UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
TOPOLOGÍA GENERAL
TALLER II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Muestra que los números racionales $\mathbb{Q}$ no son localmente compactos.

2. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios no vacíos.

   *a*) Demuestra que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada $X_\alpha$ es localmente compacto y $X_\alpha$ es compacto para todos los valores de $\alpha$, salvo un número finito.

   *Demostración.* Recordemos que las proyecciones son mapeos continuos y abiertos, supongamos que $\prod X_\alpha$ es localmente compacto. Sea $x \in \prod X_\alpha$, por la compacidad local existe un subespacio compacto $C$ de $\prod X_\alpha$ que contiene a $x$ y esta vecindad contiene un elemento de la base de $\prod X_\alpha$ que contiene a $x$, digamos $U$.

   Como estamos en la topología producto, entonces $U = \prod_\alpha U_\alpha$ donde $U_\alpha = X_\alpha$ para todo $\alpha$ salvo finitos índices, digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sea $\beta \neq \alpha_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $\pi_\beta(C)$ es un compacto que contiene a $\pi_\beta(U) = X_\beta$.

   Falta ver que los $X_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$ son localmente compactos. Sean $y \in X_{\alpha_i}$ y $x \in \prod X_\alpha$ tales que $x_{\alpha_i} = y$. Existe un compacto $C$ que contiene un elemento de la base $U$ tal que $U$ es vecindad $x$, entonces $\pi_{\alpha_i}(C)$ es un subespacio compacto de $X_{\alpha_i}$ que contiene a la vecindad $\pi_{\alpha_i}(U)$ de $x$. □

   *b*) Prueba el recíproco, asumiendo el teorema de Tychonoff.

   *Demostración.* Sea $x \in \prod_\alpha X_\alpha$. Para cada $\alpha$, existe un subespacio compacto $C_\alpha$ de $X_\alpha$ que contiene una vecindad $U_\alpha$ de $x_\alpha$. Por hipótesis, para cada índice salvo finitos, podemos asumir que $C_\alpha = U_\alpha = X_\alpha$. Por el teorema de Tychonoff, $\prod_\alpha C_\alpha$ es compacto y contiene la vecindad $\prod_\alpha U_\alpha$ de $x$. Se sigue que $\prod_\alpha X_\alpha$ es localmente compacto. □

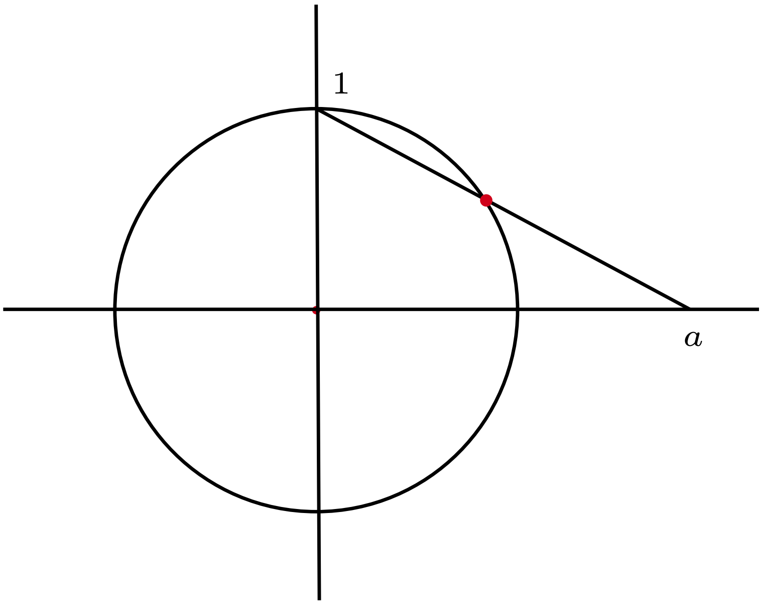
3. Sea $X$ un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿se sigue que $f(X)$ es localmente compacto? ¿Qué ocurre si $f$ es continua y abierta? Justifica tu respuesta.

4. Demuestra que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto en la topología uniforme.

5. Si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff localmente compactos, demuestra que $f$ se extiende a un homeomorfismo de sus compactificaciones por un punto.

6. Demuestra que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa al círculo $S^1$.

*Demostración.* Vamos a construir el homeomorfismo, este es la proyección estereográfica.




Por la ecuación de punto pendiente, la recta que se observa en el dibujo y que corta la circunferencia tiene la ecuación

$$y = \frac{-x}{a} + 1,$$

reemplazando esto en la ecuación del círculo $(x^2 + y^2 = 1)$obtenemos que

$$x^2 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} = 0,$$

así pues

$$x\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{a},$$

esto es

$$x = \frac{2a}{a^2+1}.$$

Finalmente, al reemplazar $x$ en la ecuación de la recta, obtenemos que

$$y = \frac{-2}{a^2+1} + 1$$

$\square$

7. Demuestra que la compactificación por un punto de $S_\Omega$ es homeomorfa a $\bar{S}_\Omega$.
8. Demuestra que la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathbb{R}$.
9. Demuestra que si $G$ es un grupo topológico localmente compacto y $H$ es un subgrupo, entonces $G/H$ es localmente compacto.
10. Demuestra que si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto en el punto $x$, entonces para cada vecindad $U$ de $x$, existe una vecindad $V$ de $x$ tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.