Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General
Taller III

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. *a*) Un G_δ-*conjunto* en un espacio X es un conjunto A que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X. Demuestra que en un espacio T_1 de primera numerabilidad, cada conjunto unitario es un G_δ-conjunto.

   Demostración. Sea $\{x\}$ un conjunto unitario arbitrario, como X es $1-$contable, entonces existe $B_x = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base contable para x, es claro que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, falta ver que dado $y \neq x$, $y \not\in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, como $y \neq x$, entonces existen V_x y V_y vecindades de x y y respectivamente tal que $y \not\in V_x$ y $x \not\in V_y$ ya que X es T_1, esto es nos da que exite B_i tal que $y \notin B_i$, lo que concluye el resultado. □

   b) Existe un espacio familiar en el cual cada conjunto unitario es un G_δ-conjunto, pero que no satisface el axioma de primera numerabilidad. ¿Cuál es?

   Solución. Este espacio es $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de cajas, este espacio no es $1-$contable ya que dado $x = (x_n)_n$ y una colección $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ de vecindades de x, podemos suponer que $U_i = \prod_n (a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$ donde $a_n^{(i)} < x_n < b_n^{(i)}$, tomando $c_n = \frac{a_n^{(n)} + x_n}{2}$ y $d_n = \frac{x_n + b_n^{(n)}}{2}$ se sigue que $V = \prod_n (c_n, d_n)$ es una vecindad de x, pero $U_n \not\subset V$ para cada n.

   Note ahora que dado $x = (x_n)_n$, tome $U_i = \prod_n \left(x_n - \frac{1}{i}, x_n + \frac{1}{i}\right)$ para cada i, en efecto $\bigcap_i U_i = \{x\}$

2. Demuestra que si X tiene una base numerable $\{B_n\}$, entonces toda base $\mathscr{C}$ de X contiene una base numerable para X. *[Sugerencia: Para cada par de índices n, m para los cuales sea posible, elige $C_{n,m} \in \mathscr{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.]*

   Demostración. Sea $x \in X$, ya que $\mathscr{B}$ es base, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m$, como $\mathscr{C}$ también es base, existe C tal que $x \in C \subseteq B_m$, aplicando nuevamente la definición de base, llegamos a que existe n tal que $x \in B_n \subseteq C \subseteq B_m$, denotemos entonces a este C por $C_{n,m}$, así, para $n, m \in \mathbb{N}$ podemos escoger $C_{n,m}$ de tal manera que $B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m$.

   Veamos que $\mathscr{C}' := \{C_{n,m} \in \mathscr{C} : n, m \in \mathbb{N}, B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m\}$ es una base contable para X. La primera propiedad se sigue directamente de como construimos $\mathscr{C}'$. Ahora sean $x \in X$, C_{n_1,m_1} y C_{n_2,m_2} tales que $x \in C_{n_1,m_1} \cap C_{n_2,m_2}$, como $C_{n_1,m_1} \cap C_{n_2,m_2}$ es abierto en X, existe B_{m_3} tal que $x \in B_{m_3} \subseteq C_{n_1,m_1} \cap C_{n_2,m_2}$, siguiendo el razonamiento anterior encontramos C_{n_3,m_3} tal que $x \in B_{n_3} \subseteq C_{n_3,m_3} \subseteq B_{m_3}$ de ésta manera $x \in C_{n_3,m_3} \subseteq C_{n_1,m_1} \cap C_{n_2,m_2}$, por lo tanto $\mathscr{C}'$ es una base para X.

   □

3. Sea X un espacio con una base numerable; sea A un subconjunto no numerable de X. Demuestra que hay una cantidad no contable de puntos de A que son de acumulación en A.

Demostración. Primero probaremos que el conjunto de puntos de acumulación A' de A, intersectado con A es no vacío: Asuma que $A' \cap A$ es vacío, luego dado $a \in A$ existe una vecindad V_a de a tal que $V_a \cap (A - \{a\}) = \emptyset$, de ésta manera la colección $\{V_a\}_{a \in A}$ es una colección no contable de abiertos disyuntos dos a dos, ya que X es 2-contable, tiene un subconjunto denso contable E, luego existe $x_a \in E$ tal que $x_a \in V_a$, pero como los V_a son disyuntos dos a dos, cada x_a debe ser distinto, es decir E es no contable, lo cual contradice que E es contable. Así, $A' \cap A \neq \emptyset$. Ahora asuma que $A' \cap A$ es contable; como X es 2-contable, en particular es 1-contable, luego por cada $y \in A'$ existe una sucesión $\{x_n^{(y)}\} \subseteq A$ que converge a y. De esta manera tenemos que

$$B = \bigcup_{y \in A' \cap A} \{x_n^{(y)}\} \subseteq A$$

es contable, pues es unión contable de conjuntos contables, por lo tanto $A - B$ es no contable, lo cual implica que tiene un punto de acumulación p que pertenece a $A - B$, en particular $p \in A \cap A'$ sin embargo $A \cap A' \subseteq B$, lo cual es una contradicción, luego $A \cap A'$ es no contable. □

4. Demuestra que todo espacio métrico compacto X tiene una base numerable. *[Sugerencia: Sea $\mathscr{A}_n$ un cubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.]*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere el cubrimiento $\mathscr{A}_n$ de las bolas de radio $1/n$, como X es compacto entonces A_n tiene un subcubrimiento finito, digamos $\mathscr{B}_n$, note que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$$

es una base contable ya que dado $x \in B(x,r)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r > \frac{1}{n}$ para todo $r > 0$ por la propiedad arquimediana, luego existe $B_{k_n} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{B}_i$ tal que $x \in B_{k_n} \subset B(x,r)$ □

5. a) Demuestra que todo espacio métrico con un subconjunto denso contable tiene una base contable.

   Demostración. Sea $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$, note que $B = \bigcup_{a \in A} B(a,r)$ tal que $r \in \mathbb{Q}$ es una base contable. □

   b) Demuestra que todo espacio métrico de Lindelöf tiene una base contable.

   Demostración. Considere el cobrimiento $\mathscr{A}_n = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in X\right\}$, como (X,d) es Lindelöf entonces $\mathscr{A}_n$ tiene un subcubrimiento contable, luego

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$$

   es un base contable ya que unión contable de contables es contable. □

6. Demuestra que $\mathbb{R}_\ell$ e I_0^2 no son metrizables.

Demostración. Ya que $\mathbb{R}_\ell$ es separable, pero no 2-contable, no puede ser métrico, pues en un espacio métrico estas dos propiedades son equivalenetes.

Ahora, consideremos I_0^2, por el punto anterior tenemos que en un espacio métrico ser Lindelöf y 2-contable son propiedades equivalentes. De esta manera, si I_0^2 fuera metrizable, como es Lindelöf, sería 2-contable, luego todo subespacio de I_0^2 sería 2-contable y por lo tanto Lindelöf. Sin embargo, el subespacio $[0,1] \times (0,1)$ no es Lindelöf, luego I_0^2 no puede ser metrizable. □

7. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface S_Ω? ¿Qué ocurre con $\bar{S}_\Omega$?

8. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme?

   Ya que $\mathbb{R}^\omega$ es métrico, es 1-contable. No es separable pues el conjunto $\{0,1\}^\omega$ es discreto en $\mathbb{R}^\omega$. Como en espacios métricos ser 2-contable, separable y Lindelöf son equivalentes, éste esapcio solo cumple el primer axioma.

9. Sea A un subespacio cerrado de X. Demuestre que si X es Lindelöf, entonces A es Lindelöf. Muestre con un ejemplo que si X tiene un subconjunto denso numerable, A no necesariamente tiene un subconjunto denso numerable.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ un cubrimiento de A, como A es cerrado entonces $\mathscr{C} \cup A^c$ es un cubrimiento de X, como X es Lindelöf entonces tiene un subcubrimiento contable, digamos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup A^C = X,$$

con $C_i \in \mathscr{C}$, luego $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ □

El ejemplo en cuestión es el plano de Sorgenfrey: Como el plano es producto finito de espacios separables, es separabe, ahora considere la recta L dada por la ecuación $y = -x$, luego, si consideramos el abierto $U = [a,1) \times [-a,1)$, vemos que $U \cap L = \{a\}$, por tanto los puntos son abiertos en L y así, L tiene la topología discreta, por tanto no tiene un subconjunto denso contable.

10. Demuestra que si X es un producto numerable de espacios con subconjuntos densos numerables, entonces X tiene un subconjunto denso numerable.

Demostración. Sea $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ tal que para cada X_i existe D_i contable denso en X_i. Ahora, sea $x \in X$ fijo pero arbitrario, $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y sea $K \subset \mathbb{N}$ finito, considere B_K el subespacio de X que consiste de los puntos $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $y_i = x_i$ para $i \in \mathbb{N} - K$ y $y_i = w_i$ para $i \in K$ donde $w_i \in D_i$, note que B_K es contable, pues es isomorfo a $\prod_{i\in K} D_i$ el cual es contable por ser producto finito de conjuntos contables. Ahora sea

$$D = \bigcup_{\substack{K \subset \mathbb{N} \\ |K| < |\mathbb{N}|}} B_K$$

D es contable pues es unión contable de conjuntos contables. D es denso en X: en efecto, sea $p \in X$ y $U = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$ una vecindad básica de p, con esto tenemos que $U_i = X_i$ para todos salvo finitos naturales i, además, en los índices restantes $D_i \cap U_i \neq \emptyset$ pues $\overline{D_i} = X_i$, de esta manera existe $K \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que existe $y \in B_K \cap U$, luego $U \cap D \neq \emptyset$, por lo tanto D es denso en X. □

11. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Demuestra que si X es Lindelöf, o si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces $f(X)$ satisface la misma condición.

Demostración. Sea $\{B_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento de $f(X)$, $A_\alpha = f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto en X ya que f es continua y $\{A_\alpha\}_\alpha$ cubre a X, como X es Lindelöf, entonces existe un subcubrimiento contable $\left\{f^{-1}(B_{\alpha_i})\right\}_{i\in\mathbb{N}}$, luego $\{(B_{\alpha_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento contable de $f(X)$.

Suponga que X tiene un subconjunto denso contable D, como f es continua entonces

$$f(\overline{D}) = f(X) \subset \overline{f(D)},$$

esto nos da que $f(D)$ es denso en $f(X)$ y como D es contable entonces $F(D)$ también. □

12. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y abierta. Demuestra que si X satisface el primer o segundo axioma de numerabilidad, entonces $f(X)$ satisface el mismo axioma.

Demostración. i) Sea X un espacio 1-contable, luego dado $x \in X$ existe una base contable de vecindades de x, $\mathscr{B}_x = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,. Veamos que $\mathscr{V}_{f(x)} = \{f[B_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base contable de vecindades de $f(x)$: ya que f es abierta $f[B_i]$ es abierto en $f(X)$, más aún como $x \in B_i$, $f[B_i]$ es una vecindad de $f(x)$. Ahora, sea V una vecindad de $f(x)$, por continuidad, existe una vecindad U de x tal que $f[U] \subseteq V$, además, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i \subseteq U$, luego $f[B_i] \subseteq f[U] \subseteq V$, es decir $f[B_i] \subseteq V$. De esta manera $\mathscr{V}_{f(x)}$ es una base contable de vecindades de $f(x)$ y así $f(X)$ es 1-contable.

ii) Sea X un espacio 2-contable, luego tiene una base contable $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Considere $\mathscr{V} = \{f[B_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ y sea $y \in f(X)$, por definición existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y como $\mathscr{B}$ es base, existe B_i tal que $x \in B_i$ y por tanto $y \in f[B_i]$. Ahora sean $f[B_{i_1}], f[B_{i_2}] \in \mathscr{V}$, por propiedades de la imagen inversa, se tiene que $f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]] = f^{-1}[f[B_{i_1}]] \cap f^{-1}[f[B_{i_2}]]$, como $B_{i_1} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}]]$ y $B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_2}]]$ tenemos que $B_{i_1} \cap B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]]$ y como $\mathscr{B}$ es base, existe B_{i_3} tal que $B_{i_3} \subseteq B_{i_1} \cap B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]]$, de esta manera $f[B_{i_3}] \subseteq f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]$, con lo cual concluimos que $\mathscr{V}$ es base para $f(X)$.

□

13. Demuestre que si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces toda colección de conjuntos abiertos disjuntos en X es numerable.

Demostración. Sea D el conjunto denso numerable, dada una colección de conjuntos abiertos disjuntos $\mathscr{C}$, tenemos que para cada $C \in \mathscr{C}$ existe un $x_C \in C \cap D$. Note que la función

$$\begin{aligned} f : \mathscr{C} &\longrightarrow D \\ C &\longmapsto f(C) = x_C \end{aligned}$$

es inyectiva ya que si $U, V \in \mathscr{C}$ son tal que $U \neq V$, entonces $U \cap V = \emptyset$ y por tanto $x_U \neq x_V$. Esto nos da que $|\mathscr{C}| \leq |D| \leq \aleph_0$ □

14. Demuestra que si X es Lindelöf y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es Lindelöf.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ un cubrimiento por abiertos de $X \times Y$, como Y es compacto tenemos que para cada $x \in X$, $\{x\} \times Y$ es compacto y $\mathscr{C}$ lo cubre, luego existe un subcubrimiento finito $C_x = \{C_i\}_{i \leq n}$ además $\bigcup C_x$ es un abierto que contiene a $\{x\} \times Y$, por lo tanto, aplicando el lema del tubo, existe $W_x \subseteq X$ abierto tal que $W_x \times Y \subseteq \bigcup C_x$, así $\{W_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento por abiertos de X, ya que X es Lindelöf obtenemos un subcubrimiento contable $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, ahora, como para cada $W_i \times Y$ existe un subcubrimiento finito de $\mathscr{C}$, la unión de estos cubrimientos cubre a $X \times Y$, y como es unión contable de conjuntos finitos, es contable. □

15. Considera $\mathbb{R}^I$ con la métrica uniforme, donde $I = [0, 1]$. Sea $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ el subespacio de funciones continuas. Demuestra que $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ tiene un subconjunto denso numerable, y por lo tanto una base numerable.

    [Sugerencia: Considera aquellas funciones continuas cuyos gráficos consisten en un número finito de segmentos de línea con extremos racionales.]

16. *a*) Demuestra que el espacio producto $\mathbb{R}^I$, donde $I = [0, 1]$, tiene un subconjunto denso numerable.

    b) Demuestra que si J tiene cardinalidad mayor que $\mathscr{P}(\mathbb{Z}_+)$, entonces el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no tiene un subconjunto denso numerable.

    [Sugerencia: Si D es denso en $\mathbb{R}^J$, define $f : J \to \mathscr{P}(D)$ por la ecuación $f(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b))$, donde (a, b) es un intervalo fijo en $\mathbb{R}$.]

*17. Considera $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de la caja. Sea $\mathbb{Q}^\infty$ el subespacio que consiste en secuencias de racionales que terminan en una cadena infinita de ceros. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface este espacio?

*18. Sea G un grupo topológico de primera numerabilidad. Demuestra que si G tiene un subconjunto denso numerable, o es Lindelöf, entonces G tiene una base numerable.

    [Sugerencia: Sea $\{B_n\}$ una base numerable en e. Si D es un subconjunto denso numerable de G, demuestra que los conjuntos dB_n, para $d \in D$, forman una base para G. Si G es Lindelöf, elige para cada n un conjunto numerable C_n tal que los conjuntos cB_n, para $c \in C_n$, cubran G. Demuestra que cuando n recorre $\mathbb{Z}_+$, estos conjuntos forman una base para G.]