Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Análisis Numérico I

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres

Ejercicio 1

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -20 & 14 \\ -3 & 27 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Aplique las transformaciones de Householder, para calcular $A = QR$.

b) Aplique el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, para calcular $A = QR$.

c) Implemente en Matlab los métodos de ortogonalización de Gram-Schmidt y Householder, para calcular $A = QR$, compare los resultados numéricos con los encontrados en las partes (a) y (b).

Ejercicio 2

Descargue el archivo `Datos.txt` de la página del curso. En este encontrará un conjunto de 21 datos. Copie estos datos y calcule el polinomio de ajuste de grado 5

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5$$

utilizando los métodos de ecuaciones normales y factorización QR. Compare sus resultados con los valores certificados $c_i = 1$ para $i = 0, 1, \ldots, 5$. Encuentre el residual $\|Ac - y\|_2$ en cada caso, así como la diferencia relativa con respecto a los valores certificados. Escriba sus conclusiones.

Ejercicio 3

Sean

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a\delta & a & 0 \\ 0 & a\delta & a \end{bmatrix}, \quad a < 0, \delta > 0, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Obtenga el número de condición de A.

b) Estudie el condicionamiento del sistema $Ax = b$ en función de los valores de δ. Interprete su resultado.

c) Si $a = -1$, $\delta = 0{,}1$ y se considera $x^* = (1{,}9/10, 1)^T$ como solución aproximada del sistema $Ax = b$ (sin obtener la solución exacta), determine un intervalo en el que esté comprendido el error relativo. ¿Es coherente con la respuesta dada en el apartado anterior?

d) Si $a = -1$ y $\delta = 0{,}1$, ¿es convergente el método de Jacobi aplicado a la resolución del sistema $Ax = b$? Realice tres iteraciones a partir de $x_0 = (0, 0, 0)^T$.

Ejercicio 4

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que $\lambda = 1$ es un valor propio de la matriz de iteración del método de Jacobi (o Gauss-Seidel) de A si y solo si A no es invertible.

Demostración. Primero tomemos la matriz $A = D - L - U$, donde D es una matriz diagonal, L es estrictamente triangular inferior y U es estrictamente triangular inferior. Probemos el resultado para el método de Jacobi.
($\Rightarrow$) Recordemos que la matriz de iteración esta dada por

$$T_J = D^{-1}(L + U).$$

Si $\lambda = 1$ es un valor propio de T_J, existe un vector no nulo v, tal que

$$T_J v = 1 \cdot v = v,$$

si reemplazamos tenemos que

$$D^{-1}(L + U)v = v,$$

multiplicando por D a izquierda a ambos lados

$$(L + U)v = Dv.$$

Pasando a sumar todo al lado derecho y distribuyendo obtenemos

$$0 = Dv + Lv + Uv.$$

Factorizando v a derecha

$$0 = (D - L - U)v.$$

Note que esta ultima linea dice que existe un vector no nulo v, que es solución de la ecuación $Ax = 0$, por lo que podemos concluir que A no es invertible.
($\Leftarrow$) Supongamos que A no es invertible, luego existe un vector no nulo v, tal que $Av = 0$, Si descomponemos A tenemos que

$$(D - L - U)v = Dv - Lv - Uv$$

Si despejamos para Dv

$$\begin{aligned} Dv &= Lv + Uv \\ &= (L + U)v \end{aligned}$$

Por ultimo multiplicando por D^{-1}, tenemos que

$$v = D^{-1}(L + U)v = T_J v.$$

Esto quiere decir que v es un vector propio para T_J con valor propio 1, así concluimos que la matriz de iteración de Jacobi tiene valor propio $\lambda = 1$.

La prueba para la matriz de iteración de Gauss-Seidel se realiza de manera similar.
(⇒) Recordemos que la matriz de iteración para este caso es

$$T_{GS} = (D - L)^{-1}U.$$

Nuevamente por la definición de valor propio, existe un v no nulo tal que

$$(D - L)^{-1}Uv = v.$$

Multiplicando por $D - L$ tenemos que

$$Uv = (D - L)v,$$

Si pasamos a restar y factorizamos v tenemos que

$$0 = (D - L)v - Uv = (D - L - U)v.$$

Así hemos encontrado que v, es un vector no nulo que soluciona $Ax = 0$. Concluyendo así que A no es invertible.
(⇐) Supongamos que A no es invertible, luego existe v no nulo tal que $Av = 0$, así por como descomponemos A se tiene que $Av = (D - L - U)v = (D - L)v - Uv$. Como esta igualado a 0, Sumamos Uv obteniendo así

$$(D - L)v = Uv.$$

Multiplicando por la inversa de $D - L$ llegamos a que $v = T_{GS}v$, mostrando así que v es un vector propio para T_{GS}, con valor propio $\lambda = 1$. Concluyendo así que el hecho es cierto para ambas matrices de iteración.

∪ˬ∪

Ejercicio 5

Considere el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -26 \\ 3 \\ 47 \\ -10 \end{bmatrix}$$

a) Investigue la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y sobrerelajación.

b) ¿Cuál es el radio espectral de la matriz J y de la matriz S?

c) Aproxime con dos cifras decimales el parámetro de sobrerelajación ω^*.

d) ¿Qué reducción en el costo operacional ofrece el método de sobrerelajación con el parámetro ω^*, en comparación con el método de Gauss-Seidel?

e) ¿Cuántas iteraciones más requiere el método de Gauss-Seidel para lograr una precisión mejorada en una cifra decimal? ¿Cuántas necesita el método de sobrerelajación con ω^*?

Ejercicio 6

El operador Laplaciano en 2D se define como:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde $u(x,y)$ es una función que representa la intensidad de los pixeles de la imagen en el dominio espacial. El operador Laplaciano se utiliza para detectar bordes porque responde a las variaciones de la intensidad de los pixeles en la vecindad de cada punto. En áreas de la imagen donde la intensidad varía rápidamente (bordes), el Laplaciano tiene un valor alto, mientras que en áreas homogéneas (sin bordes) el Laplaciano es cercano a cero. El proceso de detección de bordes implica calcular el Laplaciano de la imagen $u(x,y)$, lo que da como resultado un mapa de bordes.
En este ejercicio estamos interesados en reconstruir la imagen original $u(x,y)$ a partir de los bordes detectados. Para esto debemos resolver la ecuación de Poisson en 2D

$$\nabla^2 u(x,y) = f(x,y)$$

donde $f(x,y)$ es el mapa de bordes. El problema (1) puede ser discretizado en un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$Au = f$$

donde A es una matriz que representa el operador Laplaciano discreto, u es el vector que contiene los valores de la imagen original en cada pixel (a reconstruir), y f es el vector que contiene los valores de los bordes detectados.

Solución. Lo primero que debemos hacer es discretizar el laplaciano, para esto usamos el teorema de Taylor. A saber

$$u(x+h,y) = u(x,y) + hu_x(x,y) + \frac{h^2\partial_x^2 u(x,y)}{2} + O(h^3),$$
$$u(x-h,y) = u(x,y) - hu_x(x,y) + \frac{h^2\partial_x^2 u(x,y)}{2} + O(h^3),$$

realizando esto para $u(x,y+h)$ y $u(x,y-h)$ obtenemos que

$$\Delta u(x,y) \approx \frac{u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)}{h^2}.$$

Para reconstruir la imágen debemos encontrar $u(x,y)$, la función que nos da la intensidad de cada pixel, esto es resolver la ecuación de Poisson $\Delta u(x,y) = f(x,y)$ donde $f(x,y)$ es el mapa de bordes. Primero consideremos para el problema una malla regular, tomaremos $h = 1$ ya que cada pixel representa un paso, en una dimensión la matriz que obtenemos es tridiagonal, sin embargo al discretizar la ecuación de Poisson en 2D debemos mover f en coordenadas x y y, por lo tanto debemos analizarlo con detalle.

Como usamos usa malla regular de $n \times n$ (porque el problema es 2D), cada fila de la matriz sería de $n \times n$, obteniendo

$$\Delta u_{ij} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = f_{ij}$$

donde $2 \le i \le m-1$ y $2 \le j \le n-1$. Esto da lugar a un sistema lineal de dimensión $n^2 \times n^2$, $Au = f$, donde

$$A = \begin{bmatrix} D & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & D & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & D & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I & D & I & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I & D & I \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I & D \end{bmatrix}, \text{ donde } D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

y como f es una matriz, se debe aplanar como vector columna. Por ejemplo en 3×3

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Ahora debemos resolver los sistemas implementando los métodos de Jacobi,Gauss-Seidel y SOR, esto lo hicimos en Matlab y el código es extenso, por lo que lo adjuntamos en el cuaderno de Jupyter, sin embargo vamos a ver aquí los resultados obtenidos.

Para el método de Jacobi aprovechamos que la inversa de la matriz diagonal es simplemente invertir la diagonal, a saber $1/a_{ii}$, luego el código es bastante eficiente y puede correr 100 iteraciones muy rápido.

En Gauss-Seidel no fue posible implementar el método de manera matricial, invertir matriz $(D-L)$ es un trabajo costoso teniendo en cuenta que la primera imagen es de 240×240, es decir una matriz de 57600×57600, una sola iteración costaba varios minutos. En vista de esto optamos por implementar el método resolviendo cada ecuación y sin definir la matriz A, usando claramente que

$$\Delta u_{ij} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = f_{ij},$$

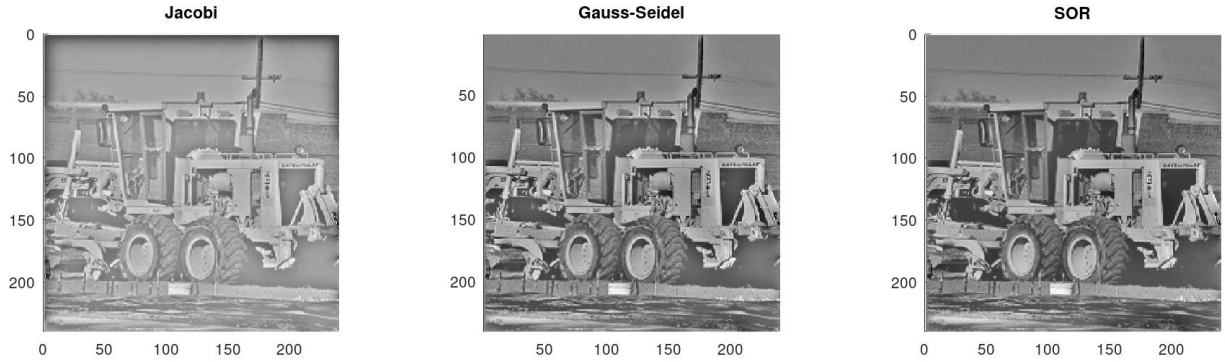
se obtiene una fórmula eficiente para hace Gauss-Seidel, a saber

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(\left(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)}\right) - f_{ij}\right),$$

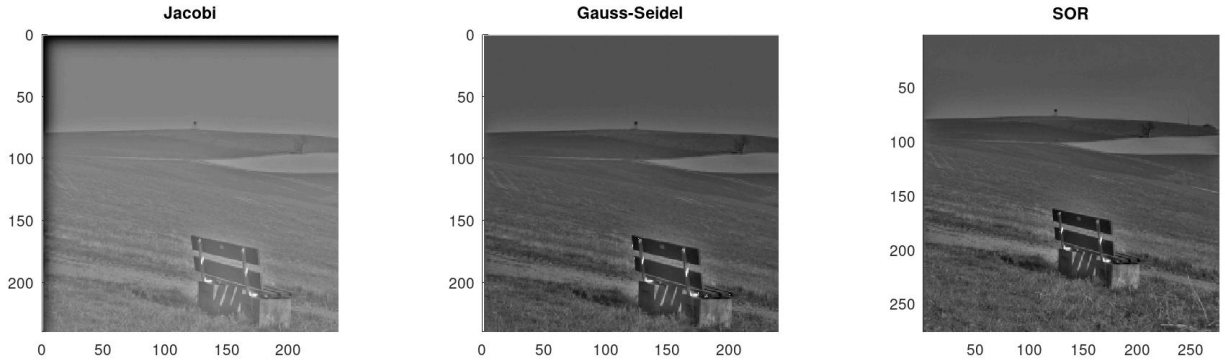
esto nos permitió implementar todo de manera eficiente. Para SOR la idea fue exactamente la misma pero aplicando la relajación

$$u_{ij}^{k+1} = (1-\omega)\,u_{ij}^{k} + \frac{\omega}{4}\left(\left(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)}\right) - f_{ij}\right),$$

en este caso tomamos $\omega = 1{,}5$ ya que la idea era acelerar la convergencia, esto se logra con $1 < \omega < 2$. Finalmente para la primera imagen, dada por el archivo Bordes1, obtuvimos los siguientes resultados aplicando 100 iteraciones.



Para la segunda imagen también aplicamos 100 iteraciones, obtuvimos



Aplicamos 100 iteraciones para que se observara diferencia entre los métodos ya que con muchas iteraciones el problema se estabiliza de manera que no notaremos diferencia entre aplicar un método y otro.