

# Taller II

Bourbaki

23 de noviembre de 2024

1. Mostrar que si  $e^z = e^w$  entonces existe un entero  $k$  tal que  $w = z + 2k\pi i$ .

*Demostración.* Supongamos que  $e^z = e^w$ ,  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ , entonces

$$e^a e^{bi} = e^c e^{di},$$

es claro que  $|e^z| = |e^w|$  y por tanto  $e^a = e^c$ , por la inyectividad de la exponencial  $a = c$ , además  $e^{bi} = e^{di}$ , esto es

$$\cos(b) + i \sin(b) = \cos(d) + i \sin(d),$$

como estas ecuaciones determinan un único punto en la circunferencia, entonces  $(d - b) = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} w - z &= c + di - a - bi \\ &= a - a + i(d - b) \\ &= i(2\pi k), \end{aligned}$$

con  $k \in \mathbb{Z}$

□

2. Si  $\theta$  es real, mostrar que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

*Demostración.* Pues lo que pasa es que eso es trivial allí, note que los numeradores son un complejo más su conjugado y un complejo menos su conjugado, entonces usted se acuerda que Pastrán dijo que eso daba 2 veces la parte real y 2i la parte imaginaria, o sea

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{2 \cos(\theta)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{2 \cos(\theta)}{2i} = \frac{2i \sin(\theta)}{2i}$$

y fecho.

□

3. Si en las expresiones del ejercicio (2) definimos  $\cos z$ ,  $\sin z$  reemplazando  $\theta$  por  $z$ , mostrar que los ceros de  $\cos z$  y  $\sin z$  coinciden con los ceros de las funciones trigonométricas reales correspondientes.

*Demostración.* Escribimos  $z = a + bi$  e igualamos a 0, así, para el seno tenemos:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \\ e^{i(a+bi)} - e^{-i(a+bi)} &= 0 \\ e^{-b+ai} - e^{b-ai} &= 0 \\ e^{-b+ai} &= e^{b-ai} \\ e^{-b}e^{ai} &= e^be^{-ai} \\ e^{2ai} &= e^{2b}\end{aligned}$$

Como  $|e^{2ai}| = |e^{2b}| = 1$  y además  $2b$  es un número real, tenemos que  $e^{2b} = 1$  y por la inyectividad de la exponencial en los reales,  $b = 0$ , luego resolvemos la ecuación

$$e^{2ai} = 1$$

Es decir

$$e^{ai} = \pm 1$$

Si hace las cuentas va a ver que los ceros de esa vaina son el conjunto  $A = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Para el coseno la cuenta es básicamente la misma pero la ecuación al final es

$$e^{2ai} = -e^{2b}$$

Y pues resolviendo de la misma manera se llega a que los ceros son el conjunto  $B = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

□

4. Probar que para  $z \neq 1$ , se tiene

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

*Demostración.* Supongamos que usted ya vió integración y series, entonces

$$S(n) = \sum_{k=0}^n z^k = 1 + zS(n) - z^{n+1},$$

así  $S(n) - zS(n) = 1 - z^{n+1}$ , esto es  $S(n) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  y fecho.

□

5. Tomando la parte real del ejercicio precedente, probar

$$1 + \cos \theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

para  $0 < \theta < 2\pi$ .

En este punto voy a usar  $\exp$  para denotar la exponencial porque si no se vería horrible

*Demostración.* Note que si tomamos  $|z| = 1$ , evidentemente  $z \neq 1$ , entonces  $z = \exp(i\theta)$ , de esto se sigue que

$$\Re \left( \sum_{k=0}^n z^k \right) = \sum_{k=0}^n \Re(z^k) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$$

por el punto anterior también tenemos que

$$\begin{aligned} \Re \left( \sum_{k=0}^n z^k \right) &= \Re \left( \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \right) \\ &= \Re \left( \frac{\exp((n+1)\theta) - 1}{\exp(i\theta) - 1} \right) \\ &= \Re \left( \frac{\exp(i(n+1)\theta/2)}{\exp(i\theta/2)} \frac{\exp(-i(n+1)\theta/2) - \exp(i(n+1)\theta/2)}{\exp(-i\theta/2) - \exp(i\theta/2)} \right). \end{aligned}$$

Note que el último término de la derecha se puede escribir como

$$\Re \left( \exp(in\theta/2) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right) = \cos(n\theta/2) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

además

$$\begin{aligned} \cos \left( \frac{n\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{(n+1)\theta}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{\theta n}{2} + \frac{\theta(n+1)}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta(n+1)}{2} - \frac{n\theta}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{\theta(2n+1)}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \left( \theta \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned}$$

dividiendo entre  $\sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$  fecho.

□

6. Sea  $|a| < 1$ . Probar:  $1 - \left| \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \right|$  tiene el mismo signo que  $1 - |z|$ .

*Demostración.* Las cuentas de la tricotomía las irá a hacer su puta madre, eso sin pérdida de generalidad pille este caso y los demás son análogos:

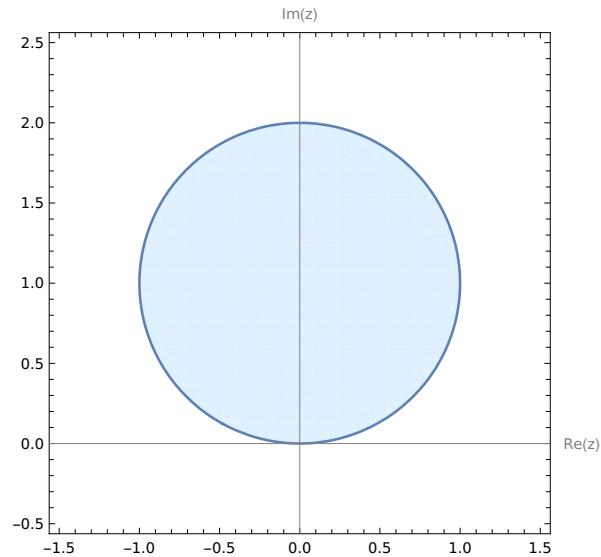
$$\begin{aligned} 0 &< |z+a|^2 - |1+\bar{a}z|^2 \\ &= (z+a)(\bar{z}+\bar{a}) - (1+\bar{a}z)(1+a\bar{z}) \\ &= |z|^2 + |a|^2 + 2\Re(a\bar{z}) - 1 - |a|^2 - 2\Re(\bar{a}z) \\ &= |z|^2 - 1 - |a|^2 + |a|^2 \\ &= |z|^2 (1 - |a|^2) - 1 + |a|^2 \\ &= (|z|^2 - 1) (1 - |a|^2) \\ &= (|z| - 1) (|z| + 1) (1 - |a|^2), \end{aligned}$$

como  $(1 - |a|^2) > 0$  fecho.

□

7. Identifique las siguientes regiones:

a)  $|z - i| \leq 1$ .



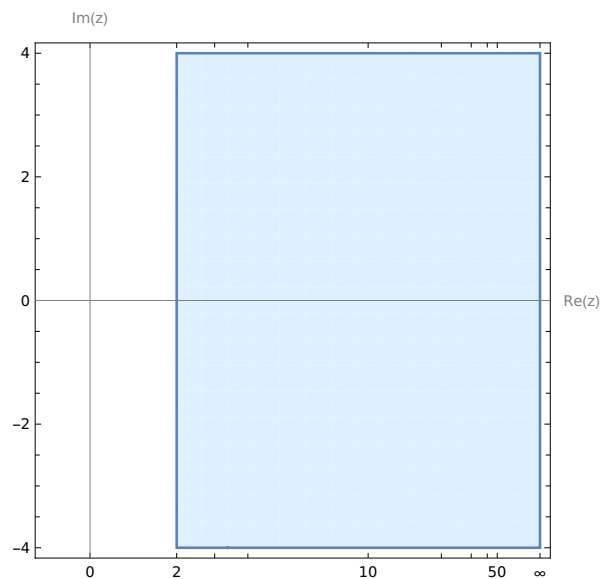
En este caso es claro que eso era una bola.

b)  $|z - 1| > |z - 3|$ .

Para este caso primero debemos hacer unas cuentas, note que se puede reescribir la desigualdad como  $(z - 1)(\bar{z} - 1) > (z - 3)(\bar{z} - 3)$ , haciendo cositas se llega a que

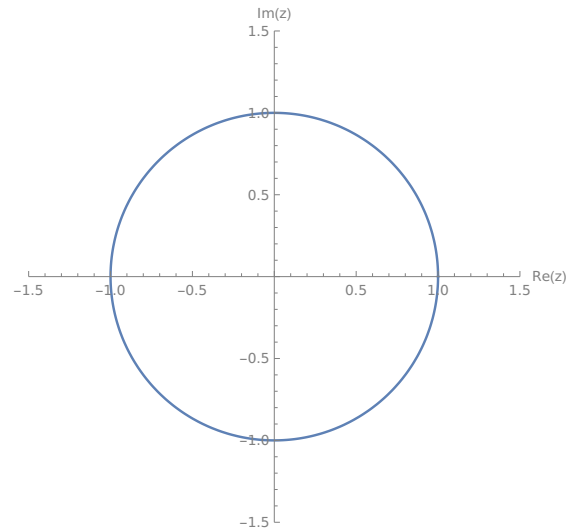
$$|z|^2 - 2\Re(z) + 1^2 > |z|^2 - 6\Re(z) + 9$$

de esto se sigue que la región es el semiplano  $\Re(z) > 2$



c)  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ .

Este se hizo en clase, usted llega y dice  $z\bar{z} = 1 = |z|^2$  y fecho, eso le da el círculo unitario

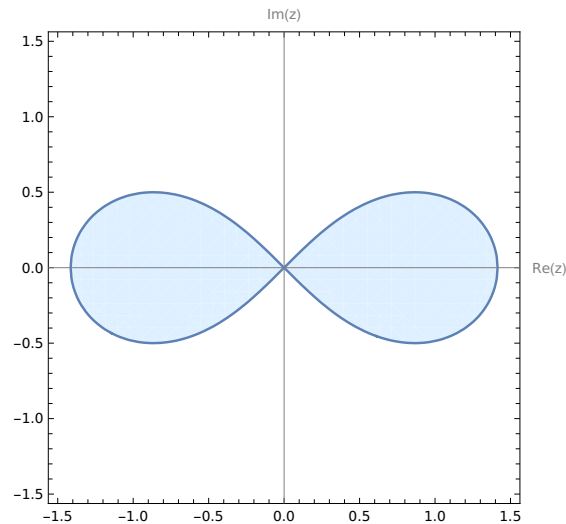


d)  $|z^2 - 1| < 1$ .

Para este punto lo que vamos a hacer es escribir  $z$  en forma exponencial:

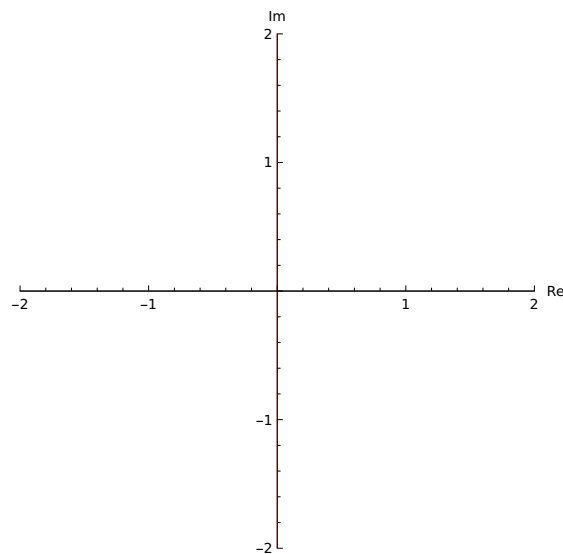
$$\begin{aligned}
 |z^2 - 1| &< 1 \\
 |r^2 e^{i2\theta} - 1| &< 1 \\
 (r^2 e^{i2\theta} - 1)(r^2 e^{-i2\theta} - 1) &< 1 \\
 r^4 - r^2 e^{i2\theta} - r^2 e^{-i2\theta} + 1 &< 1 \\
 r^4 - r^2(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 1 &< 1 \\
 r^4 - r^2 \cdot 2 \cos 2\theta + 1 &< 1 \\
 r^4 - 2r^2 \cos 2\theta &< 0 \\
 r^4 &< 2r^2 \cos 2\theta \\
 r^2 &< 2 \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

Y si usted se acuerda de cálculo integral, sabrá que la ecuación polar  $r^2 = 2 \cos 2\theta$  es la ecuación de una lemniscata, por lo tanto, nuestra región es el interior de la lemniscata y fecho.



e)  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1.$

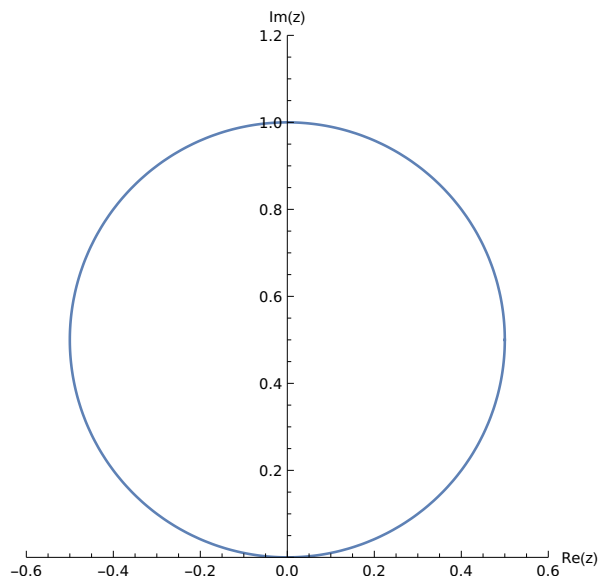
Este caso es fácil porque uno llega y se da cuenta que  $|z-1| = |z-(-1)|$ , esto dice que la distancia al 1 y al  $-1$  debe ser igual, eso solo nos deja el caso  $\Re(z) = 0$ , los complejos en esa recta vertical por simetría.



Ahí medio se ve la verdad... Además imagínese que eso va de  $-\infty$  a  $\infty$  porque no supe programar eso.

f)  $|z|^2 = \Im(z).$

Aquí de nuevo usamos forma polar y la ecuación nos queda  $r^2 = r \sin \theta$ , o de la misma forma  $r = \sin \theta$ , por lo tanto si usted vio cálculo integral, se acordará de que esa curva es una circunferencia centrada en  $(0, \frac{1}{2})$  y de radio  $\frac{1}{2}$ ; note que al cancelar  $r$  asumimos que  $r \neq 0$  pero pues la norma de 0 es igual a la parte imaginaria de 0 así que no importa, por lo tanto fecho.



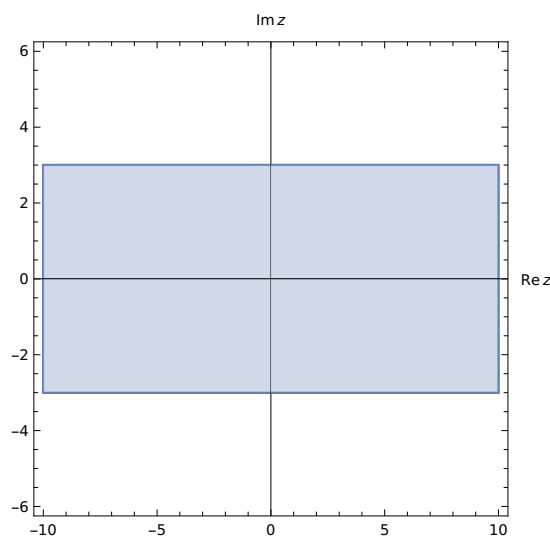
8. **Definición 1:** Un conjunto se dice conexo si dados dos puntos diferentes en el conjunto, estos se pueden unir por una poligonal (formada por un número finito de segmentos rectos) contenida en el conjunto. Si además el conjunto es abierto, se le llama entonces *Dominio*.

**Definición 2:** Un punto  $w \in S \subset \mathbb{C}$ , se dice es de acumulación si todo  $D(w; r) \setminus \{w\}$ ,  $r > 0$  contiene al menos un punto de  $S$  (en particular, contiene infinitos puntos de  $S$ ). Clasifique los conjuntos siguientes según sean abiertos, cerrados, acotados, conexos, dominios; encontrar además sus puntos de acumulación y de adherencia.

a)  $|z - 1| < 1$ .

Esto es una bola centrada en 1 y de radio 1, evidentemente es acotada y abierta, sus puntos de acumulación son  $|z - 1| \leq 1$  porque la adherencia contiene todos sus puntos límite, la adherencia es justamente eso, la bola cerrada, para la conexidad note que dados  $z_1, z_2$  en la bola  $|z_2 - z_1| \leq |z_2 - 1| + |1 - z_1| < 2$  y el vector  $z_2 - z_1$  une  $z_1$  y  $z_2$  y pues está en la bola porque la norma es menor que 2.

b)  $|\operatorname{Im}(z)| < 3$ .



Evidentemente no es acotado, es abierto porque el complemento es cerrado. la adherencia es  $|\operatorname{Im}(z)| \leq 3$ , esos también son los puntos de acumulación, para la conexidad note que

dados dos puntos ahí, digamos  $z_1$  y  $z_2$ , basta controlar que  $|b_1 - b_2| < 6$  y esto es evidente porque  $b_1, b_2 \in (-3, 3)$

c)  $|z + i| + |z - i| = 1$ .

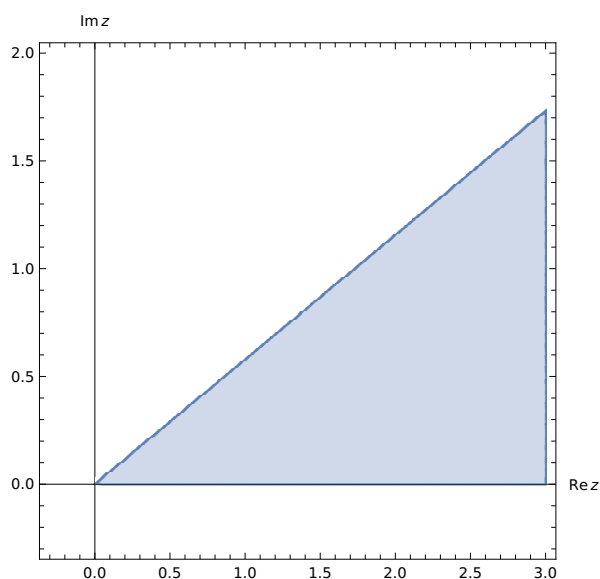
Note que  $1 = |z + i| + |i - z| \geq |2i| = 2$  y eso es re falso entonces no toca hacer nada.

d)  $0 < |z| < 2$ .

Eso es una cochina bola otra vez, entonces pa qué, usted solo quitele el centro, eso sigue siendo abierto y pues el los puntos de acumulación sí contienen al centro pues porque tan guevón.

e)  $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6}$ .

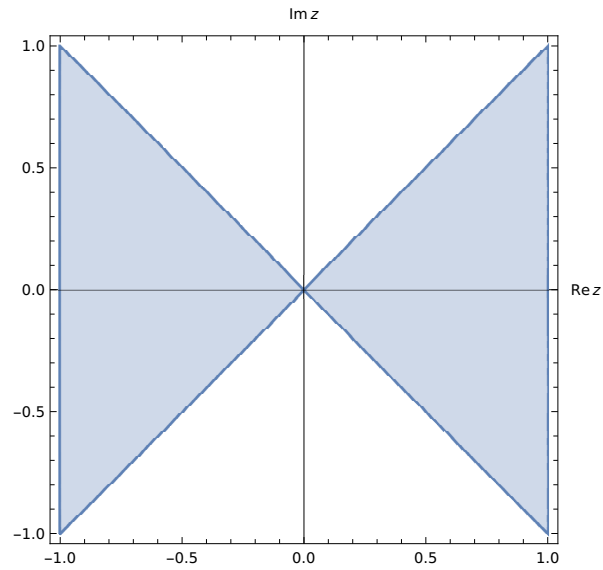
Este es coyo



la gráfica se ve medio fea por wolfram, le dió ansiedad y me da pereza tirar un ParametricPlot, para ver que eso es abierto usted agarra una bolita centrada en un punto  $z$  siono?, y coge de  $r = \min\{d(z, y = \frac{\sqrt{3}}{3}), d(z, y = 0)\}$ , usted dirá, pero por qué hptas???, pues pana usted necesita un radio que no se salga de esas rectas la bola y pues literalmente en la ecuación punto pendiente usted se da cuenta que la pendiente de ese ángulo es la tangente de  $\frac{\pi}{6}$  y acabó. Todo lo otro es trivial excepto la conexidad porque esa definición es una granputamierda pero usted llega y hace cuentas y eso sale.

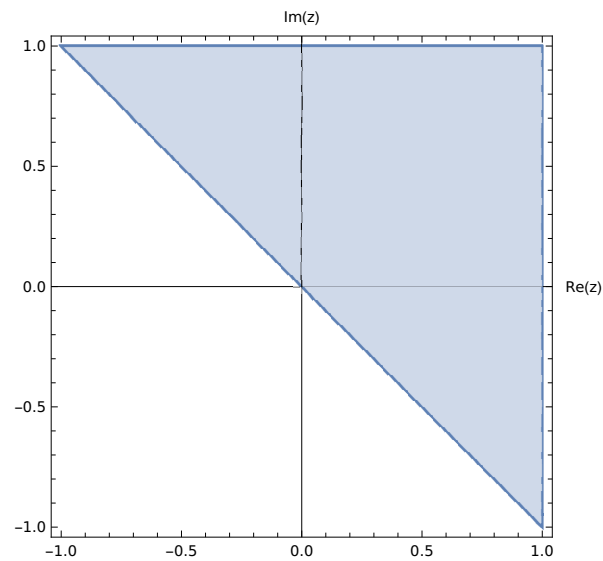
f)  $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$ .





Esto el único chiste que tiene es la conexidad, note que el coso de arriba es conexo, usted sabe de topología que si la intersección es no vacía usted puede unir conexos y le da conexo siono?, pues haga el dibujo, trace un camino al 0 desde un punto de arriba, y luego conecte con lo que le de la gana xd.

g)  $\operatorname{Re}(z - iz) \geq 0$ .



na que pereza la verdad esto, pero que no digan que no lo intenté.