Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres

Ejercicio 1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Entonces se satisface:

(a) $\|A\|_2 = \|A^T\|_2 \leq \|A\|_F = \|A^T\|_F$

Demostración. Para mostrar que $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$ veremos que todo valor propio no nulo de A^TA lo es también de AA^T: Sea v un vector propio de A^TA y λ el valor propio de A^TA asociado a v, entonces

$$\begin{aligned} AA^T(Av) &= A(A^TAv) \\ &= A(\lambda v) \\ &= \lambda(Av) \end{aligned}$$

De esto se sigue que λ es un valor propio de AA^T asociado al vector propio Av. De manera análoga, se concluye que si w es un vector propio de AA^T, con γ el valor propio de AA^T asociado a w, entonces γ es un valor propio de A^TA asociado al vector propio A^Tw.

Para ver que $\|A\|_F = \|A^T\|_F$ basta notar que

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2 = \|A^T\|_F^2$$

Por último, note que las componentes de la diagonal de A^TA son de la forma $u_{jj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2$, por lo tanto la traza de A^TA es

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2$$

y ya que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios, y como A^TA es semidefinida positiva, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A^TA) &\leq \operatorname{tr}(A^TA) \\ \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} &\leq \sqrt{\operatorname{tr}(A^TA)} \\ \|A\|_2 &\leq \|A\|_F \end{aligned}$$

$\square$

(b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

Demostración. Primero note que $\|A^T e_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leq \|A^T\|_2^2 = \|A\|_2^2$. Ahora, sea $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|A^T e_k\|_2^2 = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$; usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty^2 &= \left(\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)^2 \\
&\leq n \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \\
&= n\|A^T e_k\|_2^2 \\
&\leq n\|A^T\|_2^2 \\
&= n\|A\|_2^2
\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada llegamos a que $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$. □

(c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \left(\left|\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2\right) \\
&= m\left|\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2 \\
&= m\|Ax\|_\infty^2
\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada se obtiene que $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{m}\|Ax\|_\infty$ y por lo tanto $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$ □

(d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

Demostración. Tenemos que $\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$ y también que $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$.

De esta manera

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\right)\max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \\
&= \|Ax\|_1\|Ax\|_\infty
\end{aligned}$$

Así, $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{\|Ax\|_1\|Ax\|_\infty}$, en consecuencia $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$ □

Ejercicio 2.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Pruebe que:

Si $Ax = b$, $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ y $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$, entonces $A + \delta A$ es invertible y se cumple que:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

Demostración. Primero mostremos que $A+\delta A$ es invertible. Notemos que como A es invertible tenemos

$$A + \delta A = A(I - (-A^{-1}\delta A)).$$

Luuego por hipotesis y usando que la norma matricial es submultiplicativa tenemos que

$$\| - A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1.$$

Por lo que $I+A^{-1}\delta A$ es invertible por el teorema de la serie de Neumann. Asi $A+\delta A$ es invertible, pues es el producto de dos matrices invertibles.

Ahora probemos la desigualdad. Como por hipotesis $Ax = b$, notemos que

$$\begin{aligned}
(A + \delta A)(x + \delta x) &= Ax + A\delta x + \delta Ax + \delta A\delta x \\
&= b + A\delta x + \delta Ax + \delta A\delta x.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la hipotesis tenemos que

$$b + A\delta x + \delta Ax + \delta A\delta x = b + \delta b,$$

luego

$$A\delta x = \delta b - \delta Ax - \delta A\delta x,$$

y como A es invertible

$$\delta x = A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A x - A^{-1}\delta A \delta x.$$

Si tomamos la norma en $\mathbb{R}^n$ en ambos lados, por la desigualdad triangular y el hecho de que la norma matricial inducida es compatible y submultiplicativa tenemos que

$$\begin{aligned}\|\delta x\| &= \|A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A x - A^{-1}\delta A \delta x\| \\ &\leq \|A^{-1}\delta b\| + \|A^{-1}\delta A x\| + \|A^{-1}\delta A \delta x\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|\delta x\|.\end{aligned}$$

Luego restando el ultimo sumando y factorizando $\|\delta x\|$ tenemos

$$\|\delta x\|(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|) \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\|.$$

Como A es invertible, es distinta de 0, luego $\|A\| > 0$, asi tenemos que por la definicion del numero de condicion $\|A^{-1}\| = \dfrac{\mathrm{cond}(A)}{\|A\|}$. Ademas tenemos que $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, por tanto $\dfrac{1}{\|A\|\|x\|} \leq \dfrac{1}{\|b\|}$. Con todo esto notemos que para el lado derecho de la desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\| &= \frac{\mathrm{cond}(A)}{\|A\|\|x\|}\|\delta b\|\|x\| + \frac{\mathrm{cond}(A)}{\|A\|}\|\delta A\|\|x\| \\ &\leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{\|b\|}\|\delta b\|\|x\| + \frac{\mathrm{cond}(A)}{\|A\|}\|\delta A\|\|x\| \\ &= \mathrm{cond}(A)\|x\|\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\|\delta x\|(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|) \leq \mathrm{cond}(A)\|x\|\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

Como por hipotesis $0 < 1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|$, podemos dividir y mantener la desigualdad, asi dividiento tambien por $\|x\|$ concluimos que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

$\mho$

Ejercicio 3.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a+\delta \end{pmatrix},$$

$a > 0$ fijo, $\delta > 0$ variable.

(a) Obtenga el número de condición de A. Para valores de δ muy pequeños o muy grandes, ¿podemos afirmar que el sistema $Ax = b$ está mal condicionado? Justifique su respuesta.

Solución. Calcularemos $\mathcal{K}_\infty(A)$, para esto, primero calculamos las normas de A y A^{-1}:

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|a| + |a|, |a| + |a+\delta|\} = 2a + \delta$$

Tenemos que $\det(A) = a(a+\delta) - a^2 = a\delta$, por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{a\delta}\begin{pmatrix} a+\delta & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$$

Así

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{a\delta}\,\text{máx}\{|a+\delta| + |a|, |-a| + |a|\} = \frac{2a+\delta}{a\delta} = \frac{2}{\delta} + \frac{1}{a}$$

De esta manera, el número de condición de A es:

$$\mathcal{K}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2a+\delta)\left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{a}\right) = \frac{4a}{\delta} + \frac{\delta}{a} + 4$$

Si consideramos $\mathcal{K}$ como una función de δ, podemos ver que:

$$\lim_{\delta \to 0} K_\infty(\delta) = \lim_{\delta \to 0} \frac{4a}{\delta} + \frac{\delta}{a} + 4 = \infty$$

y además

$$\lim_{\delta \to \infty} K_\infty(\delta) = \lim_{\delta \to \infty} \frac{4a}{\delta} + \frac{\delta}{a} + 4 = \infty$$

Con lo cual podemos concluir que para valores muy pequeños o muy grandes de δ el problema está mal condicionado. Otra forma de analizarlo es ver que si δ es muy pequeño, $a + \delta$ es muy cercano a a, con lo cual la matriz A está muy cerca de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

La cual es no invertible.

Para ver qué sucede cuando δ es muy grande, usaremos que $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(A^{-1})$. Note que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} + \frac{1}{a} & -\frac{1}{\delta} \\ -\frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$$

Así, cuando δ es muy grande, la matriz A^{-1} está muy cerca de la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La cual tampoco es invertible.

(b) ¿Existe algún valor de δ que haga óptimo el número de condición de A? ¿Cuál es este número de condición?

Solución. En el numeral anterior obtuvimos que $K_\infty = \frac{4a}{\delta} + \frac{\delta}{a} + 4$, el cual, al ser considerado como función en términos de δ es una función diferenciable, por lo tanto solo necesitamos encontrar sus puntos críticos (si los tiene) y analizar el signo de la derivada al rededor de ellos. Al derivar obtenemos que

$$\mathcal{K}'_\infty(\delta) = \frac{1}{a} - \frac{4a}{\delta^2}$$

Igualando a 0 y multiplicando por el común denominador, llegamos a:

$$4a^2 = \delta^2$$

Como a y δ son positivos, el punto crítico de $\mathcal{K}_\infty(\delta)$ es $\delta = 2a$. Ahora veamos el signo de $\mathcal{K}_\infty$ al rededor de $2a$:

Si $0 < \delta < 2a$, entonces

$$\begin{aligned} \delta^2 &< 4a^2 \\ \frac{1}{\delta^2} &> \frac{1}{4a^2} \\ \frac{4a}{\delta^2} &> \frac{1}{a} \\ 0 &> \frac{1}{a} - \frac{4a}{\delta^2} = \mathcal{K}'_\infty(\delta) \end{aligned}$$

Ahora, si $\delta > 2a$, entonces

$$\begin{aligned} \delta^2 &> 4a^2 \\ \frac{1}{\delta^2} &< \frac{1}{4a^2} \\ \frac{4a}{\delta^2} &< \frac{1}{a} \\ 0 &< \frac{1}{a} - \frac{4a}{\delta^2} = \mathcal{K}'_\infty(\delta) \end{aligned}$$

Así, concluimos que $\mathcal{K}_\infty$ es decreciente en el intervalo $(0, 2a)$ y creciente en $(2a, \infty)$, por lo tanto $\mathcal{K}_\infty$ alcanza un mínimo en $\delta = 2a$, es decir, $2a$ es el valor que hace óptimo el número de condición de A. Este número de condición es:

$$\frac{4a}{2a} + \frac{2a}{a} + 4 = 2 + 2 + 4 = 8$$

Ejercicio 4.

Al aproximar una función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mediante un polinomio $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, el error de aproximación E se mide en la norma L^2, es decir:

$$E^2 := \|p - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 [p(t) - f(t)]^2 \, dt.$$

(a) Muestre que la minimización del error $E = E(a_0, \ldots, a_n)$ conduce a un sistema de ecuaciones lineales $H_n a = b$, donde:

$$b = [b_0, \ldots, b_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad b_i = \int_0^1 f(t) t^i \, dt, \quad i = 0, \ldots, n,$$

y H_n es la matriz de Hilbert de orden n, definida como:

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i + j + 1}, \quad i, j = 0, \ldots, n.$$

El vector a representa los coeficientes del polinomio p.

Demostración. Sea $p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$, note que

$$\begin{aligned} E^2(a_0, \ldots, a_n) &= \int_0^1 (p(t) - f(t))^2 \, dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j - f(t) \right)^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^j \right)^2 dt - 2 \int_0^1 f(t) \sum_{j=0}^{n} a_j t^j dt + \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Note que esta función depende de los coeficientes, por lo tanto para minimizar el error podemos derivar parcialmente con respecto a a_k, $0 \leq k \leq n$ e igualar a 0. Derivando obtenemos que

$$\frac{\partial E^2}{\partial a_k} = 2 \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} a_j t^{k+j} \right) dt - 2 \int_0^1 f(t) t^k dt = 0,$$

despejando de esta ecuación obtenemos que

$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{n} a_j t^{j+k} dt = \sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 t^{j+k} dt = \int_0^1 f(t)t^k dt,$$

más aún, como $\int_0^1 t^{k+j} dt = \dfrac{1}{k+j+1} = (H_n)_{k,j}$, obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (H_n)_{k,j} = (H_n)_k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \int_0^1 f(t)t^k dt = b_k,$$

donde $(H_n)_k$ denota la k—ésima fila de la matriz (H_n), que es lo mismo que $H_n a = b$.

□

(b) Muestre que H_n es simétrica y definida positiva.

Demostración. Note que la simetría es inmediata de que

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j+1} = \frac{1}{j+i+1} = (H_n)_{j,i}.$$

Para ver que la matriz es definida positiva note que

$$\begin{aligned}
x^T H_n x &= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j x_i}{i+j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_j x_i \int_0^1 t^i t^j dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} x_i t^i \sum_{j=0}^{n} x_j t^j dt \\
&= \left\| \sum_{j=0}^{n} x_j t^j \right\|_{L^2}^2 > 0
\end{aligned}$$

□

(c) Solucione el sistema $H_n x = b$, donde b tiene componentes $b_i = 1/(n+i+1)$, para $i = 0, \ldots, n$. Para esto, use las factorizaciones LU ($[L, U] = \mathrm{lu}(H)$) y Cholesky ($L = \mathrm{chol}(H)$). Luego resuelva los dos sistemas triangulares.

Solución. El teorema de Stone-Weierstrass nos dice que los polinomios son densos en las funciones continuas, esto nos da que la aproximación que nos piden es posible, al truncar el número de coeficientes del polinomio vimos que el problema de optimizarlos se reduce a resolver el sistema $H_n x = b$, esto podemos programarlo en Matlab, Python, etc. Para este caso nosotros hemos hecho el trabajo en ambos lenguajes con el propósito de comparar resultados, antes de presentar los códigos en Matlab observemos que

$$b_i = \frac{1}{n+i+1} = \int_0^1 f(t)t^i dt,$$

y por lo tanto $f(t) = t^n$, en efecto estamos aproximando el polinomio t^n por polinomios, así pues, esperaríamos una solución numérica del estilo $a = (0, \ldots, 1)^T$. Para el caso de la factorización LU implementamos

```
    n = 10;
    H = hilb(n); %Genera la matriz de Hilbert de orden n
    b = zeros(n, 1); %Crea un vector con n ceros
    for i = 1:n
        b(i) = 1 / (i + n - 1); %Cambia  las entradas por las del
           ejercicio
    end
    [L, U] = lu(H);

    %Solucionamos los sistemas

    y = L \ b;
    a_LU = U \ y;

    disp(a_LU')
```

En el caso de la factorización de Cholesky

```
    n = 10;
    H = hilb(n);
    b = zeros(n, 1);
    for i = 1:n
        b(i) = 1 / (i + n - 1);
    end
    L = chol(H);
    y = L' \ b;
    a_LU = L \ y;
    disp(a_LU')
```

En ambos casos tomamos un tamaño $n = 10$ para probar el algoritmo, en donde la factorización LU nos arrojó el resultado $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ y la factorización de Cholesky nos dió el resultado

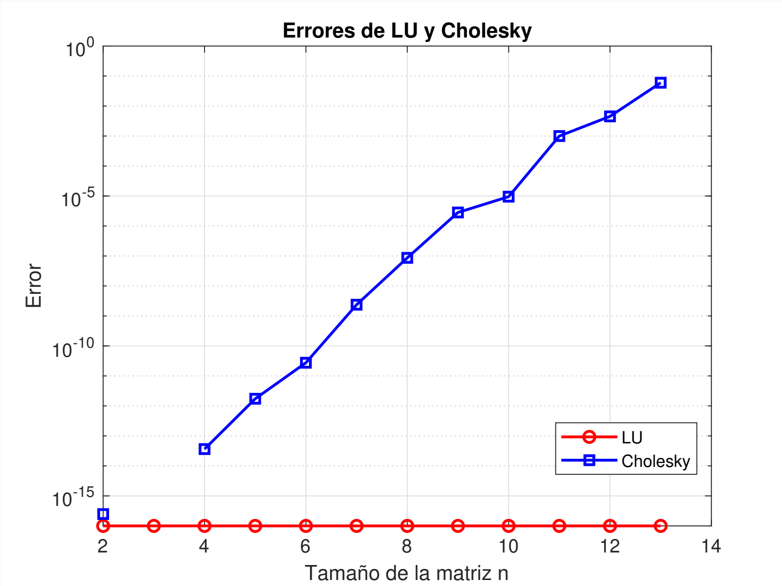
$$x = \begin{bmatrix} 4{,}4438 \times e^{-11} \\ -3{,}8598 \times e^{-9} \\ 8{,}2505 \times e^{-8} \\ -7{,}5194 \times e^{-7} \\ 3{,}5931 \times e^{-6} \\ -9{,}8904 \times e^{-6} \\ 1{,}6243 \times e^{-5} \\ -1{,}5708 \times e^{-5} \\ 8{,}2514 \times e^{-6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Para ambos métodos, ¿qué tan precisas son las soluciones numéricas $\hat{x}_{\text{approx}}$? Tabule los errores de la solución:

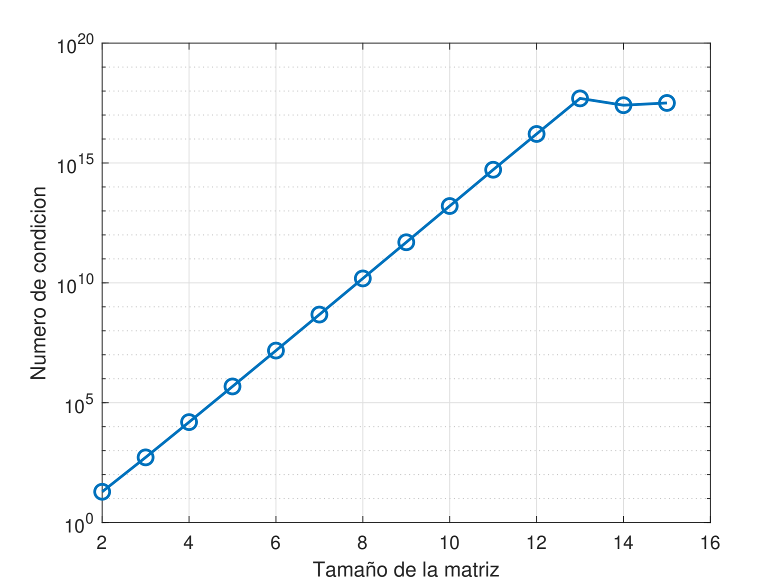
$$e(n) = \|\hat{x}_{\text{approx}} - x_{\text{exact}}\|$$

como una función de $n = 2, \ldots, 15$. Note que $x_{\text{exact}} = (0, \ldots, 1)^T$. Puede graficar los errores en función de n utilizando la función `semilogy` de Matlab. Explique en detalle los resultados.

Solución. Implementamos el código en Matlab y obtuvimos los siguientes resultados para $n \leq 13$,



cuando $n \geq 14$ Matlab falla al realizar Cholesky, detecta que la matriz de Hilbert no es definida positiva, pero ya demostramos que sí lo es, esto ocurre ya que el número de condición de la matriz de Hilbert crece rápidamente confirme el tamaño de la matriz aumenta, como se evidencia en la siguiente figura



por ejemplo para $n = 6$ tenemos que $\mathcal{K}(H) > 10^5$, esto en el método de Cholesky genera inconvenientes dado que la matriz debe ser definida positiva, como el método de factorización LU no tiene esta restricción entonces es más estable numéricamente para estos valores. El código usado para grafica el número de condición lo adjuntamos también en el cuaderno de Jupyter.

Ejercicio 5.

(a) Simplifique el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema lineal $Ax = b$ donde A es una matriz tridiagonal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Solución. La idea del algoritmo simplificado es que al realizar eliminación de Gauss no es necesario calcular los elementos debajo de la diagonal, además en cada iteración del método, solo nos quedan dos elementos no nulos por cada fila, el elemento en la diagonal $a_{i,i}$ y $a_{i,i+1}$, por lo tanto en la siguiente iteración solo debemos calcular el cambio realizado al elemento $a_{i+1,i+1}$, a saber, el siguiente en la diagonal, ya que el otro término se vuelve cero.

Para dejarlo más claro presentaremos el algoritmo, teniendo en cuenta que debemos aplicar el método también al vector b.

1. Eliminación Gaussiana

- **Para** $i = 2, \ldots, n$:
  - Calcular el multiplicador:

$$m = \frac{a_{i-1,i}}{a_{i-1,i-1}}$$

- Actualizar la diagonal principal:

$$a_{i,i} \leftarrow a_{i,i} - m \cdot a_{i-1,i}$$

- Actualizar el vertor b:

$$b_i \leftarrow b_i - m \cdot b_{i-1}$$

2. Sustitución hacia atrás: Como la matriz solo tiene dos entradas por fila, el algoritmo se reduce a

- **Inicio**:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

- **Para** $i = n-1$ **hasta** 1:
  - Calcular:

$$x_i = \frac{b_i - a_{i,i+1} \cdot x_{i+1}}{a_{i,i}}$$

3. Retornamos:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(b) Considere la ecuación de Poisson con término fuente f en el intervalo $(0, 1)$:

$$-T''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

con condiciones de frontera $T(0) = T(1) = 0$. Aproximando la segunda derivada por diferencias finitas:

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2},$$

y discretizando en $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, con $n = 1/h$, obtenemos el sistema:

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

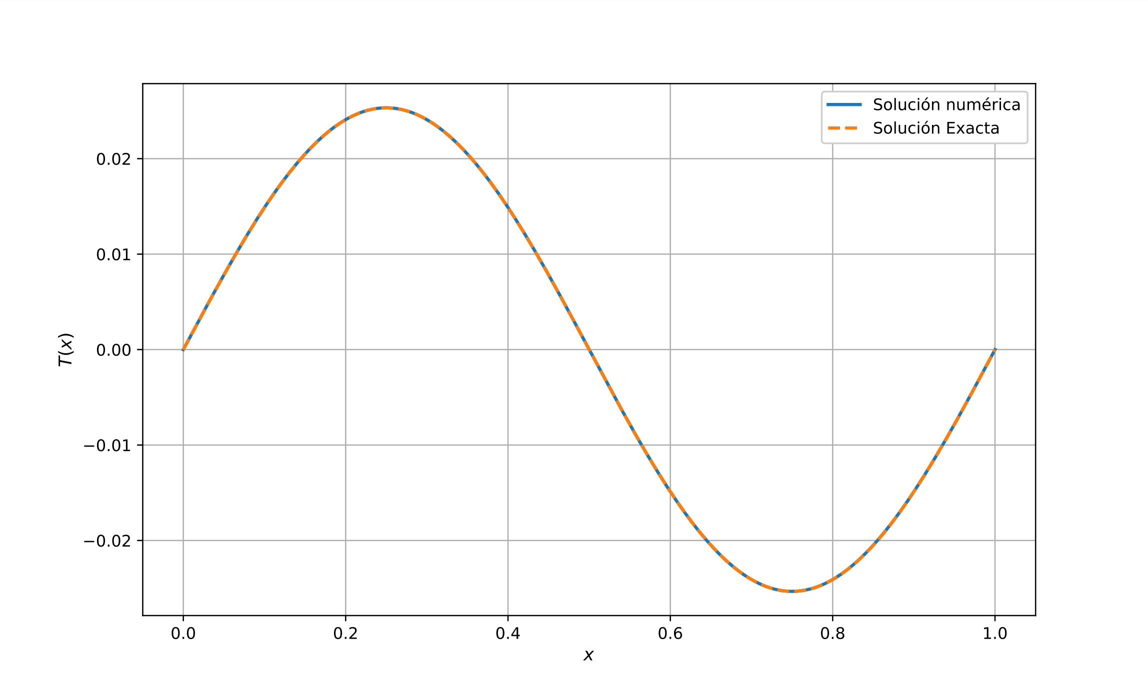
Escriba este sistema en la forma $AT = f$, donde A es una matriz tridiagonal. Resuelva el sistema para $n = 1000$ y $f(x) = \sin(2\pi x)$. Compare su solución con $T(x) = \sin(2\pi x)/(4\pi^2)$.

Solución. Primero escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial, obtenemos una matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, los términos T_0 y T_n los tratamos por aparte ya que son las condiciones de frontera. La solución numérica de la ecuación se obtiene de resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(h) \\ h^2 f(2h) \\ h^2 f(3h) \\ \vdots \\ h^2 f(nh - 2h) \\ h^2 f(nh - h) \end{bmatrix},$$

sabemos que la solución de la ecuación debe ser de clase $C^2_{\text{per}}([0,1])$ ya que $T(0) = T(1)$. Si $f(x) = \sin(2\pi x)$, podemos aplicar el algoritmo de eliminación de Gauss que hemos simplificado para matrices tridiagonales en el paso anterior.

Implementamos el algoritmo en python y comparamos con la solución exacta $T(x) = \sin(2\pi x)/(4\pi^2)$ usando matplotlib, obtuvimos



También obtuvimos el error máximo, $8{,}333350 \times 10^{-8}$, lo que nos dice que la solución es buena tomando como tamaño del paso $h = 1/1000$ en las diferencias finitas.