

Mateo Andrés Manosalva Amarís

Sergio Alejandro Bello Torres .....

1. Muestra que los números racionales  $\mathbb{Q}$  no son localmente compactos

*Demostración.* Consideremos  $\mathbb{Q}$  como subespacio de  $\mathbb{R}$  con la topología usual, el punto  $0 \in \mathbb{Q}$  y una vecindad  $U \subset \mathbb{Q}$  de  $0$ , como  $U$  es abierto, por la propiedad arquimediana de los números racionales, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbb{Q} \cap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset U$ , por la densidad de los irracionales en los reales, existe un irracional  $x$  en el intervalo  $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  y por la propiedad arquimediana, existe un natural  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ , note que  $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$  es cerrado en  $\mathbb{Q}$ , luego, si existiera un compacto que contiene a  $U$ ,  $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$  sería compacto pues es un subconjunto cerrado de un compacto, sin embargo

$$\bigcap_{n \geq k} \left( \left[ r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right] \cap \mathbb{Q} \right) = \emptyset$$

De esta manera,  $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$  no es compacto y por lo tanto  $\mathbb{Q}$  no es localmente compacto.

□

2. Sea  $\{X_\alpha\}$  una familia indexada de espacios no vacíos.

- a) Demuestra que si  $\prod X_\alpha$  es localmente compacto, entonces cada  $X_\alpha$  es localmente compacto y  $X_\alpha$  es compacto para todos los valores de  $\alpha$ , salvo un número finito.

*Demostración.* Recordemos que las proyecciones son mapeos continuos y abiertos, supongamos que  $\prod X_\alpha$  es localmente compacto. Sea  $x \in \prod X_\alpha$ , por la compacidad local existe un subespacio compacto  $C$  de  $\prod X_\alpha$  que contiene a  $x$  y esta vecindad contiene un elemento de la base de  $\prod X_\alpha$  que contiene a  $x$ , digamos  $U$ .

Como estamos en la topología producto, entonces  $U = \prod U_\alpha$  donde  $U_\alpha = X_\alpha$  para todo  $\alpha$  salvo finitos índices, digamos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Sea  $\beta \neq \alpha_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $\pi_\beta(C)$  es un compacto que contiene a  $\pi_\beta(U) = X_\beta$ .

Falta ver que los  $X_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  son localmente compactos. Sean  $y \in X_{\alpha_i}$  y  $x \in \prod X_\alpha$  tales que  $x_{\alpha_i} = y$ . Existe un compacto  $C$  que contiene un elemento de la base  $U$  tal que  $U$  es vecindad  $x$ , entonces  $\pi_{\alpha_i}(C)$  es un subespacio compacto de  $X_{\alpha_i}$  que contiene a la vecindad  $\pi_{\alpha_i}(U)$  de  $x$ .

□

- b) Prueba el recíproco, asumiendo el teorema de Tychonoff.

*Demostración.* Sea  $x \in \prod_{\alpha} X_{\alpha}$ . Para cada  $\alpha$ , existe un subespacio compacto  $C_{\alpha}$  de  $X_{\alpha}$  que contiene una vecindad  $U_{\alpha}$  de  $x_{\alpha}$ . Por hipótesis, para cada índice salvo finitos, podemos asumir que  $C_{\alpha} = U_{\alpha} = X_{\alpha}$ . Por el teorema de Tychonoff,  $\prod_{\alpha} C_{\alpha}$  es compacto y contiene la vecindad  $\prod_{\alpha} U_{\alpha}$  de  $x$ . Se sigue que  $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$  es localmente compacto.  $\square$

3. Sea  $X$  un espacio localmente compacto. Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, ¿se sigue que  $f(X)$  es localmente compacto? ¿Qué ocurre si  $f$  es continua y abierta? Justifica tu respuesta.

**Falso:** Sean  $\mathbb{Q}_d$  los racionales con la topología discreta y  $\mathbb{Q}$  los racionales con la topología usual.  $\mathbb{Q}_d$  es localmente compacto ya que  $\{x\}$  es una vecindad de  $x$  y  $\{x\}$  es compacto, sin embargo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q}_d &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

es continua y  $\mathbb{Q}$  no es localmente compacto (Ejercicio 1). Sin embargo si añadimos la hipótesis de que  $f$  es abierta, entonces es verdadera la proposición.

*Demostración.* Sea  $y \in f(X)$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ , como  $X$  es localmente compacto, entonces existe un subespacio compacto  $C$  de  $X$  tal que  $C$  contiene una vecindad  $U$  de  $x$ . Obviamente  $f(U) \subset f(C)$  y  $f(U)$  es abierto porque  $f$  es abierta, además  $f(C)$  es compacto, de lo que se sigue el resultado.  $\square$

4. Demuestra que  $[0, 1]^{\omega}$  no es localmente compacto en la topología uniforme.

*Demostración.* Considere el  $0 \in \mathbb{R}^{\omega}$ ,  $0 = (0, 0, 0, 0, \dots)$ . Suponga que  $[0, 1]^{\omega}$  es localmente compacto en 0, entonces existe un compacto  $C$  que contiene la bola  $B(0, \epsilon) \subset [0, 1]^{\omega}$ , en efecto  $\overline{B(0, \epsilon)} = [0, \epsilon]^{\omega}$ . Como  $[0, \epsilon]^{\omega}$  es un subconjunto cerrado de un compacto, entonces es compacto, pero esto es una contradicción ya que dado  $U \subset [0, \epsilon]$ , tenemos que

$$\bigcup_{k \geq 1} [0, \epsilon]^k \times U^{\omega-k}$$

es un cubrimiento abierto de  $[0, \epsilon]^{\omega}$  que no admite un subcubrimiento finito.  $\square$

5. Si  $f : X_1 \rightarrow X_2$  es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff localmente compactos, demuestra que  $f$  se extiende a un homeomorfismo de sus compactificaciones por un punto.

*Demostración.* Suponga  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un homeomorfismo y definamos

$$\begin{aligned} g : Y_1 &\longrightarrow Y_2 \\ x &\longmapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1 \\ \tilde{y} & \text{si } x = y, \end{cases} \end{aligned}$$

con  $Y_1, Y_2$  las compactificaciones a un punto,  $g$  es un homeomorfismo entre  $Y_1$  y  $Y_2$ . Sea  $V$  un abierto,  $V \subset Y_2$ . Tenemos dos casos,  $V$  es abierto de  $X_2$  o  $V = Y_2 - C$  con  $C$  compacto en  $X_2$ , el primer caso es trivial. Para el segundo caso note que

$$\begin{aligned} g^{-1}(V) &= g^{-1}(Y_2 - C) \\ &= Y_1 - g^{-1}(C) \\ &= Y_1 - K_1. \end{aligned}$$

con  $K_1$  compacto en  $X_1$ . Análogamente

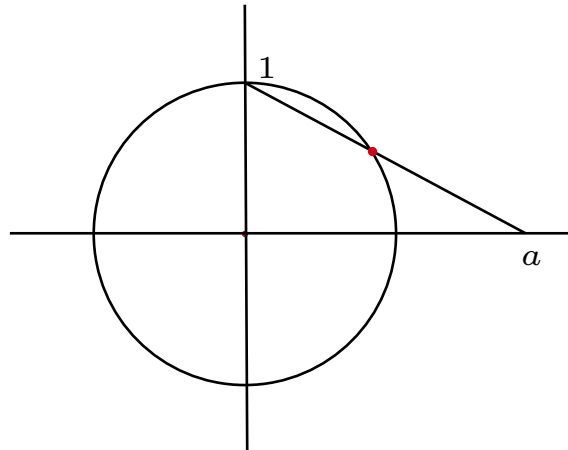
$$g(Y_1 - C) = Y_2 - g(C) = Y_2 - K_2$$

con  $K_2$  compacto en  $X_2$ .

□

6. Demuestra que la compactificación por un punto de  $\mathbb{R}$  es homeomorfa al círculo  $S^1$ .

*Demostración.* Vamos a construir el homeomorfismo, este es la proyección estereográfica.



Por la ecuación de punto pendiente, la recta que se observa en el dibujo y que corta la circunferencia tiene la ecuación

$$y = \frac{-x}{a} + 1,$$

reemplazando esto en la ecuación del círculo ( $x^2 + y^2 = 1$ ) obtenemos que

$$x^2 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} = 0,$$

así pues

$$x \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{2}{a},$$

esto es

$$x = \frac{2a}{a^2 + 1}.$$

Finalmente, al reemplazar  $x$  en la ecuación de la recta, obtenemos que

$$y = \frac{-2}{a^2 + 1} + 1$$

que es el homeomorfismo ya que cuando  $a \rightarrow \infty$  obtenemos el polo norte y la función establece una correspondencia entre un punto en la circunferencia y un punto en la recta (por la construcción que hicimos). Obviamente la función es biyectiva y continua y su inversa es continua x.d.

□

7. Demuestra que la compactificación por un punto de  $S_\Omega$  es homeomorfa a  $\bar{S}_\Omega$ .
8. Demuestra que la compactificación por un punto de  $\mathbb{Z}_+$  es homeomorfa al subespacio  $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  de  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Veamos que  $\mathbb{Z}_+$  y  $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$  como subespacios de  $\mathbb{R}$  poseen la topología discreta. Sea  $n \in \mathbb{Z}_+$ , note que  $\left( n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) \cap \mathbb{Z}_+ = \{n\}$ , por lo tanto los puntos son abiertos en  $\mathbb{Z}_+$ , de donde se sigue que  $\mathbb{Z}_+$  posee la topología discreta. Ahora sea  $\frac{1}{n} \in A$ , note que  $\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ , con lo cual, razonando de la misma manera que en el caso anterior,  $A$  posee la topología discreta, así la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Es un homeomorfismo, luego por el punto 5, sus compactificaciones a un punto son homeomorfas. Para mostrar que la compactificación a un punto de  $A$  es  $A \cup \{0\}$  basta ver que  $A' = \{0\}$  luego  $\bar{A} = \{0\} \cup A$ , como  $A \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$  es cerrado y acotado, es compacto y difiere en un punto de  $A$ . □

9. Demuestra que si  $G$  es un grupo topológico localmente compacto y  $H$  es un subgrupo, entonces  $G/H$  es localmente compacto.
10. Demuestra que si  $X$  es un espacio de Hausdorff localmente compacto en el punto  $x$ , entonces para cada vecindad  $U$  de  $x$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$  tal que  $\bar{V}$  es compacto y  $\bar{V} \subset U$ .

*Demostración.* Sea  $U$  una vecindad de  $x$ , como  $X$  es localmente compacto en  $x$ , existe un compacto  $K \subset X$  tal que  $x \in W \subset K$ , con  $W$  una vecindad de  $x$ . Tenemos también que  $U \cap W$  es una vecindad de  $x$  contenida en  $K$ , por lo tanto  $K - (U \cap W)$  es cerrado en  $K$ . Como  $K$  es compacto y Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tales que  $x \in V_1$  y  $K - (U \cap W) \subset V_2$ . Considere  $V = V_1 \cap U \cap W$ ,  $V$  es una vecindad de  $x$  que está contenida en  $U$ , además  $\bar{V} \subset U$ , en efecto  $K - (U \cap W) = (K - U) \cup (K - W) \subset V_2$  y como  $V_2$  es abierto,  $V_2^c \subset U$  es un cerrado que contiene a  $V$ , por lo tanto  $\bar{V} \subset U$ . Además, como  $\bar{V} \subset K$ , es compacto. □