Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres

Ejercicio 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces se satisface:

(a) $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 \leq \|A\|_F = \|A^T\|_F$,

(b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$,

(c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$,

(d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

Ejercicio 2.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Pruebe que:

Si $Ax = b$, $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ y $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$, entonces $A + \delta A$ es invertible y se cumple que:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

Ejercicio 3.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a+\delta \end{pmatrix},$$

$a > 0$ fijo, $\delta > 0$ variable.

(a) Obtenga el número de condición de A. Para valores de δ muy pequeños o muy grandes, ¿podemos afirmar que el sistema $Ax = b$ está mal condicionado? Justifique su respuesta.

(b) ¿Existe algún valor de δ que haga óptimo el número de condición de A? ¿Cuál es este número de condición?

Ejercicio 4.

Al aproximar una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mediante un polinomio $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, el error de aproximación E se mide en la norma L^2, es decir:

$$E^2 := \|p - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 [p(t) - f(t)]^2 \, dt.$$

(a) Muestre que la minimización del error $E = E(a_0, \ldots, a_n)$ conduce a un sistema de ecuaciones lineales $H_n a = b$, donde:

$$b = [b_0, \ldots, b_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad b_i = \int_0^1 f(t)t^i \, dt, \quad i = 0, \ldots, n,$$

y H_n es la matriz de Hilbert de orden n, definida como:

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = 0, \ldots, n.$$

El vector a representa los coeficientes del polinomio p.

Demostración. Sea $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$, note que

$$\begin{aligned} E^2(a_0, \ldots, a_n) &= \int_0^1 (p(t) - f(t))^2 \, dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j - f(t) \right)^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j \right)^2 dt - 2 \int_0^1 f(t) \sum_{j=0}^{n} a_j t^j dt + \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Note que esta función depende de los coneficientes, por lo tanto para minimizar el error podemos derivar parcialmente con respecto a a_k, $0 \leq k \leq n$ e igualar a 0. Derivando obtenemos que

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_k} = 2 \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^{k+j} \right) dt - 2 \int_0^1 f(t) t^k dt = 0,$$

despejando de esta ecuación obtenemos que

$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+k} dt = \sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 t^{j+k} dt = \int_0^1 f(t) t^k dt,$$

más aún, como $\int_0^1 t^{k+j} dt = \dfrac{1}{k+j+1} = (H_n)_{k,j}$, obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (H_n)_{k,j} = (H_n)_k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \int_0^1 f(t) t^k dt = b_k,$$

donde $(H_n)_k$ denota la k—ésima fila de la matriz (H_n), que es lo mismo que $H_n a = b$.

$\square$

(b) Muestre que H_n es simétrica y definida positiva.

Demostración. Note que la simetría es inmediata de que

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j+1} = \frac{1}{j+i+1} = (H_n)_{j,i}.$$

Para ver que la matriz es definida positiva note que

$$\begin{aligned} x^T H_n x &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j x_i}{i+j+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_j x_i \int_0^1 t^i t^j dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} x_i t^i \sum_{j=0}^{n} x_j t^j dt \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{n} x_j t^j \right\|_{L^2}^2 > 0 \end{aligned}$$

$\square$

(c) Solucione el sistema $H_n x = b$, donde b tiene componentes $b_i = 1/(n+i-1)$, para $i = 1, \dots, n$. Para esto, use las factorizaciones LU ($[L, U] = \text{lu}(H)$) y Cholesky ($L = \text{chol}(H)$). Luego resuelva los dos sistemas triangulares.

(d) Para ambos métodos, ¿qué tan precisas son las soluciones numéricas $\hat{x}_{\text{approx}}$? Tabule los errores de la solución:

$$e(n) = \|\hat{x}_{\text{approx}} - x_{\text{exact}}\|$$

como una función de $n = 2, \dots, 15$. Note que $x_{\text{exact}} = (0, \dots, 1)^T$. Puede graficar los errores en función de n utilizando la función `semilogy` de Matlab. Explique en detalle los resultados.

Ejercicio 5.

(a) Simplifique el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema lineal $Ax = b$ donde A es una matriz tridiagonal.

(b) Considere la ecuación de Poisson con término fuente f en el intervalo $(0, 1)$:

$$-T''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

con condiciones de frontera $T(0) = T(1) = 0$. Aproximando la segunda derivada por diferencias finitas:

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2},$$

y discretizando en $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, con $n = 1/h$, obtenemos el sistema:

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Escriba este sistema en la forma $AT = f$, donde A es una matriz tridiagonal. Resuelva el sistema para $n = 1000$ y $f(x) = \sin(2\pi x)$. Compare su solución con $T(x) = \sin(2\pi x)/(4\pi^2)$.