

Mateo Andrés Manosalva Amarís

Sergio Alejandro Bello Torres

1. Sean τ y τ' dos topologías sobre X . Si $\tau' \supset \tau$, ¿qué implica la conexidad de X en una topología sobre la otra?

Solución: Note que si X es conexo en la topología τ' , entonces en la topología τ también lo es. Supongamos que no, entonces existen dos abiertos disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$, como $\tau \subset \tau'$ entonces $A, B \in \tau'$, luego X no sería conexo.

La contrarrecíproca nos dice que si X es desconexo en τ entonces es desconexo en τ' , sin embargo que X sea conexo en τ no implica conexidad en la topología τ' . Por ejemplo, considere los espacios topológicos (\mathbb{R}, τ) , (\mathbb{R}, τ_ℓ) , con τ la topología usual, es claro que $\tau \subset \tau_\ell$. Sabemos que \mathbb{R} es conexo en la topología usual, pero \mathbb{R}_ℓ no lo es. La prueba de esto se encuentra en el ejercicio 7.

2. Sea $\{A_n\}$ una secuencia de subespacios conexos de X , tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n . Demuestra que $\bigcup A_n$ es conexo.

Demostración. Supongamos que no, esto es

$$\bigcup_n A_n = B \cup C$$

con $B \cap C = \emptyset$ y $B, C \neq \emptyset$. Tomemos $A_1 \subset B$, en efecto

$$I := \{i \in \mathbb{N} : A_i \subset C\} \neq \emptyset,$$

de lo contrario $C = \emptyset$ y esto no es posible. El principio del buen orden garantiza que I tiene un elemento mínimo, digamos k , esto nos da que $A_{k-1} \subset B$, así $A_k \cap A_{k-1} = \emptyset$, una contradicción. \square

3. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X ; sea A un subespacio conexo de X . Muestra que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α , entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.

Demostración. Note que

$$A \cup \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (A \cup A_\alpha)$$

y como $A \subset \bigcap_\alpha (A \cup A_\alpha)$, y $A \neq \emptyset$, entonces por el punto anterior se concluye lo deseado. \square

4. Demuestra que si X es un conjunto infinito, entonces es conexo en la topología del complemento finito.

Demostración. Suponga que no, entonces $X = A \cup B$ con A, B abiertos disjuntos, como A y B son disjuntos tenemos que $B = A^c$, entonces B es finito ya que $A \in \tau$, como $B \in \tau$ y $A = B^c$, se sigue que A es finito, lo que contradice que X es infinito. \square

5. Un espacio es *totalmente desconexo* si sus únicos subespacios conexos son conjuntos de un solo punto. Muestra que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente desconexo. ¿Es cierto el recíproco?

Demostración. En efecto $A = \{x\}_{x \in X}$ es conexo ya que no pueden haber dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión sea $\{x\}$. Si $|A| > 2$, note que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

y por tanto A no es conexo, ya que los singletones son abiertos disjuntos en la topología discreta. \square

El recíproco no es cierto. \mathbb{Q} no es conexo con la topología usual y los únicos subespacios conexos de \mathbb{Q} son los conjuntos de un solo punto

Si Y es un subespacio de \mathbb{Q} que contiene dos puntos p y q , se puede elegir un número irracional a entre p y q , tal que

$$Y = (Y \cap (-\infty, a)) \cup (Y \cap (a, +\infty))$$

y la topología usual no es la misma topología discreta.

6. Sea $A \subset X$. Muestra que si C es un subespacio conexo de X que intersecta tanto A como $X - A$, entonces C intersecta ∂A .

Demostración. Suponga que $C \cap \partial A = \emptyset$, como $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ entonces $C \cap A \subset \overset{\circ}{A}$, análogamente $\overline{X - A} = (X - \overset{\circ}{A}) \cup \partial(X - A)$ y $C \cap (X - A) \subset (X - \overset{\circ}{A})$, además

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap (X - A)) \subset (X - \overset{\circ}{A}) \cup \overset{\circ}{A},$$

como C es conexo, entonces C cae enteramente en $(X - \overset{\circ}{A})$ o en $\overset{\circ}{A}$, esto contradice que $C \cap (X - A)$ y $C \cap A$. \square

7. ¿Es el espacio \mathbb{R}_ℓ conexo? Justifica tu respuesta.

Falso, en efecto

$$\mathbb{R}_\ell = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

y esta es una desconexión.

8. Determina si \mathbb{R}^ω es conexo en la topología uniforme.
9. Sea A un subconjunto propio de X , y sea B un subconjunto propio de Y . Si X e Y son conexos, muestra que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

10. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios conexos; sea X el espacio producto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X .

- a) Dado cualquier subconjunto finito K de J , sea X_K el subespacio de X que consiste en todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$. Muestra que X_K es conexo.
 - b) Demuestra que la unión Y de los espacios X_K es conexa.
 - c) Demuestra que X es igual a la clausura de Y ; concluye que X es conexo.
11. Sea $p : X \rightarrow Y$ un mapeo cociente. Demuestra que si cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ es conexo, y si Y es conexo, entonces X es conexo.
12. Sea $Y \subset X$; sean X e Y conexos. Demuestra que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ y $Y \cup B$ son conexos.