Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres

Ejercicio 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces se satisface:

(a) $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 \leq \|A\|_F = \|A^T\|_F$

Para mostrar que $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$ veremos que todo valor propio no nulo de A^TA lo es también de AA^T: Sea v un vector propio de A^TA y λ el valor propio de A^TA asociado a v, entonces

$$\begin{aligned} AA^T(Av) &= A(A^TAv) \\ &= A(\lambda v) \\ &= \lambda(Av) \end{aligned}$$

De esto se sigue que λ es un valor propio de AA^T asociado al vector propio Av. De manera análoga, se concluye que si w es un vector propio de AA^T, con γ el valor propio de AA^T asociado a w, entonces γ es un valor propio de AA^T asociado al vector propio A^Tw.

Para ver que $\|A\|_F = \|A^T\|_F$ basta notar que

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ji}|^2 = \|A^T\|_F^2$$

Por último, note que las componentes de la diagonal de A^TA son de la forma $u_{jj} = \sum_{i=1}^m a_{ij}^2$, por lo tanto la traza de A^TA es

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2$$

y ya que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios, y como A^TA es semidefinida positiva, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A^TA) &\leq \mathrm{tr}(A^TA) \\ \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} &\leq \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)} \\ \|A\|_2 &\leq \|A\|_F \end{aligned}$$

(b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

Primero note que $\|Ae_j\|_2^2 = \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \leq \|A\|_2^2$, por lo tanto, $\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|_2^2 \leq n\|A\|_2^2$. Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty^2 &= \left(\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)^2 \\
&\leq \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \|Ae_j\|_2^2 \\
&\leq n\|A\|_2^2
\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada llegamos a que $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$.

(c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$

Note que

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{j=1}^m \left|\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j\right|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left(\left|\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\right) \\
&= m\left|\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2 \\
&= m\|Ax\|_\infty^2
\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada se obtiene que $\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_\infty$ y por lo tanto $\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty$

(d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

Tenemos que $\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|$ y también que $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|$. De esta manera

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\right)\max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \\
&= \|Ax\|_1\|Ax\|_\infty
\end{aligned}$$

Así, $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{\|Ax\|_1\|Ax\|_\infty}$, en consecuencia $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$

Ejercicio 2.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Pruebe que:

Si $Ax = b$, $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ y $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$, entonces $A + \delta A$ es invertible y se cumple que:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

Ejercicio 3.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a + \delta \end{pmatrix},$$

$a > 0$ fijo, $\delta > 0$ variable.

(a) Obtenga el número de condición de A. Para valores de δ muy pequeños o muy grandes, ¿podemos afirmar que el sistema $Ax = b$ está mal condicionado? Justifique su respuesta.

(b) ¿Existe algún valor de δ que haga óptimo el número de condición de A? ¿Cuál es este número de condición?

Ejercicio 4.

Al aproximar una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mediante un polinomio $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, el error de aproximación E se mide en la norma L^2, es decir:

$$E^2 := \|p - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 [p(t) - f(t)]^2 \, dt.$$

(a) Muestre que la minimización del error $E = E(a_0, \ldots, a_n)$ conduce a un sistema de ecuaciones lineales $H_n a = b$, donde:

$$b = [b_0, \ldots, b_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad b_i = \int_0^1 f(t) t^i \, dt, \quad i = 0, \ldots, n,$$

y H_n es la matriz de Hilbert de orden n, definida como:

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i + j + 1}, \quad i, j = 0, \ldots, n.$$

El vector a representa los coeficientes del polinomio p.

(b) Muestre que H_n es simétrica y definida positiva.

(c) Solucione el sistema $H_n x = b$, donde b tiene componentes $b_i = 1/(n+i-1)$, para $i = 1, \ldots, n$. Para esto, use las factorizaciones LU ($[L, U] = \mathrm{lu}(H)$) y Cholesky ($L = \mathrm{chol}(H)$). Luego resuelva los dos sistemas triangulares.

(d) Para ambos métodos, ¿qué tan precisas son las soluciones numéricas $\hat{x}_{\text{approx}}$? Tabule los errores de la solución:

$$e(n) = \|\hat{x}_{\text{approx}} - x_{\text{exact}}\|$$

como una función de $n = 2, \ldots, 15$. Note que $x_{\text{exact}} = (0, \ldots, 1)^T$. Puede graficar los errores en función de n utilizando la función `semilogy` de Matlab. Explique en detalle los resultados.

Ejercicio 5.

(a) Simplifique el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema lineal $Ax = b$ donde A es una matriz tridiagonal.

(b) Considere la ecuación de Poisson con término fuente f en el intervalo $(0, 1)$:

$$-T''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

con condiciones de frontera $T(0) = T(1) = 0$. Aproximando la segunda derivada por diferencias finitas:

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2},$$

y discretizando en $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, con $n = 1/h$, obtenemos el sistema:

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Escriba este sistema en la forma $AT = f$, donde A es una matriz tridiagonal. Resuelva el sistema para $n = 1000$ y $f(x) = \sin(2\pi x)$. Compare su solución con $T(x) = \sin(2\pi x)/(4\pi^2)$.