



Mateo Andrés Manosalva Amaris

Sergio Alejandro Bello Torres .....

1. Demostrar que toda variedad es regular y, por lo tanto, metrizable.

*Demostración.* Sea  $x \in X$ , como  $X$  es  $m$ -variedad, entonces dada  $U$  una vecindad de  $x$ , tenemos que  $U$  es homeomorfo  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Sea  $h$  es homeomorfismo, como  $\mathbb{R}^m$  es localmente compacto, entonces dada una vecindad  $W$  de  $h(x)$  existe un  $K$  compacto tal que

$$W_{h(x)} \subset K \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

y como  $h$  es homeomorfismo

$$h^{-1}(W_{h(x)}) \subset h^{-1}(K) \subset U$$

con  $h^{-1}(W_{h(x)})$  vecindad de  $x$  y  $h^{-1}(K)$  compacto. Esto prueba que  $X$  es local localmente compacto, como localmente compacto y Hausdorff implica regular entonces hemos probado que toda variedad es regular, por la definición de variedad tenemos que esta es 2-contable, luego por el teorema de Urysohn toda variedad es metrizable.  $\square$

2. Sea  $X$  un espacio compacto y Hausdorff. Suponga que para cada  $x \in X$ , existe una vecindad  $U$  de  $x$  y un entero positivo  $k$  tal que  $U$  puede ser embedido en  $\mathbb{R}^k$ . Mostrar que  $X$  puede ser embedido en  $\mathbb{R}^N$  para algún entero positivo  $N$ .

*Demostración.* Como  $X$  es Hausdorff y compacto entonces es normal, luego podemos cubrir a  $X$  con un número finito de  $\{U_i\}$  que pueden ser embedidos en  $\mathbb{R}^{k_i}$ , sean  $\{g_i\}$  los embedimientos correspondientes, como  $X$  es normal, tenemos una partición de la unidad  $\{\phi_i\}$  dominada por  $\{U_i\}$ . Sea  $A_i = \text{supp}(\phi_i)$ , para cada  $i = 1, \dots, n$  defina la función  $h_i : X \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  como

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \dots, 0) & \text{si } x \in X - A_i \end{cases}$$

Ahora defina

$$F : X \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^{k_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{k_n}}$$

como

$$F(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), h_1(x), \dots, h_n(x)).$$

Claramente  $F$  es continua pues es continua componente a componente y ya habíamos probado que  $h_i$  es continua, basta ver que  $F$  es inyectiva. Suponga  $F(x) = F(y)$ , entonces  $\phi_i(x) = \phi_i(y)$  y  $h_i(x) = h_i(y)$  para todo  $i$ . Ahora como  $\phi_i(x) > 0$  para algún  $i$ ,  $\phi_i(y) > 0$  también, luego  $x, y \in U_i$ . Así

$$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

se concluye que  $g_i(x) = g_i(y)$ . Pero  $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  es inyectiva, esto es  $x = y$ .

□

3. Sea  $X$  un espacio de Hausdorff tal que cada punto de  $X$  tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Mostrar que si  $X$  es compacto, entonces  $X$  es una  $m$ -variedad.

*Demostración.* Como  $X$  es compacto, Hausdorff y todo  $x \in X$  tiene una vecindad  $U_x$  que puede ser embebida en  $\mathbb{R}^k$ , entonces  $X$  puede ser embebido en  $\mathbb{R}^N$  para algún  $N$  por el punto anterior. Esto es que  $X$  es homeomorfo a un  $V \subset \mathbb{R}^N$  y como  $\mathbb{R}^N$  es 2-contable entonces  $V$  también y por tanto  $X$ . □

4. Una familia indexada  $\{A_\alpha\}$  de subconjuntos de  $X$  se dice *familia indexada puntualmente finita* si cada  $x \in X$  pertenece a  $A_\alpha$  solo para un número finito de valores de  $\alpha$ . **Lema (de la contracción).** Sea  $X$  un espacio normal; sea  $\{U_1, U_2, \dots\}$  un cubrimiento indexado puntualmente finito de  $X$ . Entonces, existe un cubrimiento indexado  $\{V_1, V_2, \dots\}$  de  $X$  tal que  $\bar{V}_n \subset U_n$  para cada  $n$ .

*Demostración.* Sea

$$A_1 = X - \left( \bigcup_{i=2}^{\infty} U_i \right)$$

$A_1$  es cerrado en  $X$  y además está contenido en  $U_1$  pues  $\{U_1, U_2, \dots\}$  cubre a  $X$ , por normalidad existe  $V_1$  tal que  $A_1 \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$ . Además  $\{V_1, U_2, \dots\}$  cubre a  $X$ .

De manera recursiva, si son dados  $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}$  tales que  $\bar{V}_i \subseteq U_i$  y  $\{V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \dots\}$  cubre a  $X$ , defina

$$A_k = X - (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}) - \left( \bigcup_{i=k+1}^{\infty} U_i \right)$$

$A_k$  es cerrado en  $X$  y  $A_k \subseteq U_k$ , luego existe  $V_k$  tal que  $A_k \subseteq V_k \subseteq \bar{V}_k \subseteq U_k$ . Así  $\{V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots\}$  cubre a  $X$ .

Queremos ver que  $\{V_1, V_2, \dots\}$  cubre a  $X$ . Sea  $x \in X$ , como  $\{U_1, U_2, \dots\}$  es una familia indexada puntualmente finita,  $x \in U_k$  para finitos índices  $k$ , tome  $n$  el mayor natural tal que  $x \in U_n$ , es decir  $x \notin U_k$  para  $k > n$ , luego, como  $\{V_1, \dots, V_n, U_{n+1}, \dots\}$  cubre a  $X$ , debe existir un  $k \leq n$  tal que  $x \in V_k$ , así  $\{V_1, V_2, \dots\}$  cubre a  $X$ . □

5. La condición de Hausdorff es una parte esencial en la definición de una variedad; no se sigue de las otras partes de la definición. Considere el siguiente espacio: Sea  $X$  la unión del conjunto  $\mathbb{R} - \{0\}$  y el conjunto de dos puntos  $\{p, q\}$ . Se topologiza  $X$  tomando como base la colección de todos los intervalos abiertos en  $\mathbb{R}$  que no contienen al 0, junto con todos los conjuntos de la forma  $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$  y todos los conjuntos de la forma  $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$ , para  $a > 0$ . El espacio  $X$  se llama *la recta con dos orígenes*.

a) Verificar que esto es una base para una topología.

*Demostración.* Denote por  $\mathcal{B}$  a la colección dada en el enunciado.

Sea  $x \in X$ , veamos que existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U$ , para esto tenemos dos casos:

- Si  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  tome el intervalo  $(0, x+1)$  si  $x > 0$ , si no, tome  $(x-1, 0)$ .
- Si  $x \in \{p, q\}$  tome  $(-a, 0) \cup \{x\} \cup (0, a)$ .

Ahora sea  $x \in U_1 \cap U_2$  donde  $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ , tenemos los siguientes casos:

- Si  $U_1$  y  $U_2$  son intervalos abiertos que no contienen al 0, i.e.,  $U_1 = (a, b)$  y  $U_2 = (c, d)$  considere  $U_3 = (e, f)$  donde  $e = \max\{a, c\}$  y  $f = \min\{b, d\}$ .

- ii. Si  $U_1$  es un intervalo abierto que no contiene al 0 y  $U_2 = (-a, 0) \cup \{y\} \cup (0, a)$ , donde  $a > 0$  y  $y \in \{p, q\}$ . Tenemos que  $U_1 = (b, c)$ , Si  $b < 0$  necesariamente  $c < 0$ , luego podemos tomar  $U_3 = (e, c)$  donde  $e = \max\{-a, b\}$ . Ahora, si  $b > 0$ , tome  $U_3 = (b, e)$  donde  $e = \min\{a, c\}$ .
- iii. Si  $U_1$  y  $U_2$  son de la forma  $(-a_1, 0) \cup \{y\} \cup (0, a_1)$  y  $(-a_2, 0) \cup \{y\} \cup (0, a_2)$  con  $y \in \{p, q\}$ , tome  $U_3 = (-a, 0) \cup \{y\} \cup (0, a)$  con  $a = \min\{a_1, a_2\}$ .
- iv. Si  $U_1$  es de la forma  $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$  y  $U_2$  es de la forma  $(-b, 0) \cup \{q\} \cup (0, b)$ , entonces  $x$  debe pertenecer o bien a  $(-a, 0) \cap (-b, 0)$  o bien  $(0, a) \cap (0, b)$ , en cualquiera de los dos casos procedemos como en el caso i.

De ésta forma, para cada caso conseguimos un  $U_3$  tal que  $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ , concluyendo así que  $\mathcal{B}$  es una base.  $\square$

b) Mostrar que cada uno de los espacios  $X - \{p\}$  y  $X - \{q\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sea

$$f: X - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{si } x = q \end{cases}$$

$f$  claramente es biyectiva, hay que ver que es continua, note que  $f|_{\mathbb{R} - \{0\}} = Id_{\mathbb{R} - \{0\}}$ , luego, si probamos que  $f$  es continua en  $q$  tendremos que  $f$  es continua. Sea  $U$  una vecindad básica de  $0 = f(q)$ , es decir  $U = (a, b)$  con  $a < 0 < b$ , luego  $f^{-1}(U) = (a, 0) \cup \{q\} \cup (0, b)$  si tomamos  $0 < c \leq \min\{|a|, |b|\}$ , tenemos que  $(-c, 0) \cup \{q\} \cup (0, c)$  es una vecindad de  $q$  contenida en  $f^{-1}(U)$ , por lo tanto  $f$  es continua en  $q$ . Ahora veamos que  $f$  es abierta, para esto solo necesitamos verificar que la imagen de un abierto básico es abierta en  $\mathbb{R}$ , sea  $U$  un abierto básico de  $X - \{p\}$ , si  $U$  es un intervalo abierto que no contiene al 0,  $f(U)$  es él mismo, si  $U$  es de la forma  $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$ , entonces  $f(U) = (-a, a)$ , el cual es abierto en  $\mathbb{R}$ , por tanto al ser  $f$  continua, biyectiva y abierta, es un homeomorfismo. Para ver que  $X - \{q\}$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$  la prueba es análoga.  $\square$

c) Mostrar que  $X$  satisface el axioma  $T_1$ , pero no es de Hausdorff.

*Demostración.* Sea  $x \in X$ , veamos que  $\{x\}$  es cerrado. Si  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  tenemos que

$$X - \{x\} = (-\infty, x) \cup [(x, 0) \cup \{p\} \cup (0, -x)] \cup [(x, 0) \cup \{q\} \cup (0, -x)] \cup (0, \infty), \text{ si } x < 0$$

$$X - \{x\} = (-\infty, 0) \cup [(-x, 0) \cup \{p\} \cup (0, x)] \cup [(-x, 0) \cup \{q\} \cup (0, x)] \cup (x, \infty), \text{ si } x > 0$$

Ademas

$$X - \{p\} = (-\infty, 0) \cup [(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)] \cup (0, \infty)$$

y

$$X - \{q\} = (-\infty, 0) \cup [(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)] \cup (0, \infty)$$

para algún  $a > 0$ , de ésta manera  $X - \{x\}$  es abierto para todo  $x \in X$  y por lo tanto  $\{x\}$  es cerrado. Para ver que  $X$  no es Hausdorff, tome  $p$  y  $q$  y sean  $U_p, U_q$  vecindades de  $p$  y  $q$  respectivamente, tales que  $q \neq U_p$  y  $p \neq U_q$ . Ya que  $U_p$  es abierto, existe  $(-a, 0) \cup p \cup (0, a) \subseteq U_p$  para algún  $a > 0$ , de manera análoga existe  $(-b, 0) \cup \{q\} \cup (0, b) \subseteq U_q$  con  $b > 0$ , ahora tome  $c = \min\{a, b\}$ , note que  $(-c, 0) \cup (0, c) \subseteq U_p \cap U_q$ , luego  $X$  no puede ser Hausdorff.  $\square$

d) Mostrar que  $X$  satisface todas las condiciones para ser una 1-variedad, excepto la condición de Hausdorff.

*Demostración.* Para ver que  $X$  tiene una base contable, considere la colección de los intervalos abiertos con extremos racionales, los conjuntos de la forma  $(-r, 0) \cup \{p\} \cup (0, r)$  y los conjuntos de la forma  $(-r, 0) \cup \{q\} \cup (0, r)$  con  $r \in \mathbb{Q}^+$ . Esta colección es contable, pues es unión finita de conjuntos contables, además, por la densidad de los racionales, forma una base para  $X$ .

Ahora, veamos que dado  $x \in X$  existe una vecindad de  $x$  que es homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}$ . Si  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , tenemos que existen  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$  tales que  $x \in (a, b)$  y  $0 \notin (a, b)$ , además  $(a, b)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

Por (b), tenemos que  $X - \{p\}$  y  $X - \{q\}$  son vecindades de  $q$  y  $p$ , respectivamente, que son homeomorfas a  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto  $X$  cumple todas las condiciones de una 1-variedad, excepto ser Hausdorff.  $\square$