

Mateo Andrés Manosalva Amarís

Sergio Alejandro Bello Torres

1. a) Un G_δ -conjunto en un espacio X es un conjunto A que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X . Demuestra que en un espacio T_1 de primera numerabilidad, cada conjunto unitario es un G_δ -conjunto.
 b) Existe un espacio familiar en el cual cada conjunto unitario es un G_δ -conjunto, pero que no satisface el axioma de primera numerabilidad. ¿Cuál es?
 La terminología proviene del alemán. La “G” representa “Gebiet,” que significa “conjunto abierto,” y la “ δ ” representa “Durchschnitt,” que significa “intersección.”
2. Demuestra que si X tiene una base numerable $\{B_n\}$, entonces toda base \mathcal{C} de X contiene una base numerable para X . [Sugerencia: Para cada par de índices n, m para los cuales sea posible, elige $C_{n,m} \in \mathcal{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.]

Demostración. Sea $x \in X$, ya que \mathcal{B} es base, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m$, como \mathcal{C} también es base, existe C tal que $x \in C \subseteq B_m$, aplicando nuevamente la definición de base, llegamos a que existe n tal que $x \in B_n \subseteq C \subseteq B_m$, denotemos entonces a este C por $C_{n,m}$, así, para $n, m \in \mathbb{N}$ podemos escoger $C_{n,m}$ de tal manera que $B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m$.

Veamos que $\mathcal{C}' := \{C_{n,m} \in \mathcal{C} : n, m \in \mathbb{N}, B_n \subseteq C_{n,m} \subseteq B_m\}$ es una base contable para X . La primera propiedad se sigue directamente de como construimos \mathcal{C}' . Ahora sean $x \in X$, C_{n_1, m_1} y C_{n_2, m_2} tales que $x \in C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$, como $C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$ es abierto en X , existe B_{m_3} tal que $x \in B_{m_3} \subseteq C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$, siguiendo el razonamiento anterior encontramos C_{n_3, m_3} tal que $x \in B_{n_3} \subseteq C_{n_3, m_3} \subseteq B_{m_3}$ de ésta manera $x \in C_{n_3, m_3} \subseteq C_{n_1, m_1} \cap C_{n_2, m_2}$, por lo tanto \mathcal{C}' es una base para X .

□

3. Sea X un espacio con una base numerable; sea A un subconjunto no numerable de X . Demuestra que incontablemente muchos puntos de A son puntos de acumulación de A .

Demostración. Primero probaremos que el conjunto de puntos de acumulación A' de A es no vacío: Asuma que A' es vacío, luego dado $x \in X$ existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \cap (A - \{x\}) = \emptyset$, de ésta manera la colección $\{V_a\}_{a \in A}$ es una colección no contable de abiertos disjuntos dos a dos, ya que X es 2-contable, tiene un subconjunto denso contable E , luego existe $x_a \in E$ tal que $x_a \in V_a$, pero como los V_a son disjuntos dos a dos, cada x_a debe ser distinto, es decir E es no contable, lo cual contradice que E es contable. Así, $A' \neq \emptyset$. Ahora asuma que A' es contable, ya que X es 2-contable, en particular es 1-contable, luego por cada $y \in A'$ existe una sucesión $\{x_n^{(y)}\} \subseteq A$ que converge a y . De esta manera tenemos que

$$B = \bigcup_{y \in A'} \{x_n^{(y)}\} \subseteq A$$

es contable, pues es unión contable de conjuntos contables, por lo tanto $A - B$ es no contable, lo cual implica que tiene un punto de acumulación. □

4. Demuestra que todo espacio métrico compacto X tiene una base numerable. [Sugerencia: Sea \mathcal{A}_n un recubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.]

5. a) Demuestra que todo espacio métrico con un subconjunto denso numerable tiene una base numerable.
b) Demuestra que todo espacio métrico de Lindelöf tiene una base numerable.
6. Demuestra que \mathbb{R}_ℓ e I_0^2 no son metrizablees.

Demostración. Ya que \mathbb{R}_ℓ es separable, pero no 2-contable, no puede ser métrico, pues en un espacio métrico estas dos propiedades son equivalentes.

Ahora, consideremos I_0^2 , por el punto anterior tenemos que en un espacio métrico ser Lindelöf y 2-contable son propiedades equivalentes. De esta manera, si I_0^2 fuera metrizable, como es Lindelöf, sería 2-contable, luego todo subespacio de I_0^2 sería 2-contable y por lo tanto Lindelöf. Sin embargo, el subespacio $[0, 1] \times (0, 1)$ no es Lindelöf, luego I_0^2 no puede ser metrizable. \square

7. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface S_Ω ? ¿Qué ocurre con \bar{S}_Ω ?
8. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface \mathbb{R}^ω con la topología uniforme?
Ya que \mathbb{R}^ω es métrico, es 1-contable. No es separable pues el conjunto $\{0, 1\}^\omega$ es discreto en \mathbb{R}^ω . Como en espacios métricos ser 2-contable, separable y Lindelöf son equivalentes, éste espacio solo cumple el primer axioma.
9. Sea A un subespacio cerrado de X . Demuestra que si X es Lindelöf, entonces A es Lindelöf. Muestra con un ejemplo que si X tiene un subconjunto denso numerable, A no necesariamente tiene un subconjunto denso numerable.
10. Demuestra que si X es un producto numerable de espacios con subconjuntos densos numerables, entonces X tiene un subconjunto denso numerable.
11. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Demuestra que si X es Lindelöf, o si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces $f(X)$ satisface la misma condición.
12. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y abierta. Demuestra que si X satisface el primer o segundo axioma de numerabilidad, entonces $f(X)$ satisface el mismo axioma.

Demostración. i) Sea X un espacio 1-contable, luego dado $x \in X$ existe una base contable de vecindades de x , $\mathcal{B}_x = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Veamos que $\mathcal{V}_{f(x)} = \{f[B_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base contable de vecindades de $f(x)$: ya que f es abierta $f[B_i]$ es abierto en $f(X)$, más aún como $x \in B_i$, $f[B_i]$ es una vecindad de $f(x)$. Ahora, sea V una vecindad de $f(x)$, por continuidad, existe una vecindad U de x tal que $f[U] \subseteq V$, además, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_i \subseteq U$, luego $f[B_i] \subseteq f[U] \subseteq V$, es decir $f[B_i] \subseteq V$. De esta manera $\mathcal{V}_{f(x)}$ es una base contable de vecindades de $f(x)$ y así $f(X)$ es 1-contable.

ii) Sea X un espacio 2-contable, luego tiene una base contable $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Considere $\mathcal{V} = \{f[B_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ y sea $y \in f(X)$, por definición existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y como \mathcal{B} es base, existe B_i tal que $x \in B_i$ y por tanto $y \in f[B_i]$. Ahora sean $f[B_{i_1}], f[B_{i_2}] \in \mathcal{V}$, por propiedades de la imagen inversa, tenemos que $f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]] = f^{-1}[f[B_{i_1}]] \cap f^{-1}[f[B_{i_2}]]$, como $B_{i_1} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}]]$ y $B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_2}]]$ tenemos que $B_{i_1} \cap B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]]$ y como \mathcal{B} es base, existe B_{i_3} tal que $B_{i_3} \subseteq B_{i_1} \cap B_{i_2} \subseteq f^{-1}[f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]]$, de esta manera $f[B_{i_3}] \subseteq f[B_{i_1}] \cap f[B_{i_2}]$, con lo cual concluimos que \mathcal{V} es base para $f(X)$. \square

13. Demuestra que si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces toda colección de conjuntos abiertos disjuntos en X es numerable.

14. Demuestra que si X es Lindelöf y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es Lindelöf.
15. Considera \mathbb{R}^I con la métrica uniforme, donde $I = [0, 1]$. Sea $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ el subespacio de funciones continuas. Demuestra que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tiene un subconjunto denso numerable, y por lo tanto una base numerable.
[Sugerencia: Considera aquellas funciones continuas cuyos gráficos consisten en un número finito de segmentos de línea con extremos racionales.]
16. a) Demuestra que el espacio producto \mathbb{R}^I , donde $I = [0, 1]$, tiene un subconjunto denso numerable.
 b) Demuestra que si J tiene cardinalidad mayor que $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$, entonces el espacio producto \mathbb{R}^J no tiene un subconjunto denso numerable.
[Sugerencia: Si D es denso en \mathbb{R}^J , define $f: J \rightarrow \mathcal{P}(D)$ por la ecuación $f(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b))$, donde (a, b) es un intervalo fijo en \mathbb{R} .]
- *17. Considera \mathbb{R}^ω con la topología de la caja. Sea \mathbb{Q}^∞ el subespacio que consiste en secuencias de racionales que terminan en una cadena infinita de ceros. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface este espacio?
- *18. Sea G un grupo topológico de primera numerabilidad. Demuestra que si G tiene un subconjunto denso numerable, o es Lindelöf, entonces G tiene una base numerable.
[Sugerencia: Sea $\{B_n\}$ una base numerable en e . Si D es un subconjunto denso numerable de G , demuestra que los conjuntos dB_n , para $d \in D$, forman una base para G . Si G es Lindelöf, elige para cada n un conjunto numerable C_n tal que los conjuntos cB_n , para $c \in C_n$, cubran G . Demuestra que cuando n recorre \mathbb{Z}_+ , estos conjuntos forman una base para G .]