1. Sea $\Omega$ un abierto del plano complejo, y $f$ una función definida sobre $\Omega$. Demuestre que $f$ es diferenciable en $z \in \Omega$ si y sólo si existe una función $\phi$ tal que:

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \phi(h) = 0 \\ f(z+h) - f(z) = a\,h + h\,\phi(h), \end{cases}$$

con $a$ un número complejo.

Demostración:

Suponga q $f$ es diferenciable en $z$, entonces

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + R_z(h)$$

con $R_z(h)/h \to 0$ ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z) + \cancel{\lim_{h\to 0} R_z(h)/h}^{\,0} = f'(z)$$

luego $\phi(h) = R_z(h)/h$

$\Leftarrow$ Suponga que $f(z+h) = f(z) + ah + h\phi(h)$

con $\phi(h) \to 0$ cuando $h \to 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} a + \phi(h)$$

$$= a$$

2. Usando, el punto anterior, determine la derivada de la función compuesta. Es decir si $\Omega$ y $\Omega_1$ son abiertos del plano, $f : \Omega \to \Omega_1$, es derivable en $z \in \Omega$ y $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ con $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ es derivable en $w = f(z)$ entonces $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

Demostración:

$$g(f(z+h)) = g(f(z) + f'(z)h + h\,\phi_1(h))$$
$$= g(f(z) + h(f'(z) + \phi_1(h)))$$
$$= g(f(z)) + \underline{g'(f(z))\,h(f'(z) + \phi_1(h))}$$
$$+\phi_2(h(f'(z)+\phi_1(h)))\,h(f'(z)+\phi_1(h))$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(z+h)) - g(f(z))}{h} = g'(f(z))(f'(z) + \cancel{\phi_1(h)}^{\to 0}) + \cancel{\phi_2(h(f'(z)+\phi_1(h)))}^{\to 0}(f'(z)+\cancel{\phi_1(h)}^{\to 0})$$

$h \to 0$

$$= g'(f(z))\,f'(z)$$

O.O

3. Derivar:

$$3z^2 - 2z;\quad (1-4z^2)^3;\quad \frac{z-1}{2z+1}\,\text{para}\,(z \neq \frac{-1}{2});\quad \frac{(1+z^2)^4}{z^2}\,\text{para}\,(z \neq 0)$$

- $6z - 2$, • $3(1-4z^2)^2(-8z)$, • $\dfrac{\cancel{2z}+1 - \cancel{2z}+2}{(2z+1)^2}$

- $\dfrac{4(1+z^2)^3(2\cancel{z}) - 2\cancel{z}(1+z^2)^4}{z^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{(1+z^2)^3(8 - 2(1+z^2))}{z^3}$

4. Mostrar que si $f$ es derivable en $z_0$ entonces es continua.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, z - z_0$$

$$= f'(z_0)\,0 \quad \square$$

5. Hallar el dominio de Analiticidad de las siguientes funciones:

- $(z - \frac{1}{z})^2$.
- $\frac{z+i}{z-2}$.
- $\frac{i}{z^3}$.

$(z+h) - \frac{1}{z+h}$

$$\bullet \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z^2} + h^2 + 2hz + \frac{1}{(z+h)^2} \cancel{-2} - \cancel{z^2} - \frac{1}{z^2} + \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h + 2z + \frac{1}{h(z+h)^2} + \frac{1}{-hz^2}$$

$$= 2z + \lim_{h \to 0} h + \frac{1}{h}\left(\frac{-(z+h)^2 + z^2}{(z+h)^2 z^2}\right)$$

$$= 2z + \lim_{h \to 0} h + \frac{1}{\cancel{h}}\left(\frac{-\cancel{(h)}(2z+h)}{(z+h)^2 z^2}\right)$$

$$= 2z + \lim_{h \to 0} h - \frac{2z+h^{\to 0}}{(z+h)^{2 \to 0} z^2}$$

$z \neq 0$

$$\Rightarrow 2z - \frac{2}{z^3}$$

$$\bullet \left(\frac{z+i}{z-2}\right)' = \frac{(z-2)-(z+i)}{(z-2)^2}$$

$\boxed{z \neq 2}$

$$\bullet \left(\frac{i}{z^3}\right)' = i(z^{-3})' = -3i\, z^{-4}$$

$z \neq 0$

6. Sea $f(z)$ una función de varible compleja de valor real. Domostrar que se de debe tener o bien $f'(z_0) = 0$ o bien $f$ no es diferenciable en $z_0$, con $z_0$ en el dominio de $f$.

$$f(z) = U(x,y) + i\, \cancel{V(x,y)}^{\to 0}$$

$$U_x(x_0,y_0) = \cancel{V_y(x_0,y_0)}^{\to 0} \quad y \quad \cancel{V_x(x_0,y_0)}^{\to 0} = -U_y(x_0,y_0)$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{U_x} & \cancel{U_y} \\ \cancel{V_x} & \cancel{V_y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \boxtimes$$

Si $f'(z_0) \neq 0 \to U_x \neq 0$ o $U_y \neq 0$

7. Sea $f(z)$ una función de variable compleja, de valor *puramente imaginario*. Demuestre la misma conclusión del punto anterior.

Demostración

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_x & V_y \end{pmatrix}$$ además $U_x = V_y$ y $V_x = -U_y$

y acabó $\boxtimes$

8. Demostrar que las funciones $Re(z)$, $Im(z)$ and $|z|$, no son analíticas en el plano complejo.

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2} \quad y$$

$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z}{2i} - \frac{\bar{z}}{2i} \quad y \quad ya$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\bar{z}}+\bar{h} - \cancel{\bar{z}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2}$$

Si $h_1 = 0 \to \lim = -1$, si $h_2 = 0 \to \lim = 1 \quad \boxtimes$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{z}\sqrt{\bar{z}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|z+h| - |z|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{z\bar{h} + \bar{z}h + h\bar{h}}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{z\bar{h}}{h(|z+h|+|z|)} + \cancel{\frac{\bar{z}}{|z+h|+|z|}} + \cancel{\frac{\bar{h}}{|z+h|+|z|}}$$

NO EXISTE

9. Demostrar que las funciones $zRe(z)$ y $zIm(z)$, son diferenciables en cero, pero no analíticas.

Demostración: $z\,Re(z) = \frac{z(z+\bar{z})}{2} = \frac{z^2}{2} + \cancel{\frac{|z|^2}{2}}$ ÑaoÑao ,

$z\,Im(z) = \frac{z(z-\bar{z})}{2i} = \frac{z^2}{2i} - \cancel{\frac{|z|^2}{2i}}$ ÑaoÑao

pero en 0 sí

10. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Demostrar que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero $f'(0)$ no existe.

Demostración: $\frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \frac{(x-yi)^3}{x^2+y^2}$

$$= \frac{x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + iy^3}{x^2+y^2}$$

$U$ $\quad = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad V$

$$U_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{U(h,0)-U(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=1$$

$$U_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0,\quad V_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

$$V_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=1 \quad \square$$

CUMPLE CAUCHY

$$\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}^2}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^2=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left(\frac{h_1-ih_2}{h_1+ih_2}\right)^2$$

Si $h_1=h_2$ $\lim=-1$ y $h_1=0$ $\lim=1$ $\square$

(1) NOTAS DE SANDRA.

12. Sea

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}^3}{|z|^2}, & z\neq 0,\\ 0 & z=0.\end{cases}$$

Concluir como el punto anterior.

Note q' $\frac{\bar{z}^3}{|z|^2}=\frac{\bar{z}^3}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}^2}{z}$ y por el punto 10 acabó

13. Sea

$$f(z)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{z^4}}, & z\neq 0,\\ 0 & z=0.\end{cases}$$

Concluir como en el punto anterior.

Demostración: $-\frac{1}{z^4}=\frac{-\bar{z}^4}{|z|^8}=-\frac{(x-yi)^4}{(x^2+y^2)^4}$

$$-\frac{(x^2-y^2-2yix)(x^2-y^2-2yix)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{-x^4+4yix^3-y^4-4y^3ix+6y^2x^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}+i\,\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\to \exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}+i\,\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\exp\left(i\,\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\left(\cos\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)+i\sin\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)\right)$$

$$U=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\cos\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$V=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\sin\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$U_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\exp(-h^4/h^8)/h=0$$

$$V_x(0,0)=\lim_{h\to 0}0/h=0,\quad V_y=0\quad y$$

$$U_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \exp(-h^4/h^8)/h = 0$$ entonces cumple

cauchy - rieman.

$$\left(\frac{-\overline{z}^4}{|z|^8}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} \exp\left(\frac{-\overline{h}^4}{|h|^8}\right)/h = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\exp(-(h_1-ih_2)^4/(h_1+ih_2)^8)}{h_1+ih_2}$$

si $h_2 = 0 \to \lim = 0$, si $h_1 = h_2$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\exp(+4\cancel{(h_2)^4}/(16(h_2)^{\cancel{8}\,4})}{(1+i)h_2} = \infty$$ y ya

14. Sea $f$ analítica en un dominio $D$. Demostrar que $f$ es constante en $D$ si y solo si cada una de las siguientes condiciones se satisfacen:

- $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$.
- $Re(f(z)) = K$, con $K$ constante, para todo $z \in D$.
- $Im(f(z)) = K$, con $K$ constante, para todo $z \in D$.
- $|f(z)| = K$, con $K$ constante, para todo $z \in D$.
- $Arg(f(z)) = K$, con $K$ constante, para todo $z \in D$.
- $\overline{f(z)}$ es analítica en $D$.

**Demostración:** Si $f$ es constante acabó, suponga que $f'(z)=0$ entonces

$$\begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\to f'(z) = U_x(x,y) + i V_x(x,y) = 0 \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & U_y \\ 0 & V_y \end{pmatrix} \text{ por cauchy } \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u(x,y)$ y $v(x,y)$ son constantes y y ya

①, ② y ③ se vienen, ④ $\to$ constante

$$|f(z)| = |u(x,y) + i\,v(x,y)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} = k$$

$$\partial_x \underline{u^2(x,y)} + \underline{v^2(x,y)} = 0 \to \cancel{2}u(x,y)\,u_x(x,y) + \cancel{2}v(x,y)\,v_x(x,y) = 0$$

$$u^2(x,y)\,u_x(x,y) = v(x,y)\,\cancel{u_y(x,y)}\,u(x,y)$$

$$v(x,y)\,\cancel{u(x,y)\,u_y}(x,y) = -v^2(x,y)\,u_x(x,y)$$

$$\text{Sumando: } \underbrace{(u^2(x,y) + v^2(x,y))}_{k}\,(\cancel{u_x(x,y)}) = 0 \quad \to 0$$

$$v(x,y)\,\cancel{u(x,y)}\,u_x(x,y) = v^2(x,y)\,u_y(x,y)$$

$$u^2(x,y)\,u_y(x,y) = -v(x,y)\,\cancel{u_x}(x,y)\,u(x,y)$$

$$\text{Sumando: } \underbrace{(u^2(x,y) + v^2(x,y))}_{k}\,(\cancel{u_y(x,y)}) = 0 \quad \to 0$$

y se vino en ④ veamos que ⑤ se viene.

Suponga que $\operatorname{Arg}(f(z)) = k$ entonces

$$\operatorname{Arg}(u(x,y) + i\,v(x,y)) = k = \tan^{-1}(v/u) = h(x,y)$$

$$\to \partial_x h(x,y) = \frac{1}{\cancel{\left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1}\left(\frac{\partial_x v\,u - \partial_x u\,v}{\cancel{u^2}}\right)$$

$$= \frac{\partial_x V U - \partial_x U V}{\cancel{V^2 + U^2}} = 0$$

$$\partial_y h(x,y) = \frac{\partial_y V U - \partial_y U V}{\cancel{V^2 + U^2}} = 0$$

$\partial_x VU - \partial_x UV = 0$ y $\partial_y VU - \partial_y UV = 0$

y de ahí sale xd.

(6) $\overline{f(z)} = u(x,y) - i\,v(x,y)$ $+ f(z) = \cancel{2u(x,y)} \to 0$

$+ f(z)$

y $\overline{f(z)} - f(z) = \cancel{2i\,v(x,y)} \to 0$

porque son analíticas y son puramente $\mathbb{R}$ y $i\mathbb{R}$

15. Sea $f = u+iv$, definida en $V_{z_0}^{\epsilon}$ (vecindad de $z_0$ de radio $\epsilon$). Si $u, v$ satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann y son continuas en $z_0$ y las derivadas parciales existen en $V_{z_0}^{\epsilon}$, demostrar que f es derivable en $z_0$.

Demostración Note que

$+ \Theta_{cayo}$

$$f(z+w) - f(z) = u(z+w) - u(z) + i[v(z+w) - v(z)]$$

$$= u_x h + u_y k + i[v_x h + v_y k] + w\,\phi(w)$$

$w = h + ik$

$$= u_x h - v_x k + i[v_x h + u_x k] + w\,\phi(w)$$

$$= u_x(h+ik) + v_x(ih - k) + w\,\phi(w)$$

$$= u_x(h+ik) + i v_x(h+ik) + w\,\phi(w)$$

$$f(z+\overset{w}{h}) = f(z) + f'(z)\overset{w}{h} + O(h^2)$$

$\rightarrow \dfrac{f(z+w)-f(z)}{w} = U_x + i V_x + \phi(w)$

y pues $\lim_{w\to 0} \phi(w) = 0$ y por la continuidad se sino $\boxtimes$

16. (*)Exprese las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares, y enuncie un resultado similar al inmediatamente anterior en coordenadas polares, y muestre que que en este caso $f'(z_0) = e^{-i\alpha}(u_r + iv_r)$, y calcule con esta expresión la derivada de $f(z) = \frac{1}{z}$.

Demostración:

Sea $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$ con $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

Note que

$$\partial_r U = U_x X_r + U_y Y_r \ , \quad \partial_\theta U = U_x X_\theta + U_y Y_\theta$$

$$\partial_r V = V_x X_r + V_y Y_r \ , \quad \partial_\theta V = V_x X_\theta + V_y Y_\theta$$

$$U_r = U_x \cos\theta + U_y \sin\theta \ , \quad U_\theta = U_x(-r\sin\theta) + U_y(r\cos\theta)$$

$$V_r = V_x \cos\theta + V_y \sin\theta \ , \quad V_\theta = V_x(-r\sin\theta) + V_y(r\cos\theta)$$

$$U_r = U_x\cos\theta - V_x\sin\theta \ , \quad V_\theta = U_x r\cos\theta - V_x r\sin\theta$$

$$= r(U_x\cos\theta - V_x\sin\theta)$$

$$= r\,U_r \quad \boxtimes$$

$$V_r = V_x\cos\theta + U_x\sin\theta \qquad U_\theta = U_x(-r\sin\theta) - V_x(r\cos\theta)$$

$$= -r(U_x\sin\theta + V_x\cos\theta)$$

$$z = re^{i\theta} \qquad = -r\,V_r$$

$$\rightsquigarrow \quad u(r,\theta) \quad y \quad v(r,\theta)$$

$$f'(z) = U_x + iV_x \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= U_r r_x + U_\theta \theta_x + i[V_r r_x + V_\theta \theta_x] \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= U_r\left(\frac{x}{r}\right) + U_\theta\left(\frac{-y}{r^2}\right) + i\left[V_r\left(\frac{x}{r}\right) + V_\theta\left(\frac{-y}{r^2}\right)\right]$$

$$= U_r\left(\frac{x}{r}\right) + \cancel{r}V_r\left(\frac{+y}{r}\right) + i\left[V_r\left(\frac{x}{r}\right) - \cancel{r}U_r\left(\frac{y}{r}\right)\right]$$

$$= U_r\left(\frac{x}{r} - \frac{iy}{r}\right) + V_r\left(\frac{y}{r} + \frac{ix}{r}\right)$$

$$= U_r\left(\frac{\cancel{r}e^{-i\theta}}{\cancel{r}}\right) + iV_r\left(\frac{\cancel{r}e^{-i\theta}}{\cancel{r}}\right)$$

$$= e^{-i\theta}(U_r + iV_r)$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{r}\cos\theta}_{u(r,\theta)} - i\underbrace{\frac{1}{r}\sin\theta}_{v(r,\theta)}$$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)$$

$$= e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{r^2}e^{-i\theta}\right) = -\frac{1}{z^2}$$

17. (*)Escriba la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ en coordenadas polares.

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad u(x,y)$

$U_r = U_x x_r + U_y y_r$

$U_\theta = U_x x_\theta + U_y y_\theta$

$U_{rr} = x_r(U_{xx} x_r + U_{yx} y_r) + y_r(U_{yy} y_r + U_{xy} x_r)$

$+ x_{rr} U_x + y_{rr} U_y$

$U_{\theta\theta} = x_\theta(U_{xx} x_\theta + U_{yx} y_\theta) + y_\theta(U_{yy} y_\theta + U_{xy} x_\theta)$

$+ x_{\theta\theta} U_x + y_{\theta\theta} U_y$

$U_{rr} = \cos\theta(U_{xx} x_r + U_{yx} y_r) + \sin\theta(U_{yy} y_r + U_{xy} x_r)$

$= \cos\theta(U_{xx}\cos\theta + U_{yx}\sin\theta) + \sin\theta(U_{yy}\sin\theta + U_{xy}\cos\theta)$

$= U_{xx}\cos^2\theta + U_{yx}\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\, U_{yy}$

$+ U_{xy}\sin\theta\cos\theta$

$U_{\theta\theta} = -r\sin\theta(U_{xx}\,{-r\sin\theta} + U_{yx}\, r\cos\theta) + r\cos\theta(U_{yy}\, r\cos\theta + U_{xy}\,{-r\sin\theta})$

$-r\cos\theta\, U_x - r\sin\theta\, U_y$

$$\Rightarrow \quad U_{xx} r^2 \sin^2\theta + U_{yy} r^2 \cos^2\theta - r^2 U_{yx} \sin\theta\cos\theta$$
$$- r^2 U_{xy} \cos\theta\sin\theta \quad - r(\cos\theta U_x + \sin\theta U_y)$$

$$+ \quad r^2(U_{xx}\cos^2\theta + U_{yx}\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta U_{yy}$$
$$+ U_{xy}\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \underline{r^2(U_{xx}+U_{yy})} - r(\cos\theta U_x + \sin\theta U_y)$$

$$= r^2(U_{xx}+U_{yy}) - r(\cos\theta U_x + \sin\theta U_y)$$

$$= r^2 U_{rr} + U_{\theta\theta}$$

$$U_{xx}+U_{yy} = \frac{1}{r^2}\left(r^2 U_{rr} + U_{\theta\theta} + r(\cos\theta U_x + \sin\theta U_y)\right)$$

$$= U_{rr} + r^{-2}U_{\theta\theta} + r^{-1}(x_r U_x + y_r U_y)$$

$$= U_{rr} + r^{-2}U_{\theta\theta} + r^{-1}(U_r)$$

si no entendió mucho bruto

18. sea $f = u + iv$ una función analitica en un dominio $D$. Demostrar que las familias de curvas $u = c_1$; $v = c_2$ son ortogonales en los puntos de intersección ($c_1, c_2$ constantes).

Demostración:

LA GEOMETRÍA ES PA BOBOS