测试 1

您的名字:____

在您的复习练习讲师上划一个圈

Ishan　Christos Grant

- 您可以使用一张在两面都由您自己写的笔记的 8.5 × 11’’ 的纸，但是不能有其他的信息源。
- 计算器是不允许使用的。
- 您可以假设所有的结果来自讲座、笔记、问题集以及复习练习。
- 在提供的空格处写出您的解答。如果需要更多的空间，连问题一起写在的纸的背面。
- 保持整洁和写作清晰。您不仅会根据您的答案给分，也根据您表达它们的清晰程度给分。
- 考试在下午 9:30 结束。
- 祝您好运！

问题	分值	得分	评分者
1	20		
2	15		
3	20		
4	15		
5	15		
6	15		
总分	100		

问题 1 [20 分]

(a) 考虑以下命题：

$$R = \text{“对于所有的 } x \in S\text{，} P(x) \text{ 蕴涵 } Q(x)\text{。”}$$

对于以下的每个陈述：

如果 R 蕴涵这个陈述，那么在 => 上画圈。
如果 R 被这个陈述蕴涵，那么在 <= 上画圈。

那么您可以圈 0 个，1 个或者 2 个和陈述相邻的箭头。(只圈对所有集合 S 和所有谓词 P 和 Q 成立的蕴涵。)

=> <= 对于所有的 $x \in S$， $Q(x)$ 蕴涵 $P(x)$ 。
=> <= 对于所有的 $x \in S$， $\neg Q(x)$ 蕴涵 $\neg P(x)$。
=> <= 对于所有的 $x \in S$，$P(x)$ 蕴涵 $Q(x)$。
=> <= 不存在 $x \in S$，以致于非 $P(x)$ 蕴涵 $Q(x)$)。
=> <= 猪会飞。

(b) 令 S 是所有人的集合，令 M(x，y)是谓词，“x 是 y 的母亲”。把这个命题翻译成清晰的不涉及到变量的英文句子。

$$\forall x\ (\neg\exists y\ (M(x,y) \wedge M(y,x)))$$

“没有两个人中一个人都是另一个人的母亲。”或者更简单的，“没有是它们自己的母亲的祖母。”

(c) 使用上面定义的集合 S 和谓词 M 翻译以下英文句子为逻辑符号。

“每个人有一个母亲。”

$$\forall x\ \exists y\ M(y,x)$$

问题 2 [15 分] 完成证明，对于 $n \geqslant 8$ 的 n 分的邮资能够使用 3 和 5 分邮票生成。

证明：们使用强归纳法。

(a) 令 $P(n)$ 是的命题，n 分的邮资能够使用 3 和 5 分邮票生成。

(b) 基本情况。

解：$P(8)$，$P(9)$和 $P(10)$ 都为真，既然：

$$\begin{aligned} 8 &= 5 + 3 \\ 9 &= 3 + 3 + 3 \\ 10 &= 5 + 5 \end{aligned}$$

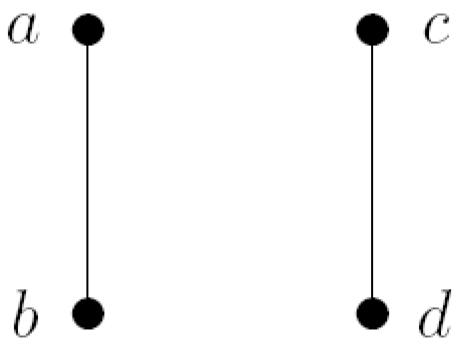
(c) 归纳步。

解：对于所有的 $n \geqslant 10$，我们假设 $P(8)$，⋯，$P(n)$且证明 $P(n+1)$。特别的通过假设 $P(n-2)$，我们能形成 $n-2$ 分的邮资。增加一个 3 分邮票，给出 $n+1$ 分的邮资，因此 $P(n+1)$为真。

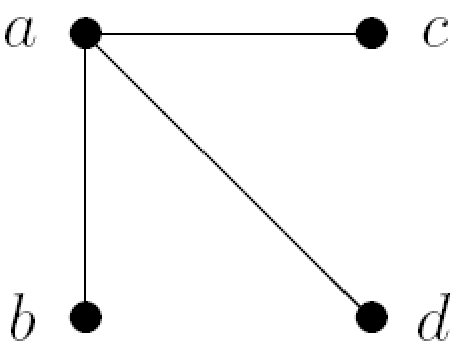
因此由强归纳法原理得，对于所有的 $n \geqslant P(n)$为真。

问题 3 [20 分] 这里是如何“拧”一个无向图的：

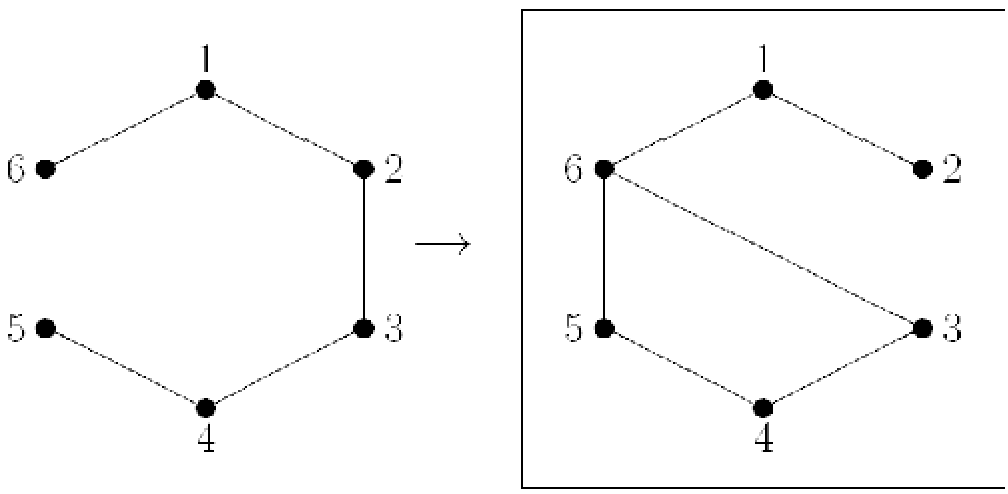
1. 选择不同的顶点 a，b，c 和 d，以便图包括边 a －b 和 c—d 且没有边 a-c， a-d，或 b-d。



2. 删除边 c-d 和添加边 a-c 和 a-d：



(a) 在右边的盒子中，画一个图能通过扭曲包括在左边的图。



(b) 假设 G_0 是一个有欧拉回路的无向图。同时，假设 G_1 是一个通过扭曲 G_0 获得的，G_2 是通过扭曲 G_1 获得的。使用归纳法证明每个在这种方式下获得的图有一条欧拉回路。

仅供您参考：

- 欧拉回路是经过在图中的每条边恰好有一次的闭合通路。
- 图是联通的当且仅当在每对顶点之间存在一条路径。
- 定理。无向图有欧拉图，当且仅当这个图是联通的且每个顶点有偶度。

解：我们使用归纳法。令 P(n) 是 G_n 是欧拉回路的命题。
基例：对于所有的 n ≥0，我们假设 G_n 有欧拉回路且证明 G_{n+1} 也有欧拉回路。特别的，我们说明 G_n＝1 有偶数个顶点是联通的。

- 在 G_n 中的每个定点有偶数度，因为 G_n 有欧拉回路。每个在 G_{n+1} 中的顶点有同样的度，除了对顶点 a 的度多了两度。因此，在 G_{n+1} 中的每个顶点有偶数度。

- 考虑在 G_{n+1} 中的任意顶点 u 和 v。因为 G_n 是联通的，存在 u 到 v 的在 G_n 中的路径。如果路径不包括 c-d，那么同样的路径存在于 G_{n+1} 中。如果路径包括 c-d，那么在 G_{n+1} 中存在相应的路径，这里 c-d 被边 c-a 和 a-d 替换。

这个蕴含着 G_{n+1} 也有一条欧拉回路。因此，G_n 对于多有的 n≥0 也有一条欧拉回路。特别的，G_{6042} 有一条欧拉回路。

问题 4 [15 分] 填空。所有的变量表示整数。不需要解释，但是我们对不正确的回答仅能给出部分奖励分数，如果您说明了您的推理。

(a) 假设 x 是 17 的倍数。写出最小的非负整数使得陈述为真。

$$2x^{32} - 6x^{17} + 4x^{16} - 4x + 6 \equiv \boxed{0} \cdot x + \underline{\ 6\ } \pmod{17}$$

解：如果 x 是 17 的倍数，那么 x $\equiv$ 0 (mod 17)。因此，在左边所有涉及到 x 的项全与 0 同余。

(b) 现在假设 x 不是 17 的倍数。写出最小的**非负整数**使得这个陈述为真：

$$2x^{32} - 6x^{17} + 4x^{16} - 4x + 6 \equiv \boxed{15} \cdot x + \ 12 \ \pmod{17}$$

解：有 Fermat 定理，$x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$。因此，我们能按照如下推理：

$$\begin{aligned} 2x^{32} - 6x^{17} + 4x^{16} - 4x + 6 &\equiv 2\left(x^{16}\right)^2 - 6x\left(x^{16}\right) + 4x^{16} - 4x + 6 \pmod{17} \\ &\equiv 2 - 6x + 4 - 4x + 6 \pmod{17} \\ &\equiv -2x + 12 \pmod{17} \\ &\equiv 15x + 12 \pmod{17} \end{aligned}$$

(c) 在方格中写出最小的正整数让陈述为真：
存在整数 s 和 t 使得：

$$s \cdot 117 + t \cdot 153 = x$$

当且仅当：

$$x \equiv 0 \pmod{\boxed{9}}$$

解：回忆一个整数 x 是可以表示为 a 和 b 的组合，当切仅当 x 是 gcd(a，b)的整数倍，例如 $x \equiv 0 \pmod{\gcd(a,b)}$。在这种情况下，欧拉算法给出：

$$\gcd(153, 117) = \gcd(117, 36) = \gcd(36, 9) = 9$$

问题 5 [15 分] 令 p，q 和 q 是不同的质数。证明存在整数 a，b 和 c：

$$a \cdot (pq) + b \cdot (qr) + c \cdot (rp) = 1$$

(提示：首先考虑 pq 和 qr 的线性组合。)

解：因为 gcd(pq，qr) = q，存在整数 s 和 t 使得：

$$s(pq) + t(qr) = q$$

现在 gcd (q，rp) = 1，因此存在整数 u 和 v 使得：

$$uq + v(rp) = 1$$

因此：

$$u(s(pq) + t(qr)) + v(rp) = (us)(pq) + (ut)(qr) + v(rp) = 1$$

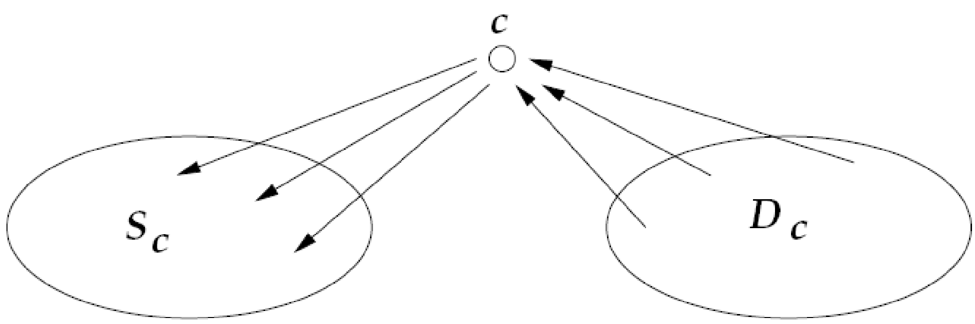
问题 6 个问题[15 分] 在一次鸡比赛的，每个对的鸡 u 和 v，任一 u 啄 v 或 v 啄 u，但是不是两个。 国王是鸡 u，以至于对于其他鸡 v，

- u 啄 v 或者
- u 啄一只鸡 w，并且 w 啄 v。

完成以下定理的证明。

定理 如果鸡 c 被啄，则 c 被国王啄。

证明： 令 S_c 是 c 啄的所有鸡得集合，且令 D_c 是的所有啄 c 的鸡的集合。 情况如下说明：



(提示： 应用国王 Chicken Theorem 于 Dc。)

如果鸡 c 被啄，则集合 D_c 非空。 因此，存在在 D_c 中的鸡之中一次比赛，由国王鸡定理得存在一位国王。 我们将说明那 d 实际是原始的比赛的国王。

- 因为它是 D_c 的国王，d 啄在 D_c 的每只鸡(直接或间接地)。
- 因为 d 在 Dc， d 直接地啄鸡 c。
- d 间接地啄在 S_c 的每只鸡，因为它啄 c，并且 c 啄 S_c 每只鸡。