

# Taller IV

Bourbaki

6 de diciembre de 2024

1. Siendo  $a, b, c, z_0$  constantes complejas, demostrar:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} c = c; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0); \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0; \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$$

**Solucio:**  $\lim_{z \rightarrow z_0} c = c$ , note que dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta = \epsilon$  lo que le de la gana

$$|f(z) - f(z_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b$ , eso es trivial allí. Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$ , note que si  $|z - z_0| < \delta$  entonces

$$|f(z) - f(z_0)| = |az + b - az_0 - b| = |a||z - z_0| < |a|\delta = \epsilon.$$

Luego viene uno que usted tiene que hacer cositas pero pues no deja de ser una maricada,  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$ . Usted primero agarre  $\delta_1 \leq 1$ , note que si

$$|z| - |z_0| \leq |z - z_0| < \delta \leq 1$$

entonces

$$|z + z_0| \leq |z| + |z_0| < 1 + 2|z_0|$$

entonces ponga  $\delta_2 = \frac{\epsilon}{1+2|z_0|}$  y su delta es  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , y eso le sirve para todo epsilon porque pille:

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| < \epsilon$$

y por eso es que uno debe parar bolas en diferencial.

$\lim_{z \rightarrow z_0} \Re(z) = \Re(z_0)$ , sea  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , note que para todo  $\epsilon > 0$

$$|\Re(z) - \Re(z_0)| = |\Re(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \delta^2 = \epsilon$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$ , sea  $\delta = \epsilon$ , para todo  $\epsilon > 0$ , tenemos que:

$$|\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \epsilon.$$

Para el último tome  $\delta = \epsilon$ , note que para todo  $\epsilon > 0$  tenemos que

$$\left| \frac{\bar{z}^2}{z} \right| = \frac{|\bar{z}||\bar{z}|}{|z|} = |\bar{z}| = |z| \leq \epsilon.$$

2. Calcular:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}; \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3}; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{z - 1}$$

Ahí dice calcular, entonces eso da 4, infinito y el otro también, si no me cree pues hagalo ud

3. Demostrar que si  $f$  es continua y no nula en un punto  $z_0$ , entonces  $f(z) \neq 0$  para todo  $z$  en alguna vecindad de  $z_0$  ( $V_{z_0}$ ).

*Demostración.* Suponga que no, ahí van a pasar cosas, lo que pasa allí es que existe  $z \in B(z_0, \delta)$  tal que  $f(z) = 0$  tome  $\epsilon = |f(z_0)|$ , como en esa bola la función es continua entonces

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0)| < \epsilon = |f(z_0)|$$

si pilla que le contradice cosas? □

4. Sea  $A \subset \mathbb{C}$  un conjunto compacto. Mostrar que si  $f$  es una función continua definida sobre  $A$ , entonces  $f(A)$  es compacto.

*Demostración.* Sea  $\{z_n\}$  una sucesión en  $A$ , como  $A$  es compacto entonces tiene una subsucesión convergente, digamos  $\{z_k\}$  que converge a  $z$ , esto que dado  $\delta > 0$ , existe un  $K$  tal que si  $k > K$  entonces  $|z_k - z| < \delta$ , por la continuidad  $|f(z_k) - f(z)| < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ . Acabó porque eso le dice que allá la sucesión  $f(z_k)$  converge. □

5. Sea  $A \subset \mathbb{C}$  un conjunto compacto, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Demostrar que  $f$  tiene un máximo sobre  $A$ .

*Demostración.* Facilito, como  $f$  es continua y  $A$  es compacto,  $f[A]$  es compacto en  $\mathbb{R}$ , y como en  $\mathbb{R}$  todo conjunto compacto es cerrado y acotado, pues por la completez,  $f[A]$  tiene supremo, además  $\sup\{f[A]\} \in f[A]$  pues  $f[A]$  es cerrado, en otras palabras,  $f[A]$  tiene máximo. □

6. Sea  $A \subset \mathbb{C}$  un conjunto compacto, y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Demostrar que  $f$  es uniformemente continua.

*Demostración.* Suponga que no, luego existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $\delta_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  existen  $z_n, w_n \in A$  tales que  $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$  pero  $|f(z_n) - f(w_n)| > \epsilon$ .

Como  $A$  es compacto y  $\{z_n\} \subseteq A$ , existe una subsucesión  $\{z_i\}_{i \in I}$  con  $I \subseteq \mathbb{N}$  tal que dado  $\epsilon$ , existe  $N \in I$  tal que si  $i > N$  entonces  $|z_i - z| < \frac{\epsilon}{3}$  para algún  $z \in A$ .

Ya que a cada  $z_n$  le corresponde un  $w_n$ , tenemos la subsucesión  $\{w_i\}_{i \in I} \subseteq A$  y de nuevo por la compacidad de  $A$ , obtenemos una subsucesión  $\{w_j\}_{j \in J}$  con  $J \subseteq I$  de manera que existe  $M \in J$  tal que si  $j > M$  entonces  $|w_j - w| < \frac{\epsilon}{3}$ . También tenemos que existe  $L \in J$  tal que si  $j > L$ , entonces  $\frac{1}{j} < \frac{\epsilon}{3}$ .

Aplicando desigualdad triangular dos veces y tomando  $K = \max\{N, M, L\}$ , tenemos que si  $j > 0$ , entonces:

$$|z - w| \leq |z - z_j| + |z_j - w_j| + |w_j - w| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Así, tenemos que  $z = w$ .

Como  $f$  es continua, tenemos que si  $j > K$ ,  $|f(z_j) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$  y  $|f(w_j) - f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$ , en conclusión:

$$|f(z_j) - f(w_j)| \leq |f(z_j) - f(z)| + |f(z) - f(w)| + |f(w) - f(w_j)| = |f(z_j) - f(z)| + |f(w) - f(w_j)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo cual contradice que  $|f(z_n) - f(z_w)| > \epsilon$ .

□

Esta prueba es una porquería pero así tocaba hacerla entonces bueno, fecho.