复习练习 18 的笔记

全概法则是分解概率计算到不同情况的一个基本的工具。更精确的说，假设我们对事件 E:Pr(E)概率感兴趣。假设随机的试验能设计两个不同的方式；也就是两种不同的情况 X 和 $\overline{X}$ 是可能的。假设：

比较容易发现每种情况的概率： Pr(X)和 $\Pr\left(\overline{X}\right)$

比较容易发现在每种情况中的事件的概率：Pr(E|X) 和 $\Pr\left(E \mid \overline{X}\right)$。

那么，发现 E 的概率仅仅是两个乘积和一个加法的方式。

定理 1 （全概定理） 令 E 和 X 是事件，且 0< Pr(X) < 1。那么

$$\Pr(E) = \Pr(X) \cdot \Pr(E \mid X) + \Pr\left(\overline{X}\right) \cdot \Pr\left(E \mid \overline{X}\right)$$

证明：让我们化简右边。

$$\begin{aligned}
&\Pr(E \mid X) \cdot \Pr(X) + \Pr\left(E \mid \overline{X}\right) \cdot \Pr\left(\overline{X}\right) \\
&\qquad = \frac{\Pr(E \cap X)}{\Pr(X)} \cdot \Pr(X) + \frac{\Pr\left(E \cap \overline{X}\right)}{\Pr\left(\overline{X}\right)} \cdot \Pr\left(\overline{X}\right) \\
&\qquad = \Pr(E \cap X) + \Pr\left(E \cap \overline{X}\right) \\
&\qquad = \Pr(E)
\end{aligned}$$

第一步使用条件概率定义。仅挨着最后一行，我们添加所有在 E 和 X 中的结果概率到在 E 和非 X 的结果概率。因为每个在 E 中的结果或者在 X 中或者不在 X 中，这是 E 中的结果的所有的概率的和，等于 Pr(E)。

如果试验能涉及超过两中方式呢？也就是，如果有 n 种情况，$X_1,\ldots,X_N$，其是互斥的（没有两种情况同时发生）且聚集穷尽（至少一种情况必然发生）？如果它仍然容易法选每种情况的概率，且在每种情况种的概率，然后再次发现 Pr(E)是平凡的。

定理 2 令 E 是事件且令 X_1，…，X_n是交集事件，其交集穷尽样本空间。那么，

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E \mid X_i) \cdot \Pr(X_i)$$

提供 $\Pr(X_i) \neq 0$。

问题 1 有一种稀有的知名的疾病为 Nerditosis，其在 1000 人中有 1 个人得病。关于症状强

迫使用数字参考是关于任何的一学习领域、班级、建筑物等。这很可怕得。当受害者进入期末考试，向下螺旋，它们从 MIT 获得学位。两个医生声明它们能检测 Nerditosis。

(a) 医生 X 从哈佛的医学院获得了学位。他在 Masschusetts 公共医院实习且可获取最近的扫描仪、试验测试和研究。假设您询问医生 X 您是否有疾病。

如果您有 Nerditosis，他说“是”的概率是 0.99。
如果您没有，他说“不是”的概率是 0.97。

令 D 是您有这个疾病的事件，令 E 是诊断是错误的概率。使用全概定理来计算 Pr(E)，医生 X 犯错误的概率。

解：有全概定理：

$$
\begin{aligned}
\Pr(E) &= \Pr(E \mid D) \cdot \Pr(D) + \Pr\left(E \mid \overline{D}\right) \cdot \Pr\left(\overline{D}\right) \\
&= 0.01 \cdot 0.001 + 0.03 \cdot 0.999 \\
&= 0.02998
\end{aligned}
$$

(b) “医生 Y”用$49.95 通过 Internet 从一个完全不能相信的大学获得他的真正学位。他知道在 1000 个人中有一个得 Nerditosis，但是如何解释这个有点动摇。因此，如果您问他您是否有并，他说“是”的概率是在 1000 人中有 1 个人，无论您是否是或不是。

令 D 是您有疾病的事件，令 F 是误诊的事件。使用全概定律来计算 Pr(F)，医生 Y 制造一个错误的概率。

解：使用全概：

$$
\begin{aligned}
\Pr(F) &= \Pr(F \mid D) \cdot \Pr(D) + \Pr\left(F \mid \overline{D}\right) \cdot \Pr\left(\overline{D}\right) \\
&= 0.999 \cdot 0.001 + 0.001 \cdot 0.999 \\
&= 0.001998
\end{aligned}
$$

(c) 哪个医生更可靠？
解：医生 X 比医生 Y 产生 15 倍的错误。

问题 2 一个 Barglesnort 在三个洞穴中做窝。

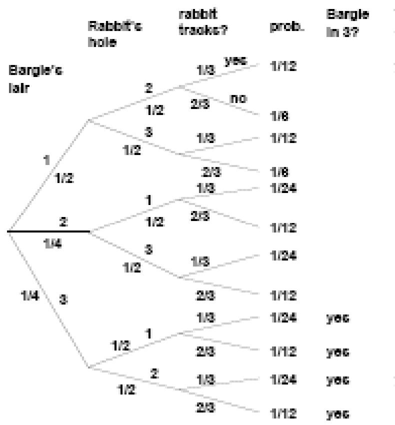
Barglesnort 住在第一个洞的概率是 1/2，住在第二个洞的概率是 1/4，住在第三个洞的概率是 1/4。一个兔子用等概率选择然后移动到两个没有被专用的洞中。以概率 1/3，兔子留下其入口痕迹的概率。(Barglesnorts 很聪明不会留下痕迹。)Barglesnort 在洞 3 中居住的概率是什么，给定在洞 2 前面没有痕迹。

使用树图和四步方法。

解：树图如下给出。令 B_3 是 Barglesnort 住在第三个洞中的事件，令 T_2 是在第二个洞前面有痕迹的事件。从树图中取数据，我们能按照如下计算想要的概率。

$$\begin{aligned}\Pr\left(B_3 \mid \overline{T_2}\right) &= \frac{\Pr\left(B_3 \cap \overline{T_2}\right)}{\Pr\left(\overline{T_2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}} \\ &= \frac{5}{21}\end{aligned}$$

在分母中，我们为了方便应用公式 $\Pr\left(\overline{T_2}\right) = 1 - \Pr\left(T_2\right)$。



问题 3 在桌子上有一副牌。或者 John 或者 Mary 洗牌，且我们没有其他原因来相信一种情况比另一种情况多。现在 John 是一个知名的有知名爱好的作弊者：他总是在洗牌的时候偷方块 A。Mary，另一方面，是一个非常诚实的女孩：她洗过的牌总是满副的有 52 张的牌。

(a) 您拿起在这副牌的最上面的牌，且您看到了一个红心 Q。在您做任何计算之前：谁最可能已经洗了牌？解释。

解：John 洗牌增加了在这副牌中的非 A 的部分。因此，在两个世界中：

(1) John 洗牌的世界

(2) Mary 洗牌的世界

第一个世界比第二个世界更有可能满足最上面的扑克不是 A 的事件。因为我们知道这个事件是事实且两个世界是等可能地对立的，我们应该打赌我们住在世界(1)中。

(b) 现在计算。John 洗牌的概率是什么？Mary 洗牌的概率是什么？

解：令 J 是 John 洗牌的事件，且 A 是最上面的牌是一张 A 的事件。我们想要概率

$$\Pr\left(J \mid \overline{A}\right) \qquad \text{and} \qquad \Pr\left(M \mid \overline{A}\right)$$

很清楚，$M = \overline{J}$，

且因此 $\Pr\left(M \mid \overline{A}\right) = \Pr\left(\overline{J} \mid \overline{A}\right) = 1 - \Pr\left(J \mid \overline{A}\right)$，因此我们仅需要计算关于 John 的概率。通过条件概率的定义（第一个等式），然后是乘法原则（在分子上），然后是全概定律（在分母上），我们知道

$$\Pr\left(J \mid \overline{A}\right) = \frac{\Pr\left(J \cap \overline{A}\right)}{\Pr\left(\overline{A}\right)} = \frac{\Pr(J) \cdot \Pr\left(\overline{A} \mid J\right)}{\Pr(J) \cdot \Pr\left(\overline{A} \mid J\right) + \Pr(M) \cdot \Pr\left(\overline{A} \mid M\right)}$$

且在最有一部分任何事情都知道：

$$\Pr\left(J \mid \overline{A}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{48}{51}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{48}{51} + \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{52}} = \frac{\frac{1}{51}}{\frac{1}{51} + \frac{1}{52}} = \frac{52}{52+51} = \frac{52}{103}$$

这个（有一点，但是）严格地大于 1/2，正如期望。

像 Joh, Peter 也是一个著名的作弊者：当他洗牌的时候，他总是从其中偷一张牌；但是（不像 John）他随机偷一张牌。也就是说，当 Peter 洗牌的时候，每个牌可能的被偷的概率是相等的。

(c) 假设您知道 Mary 洗牌了，您要取最上面的牌。您看到一张 A 的概率是多少？

解：如果我们知道 Mary 洗牌，我们知道这副牌，如果是一副 52 张的整牌。因此，容易地，概率是 4/52。

(d) 假设您知道 Peter 洗了这副牌，您要取最上面的一张牌。您看到一张 A 的概率是什么？（提示：如果 Peter 偷取一张 A 的概率是什么？如果 Peter 偷了一张非 A 的牌的概率是什么？）

解。假设 Peter 洗了这副牌。那么，关于他偷牌有两种情况：或者偷一张 A 或者偷一张非 A 牌。令 S_A 是他偷一张 A 的事件。因为他随机偷了一张牌，我们知道他偷一张 A 的概率是 $\Pr(S_A) = 5/53$ 且非 A 的概率是 $\Pr\left(\overline{S_A}\right) = \frac{48}{52}$。现在，正如以前，令 A 是最上面的牌是 A 的事件。如果我们根据被偷窃的牌知道我们在那种情况种，这也容易计算 A 的概率。

$$\Pr\left(A \mid S_A\right) = \frac{3}{51} \qquad \text{and} \qquad \Pr\left(A \mid \overline{S_A}\right) = \frac{4}{51}$$

因此，我们知道在每种情况的概率，且我们也知道每种情况的概率。这也敲打了全概的门铃：

$$\Pr(A) = \Pr(S_A) \cdot \Pr(A \mid S_A) + \Pr\left(\overline{S_A}\right) \cdot \Pr\left(A \mid \overline{S_A}\right) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{4 \cdot (3+48)}{52 \cdot 51} = \frac{4}{52}.$$

因此，在最上面的牌是 A 的概率是 4/52。

(e)　对部分(c) 和部分(d) 答案有任何异常？
解：有两个答案是一样的。换句话说，这副牌丢失一张牌不影响最上面的牌是一个 A 的概率！那能怎么样？

这里是一个解释。在不部分(c) 情况和后面一致。

　　我们从很好的 52 张一副牌的上面选择最上面的两张牌；
　　第一个牌是 A 的概率是什么？

(因为第二张牌的选择是无关的。)同样的，部分(d)的情况和以下一致：

　　我们选择一副洗得很好得牌的上面的两张牌；
　　第二张牌是 A 的概率是什么？

（因为 Peter 随机偷一张牌的影响，且洗牌和取最上面牌的影响一致得。）现在我们介绍的两种情况是一致的，由明显的对称原因，因为牌对的第一张牌是 A 的个数等于第二张牌是 A 的数量。