

## 复习练习 17 的注释

### 四步方法

这是一个求解诸如形式“....的概率是什么？”的好方法。直觉将误导您，但是这个正式的方法每次都能给出真确的答案。

1. 发现样本空间。（使用树图）
2. 定义感兴趣的时间。（根据这些事件标记树叶）
3. 判断输出的概率：
  - (a) 赋边概率
  - (b) 计算结果概率。（沿着根到叶的路径。）
4. 计算事件概率。（求和所有在事件中的结果的概率。）

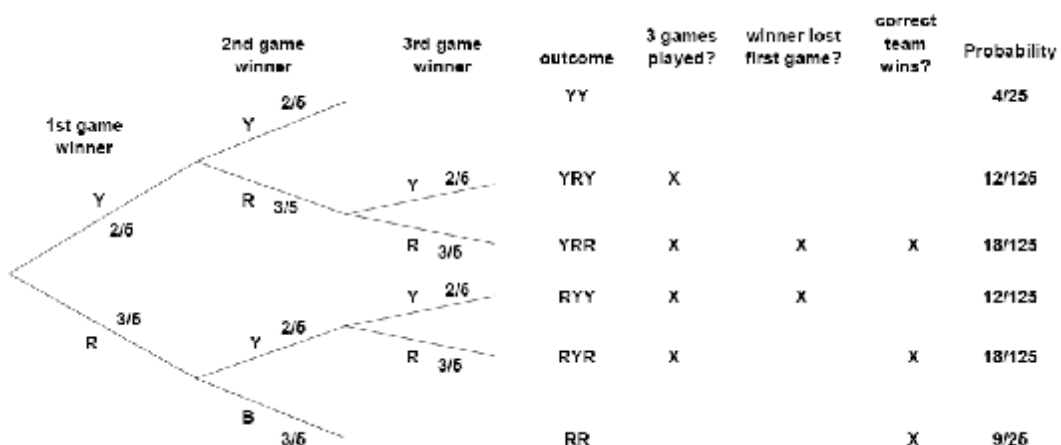
### 棒球系列赛

**问题 1** 纽约 Yankees 和波士顿 Red Sox 正在进行 3 场 2 胜的比赛。（换句话说，他们比赛知道一个球队赢得了两场比赛。然后，那个球队声明获胜，且系列比赛结束。）假设 Red Sox 赢得了每场比赛的概率是  $3/5$ ，不考虑前面比赛结果。

使用 4 步方法回答以下问题。您能对所有的三个问题使用同样的树图。

- (a) 3 场比赛的全概是什么？
- (b) 赢得比赛的或者队赢得第一场比赛的概率是什么？
- (c) 正确的赢得比赛的概率是什么？

解：以下的树图给出答案。



从这个树图，我们得到：

$$\begin{aligned}\Pr(3 \text{ games played}) &= \frac{12}{125} + \frac{18}{125} + \frac{12}{125} + \frac{18}{125} = \frac{12}{25} \\ \Pr(\text{winner lost first game}) &= \frac{18}{125} + \frac{12}{125} = \frac{6}{25} \\ \Pr(\text{correct team wins}) &= \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{9}{25} = \frac{81}{125}\end{aligned}$$

#### 4 门交易

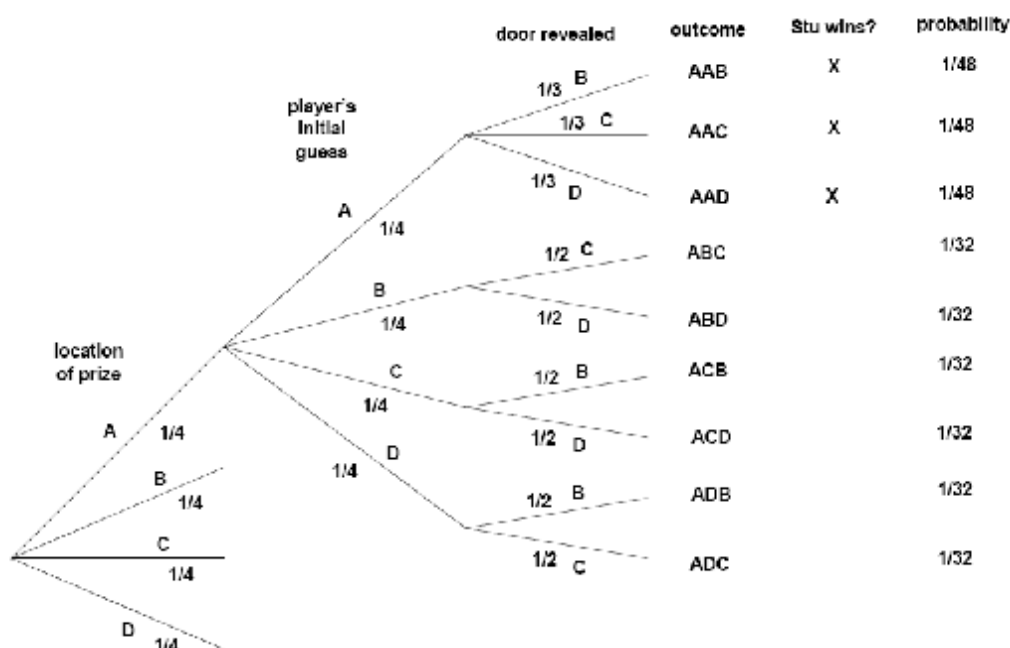
**问题 2** 假设让“制造一个交易”根据不同的规则进行。现在有 4 个门，在它们中有一个奖藏在它们的后面。玩家允许选择一个门。主持人必须打开不同的没有奖品藏在后面的门。玩家允许呆在他的或者她的原来的门，或者选择另外的两个仍然关闭的门。如果玩家在第二阶段选择的门揭示了奖品，那么他或她获胜。

(a) 玩家 Stu，一个从新泽西的 Trenton 来的卫生工程师。他赢得比赛的概率是多少？树图很大。这经常发生；事实上，有时候您将碰到无限的树图！尝试画出足够的树图，以便您能理解剩余的结构。

**解：** 让我们在原来的问题中进行同样的假设：

1. 奖品等等可能地在每个门后面。
2. 参赛者等可能地初始选择一个门，不考虑奖品的位置。
3. 主持人等概率地打开一个门，没有隐藏奖品，且没有被玩家选择。

现面显示的是一个部分的树图。剩余的子树和完全扩展的子树对称。



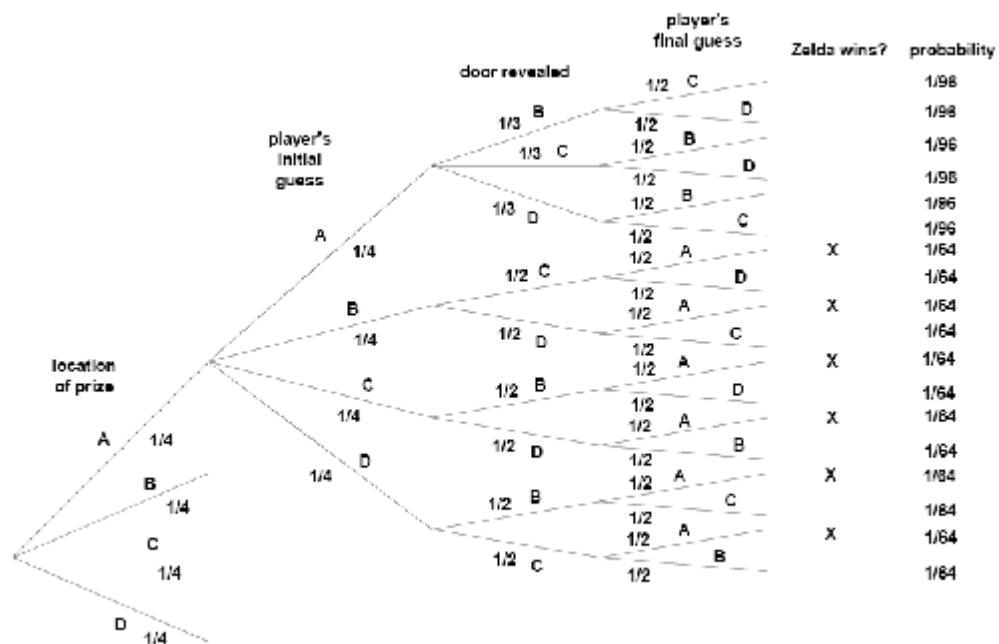
Stu 赢得比赛的概率是：

$$\Pr(\text{Stu wins}) = 4 \cdot \left( \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{48} \right) = \frac{1}{4}$$

我们乘以 4 来得到我们已经画的一个子树的其他四个。

(b) 玩家 Zelda，一个从 Helena, Montana 绑架的外星研究者，切换剩余的两个门的概率是一样的。她赢得奖品的概率是什么？

解：一个部分树图如下画出：



Zelda 赢得奖品的概率是：

$$\Pr(\text{Zelda wins}) = 4 \cdot \left( \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} \right) = \frac{3}{8}$$

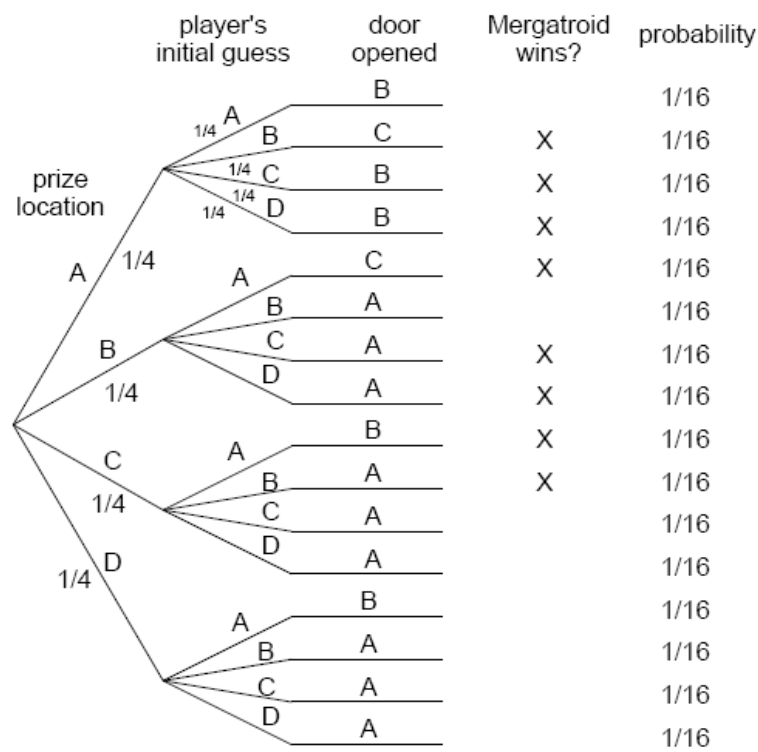
**Mergatroid, 工程学生**

**问题 3** 让我们考虑另一个 4 门问题的变种。假设，Carol 总是打开低号的门，可能有她或者发现奖品或者打开玩家选择的门限制。

这个给出玩家 Mergatroid，一个从 Cambridge, MA 来的工程学生，正好多一点关于奖品位置的信息。假设 Mergatroid 总是前还到最小数字的门，不包括他的初始选择和 Carol 打开的门。他赢得奖品的概率是多少？

(有意思的是，在 3 门问题中，玩家并没有得到优势，如果 Carol 总是打开可用的最小数目的门。)

解：树图按照如下工作：



Mergatroid 获胜的概率是：

$$\Pr(\text{win}) = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$