UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
TOPOLOGÍA GENERAL
TALLER II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres ....

1. Muestra que los números racionales $\mathbb{Q}$ no son localmente compactos

   Demostración. Consideremos $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual, el punto $0 \in \mathbb{Q}$ y una vecindad $U \subset \mathbb{Q}$ de 0, como U es abierto, por la propiedad arquimediana de los números racionales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{Q} \cap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset U$, por la densidad de los irracionales en los reales, existe un irracional x en el intervalo $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ y por la propiedad arquimediana, existe un natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, note que $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ es cerrado en $\mathbb{Q}$, luego, si existiera un compacto que contiene a U, $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ sería compacto pues es un subconjunto cerrado de un compacto, sin embargo

   $$\bigcap_{n \geq k}^{\infty} \left(\left[r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q}\right) = \emptyset$$

   De esta manera, $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ no es compacto y por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

   □

2. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios no vacíos.
   a) Demuestra que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto para todos los valores de α, salvo un número finito.
   b) Prueba el recíproco, asumiendo el teorema de Tychonoff.

3. Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿se sigue que $f(X)$ es localmente compacto? ¿Qué ocurre si f es continua y abierta? Justifica tu respuesta.

4. Demuestra que $[0, 1]^\omega$ no es localmente compacto en la topología uniforme.

5. Si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff localmente compactos, demuestra que f se extiende a un homeomorfismo de sus compactificaciones por un punto.

6. Demuestra que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa al círculo S^1.

7. Demuestra que la compactificación por un punto de S_Ω es homeomorfa a $\bar{S}_\Omega$.

8. Demuestra que la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ la compactificación a un punto de $\mathbb{Z}_+$, veamos que $\mathbb{Z}_+$ y $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in Z_+\right\}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ poseen la topología discreta. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, note que $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z}_+ = \{n\}$, por lo tanto los puntos son abiertos en Z_+, de donde se sigue que $\mathbb{Z}_+$ posee la topología discreta. Ahora sea $\frac{1}{n} \in A$, note que $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right) \cap A = \{\frac{1}{n}\}$, con lo cual, razonando de la misma manera que en el caso anterior, A posee la topología discreta, así la función

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow A \\
n &\longmapsto f(n) = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Es un homeomorfismo, luego, por el punto 5, sus compactificaciones a un punto son homeomorfas. Para mostrar que la compactificación a un punto de A es $A \cup \{0\}$ basta ver que $A' = \{0\}$ luego $\overline{A} = \{0\} \cup A$, como $A \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, es compacto y difiere en un punto de A. $\square$

9. Demuestra que si G es un grupo topológico localmente compacto y H es un subgrupo, entonces G/H es localmente compacto.

10. Demuestra que si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto en el punto x, entonces para cada vecindad U de x, existe una vecindad V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.