我们要求的 99 个人有的不同的生日，这也就得到大于 99%的概率，珍妮有和在屋子里某些其他人有同样的生日。

解答： 这里是论点的问题： 令 A 是事件某些二个人在屋子里有同一个生日。 令 B 是 99 个人我们要求所有把不同的生日的事件。

这是为真的 PR (a) >0.99(的确是在演讲笔记中的概率) 然而，那是一个优先的概率，即，假设所有生日是一致和独立的，没有其他限制。 上面的论点做了错误假定事件 A 有概率至少 99%甚而我们已经知道事件 B 成立。 但是，一旦我们知道事件 B 成立，生日不再是独立。因而 PR (A | B)与 PR (a)不需要相等的(在我们的情况，它们实际上是相当不同的，这将在部分(b)被计算)。

(b) 珍妮和在屋子里某些其他人有一样生日的实际的概率是什么？

解：令 S 是除珍妮之外，在屋子里 99 个人的生日的集合。 由假定， |S| =99。令 b 是 Jane 的生日。 因为 b 在大小为 365 上的一致地分布，并且 b 独立于所有在 S 的生日，我们有

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(b \in S) = \frac{|S|}{365} = \frac{99}{365} \approx 27.1\%,$$

那里 B 是我们要求所有的 99 个人有不同的生日的事件。

问题 4 有 n 个不朽的战士出生于我们的世界中，但是最后仅可能有一个留下。不朽战士的原来的计划是几个世纪来立于世界中，用在戏剧化的地方用古代的剑对抗直到仅有一个生存者剩余，他们选择给出如下协议来尝试：

1. 武士打造一枚硬币，其出现正面的概率是 p。

2. 每个武士翻转硬币一次。

3. 如果恰好有一个武士翻转为正面，那么他或者她被申明是最后一个。否则，协议被认为是失败的，且他们都返回然后使用剑互相对抗。

(a) 不朽中的一个（从俄罗斯西伯利亚草原来的 Kurgan）证明 n 增加大了，这个协议成功的概率必然趋向于 0。另一个(从苏格兰高地来的 McLeod)辩论说这个不是这种情况，提供的 p 是很小心地被选择的。直觉告诉您什么？

解：您的直觉告诉您现在进行一下打盹是很好的。正如吃几块饼干冰喝一杯牛奶。

(b) 试验当成 p 和 n 的函数的概率是什么？

解：样本空间包括所有的 n 个硬币翻转的可能的结果，我们能分别通过集合$\{H,T\}^n$。令 E 是成功选择一个的试验。那么，E 包括 n 个结果，包括一个单独的正面。一般情况下，一个有 h 正面和 n-h 个反面的输出的概率是：

$$p^h(1-p)^{n-h}$$

在 E 中求和 n 个结果的概率给出过程成功的概率：

$$\Pr(E) = np(1-p)^{n-1}$$

(c) 为了最大化试验成功的概率，p ，硬币的偏见，如何被选择？（您打算来计算一个推导！）
解：我们计算成功推导的概率：

$$\frac{d}{dp}np(1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} - np(n-1)(1-p)^{n-2}$$

现在我们设置右边等于 0 来发现最好的概率 p:

$$\begin{aligned} n(1-p)^{n-1} &= np(n-1)(1-p)^{n-2} \\ (1-p) &= p(n-1) \\ p &= 1/n \end{aligned}$$

这个回答很有理由，因为我们想要硬币出现正面正好是 n 中的 1 次。

(d) 如果 p 被以这样的方式选择的成功的概率是什么？当 n，不朽的勇士的个数，增加的数量的概率是什么？

解：试验成功的概率的公式种设置 p = 1/n 给出：

$$\Pr(E) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

在这个限制种，这个趋向于 1/e。McLeod 是正确的。