

Taller I

Bourbaki

23 de noviembre de 2024

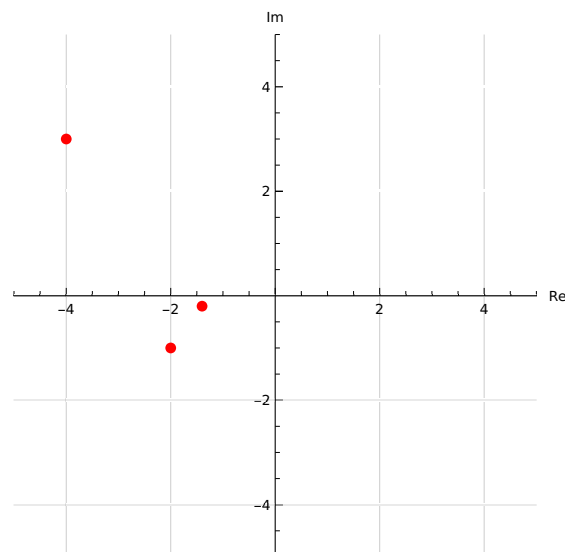
1. Representar gráficamente:

$$(1 - 2i) + (-3 + i); \quad (2 + i)(-1 + 2i); \quad \frac{-2 + 4i}{1 - 3i}.$$

Note que:

$$\frac{-2 + 4i}{1 - 3i} = \frac{-2 + 4i}{1 - 3i} \frac{(1 + 3i)}{(1 + 3i)} = \frac{(-2 + 4i)(1 + 3i)}{10} = -\frac{7}{5} - \frac{i}{5}$$

y con eso se obtiene la gráfica chingona



2. Calcular el argumento principal, y escribir en forma polar $z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3} - i)^3}$.

Haciendo unas cuenticas todas cacorras pero que irá a hacer su puta madre

$$z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3} - i)^3} = \frac{(1 - i\sqrt{3})^7(\sqrt{3} + i)^3}{((\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i))^3} = \frac{(1 - i\sqrt{3})^7(\sqrt{3} + i)^3}{64} = 8i + 8\sqrt{3},$$

luego el argumento principal es $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, además $\sqrt{8^2 + 8^2 \times 3} = 16$, esto es

$$z = 16\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right),$$

pero pues yo soy un guevon y no me acordé de que es más fácil elevar cuando el número está en forma polar, entonces

$$z = \frac{(2\exp(i \arctan(-\sqrt{3})))^7}{(2\exp(i \arctan(-1/\sqrt{3})))^3} = 2^4 \exp(i(7 \arctan(-\sqrt{3}) - 3 \arctan(-1/\sqrt{3}))),$$

y en efecto $7 \arctan(-\sqrt{3}) - 3 \arctan(-1/\sqrt{3}) + 2\pi = \frac{\pi}{6}$

3. Mostrar que el triangulo de vertices z_1, z_2, z_3 es equilatero, si y solo si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

Para este punto primero note que dado un triángulo equilatero, podemos escribir a sus vértices de la forma

$$z_1 = r^{1/3} \exp\left(\frac{i\theta_1}{3}\right) + w, \quad z_2 = r^{1/3} \exp\left(\frac{i\theta_2}{3}\right) + w \quad \text{y} \quad z_3 = r^{1/3} \exp\left(\frac{i\theta_3}{3}\right) + w,$$

con $w \in \mathbb{C}$, luego los vértices del triángulo equilátero son soluciones del polinomio $(z - a)^3 - b = 0 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, en efecto

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) &= z^3 - z^2(z_2 + z_1 + z_3) + z(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - z_1 z_2 z_3 \\ &= (z - a)^3 - b \\ &= z^3 - z^2(3a) + z(3a^2) - b - a^3. \end{aligned}$$

Ahora comparando coeficientes obtenemos que $3a = z_1 + z_2 + z_3$ y $3a^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$, esto es

$$3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) = (z_1 + z_2 + z_3)^2$$

de donde se sigue la equivalencia deseada.

4. Mostrar que la suma de los angulos interiores de un triangulo es π

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ vertices de un triangulo cualquiera y $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi)$ los respectivos angulos. Primero note que si trasladamos el triangulo tal que el vertice z_1 quede sobre el origen, los vertices del triangulo en sentido antihorario son $0, z_2 - z_1$ y $z_3 - z_1$. donde el angulo entre estos dos vectores sigue siendo θ_1 ya que trasladar no afecta los angulos. Recordemos que $e^{i\theta_1}$ rota a un vector a traves del origen el angulo θ_1 en sentido antihorario, asi $(z_2 - z_1)e^{i\theta_1} = r_1(z_3 - z_1)$, donde r_1 es un factor de escalacion. Haciendo el mismo proceso para los verices z_2 y z_3 tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} (z_2 - z_1)e^{i\theta_1} = r_1(z_3 - z_1), \\ (z_3 - z_2)e^{i\theta_2} = r_2(z_1 - z_2), \\ (z_1 - z_3)e^{i\theta_3} = r_3(z_2 - z_3). \end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases} e^{i\theta_1} = r_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \\ e^{i\theta_2} = r_2 \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \\ e^{i\theta_3} = r_3 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}. \end{cases}$$

Tomando el argumento principal en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{Arg} \left(r_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right), \\ \theta_2 = \text{Arg} \left(r_2 \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \right), \\ \theta_3 = \text{Arg} \left(r_3 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right). \end{cases}$$

Recordemos que el argumento del producto de dos complejos es igual a la suma de los argumentos, luego

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \text{Arg} \left(r_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) + \text{Arg} \left(r_2 \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \right) + \text{Arg} \left(r_3 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) \\ &= \text{Arg} \left(\left(r_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \left(r_2 \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \right) \left(r_3 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) \right) \\ &= \text{Arg}(-r_1 r_2 r_3) \\ &= \text{Arg}(r_1 r_2 r_3 e^{i\pi}) \\ &= \pi \end{aligned}$$

5. Mostrar que

$$\blacksquare \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

En efecto

$$\begin{aligned} \sin(x + 2x) &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x (\sin x \cos x + \cos x \sin x) \\ &= \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + 2 \cos^2 x \sin x \\ &= \sin x - 2 \sin^3 x + 2 \cos^2 x \sin x \\ &= \sin x (1 + 2 \cos^2 x) - 2 \sin^3 x \\ &= \sin x (\sin^2 x + 3 \cos^2 x) - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\blacksquare \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

En efecto

$$\begin{aligned} \cos(x + 2x) &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x (\sin x \cos x) \\ &= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

$$\blacksquare \cos 8x + 28 \cos 4x + 35 = 64 (\cos^8 x + \sin^8 x)$$

Recordemos que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, luego $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$ [Luego sigo me dio pereza hacer esto :p](#)

6. Graficar las raíces cuartas de $i, -16, -2 + 2i\sqrt{3}$

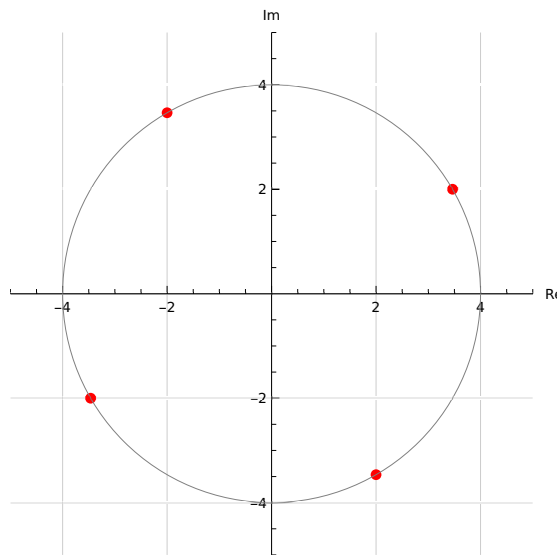
En este solo vamos a poner el último porque el Sercoya dijo que todos son cuadrados (ese es el rey de la pedancia), además los otros ejercicios son iguales, note que

$$r = \sqrt{4 + 4 \times 3} = 4 \quad \text{además } \theta = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3},$$

de esto se sigue que los puntos son de la forma

$$z = \exp \left(i \frac{\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right)}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Obtenemos la gráfica chingona

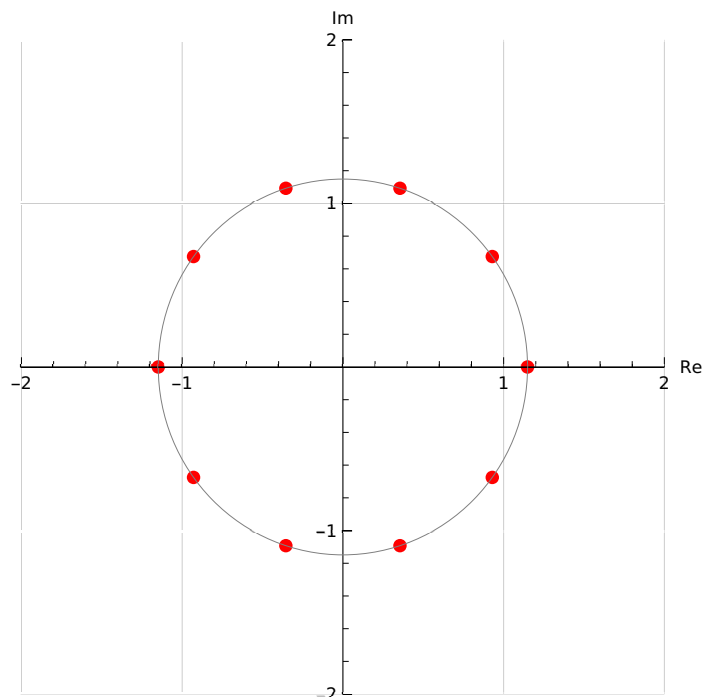


7. Resolver la ecuación $z^{10} + 4 = 0$

Note que $z^{10} = 4e^{i\pi}$, entonces las soluciones son de la forma

$$z = 4^{\frac{1}{10}} \exp \left(i \left(\frac{\pi + 2\pi k}{10} \right) \right) \quad k = 0, \dots, 9$$

y pues para rellenar espacio mire otra chingona



8. Mostrar que las raíces de la ecuación $(z+1)^5 + z^5 = 0$, están sobre la recta $x = -\frac{1}{2}$
 Note que la ecuación se puede escribir como

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1 = \exp(i\pi)$$

de donde se sigue que $\frac{z+1}{z} = w = \exp\left(i\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)\right)$ con $k = 0, \dots, 4$, en efecto

$$\Re(z) = \Re\left(\frac{1}{w-1}\right) = \Re\left(\frac{\bar{w}-1}{|w-1|^2}\right)$$

tomando $w = a + bi$ y sabiendo que $|w| = 1$ se sigue que

$$\Re(z) = \Re\left(\frac{a-bi-1}{(a-1)^2+b^2}\right) = \frac{a-1}{(a-1)^2+b^2} = \frac{a-1}{a^2-2a+1+b^2} = \frac{a-1}{2(1-a)} = -\frac{1}{2}$$

9. Mostrar que para $n \neq 0$, las raíces de la ecuación $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$, están dadas por

$$z_k = i \tan \frac{(2k+1)\pi}{4n}, n \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que podemos escribir la ecuación de la forma

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = -1 = e^{i\pi}$$

tomando $w = \frac{1+z}{1-z}$, vemos que $w - zw = 1 + z$, entonces $w - 1 = z(1+w)$, esto es

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{w-1}{w+1} \\
 &= \frac{w-1}{w+1} \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}+1} \\
 &= \frac{w\bar{w}+w-\bar{w}-1}{w\bar{w}+w+\bar{w}+1}.
 \end{aligned}$$

Es claro que $|w| = 1$, entonces

$$z = \frac{w-\bar{w}}{2+w+\bar{w}} \frac{2i\text{Im}(w)}{2(1+\Re(w))} = \frac{i\text{Im}(w)}{1+\Re(w)}.$$

Note que $w_k = \exp\left(i\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)$, $k = 0, 1, \dots$, entonces:

$$z_k = i \frac{\sin(\theta_k)}{1+\cos(\theta_k)} = i \tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = i \tan\left(\frac{\pi(2k+1)}{4n}\right)$$

10. Calcular $(-3+4i)^{\frac{3}{2}}$, primero tomando la raíz cuadrada y el resultado elevarlo al cubo, y segundo, invirtiendo el procedimiento.

Note que

$$z^{1/2} = \sqrt{5} \exp\left(\frac{i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi k\right)\right), \quad k = 0, 1$$

$$z_0^{3/2} = 5\sqrt{5} \exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right), \quad z_1^{3/2} = 5\sqrt{5} \exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi\right)\right)$$

Por otro lado

$$z^3 = 5^3 \exp\left(3i\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right)$$

$$z_0^{3/2} = 5\sqrt{5} \exp\left(\frac{3i}{2}\left(3\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right), \quad z_1^{3/2} = 5\sqrt{5} \exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Se puede ver que en efecto en este caso da igual el orden de tomar la potencia dado que al distribuir $\frac{3}{2}$ en las expresiones anteriores obtenemos por un lado un ángulo $\phi + 3\pi$ y por el otro $\phi + \pi$ que sabemos que son el mismo ángulo, esto pasa porque 3 y 2 son primos relativos xd.

Toca acordarse de que $(z^{1/n})^m$ tiene menos elementos que $(z^m)^{1/n}$ si $(m, n) > 1$

11. Calcular $(-3+4i)^{-\frac{3}{2}}$.

Sea $z = (-3+4i)$, note que $z^{-3} = \frac{1}{125} \exp\left(i\left(-3\pi + 3\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$, entonces

$$z^{-3/2} = \frac{\sqrt{5}}{25} \exp\left(\frac{i}{2}\left(-3\pi + 3\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + 2\pi k\right)\right), \quad k = 0, 1$$