Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Sean τ y τ' dos topologías sobre X. Si $\tau' \supset \tau$, ¿qué implica la conexidad de X en una topología sobre la otra?

   Solución: Note que si X es conexo en la topología τ', entonces en la topología τ también lo es. Supongamos que no, entonces existen dos abiertos disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$, como $\tau \subset \tau'$ entonces $A, B \in \tau'$, luego X no sería conexo.

   La contrarrecíproca nos dice que si X es disconexo en τ entonces es disconexo en τ', sin embargo que X sea conexo en τ no implica conexidad en la topología τ'. Por ejemplo, considere los espacios topológicos $(\mathbb{R}, \tau)$, $(\mathbb{R}, \tau_\ell)$, con τ la topología usual, es claro que $\tau \subset \tau_\ell$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es conexo en la topología usual, pero $\mathbb{R}_\ell$ no lo es. La prueba de esto se encuentra en el ejercicio 7.

2. Sea $\{A_n\}$ una secuencia de subespacios conexos de X, tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Demuestra que $\bigcup A_n$ es conexo.

   Demostración. Supongamos que no, esto es

   $$\bigcup_n A_n = B \cup C$$

   con $B \cap C = \emptyset$ y $B, C \neq \emptyset$. Tomemos $A_1 \subset B$, en efecto

   $$I := \{i \in \mathbb{N} : A_i \subset C\} \neq \emptyset,$$

   de lo contrario $C = \emptyset$ y esto no es posible. El principio del buen orden garantiza que I tiene un elemento mínimo, digamos k, esto nos da que $A_{k-1} \subset B$, así $A_k \cap A_{k-1} = \emptyset$, una contradicción. □

3. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X; sea A un subespacio conexo de X. Muestra que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, entonces $A \cup \left(\bigcup A_\alpha\right)$ es conexo.

   Demostración. Note que

   $$A \cup \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (A \cup A_\alpha)$$

   y como $A \subset \bigcap_\alpha (A \cup A_\alpha)$, y $A \neq \emptyset$, entonces por el punto anterior se concluye lo deseado. □

4. Demuestra que si X es un conjunto infinito, entonces es conexo en la topología del complemento finito.

Demostración. Suponga que no, entonces $X = A \cup B$ con A, B abiertos disjuntos, como A y B son disjuntos tenemos que $B = A^c$, entonces B es finito ya que $A \in \tau$, como $B \in \tau$ y $A = B^c$, se sigue que A es finito, lo que contradice que X es infinito. $\square$

5. Un espacio es *totalmente disconexo* si sus únicos subespacios conexos son conjuntos de un solo punto. Muestra que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo. ¿Es cierto el recíproco?

   Demostración. En efecto $A = \{x\}_{x \in X}$ es conexo ya que no pueden haber dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión sea $\{x\}$. Si $|A| > 2$, note que

   $$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

   y por tanto A no es conexo, ya que los singletones son abiertos disjuntos en la topología discreta. $\square$

   El recíproco no es cierto, pero tengo pereza de escribir esa porquería de contraejemplo

6. Sea $A \subset X$. Muestra que si C es un subespacio conexo de X que intersecta tanto A como $X - A$, entonces C intersecta ∂A.

   Demostración. Suponga que $C \cap \partial A = \emptyset$, como $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ entonces $C \cap A \subset \mathring{A}$, análogamente $\overline{X - A} = (X \overset{\circ}{-} A) \cup \partial(X - A)$ y $C \cap (X - A) \subset (X \overset{\circ}{-} A)$, además

   $$C = (C \cap A) \cup (C \cap (X - A)) \subset (X \overset{\circ}{-} A) \cup \mathring{A},$$

   como C es conexo, entonces C cae enteramente en $(X \overset{\circ}{-} A)$ o en $\mathring{A}$, esto contradice que $C \cap (X - A)$ y $C \cap A$. $\square$

7. ¿Es el espacio $\mathbb{R}_\ell$ conexo? Justifica tu respuesta.

   Falso, en efecto

   $$\mathbb{R}_\ell = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

   y esta es una disconexión.

8. Determina si $\mathbb{R}^\omega$ es conexo en la topología uniforme.

9. Sea A un subconjunto propio de X, y sea B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, muestra que

   $$(X \times Y) - (A \times B)$$

   es conexo.

10. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios conexos; sea X el espacio producto

    $$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

    Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X.

a) Dado cualquier subconjunto finito K de J, sea X_K el subespacio de X que consiste en todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$. Muestra que X_K es conexo.

b) Demuestra que la unión Y de los espacios X_K es conexa.

c) Demuestra que X es igual a la clausura de Y; concluye que X es conexo.

11. Sea $p : X \to Y$ un mapeo cociente. Demuestra que si cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ es conexo, y si Y es conexo, entonces X es conexo.

12. Sea $Y \subset X$; sean X e Y conexos. Demuestra que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ y $Y \cup B$ son conexos.