Taller III

Bourbaki

18 de noviembre de 2024

1. Demuestre que $A \subset \mathbb{C}$ es compacto si y solo si es acotado y cerrado.
2. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Sean $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ una sucesión de subconjuntos de K no vacíos, tales que $K_n \supseteq K_{n+1}$. Demostrar que la intersección de todos los $K_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ es no vacía.
3. (*) Encontrar la imagen de las regiones:

$$1 < |\operatorname{Im}(z)| \leq 2$$

$$|z| < 1$$

bajo las aplicaciones:

   a) $f(z) = z^2$

   b) $f(z) = \dfrac{2z + i}{z + 1}$

4. (*) Sea $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$, hallar la imagen por f de:

   a) El semiplano superior.

   b) La semirecta $it; t \geq 0$.

   c) La recta $it; t \in \mathbb{R}$.

   d) $|z - 1| = 1$.

   e) $|z| = 2; \operatorname{Im}(z) \geq 0$.

5. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Im}(z) \leq \alpha\}$. Si $f(z) = e^z$, hallar $f(A)$.
6. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Si $f(z) = \sin(z)$, hallar $f(A)$.
7. Determine completamente la proyección estereográfica (que lleva la esfera de Riemann en el plano complejo). Es decir, hallar explícitamente T y T^{-1}.
8. Demostrar que la proyección estereográfica preserva círculos. La imagen directa o inversa de una circunferencia es una circunferencia.