Taller III

Bourbaki

18 de noviembre de 2024

1. Demuestre que $A \subset \mathbb{C}$ es compacto si y solo si es acotado y cerrado.

   Demostración. Supongamos que A es compacto, si A no es acotado entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in A$ tal que $|z_n| > n$, por tanto $\{z_n\}$ no tiene punto de acumulación ya que... suponga que z_0 es un punto de acumulación, sea $m > 2|z_0|$, es claro que $|z_0| > 0$ ya que en caso contrario $z_0 = 0$, así pues $|z_n - z_0| = |z_n| > n$ y por lo tanto z_0 no sería punto de acumulación. En este caso $|z_m - z_0| \geq |z_m| - |z_0| > 2|z_0| - |z_0| = |z_0|$, contradice que ese coso es punto límite. Entonces es acotado.

   Sea $z_0 \in \overline{A}$, dado n, existe $z_n \in A$ tal que $|z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}$, así $\{z_n\}$ converge a z_0. Como A es compacto existe una subsucesión convergente en A, es claro que este límite debe ser z_0, así $z_0 \in A$, con lo cual A es cerrado.

   El recíproco tengo pereza

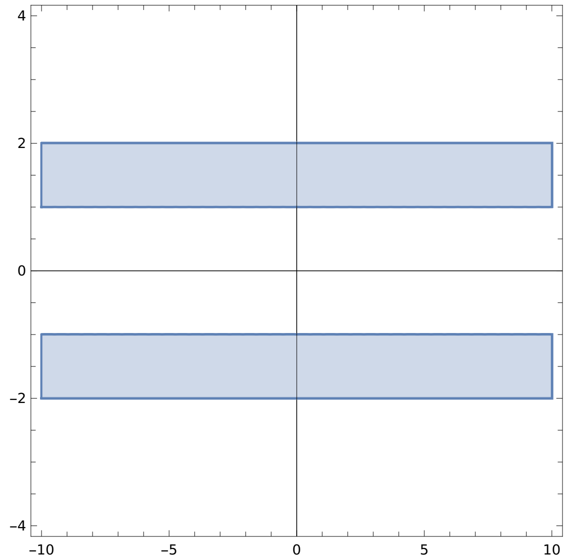
   $\square$

2. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Sean $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ una sucesión de subconjuntos de K no vacíos, tales que $K_n \supseteq K_{n+1}$. Demostrar que la intersección de todos los $K_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ es no vacía.

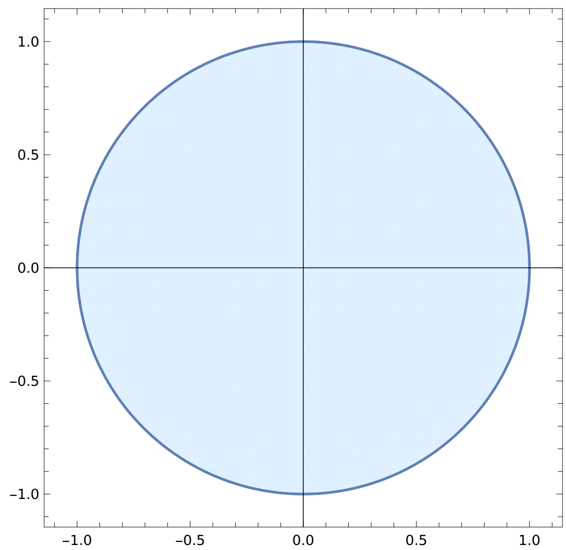
   Pues lo que pasa es que eso siempre es fácil allí porque usted llega y coge el conjunto $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$, note que ese conjunto está contenido en $[0, 1]$ que es compacto, y pues si usted considera la intersección de esos coyos, eso le da vacío siono?

3. Encontrar la imagen de las regiones:

$$1 < |\operatorname{Im}(z)| \leq 2$$



$$|z| < 1$$



bajo las aplicaciones:

a) $f(z) = z^2$

Sea $z = x + yi$, entonces $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, sean $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ las funciones parte real e imaginaria, esto es

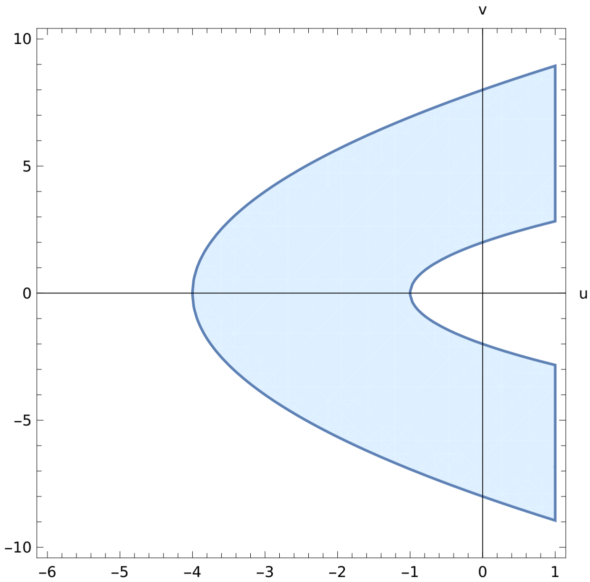
$$x = \frac{v}{2y}$$

reemplazando en la ecuación de arriba se obtiene que

$$u = \frac{v^2}{4y^2} - y^2$$

si uno reemplaza en -2 y -1 obtiene las ecuaciones de dos parábolas, pero pues usted tiene que girar la cabeza para verlo bien

$$u = \frac{v^2}{16} - 4 \quad u = \frac{v^2}{4} - 1$$



Para el caso $|z| < 1$ nos deja la misma bola porque dado $z = re^{i\theta}$ entonces $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ por lo que nos queda la misma circunferencia, dado que si $0 \leq r < 1$ entonces $0 \leq r^2 < 1$

b) $f(z) = \dfrac{2z + i}{z + 1}$

Esto lo irá a hacer su madre y con su madre me refiero al Santiago xd.

4. Sea $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$, hallar la imagen por f de:

   a) El semiplano superior.

   b) La semirecta $it; t \geq 0$.

   c) La recta $it; t \in \mathbb{R}$.

   d) $|z - 1| = 1$.

   e) $|z| = 2; \mathrm{Im}(z) \geq 0$.

5. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \mathrm{Im}(z) \leq \alpha\}$. Si $f(z) = e^z$, hallar $f(A)$.

6. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Si $f(z) = \sin(z)$, hallar $f(A)$.

7. Determine completamente la proyección estereográfica (que lleva la esfera de Riemann en el plano complejo). Es decir, hallar explícitamente T y T^{-1}.

8. Demostrar que la proyección estereográfica preserva círculos. La imagen directa o inversa de una circunferencia es una circunferencia.