

Mateo Andrés Manosalva Amaris

Sergio Alejandro Bello Torres .....

1. a) Un  $G_\delta$ -conjunto en un espacio  $X$  es un conjunto  $A$  que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de  $X$ . Demuestra que en un espacio  $T_1$  de primera numerabilidad, cada conjunto unitario es un  $G_\delta$ -conjunto.

*Demostración.* Sea  $\{x\}$  un conjunto unitario arbitrario, como  $X$  es 1-contable, entonces existe  $B_x = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una base contable para  $x$ , es claro que  $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ , falta ver que dado  $y \neq x$ ,  $y \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ , como  $y \neq x$ , entonces existen  $V_x$  y  $V_y$  vecindades de  $x$  y  $y$  respectivamente tal que  $y \notin V_x$  y  $x \notin V_y$  ya que  $X$  es  $T_1$ , esto es nos da que existe  $B_i$  tal que  $y \notin B_i$ , lo que concluye el resultado.  $\square$

- b) Existe un espacio familiar en el cual cada conjunto unitario es un  $G_\delta$ -conjunto, pero que no satisface el axioma de primera numerabilidad. ¿Cuál es?

**Solución.** Este espacio es  $\mathbb{R}^\omega$  con la topología de cajas, este espacio no es 1-contable ya que dado  $x = (x_n)_n$  y una colección  $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$  de vecindades de  $x$ , podemos suponer que  $U_i = \prod_n (a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$  donde  $a_n^{(i)} < x_n < b_n^{(i)}$ , tomando  $c_n = \frac{a_n^{(n)} + x_n}{2}$  y  $d_n = \frac{x_n + b_n^{(n)}}{2}$  se sigue que  $V = \prod_n (c_n, d_n)$  es una vecindad de  $x$ , pero  $U_n \not\subset V$  para cada  $n$ .

Note ahora que dado  $x = (x_n)_n$ , tome  $U_i = \prod_n (x_n - \frac{1}{i}, x_n + \frac{1}{i})$  para cada  $i$ , en efecto  $\bigcap_i U_i = \{x\}$

2. Demuestra que si  $X$  tiene una base numerable  $\{B_n\}$ , entonces toda base  $\mathcal{C}$  de  $X$  contiene una base numerable para  $X$ . [Sugerencia: Para cada par de índices  $n, m$  para los cuales sea posible, elige  $C_{n,m} \in \mathcal{C}$  tal que  $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$ .]

*Demostración.* Sea  $x \in X$ , ya que  $\mathcal{B}$  es base, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_m$ , como  $\mathcal{C}$  también es base, existe  $C$  tal que  $x \in C \subseteq B_m$ , aplicando nuevamente la definición de base, llegamos a que existe  $n$  tal que  $x \in B_n \subseteq C \subseteq B_m$ , denotemos entonces a este  $C$  por  $C_{n,m}$ , así, para  $n, m \in \mathbb{N}$  podemos escoger  $C_{n,m}$  de tal manera que  $B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m$ .

Veamos que  $\mathcal{C}' := \{C_{n,m} \in \mathcal{C} : n, m \in \mathbb{N}, B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m\}$  es una base contable para  $X$ . La primera propiedad se sigue directamente de como construimos  $\mathcal{C}'$ . Ahora sean  $x \in X$ ,  $C_{n_1, m_1}$  y  $C_{n_2, m_2}$  tales que  $x \in C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$ , como  $C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$  es abierto en  $X$ , existe  $B_{m_3}$  tal que  $x \in B_{m_3} \subseteq C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$ , siguiendo el razonamiento anterior encontramos  $C_{n_3, m_3}$  tal que  $x \in B_{n_3} \subseteq C_{n_3, m_3} \subseteq B_{m_3}$  de ésta manera  $x \in C_{n_3, m_3} \subseteq C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$ , por lo tanto  $\mathcal{C}'$  es una base para  $X$ .  $\square$

3. Sea  $X$  un espacio con una base numerable; sea  $A$  un subconjunto no numerable de  $X$ . Demuestra que hay una cantidad no contable de puntos de  $A$  que son de acumulación en  $A$ .

*Demostración.* Primero probaremos que el conjunto de puntos de acumulación  $A'$  de  $A$ , intersectado con  $A$  es no vacío: Asuma que  $A' \cap A$  es vacío, luego dado  $a \in A$  existe una vecindad  $V_a$  de  $a$  tal que  $V_a \cap (A - \{a\}) = \emptyset$ , de ésta manera la colección  $\{V_a\}_{a \in A}$  es una colección no contable de abiertos disyuntos dos a dos, ya que  $X$  es 2-contable, tiene un subconjunto denso contable  $E$ , luego existe  $x_a \in E$  tal que  $x_a \in V_a$ , pero como los  $V_a$  son disyuntos dos a dos, cada  $x_a$  debe ser distinto, es decir  $E$  es no contable, lo cual contradice que  $E$  es contable. Así,  $A' \cap A \neq \emptyset$ . Ahora asuma que  $A' \cap A$  es contable; como  $X$  es 2-contable, en particular es 1-contable, luego por cada  $y \in A'$  existe una sucesión  $\{x_n^{(y)}\} \subseteq A$  que converge a  $y$ . De esta manera tenemos que

$$B = \bigcup_{y \in A' \cap A} \{x_n^{(y)}\} \subseteq A$$

es contable, pues es unión contable de conjuntos contables, por lo tanto  $A - B$  es no contable, lo cual implica que tiene un punto de acumulación  $p$  que pertenece a  $A - B$ , en particular  $p \in A \cap A'$  sin embargo  $A \cap A' \subseteq B$ , lo cual es una contradicción, luego  $A \cap A'$  es no contable.  $\square$

4. Demuestra que todo espacio métrico compacto  $X$  tiene una base numerable. [Sugerencia: Sea  $\mathcal{A}_n$  un cubrimiento finito de  $X$  por bolas de radio  $1/n$ .]

*Demostración.* Dado  $n \in \mathbb{N}$ , considere el cubrimiento  $\mathcal{A}_n$  de las bolas de radio  $1/n$ , como  $X$  es compacto entonces  $A_n$  tiene un subcubrimiento finito, digamos  $\mathcal{B}_n$ , note que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

es una base contable ya que dado  $x \in B(x, r)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $r > \frac{1}{n}$  para todo  $r > 0$  por la propiedad arquimediana, luego existe  $B_{k_n} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$  tal que  $x \in B_{k_n} \subset B(x, r)$   $\square$

5. a) Demuestra que todo espacio métrico con un subconjunto denso contable tiene una base contable.

*Demostración.* Sea  $A \subset X$  tal que  $\overline{A} = X$ , note que  $B = \bigcup_{a \in A} B(a, r)$  tal que  $r \in \mathbb{Q}$  es una base contable.  $\square$

- b) Demuestra que todo espacio métrico de Lindelöf tiene una base contable.

*Demostración.* Considere el cubrimiento  $\mathcal{A}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ , como  $(X, d)$  es Lindelöf entonces  $\mathcal{A}_n$  tiene un subcubrimiento contable, luego

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$$

es un base contable ya que unión contable de contables es contable.  $\square$

6. Demuestra que  $\mathbb{R}_\ell$  e  $I_0^2$  no son metrizables.

*Demostración.* Ya que  $\mathbb{R}_\ell$  es separable, pero no 2-contable, no puede ser métrico, pues en un espacio métrico estas dos propiedades son equivalentes.

Ahora, consideremos  $I_0^2$ , por el punto anterior tenemos que en un espacio métrico ser Lindelöf y 2-contable son propiedades equivalentes. De esta manera, si  $I_0^2$  fuera metrizable, como es Lindelöf, sería 2-contable, luego todo subespacio de  $I_0^2$  sería 2-contable y por lo tanto Lindelöf. Sin embargo, el subespacio  $[0, 1] \times (0, 1)$  no es Lindelöf, luego  $I_0^2$  no puede ser metrizable.  $\square$

7. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface  $S_\Omega$ ? ¿Qué ocurre con  $\bar{S}_\Omega$ ?
8. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface  $\mathbb{R}^\omega$  con la topología uniforme?  
Ya que  $\mathbb{R}^\omega$  es métrico, es 1-contable. No es separable pues el conjunto  $\{0, 1\}^\omega$  es discreto en  $\mathbb{R}^\omega$ . Como en espacios métricos ser 2-contable, separable y Lindelöf son equivalentes, éste espacio solo cumple el primer axioma.
9. Sea  $A$  un subespacio cerrado de  $X$ . Demuestre que si  $X$  es Lindelöf, entonces  $A$  es Lindelöf. Muestre con un ejemplo que si  $X$  tiene un subconjunto denso numerable,  $A$  no necesariamente tiene un subconjunto denso numerable.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  un cubrimiento de  $A$ , como  $A$  es cerrado entonces  $\mathcal{C} \cup A^c$  es un cubrimiento de  $X$ , como  $X$  es Lindelöf entonces tiene un subcubrimiento contable, digamos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup A^c = X,$$

con  $C_i \in \mathcal{C}$ , luego  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$   $\square$

El ejemplo en cuestión es el plano de Sorgenfrey: Como el plano es producto finito de espacios separables, es separable, ahora considere la recta  $L$  dada por la ecuación  $y = -x$ , luego, si consideramos el abierto  $U = [a, 1) \times [-a, 1)$ , vemos que  $U \cap L = \{a\}$ , por tanto los puntos son abiertos en  $L$  y así,  $L$  tiene la topología discreta, por tanto no tiene un subconjunto denso contable.

10. Demuestra que si  $X$  es un producto numerable de espacios con subconjuntos densos numerables, entonces  $X$  tiene un subconjunto denso numerable.

*Demostración.* Sea  $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$  tal que para cada  $X_i$  existe  $D_i$  contable denso en  $X_i$ . Ahora, sea  $x \in X$  fijo pero arbitrario,  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y sea  $K \subset \mathbb{N}$  finito, considere  $B_K$  el subespacio de  $X$  que consiste de los puntos  $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tales que  $y_i = x_i$  para  $i \in \mathbb{N} - K$  y  $y_i = w_i$  para  $i \in K$  donde  $w_i \in D_i$ , note que  $B_K$  es contable, pues es isomorfo a  $\prod_{i \in K} D_i$  el cual es contable por ser producto finito de conjuntos contables. Ahora sea

$$D = \bigcup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < |\mathbb{N}|}} B_K$$

$D$  es contable pues es unión contable de conjuntos contables.  $D$  es denso en  $X$ : en efecto, sea  $p \in X$  y  $U = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$  una vecindad básica de  $p$ , con esto tenemos que  $U_i = X_i$  para todos salvo finitos naturales  $i$ , además, en los índices restantes  $D_i \cap U_i \neq \emptyset$  pues  $\overline{D_i} = X_i$ , de esta manera existe  $K \subseteq \mathbb{N}$  finito tal que existe  $y \in B_K \cap U$ , luego  $U \cap D \neq \emptyset$ , por lo tanto  $D$  es denso en  $X$ .  $\square$

11. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Demuestra que si  $X$  es Lindelöf, o si  $X$  tiene un subconjunto denso numerable, entonces  $f(X)$  satisface la misma condición.

*Demostración.* Sea  $\{B_\alpha\}_\alpha$  un cubrimiento de  $f(X)$ ,  $A_\alpha = f^{-1}(B_\alpha)$  es abierto en  $X$  ya que  $f$  es continua y  $\{A_\alpha\}_\alpha$  cubre a  $X$ , como  $X$  es Lindelöf, entonces existe un subcubrimiento contable  $\{f^{-1}(B_{\alpha_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ , luego  $\{(B_{\alpha_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un cubrimiento contable de  $f(X)$ .

Suponga que  $X$  tiene un subconjunto denso contable  $D$ , como  $f$  es continua entonces

$$f(\overline{D}) = f(X) \subset \overline{f(D)},$$

esto nos da que  $f(D)$  es denso en  $f(X)$  y como  $D$  es contable entonces  $f(D)$  también. □

12. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y abierta. Demuestra que si  $X$  satisface el primer o segundo axioma de numerabilidad, entonces  $f(X)$  satisface el mismo axioma.

*Demostración.* i) Sea  $X$  un espacio 1-contable, luego dado  $x \in X$  existe una base contable de vecindades de  $x$ ,  $\mathcal{B}_x = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Veamos que  $\mathcal{V}_{f(x)} = \{f[B_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una base contable de vecindades de  $f(x)$ : ya que  $f$  es abierta  $f[B_i]$  es abierto en  $f(X)$ , más aún como  $x \in B_i$ ,  $f[B_i]$  es una vecindad de  $f(x)$ . Ahora, sea  $V$  una vecindad de  $f(x)$ , por continuidad, existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f[U] \subseteq V$ , además, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_i \subseteq U$ , luego  $f[B_i] \subseteq f[U] \subseteq V$ , es decir  $f[B_i] \subseteq V$ . De esta manera  $\mathcal{V}_{f(x)}$  es una base contable de vecindades de  $f(x)$  y así  $f(X)$  es 1-contable.

ii) Sea  $X$  un espacio 2-contable, luego tiene una base contable  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Considere  $\mathcal{V} = \{f[B_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$  y sea  $y \in f(X)$ , por definición existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$  y como  $\mathcal{B}$  es base, existe  $B_i$  tal que  $x \in B_i$  y por tanto  $y \in f[B_i]$ . Ahora sean  $f[B_{i_1}], f[B_{i_2}] \in \mathcal{V}$ , por propiedades de la imagen inversa, se tiene que  $f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]] = f^{-1}[f[B_{i_1}]] \cap f^{-1}[f[B_{i_2}]]$ , como  $B_{i_1} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}]]$  y  $B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_2}]]$  tenemos que  $B_{i_1} \cap B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]]$  y como  $\mathcal{B}$  es base, existe  $B_{i_3}$  tal que  $B_{i_3} \subseteq B_{i_1} \cap B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]]$ , de esta manera  $f[B_{i_3}] \subseteq f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]$ , con lo cual concluimos que  $\mathcal{V}$  es base para  $f(X)$ . □

13. Demuestre que si  $X$  tiene un subconjunto denso numerable, entonces toda colección de conjuntos abiertos disjuntos en  $X$  es numerable.

*Demostración.* Sea  $D$  el conjunto denso numerable, dada una colección de conjuntos abiertos disjuntos  $\mathcal{C}$ , tenemos que para cada  $C \in \mathcal{C}$  existe un  $x_C \in C \cap D$ . Note que la función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C} &\longrightarrow D \\ C &\longmapsto f(C) = x_C \end{aligned}$$

es inyectiva ya que si  $U, V \in \mathcal{C}$  son tal que  $U \neq V$ , entonces  $U \cap V = \emptyset$  y por tanto  $x_U \neq x_V$ . Esto nos da que  $|\mathcal{C}| \leq |D| \leq \aleph_0$  □

14. Demuestra que si  $X$  es Lindelöf y  $Y$  es compacto, entonces  $X \times Y$  es Lindelöf.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  un cubrimiento por abiertos de  $X \times Y$ , como  $Y$  es compacto tenemos que para cada  $x \in X$ ,  $\{x\} \times Y$  es compacto y  $\mathcal{C}$  lo cubre, luego existe un subcubrimiento finito  $C_x = \{C_i\}_{i \leq n}$  además  $\bigcup C_x$  es un abierto que contiene a  $\{x\} \times Y$ , por lo tanto, aplicando el lema del tubo, existe  $W_x \subseteq X$  abierto tal que  $W_x \times Y \subseteq \bigcup C_x$ , así  $\{W_x\}_{x \in X}$  es un cubrimiento por abiertos de  $X$ , ya que  $X$  es Lindelöf obtenemos un subcubrimiento contable  $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , ahora, como para cada  $W_i \times Y$  existe un subcubrimiento finito de  $\mathcal{C}$ , la unión de estos cubrimientos cubre a  $X \times Y$ , y como es unión contable de conjuntos finitos, es contable.  $\square$

15. Considera  $\mathbb{R}^I$  con la métrica uniforme, donde  $I = [0, 1]$ . Sea  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  el subespacio de funciones continuas. Demuestra que  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  tiene un subconjunto denso numerable, y por lo tanto una base numerable.

*[Sugerencia: Considera aquellas funciones continuas cuyos gráficos consisten en un número finito de segmentos de línea con extremos racionales.]*

16. a) Demuestra que el espacio producto  $\mathbb{R}^I$ , donde  $I = [0, 1]$ , tiene un subconjunto denso numerable.  
 b) Demuestra que si  $J$  tiene cardinalidad mayor que  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ , entonces el espacio producto  $\mathbb{R}^J$  no tiene un subconjunto denso numerable.

*[Sugerencia: Si  $D$  es denso en  $\mathbb{R}^J$ , define  $f: J \rightarrow \mathcal{P}(D)$  por la ecuación  $f(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b))$ , donde  $(a, b)$  es un intervalo fijo en  $\mathbb{R}$ .]*

- \*17. Considera  $\mathbb{R}^\omega$  con la topología de la caja. Sea  $\mathbb{Q}^\infty$  el subespacio que consiste en secuencias de racionales que terminan en una cadena infinita de ceros. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface este espacio?

- \*18. Sea  $G$  un grupo topológico de primera numerabilidad. Demuestra que si  $G$  tiene un subconjunto denso numerable, o es Lindelöf, entonces  $G$  tiene una base numerable.

*[Sugerencia: Sea  $\{B_n\}$  una base numerable en  $e$ . Si  $D$  es un subconjunto denso numerable de  $G$ , demuestra que los conjuntos  $dB_n$ , para  $d \in D$ , forman una base para  $G$ . Si  $G$  es Lindelöf, elige para cada  $n$  un conjunto numerable  $C_n$  tal que los conjuntos  $cB_n$ , para  $c \in C_n$ , cubran  $G$ . Demuestra que cuando  $n$  recorre  $\mathbb{Z}_+$ , estos conjuntos forman una base para  $G$ .]*