Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Demostrar que toda variedad es regular y, por lo tanto, metrizables.

   Demostración. Sea $x \in X$, como X es m-variedad,entonces dada U una vecindad de x, tenemos que U es homeomorfo $V \subset \mathbb{R}^m$. Sea h es homeomorfismo, como $\mathbb{R}^m$ es localmente compacto, entonces dada una vecindad W de $h(x)$ existe un K compacto tal que

   $$W_{h(x)} \subset K \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

   y como h es homeomorfismo

   $$h^{-1}(W_{h(x)}) \subset h^{-1}(K) \subset U$$

   con $h^{-1}(W_{h(x)})$ vecindad de x y $h^{-1}(K)$ compacto. Esto prueba que X es local localmente compacto, como localmente compacto y Haussdorf implica regular entonces hemos probado que toda variedad es regular, por la definición de variedad tenemos que esta es 2-contable, luego por el teorema de Urysohn toda variedad es metrizable. $\square$

2. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Suponga que para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x y un entero positivo k tal que U puede ser embedido en $\mathbb{R}^k$. Mostrar que X puede ser embedido en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.

   Demostración. Como X es Haussdorf y compacto entonces es normal, luego podemos cubrir a X con un número finito de $\{U_i\}$ que pueden ser embedidos en $\mathbb{R}^{k_i}$, sean $\{g_i\}$ los embedimientos correspondientes, como X es normal, tenemos una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ dominada por $\{U_i\}$. Sea $A_i = \operatorname{supp}(\phi_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$ defina la función $h_i : X \mapsto \mathbb{R}^m$ como

   $$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) & \text{si } x \in X - A_i \end{cases}$$

   Ahora defina

   $$F : X \longrightarrow (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}})$$

   como

   $$F(x) = \big(\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), h_1(x), \ldots, h_n(x)\big).$$

   Claramente F es continua pues es continua componente a componente y ya habíamos probado que h_i es continua, basta ver que F es inyectiva. Suponga $F(x) = F(y)$, entonces $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Ahora como $\phi_i(x) > 0$ para algún i, $\phi_i(y) > 0$ también, luego $x, y \in U_i$. Así

   $$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

se concluye que $g_i(x) = g_i(y)$. Pero $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva, esto es $x = y$.

$\square$

3. Sea X un espacio de Hausdorff tal que cada punto de X tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Mostrar que si X es compacto, entonces X es una m-variedad.

   Demostración. Como X es compacto, Haussdorf y todo $x \in X$

   tiene una vecidad U_x que puede ser embedida en $\mathbb{R}^k$, entonces X puede ser embedido en $\mathbb{R}^N$ para algún N por el punto anterior. Esto es que X es homeomorfo a un $V \subset \mathbb{R}^N$ y como $\mathbb{R}^N$ es 2-contable entonces V también y por tanto X. $\square$

4. Una familia indexada $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de X se dice *familia indexada puntualmente finita* si cada $x \in X$ pertenece a A_α solo para un número finito de valores de α. **Lema (de la contracción)**. Sea X un espacio normal; sea $\{U_1, U_2, \ldots\}$ un cubrimiento indexado puntualmente finito de X. Entonces, existe un cubrimiento indexado $\{V_1, V_2, \ldots\}$ de X tal que $\bar{V}_n \subset U_n$ para cada n.

   Demostración. Sea
$$A_1 = X - \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} U_i\right)$$
   A_1 es cerrado en X y además está contenido en U_1 pues $\{U_1, U_2, \ldots\}$ cubre a X, por normalidad existe V_1 tal que $A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$. Además $\{V_1, U_2, \ldots\}$ cubre a X.

   De manera recursiva, si son dados $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ tales que $\overline{V_i} \subseteq U_i$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots\}$ cubre a X, defina
$$A_k = X - (V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}) - \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} U_i\right)$$
   A_k es cerrado en X y $A_k \subseteq U_k$, luego existe V_k tal que $A_k \subseteq V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq U_k$. Así $\{V_1, \ldots, V_k, U_{k+1}, \ldots\}$ cubre a X.

   Queremos ver que $\{V_1, V_2, \ldots\}$ cubre a X. Sea $x \in X$, como $\{U_1, U_2, \ldots\}$ es una familia indexada puntualmente finita, $x \in U_k$ para finitos índices k, tome n el mayor natural tal que $x \in U_n$, es decir $x \notin U_k$ para $k > n$, luego, como $\{V_1, \ldots, V_n, U_{n+1}, \ldots\}$ cubre a X, debe existir un $k \leq n$ tal que $x \in V_k$, así $\{V_1, V_2, \ldots\}$ cubre a X. $\square$

5. La condición de Hausdorff es una parte esencial en la definición de una variedad; no se sigue de las otras partes de la definición. Considere el siguiente espacio: Sea X la unión del conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ y el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Se topologiza X tomando como base la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que no contienen al 0, junto con todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$ y todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$, para $a > 0$. El espacio X se llama *la recta con dos orígenes.*

   a) Verificar que esto es una base para una topología.

      Demostración. Denote por $\mathscr{B}$ a la colección dada en el enunciado.

      Sea $x \in X$, veamos que existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$, para esto tenemos dos casos:

      i. Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tome el intervalo $(0, x+1)$ si $x > 0$, si no, tome $(x-1, 0)$.
      ii. Si $x \in \{p, q\}$ tome $(-a, 0) \cup \{x\} \cup (0, a)$.

      Ahora sea $x \in U_1 \cap U_2$ donde $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$, tenemos los siguientes casos:

      i. Si U_1 y U_2 son intervalos abiertos que no contienen al 0, i.e., $U_1 = (a, b)$ y $U_2 = (c, d)$ considere $U_3 = (e, f)$ donde $e = \text{máx}\{a, c\}$ y $f = \text{mín}\{b, d\}$.

ii. Si U_1 es un intervalo abierto que no contiene al 0 y $U_2 = (-a, 0) \cup \{y\} \cup (0, a)$, donde $a > 0$ y $y \in \{p, q\}$. Tenemos que $U_1 = (b, c)$, Si $b < 0$ necesariamente $c < 0$, luego podemos tomar $U_3 = (e, c)$ donde $e = \text{máx}\{-a, b\}$. Ahora, si $b > 0$, tome $U_3 = (b, e)$ donde $e = \text{mín}\{a, c\}$.

iii. Si U_1 y U_2 son de la forma $(-a_1, 0) \cup \{y\} \cup (0, a_1)$ y $(-a_2, 0) \cup \{y\} \cup (0, a_2)$ con $y \in \{p, q\}$, tome $U_3 = (-a, 0) \cup \{y\} \cup (0, a)$ con $a = \text{mín}\{a_1, a_2\}$.

iv. Si U_1 es de la forma $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$ y U_2 es de la forma $(-b, 0) \cup \{q\} \cup (0, b)$, entonces x debe pertenecer o bien a $(-a, 0) \cap (-b, 0)$ o bien $(0, a) \cap (0, b)$, en cualquiera de los dos casos procedemos como en el caso i.

De ésta forma, para cada caso conseguimos un U_3 tal que $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$, concluyendo así que $\mathscr{B}$ es una base. □

b) Mostrar que cada uno de los espacios $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} f : X - \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{si } x = q \end{cases} \end{aligned}$$

f claramente es biyectiva, hay que ver que es contínua, note que $f|_{\mathbb{R}-\{0\}} = Id_{\mathbb{R}-\{0\}}$, luego, si probamos que f es contínua en q tendremos que f es contínua. Sea U una vecindad básica de $0 = f(q)$, es decir $U = (a, b)$ con $a < 0 < b$, luego $f^{-1}(U) = (a, 0) \cup \{q\} \cup (0, b)$ si tomamos $0 < c \leq \text{mín}\{|a|, |b|\}$, tenemos que $(-c, 0) \cup \{q\} \cup (0, c)$ es una vecindad de q contenida en $f^{-1}(U)$, por lo tanto f es contínua en q. Ahora veamos que f es abierta, para esto solo necesitamos verificar que la imagen de un abierto básico es abierta en $\mathbb{R}$, sea U un abierto básico de $X - \{p\}$, si U es un intervalo abierto que no contiene al 0, $f(U)$ es él mismo, si U es de la forma $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$, entonces $f(U) = (-a, a)$, el cual es abierto en $\mathbb{R}$, por tanto al ser f continua, biyectiva y abierta, es un homeomorfismo. Para ver que $X - \{q\}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ la prueba es análoga. □

c) Mostrar que X satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.

Demostración. Sea $x \in X$, veamos que $\{x\}$ es cerrado. Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tenemos que

$$X - \{x\} = (-\infty, x) \cup [(x, 0) \cup \{p\} \cup (0, -x)] \cup [(x, 0) \cup \{q\} \cup (0, -x)] \cup (0, \infty), \text{ si } x < 0$$
$$X - \{x\} = (-\infty, 0) \cup [(-x, 0) \cup \{p\} \cup (0, x)] \cup [(-x, 0) \cup \{q\} \cup (0, x)] \cup (x, \infty), \text{ si } x > 0$$

Ademas

$$X - \{p\} = (-\infty, 0) \cup [(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)] \cup (0, \infty)$$

y

$$X - \{q\} = (-\infty, 0) \cup [(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)] \cup (0, \infty)$$

para algún $a > 0$, de ésta manera $X - \{x\}$ es abierto para todo $x \in X$ y por lo tanto $\{x\}$ es cerrado. Para ver que X no es Hausdorff, tome p y q y sean U_p, U_q vecindades de p y q respectivamente, tales que $q \neq U_p$ y $p \neq U_q$. Ya que U_p es abierto, existe $(-a, 0) \cup p \cup (0, a) \subseteq U_p$ para algún $a > 0$, de manera análoga existe $(-b, 0) \cup \{q\} \cup (0, b) \subseteq U_q$ con $b > 0$, ahora tome $c = \text{mín}\{a, b\}$, note que $(-c, 0) \cup (0, c) \subseteq U_p \cap U_q$, luego X no puede ser Hausdorff. □

d) Mostrar que X satisface todas las condiciones para ser una 1-variedad, excepto la condición de Hausdorff.

Demostración. Para ver que X tiene una base contable, considere la colección de los intervalos abiertos con extremos racionales, los conjuntos de la forma $(-r,0)\cup\{p\}\cup(0,r)$ y los conjuntos de la forma $(-r,0)\cup\{q\}\cup(0,r)$ con $r\in\mathbb{Q}^+$. Esta colección es contable, pues es unión finita de conjuntos contables, además, por la densidad de los racionales, forma una base para X.

Ahora, veamos que dado $x\in X$ existe una vecindad de x que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}$, Si $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, tenemos que existen $a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$ tales que $x\in(a,b)$ y $0\notin(a,b)$, además (a,b) es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Por (b), tenemos que $X-\{p\}$ y $X-\{q\}$ son vecindades de q y p, respectivamente, que son homeomorfas a $\mathbb{R}$. Por lo tanto X cumple todas las condiciones de una 1-variedad, excepto ser Hausdorff. $\square$