



Mateo Andrés Manosalva Amaris

Edgar Santiago Ochoa Quiroga

Sergio Alejandro Bello Torres

Ejercicio 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces se satisface:

(a) $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 \leq \|A\|_F = \|A^T\|_F,$

(b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2,$

(c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty,$

(d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}.$

Ejercicio 2.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n y A una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Pruebe que:

Si $Ax = b$, $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ y $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$, entonces $A + \delta A$ es invertible y se cumple que:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Ejercicio 3.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha + \delta \end{pmatrix},$$

$\alpha > 0$ fijo, $\delta > 0$ variable.

- Obtenga el número de condición de A . Para valores de δ muy pequeños o muy grandes, ¿podemos afirmar que el sistema $Ax = b$ está mal condicionado? Justifique su respuesta.
- ¿Existe algún valor de δ que haga óptimo el número de condición de A ? ¿Cuál es este número de condición?

Ejercicio 4.

Al aproximar una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante un polinomio $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$, el error de aproximación E se mide en la norma L^2 , es decir:

$$E^2 := \|p - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 [p(t) - f(t)]^2 dt.$$

- (a) Muestre que la minimización del error $E = E(a_0, \dots, a_n)$ conduce a un sistema de ecuaciones lineales $H_n a = b$, donde:

$$b = [b_0, \dots, b_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad b_i = \int_0^1 f(t)t^i dt, \quad i = 0, \dots, n,$$

y H_n es la matriz de Hilbert de orden n , definida como:

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = 0, \dots, n.$$

El vector a representa los coeficientes del polinomio p .

- (b) Muestre que H_n es simétrica y definida positiva.
- (c) Solucione el sistema $H_n x = b$, donde b tiene componentes $b_i = 1/(n+i-1)$, para $i = 1, \dots, n$. Para esto, use las factorizaciones LU ($[L, U] = \text{lu}(H)$) y Cholesky ($L = \text{chol}(H)$). Luego resuelva los dos sistemas triangulares.
- (d) Para ambos métodos, ¿qué tan precisas son las soluciones numéricas \hat{x}_{approx} ? Tabule los errores de la solución:

$$e(n) = \|\hat{x}_{\text{approx}} - x_{\text{exact}}\|$$

como una función de $n = 2, \dots, 15$. Note que $x_{\text{exact}} = (0, \dots, 1)^T$. Puede graficar los errores en función de n utilizando la función `semilogy` de Matlab. Explique en detalle los resultados.

Ejercicio 5.

- (a) Simplifique el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema lineal $Ax = b$ donde A es una matriz tridiagonal.
- (b) Considere la ecuación de Poisson con término fuente f en el intervalo $(0, 1)$:

$$-T''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

con condiciones de frontera $T(0) = T(1) = 0$. Aproximando la segunda derivada por diferencias finitas:

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2},$$

y discretizando en $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, con $n = 1/h$, obtenemos el sistema:

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Escriba este sistema en la forma $AT = f$, donde A es una matriz tridiagonal. Resuelva el sistema para $n = 1000$ y $f(x) = \sin(2\pi x)$. Compare su solución con $T(x) = \sin(2\pi x)/(4\pi^2)$.