

Mateo Andrés Manosalva Amarís

Sergio Alejandro Bello Torres

1. Muestra que los números racionales \mathbb{Q} no son localmente compactos

Demostración. Consideremos \mathbb{Q} como subespacio de \mathbb{R} con la topología usual, el punto $0 \in \mathbb{Q}$ y una vecindad $U \subset \mathbb{Q}$ de 0 , como U es abierto, por la propiedad arquimediana de los números racionales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{Q} \cap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset U$, por la densidad de los irracionales en los reales, existe un irracional x en el intervalo $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ y por la propiedad arquimediana, existe un natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, note que $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ es cerrado en \mathbb{Q} , luego, si existiera un compacto que contiene a U , $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ sería compacto pues es un subconjunto cerrado de un compacto, sin embargo

$$\bigcap_{n \geq k} \left(\left[r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q} \right) = \emptyset$$

De esta manera, $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ no es compacto y por lo tanto \mathbb{Q} no es localmente compacto.

□

2. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios no vacíos.

- a) Demuestra que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto para todos los valores de α , salvo un número finito.

Demostración. Recordemos que las proyecciones son mapeos continuos y abiertos, supongamos que $\prod X_\alpha$ es localmente compacto. Sea $x \in \prod X_\alpha$, por la compacidad local existe un subespacio compacto C de $\prod X_\alpha$ que contiene a x y esta vecindad contiene un elemento de la base de $\prod X_\alpha$ que contiene a x , digamos U .

Como estamos en la topología producto, entonces $U = \prod U_\alpha$ donde $U_\alpha = X_\alpha$ para todo α salvo finitos índices, digamos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Sea $\beta \neq \alpha_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $\pi_\beta(C)$ es un compacto que contiene a $\pi_\beta(U) = X_\beta$.

Falta ver que los X_{α_i} , $i = 1, \dots, n$ son localmente compactos. Sean $y \in X_{\alpha_i}$ y $x \in \prod X_\alpha$ tales que $x_{\alpha_i} = y$. Existe un compacto C que contiene un elemento de la base U tal que U es vecindad x , entonces $\pi_{\alpha_i}(C)$ es un subespacio compacto de X_{α_i} que contiene a la vecindad $\pi_{\alpha_i}(U)$ de x .

□

- b) Prueba el recíproco, asumiendo el teorema de Tychonoff.

Demostración. Sea $x \in \prod_{\alpha} X_{\alpha}$. Para cada α , existe un subespacio compacto C_{α} de X_{α} que contiene una vecindad U_{α} de x_{α} . Por hipótesis, para cada índice salvo finitos, podemos asumir que $C_{\alpha} = U_{\alpha} = X_{\alpha}$. Por el teorema de Tychonoff, $\prod_{\alpha} C_{\alpha}$ es compacto y contiene la vecindad $\prod_{\alpha} U_{\alpha}$ de x . Se sigue que $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ es localmente compacto. \square

3. Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, ¿se sigue que $f(X)$ es localmente compacto? ¿Qué ocurre si f es continua y abierta? Justifica tu respuesta.

Falso: Sean \mathbb{Q}_d los racionales con la topología discreta y \mathbb{Q} los racionales con la topología usual. \mathbb{Q}_d es localmente compacto ya que $\{x\}$ es una vecindad de x y $\{x\}$ es compacto, sin embargo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q}_d &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

es continua y \mathbb{Q} no es localmente compacto (Ejercicio 1). Sin embargo si añadimos la hipótesis de que f es abierta, entonces es verdadera la proposición.

Demostración. Sea $y \in f(X)$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, como X es localmente compacto, entonces existe un subespacio compacto C de X tal que C contiene una vecindad U de x . Obviamente $f(U) \subset f(C)$ y $f(U)$ es abierto porque f es abierta, además $f(C)$ es compacto, de lo que se sigue el resultado. \square

4. Demuestra que $[0, 1]^{\omega}$ no es localmente compacto en la topología uniforme.

Demostración. Considere el $0 \in \mathbb{R}^{\omega}$, $0 = (0, 0, 0, 0, \dots)$. Suponga que $[0, 1]^{\omega}$ es localmente compacto en 0, entonces existe un compacto C que contiene la bola $B(0, \epsilon) \subset [0, 1]^{\omega}$, en efecto $\overline{B(0, \epsilon)} = [0, \epsilon]^{\omega}$. Como $[0, \epsilon]^{\omega}$ es un subconjunto cerrado de un compacto, entonces es compacto, pero esto es una contradicción ya que dado $U \subset [0, \epsilon]$, tenemos que

$$\bigcup_{k \geq 1} [0, \epsilon]^k \times U^{\omega-k}$$

es un cubrimiento abierto de $[0, \epsilon]^{\omega}$ que no admite un subcubrimiento finito. \square

5. Si $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff localmente compactos, demuestra que f se extiende a un homeomorfismo de sus compactificaciones por un punto.

Demostración. Suponga $f : X_1 \rightarrow X_2$ un homeomorfismo y definamos

$$\begin{aligned} g : Y_1 &\longrightarrow Y_2 \\ x &\longmapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1 \\ \tilde{y} & \text{si } x = y, \end{cases} \end{aligned}$$

con Y_1, Y_2 las compactificaciones a un punto, g es un homeomorfismo entre Y_1 y Y_2 . Sea V un abierto, $V \subset Y_2$. Tenemos dos casos, V es abierto de X_2 o $V = Y_2 - C$ con C compacto en X_2 , el primer caso es trivial. Para el segundo caso note que

$$\begin{aligned} g^{-1}(V) &= g^{-1}(Y_2 - C) \\ &= Y_1 - g^{-1}(C) \\ &= Y_1 - K_1. \end{aligned}$$

con K_1 compacto en X_1 . Análogamente

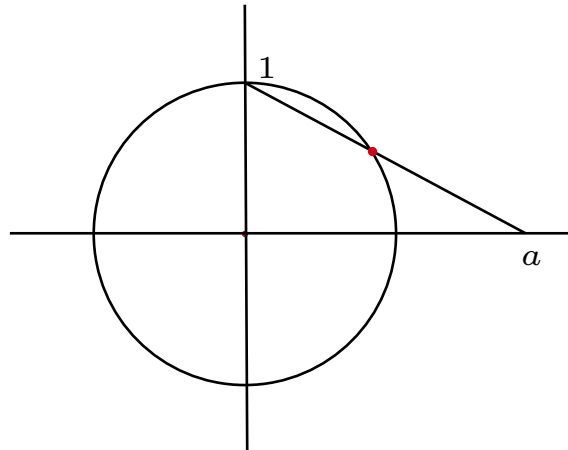
$$g(Y_1 - C) = Y_2 - g(C) = Y_2 - K_2$$

con K_2 compacto en X_2 .

□

6. Demuestra que la compactificación por un punto de \mathbb{R} es homeomorfa al círculo S^1 .

Demostración. Vamos a construir el homeomorfismo, este es la proyección estereográfica.



Por la ecuación de punto pendiente, la recta que se observa en el dibujo y que corta la circunferencia tiene la ecuación

$$y = \frac{-x}{a} + 1,$$

reemplazando esto en la ecuación del círculo ($x^2 + y^2 = 1$) obtenemos que

$$x^2 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} = 0,$$

así pues

$$x \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{2}{a},$$

esto es

$$x = \frac{2a}{a^2 + 1}.$$

Finalmente, al reemplazar x en la ecuación de la recta, obtenemos que

$$y = \frac{-2}{a^2 + 1} + 1$$

que es el homeomorfismo ya que cuando $a \rightarrow \infty$ obtenemos el polo norte y la función establece una correspondencia entre un punto en la circunferencia y un punto en la recta (por la construcción que hicimos). Obviamente la función es biyectiva y continua y su inversa es continua x.d.

□

7. Demuestra que la compactificación por un punto de S_Ω es homeomorfa a \bar{S}_Ω .
8. Demuestra que la compactificación por un punto de \mathbb{Z}_+ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de \mathbb{R} .

Demostración. Veamos que \mathbb{Z}_+ y $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ como subespacios de \mathbb{R} poseen la topología discreta. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, note que $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) \cap \mathbb{Z}_+ = \{n\}$, por lo tanto los puntos son abiertos en \mathbb{Z}_+ , de donde se sigue que \mathbb{Z}_+ posee la topología discreta. Ahora sea $\frac{1}{n} \in A$, note que $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, con lo cual, razonando de la misma manera que en el caso anterior, A posee la topología discreta, así la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Es un homeomorfismo, luego por el punto 5, sus compactificaciones a un punto son homeomorfas. Para mostrar que la compactificación a un punto de A es $A \cup \{0\}$ basta ver que $A' = \{0\}$ luego $\bar{A} = \{0\} \cup A$, como $A \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, es compacto y difiere en un punto de A . □

9. Demuestra que si G es un grupo topológico localmente compacto y H es un subgrupo, entonces G/H es localmente compacto.
10. Demuestra que si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto en el punto x , entonces para cada vecindad U de x , existe una vecindad V de x tal que \bar{V} es compacto y $\bar{V} \subset U$.