Taller III

Bourbaki

19 de noviembre de 2024

1. Demuestre que $A \subset \mathbb{C}$ es compacto si y solo si es acotado y cerrado.

   Demostración. Supongamos que A es compacto, si A no es acotado entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in A$ tal que $|z_n| > n$, por tanto $\{z_n\}$ no tiene punto de acumulación ya que... suponga que z_0 es un punto de acumulación, sea $m > 2|z_0|$, es claro que $|z_0| > 0$ ya que en caso contrario $z_0 = 0$, así pues $|z_n - z_0| = |z_n| > n$ y por lo tanto z_0 no sería punto de acumulación. En este caso $|z_m - z_0| \geq |z_m| - |z_0| > 2|z_0| - |z_0| = |z_0|$, contradice que ese coso es punto límite. Entonces es acotado.

   Sea $z_0 \in \overline{A}$, dado n, existe $z_n \in A$ tal que $|z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$, así $\{z_n\}$ converge a z_0. Como A es compacto existe una subsucesión convergente en A, es claro que este límite debe ser z_0, así $z_0 \in A$, con lo cual A es cerrado.

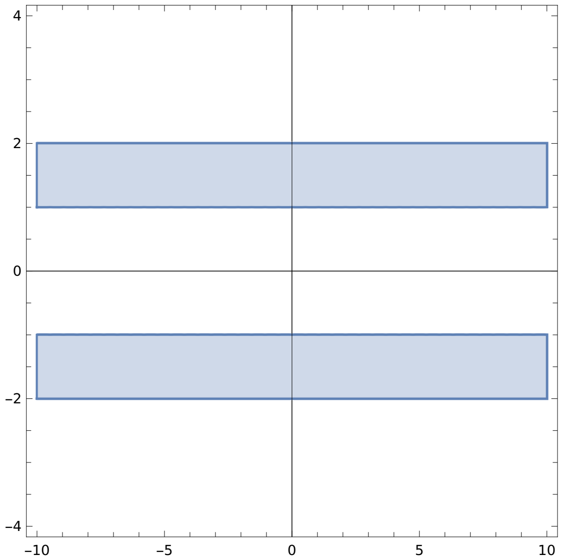
   Reciprocamente, sea $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\} \subseteq A$, entonces existe un $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo n, en particular $\{x_n\} \leq M$ y $\{y_n\} \leq M$ por lo tanto tienen una subsucesión convergente ya que son sucesiones de números reales, digamos $\{x_{n_1}\} \to a$ y $\{y_{n_2}\} \to b$, aplicamos el teorema de Bolzano en $\mathbb{R}$, esto es z_n tiene una subsucesión convergente a $a + bi$. □

2. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Sean $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ una sucesión de subconjuntos de K no vacíos, tales que $K_n \supseteq K_{n+1}$. Demostrar que la intersección de todos los $K_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ es no vacía.

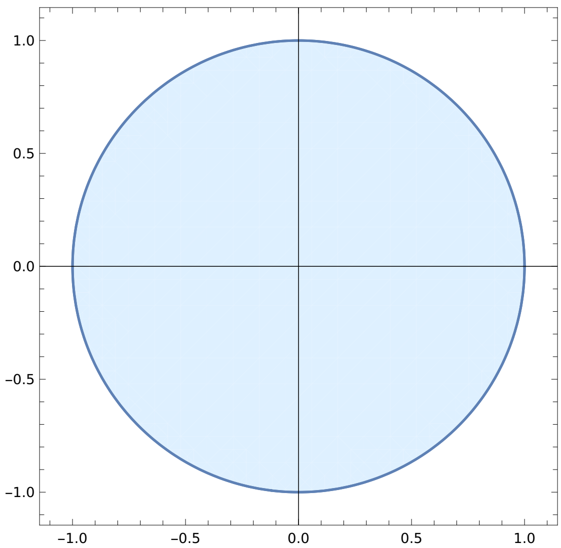
   Pues lo que pasa es que eso siempre es fácil allí porque usted llega y coge el conjunto $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$, note que ese conjunto está contenido en $[0, 1]$ que es compacto, y pues si usted considera la intersección de esos coyos, eso le da vacío siono?

3. Encontrar la imagen de las regiones:

$$1 < |\operatorname{Im}(z)| \leq 2$$



$$|z| < 1$$



bajo las aplicaciones:

a) $f(z) = z^2$

Sea $z = x + yi$, entonces $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, sean $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ las funciones parte real e imaginaria, esto es

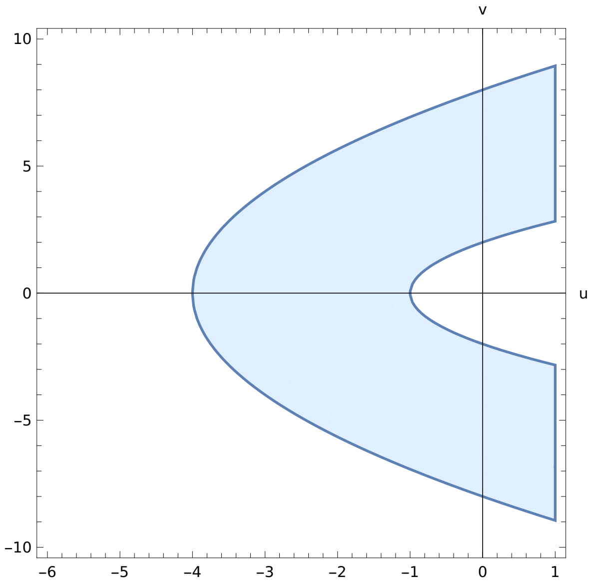
$$x = \frac{v}{2y}$$

reemplazando en la ecuación de arriba se obtiene que

$$u = \frac{v^2}{4y^2} - y^2$$

si uno reemplaza en -2 y -1 obtiene las ecuaciones de dos parábolas, pero pues usted tiene que girar la cabeza para verlo bien

$$u = \frac{v^2}{16} - 4 \quad u = \frac{v^2}{4} - 1$$



Para el caso $|z| < 1$ nos deja la misma bola porque dado $z = re^{i\theta}$ entonces $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ por lo que nos queda la misma circunferencia, dado que si $0 \leq r < 1$ entonces $0 \leq r^2 < 1$

b) $f(z) = \dfrac{2z + i}{z + 1}$

Esto lo irá a hacer su madre y con su madre me refiero al Santiago xd.

4. Sea $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$, hallar la imagen por f de:

   a) El semiplano superior.

   b) La semirecta $it; t \geq 0$.

   c) La recta $it; t \in \mathbb{R}$.

   d) $|z - 1| = 1$.

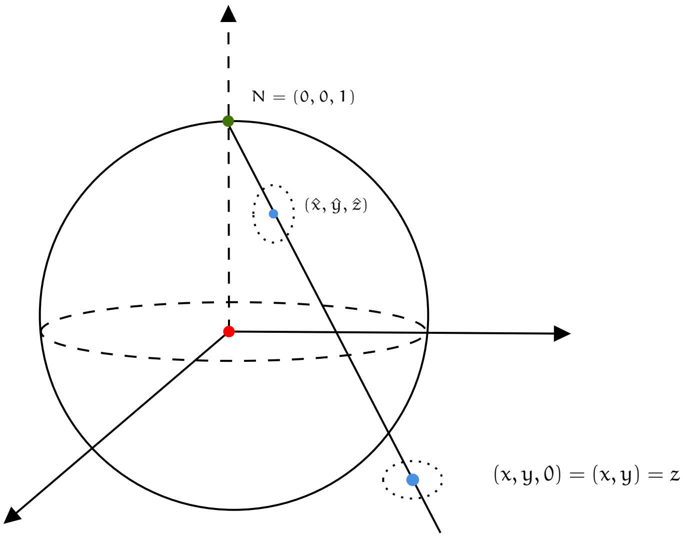
   e) $|z| = 2; \mathrm{Im}(z) \geq 0$.

5. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \mathrm{Im}(z) \leq \alpha\}$. Si $f(z) = e^z$, hallar $f(A)$.

6. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Si $f(z) = \sin(z)$, hallar $f(A)$.

7. Determine completamente la proyección estereográfica (que lleva la esfera de Riemann en el plano complejo). Es decir, hallar explícitamente T y T^{-1}.

   Primero que todo hagamos el muñeco



El vector director de la recta es $D = (x, y, 0) - N = (x, y, -1)$, entonces la recta es

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) \quad t \geq 0$$

de esto se sigue que

$$\begin{cases} \hat{x} = tx \\ \hat{y} = ty \\ \hat{z} = 1 - t. \end{cases}$$

Reemplazando esto en la ecuación de la esfera obtenemos $(tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 = 1$, esto es $t^2(x^2 + y^2 + 1) = 2t$, esto es $t = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + 1}$, reemplazando en las ecuaciones de antes se sigue que

$$\begin{cases} \hat{x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \\ \hat{y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 2} \\ \\ \hat{z} = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases}$$

Por otro lado $t = 1 - \hat{z}$, esto es $x = \dfrac{\hat{x}}{1 - \hat{z}}$, $y = \dfrac{\hat{y}}{1 - \hat{z}}$, con esto podemos definir los mapeos:

$$\begin{aligned} T: \quad & S \mapsto C \cup \{\infty\} = \widetilde{\mathbb{C}} \\ & (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mapsto \left(\frac{\hat{x}}{1 - \hat{z}}, \frac{\hat{y}}{1 - \hat{z}} \right) \\ T^{-1}: \quad & \widetilde{\mathbb{C}} \mapsto S \\ & \infty \rightarrow (0, 0, 1) \\ & (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

8. Demostrar que la proyección estereográfica preserva círculos. La imagen directa o inversa de una circunferencia es una circunferencia.

Demostración. Dada $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ la ecuación de la circunferencia, tenemos que $\hat{x}^2+\hat{y}^2=1-\hat{z}^2$, esto nos da que

$$
\begin{aligned}
0 &= A\left(\frac{\hat{x}^2}{(1-\hat{z})^2}+\frac{\hat{y}^2}{(1-\hat{z})^2}\right)+B\frac{\hat{x}}{1-\hat{z}}+C\frac{\hat{y}}{1-\hat{z}}+D \\
&= A\left(\frac{1-\hat{z}^2}{(1-\hat{z})^2}\right)+B\frac{\hat{x}}{1-\hat{z}}+C\frac{\hat{y}}{1-\hat{z}}+D \\
&= \frac{1}{1-\hat{z}}\left(A(1+\hat{z})+B\hat{x}+C\hat{y}+D(1-\hat{z})\right).
\end{aligned}
$$

Esto da que una circunferencia en $\mathbb{C}$ la envía en una circunferencia en S, una recta en $\mathbb{C}$ la manda en una circunferencia que pasa por el polo N. Recíprocamente si $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\in S$, como $\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2=1$ y $D=R^2-(A^2+B^2+C^2)$, entonces aquí yo no entiendo de donde sale esa ecuación D, pero pues luego les pregunto xd

$$
\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2-2B\hat{y}-2C\hat{z}-D=0
$$

reemplazando los valores de $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ se obtiene la ecuación

$$
\left(x^2+y^2\right)(1-2C-D)-4Ax-4By+(1+2C-D)=0.
$$

Y eso es una circunferencia en $\mathbb{C}$ a menos que $1-2C-D=0$ y eso es si la circunferencia pasa por el polo, en ese caso da una recta y fechó. me toca creer unas cosas porque yo no me sé las ecuaciones de esas vainas $\square$