Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. ¿Cuáles son las componentes y las componentes camino de $\mathbb{R}_\ell$? ¿Cuáles son los mapas continuos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$?

2. *a*) ¿Cuáles son las componentes y las componentes camino de $\mathbb{R}^\omega$ (en la topología producto)?

   b) Considera $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme. Demuestra que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en la misma componente de $\mathbb{R}^\omega$ si y sólo si la sucesión

   $$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots)$$

   es acotada. **[Sugerencia: Basta considerar el caso donde $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.]**

   c) Da a $\mathbb{R}^\omega$ la topología caja. Demuestra que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en la misma componente de $\mathbb{R}^\omega$ si y sólo si la sucesión $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es .^{ev}entualmente cero". **[Sugerencia: Si $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ no es eventualmente cero, muestra que existe un homeomorfismo h de $\mathbb{R}^\omega$ en sí mismo tal que $h(\mathbf{x})$ es acotado y $h(\mathbf{y})$ no es acotado.]**

3. Demuestra que el cuadrado ordenado es localmente conexo pero no localmente conexo por caminos. ¿Cuáles son las componentes camino de este espacio?

4. Sea X un espacio localmente conexo por caminos. Demuestra que todo conjunto abierto conexo de X es conexo por caminos.

5. Sea X el conjunto de puntos racionales del intervalo $[0, 1] \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Sea T la unión de todos los segmentos de línea que unen el punto $p = (0, 1)$ con los puntos de X.

   a) Demuestra que T es conexo por caminos, pero es localmente conexo solo en el punto p.

   b) Encuentra un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo por caminos, pero no sea localmente conexo en ninguno de sus puntos.

6. Se dice que un espacio X es débilmente localmente conexo en un punto $\mathbf{x}$ si, para cada vecindad U de $\mathbf{x}$, existe un subespacio conexo de X contenido en U que contiene una vecindad de $\mathbf{x}$. Demuestra que si X es débilmente localmente conexo en cada uno de sus puntos, entonces X es localmente conexo. **[Sugerencia: Muestra que las componentes de los conjuntos abiertos son abiertas.]**

7. Considere la "escoba infinita" X representada en la Figura 25.1. Demuestre que X no es localmente conexo en p, pero es débilmente localmente conexo en p.

   Sugerencia: Cualquier vecindad conexa de p debe contener todos los puntos a_i.

8. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Demuestra que si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo. **[Sugerencia: Si C es una componente del conjunto abierto U de Y, demuestra que $p^{-1}(C)$ es una unión de componentes de $p^{-1}(U)$.]**

9. Sea G un grupo topológico y sea C la componente de G que contiene al elemento identidad e. Demuestra que C es un subgrupo normal de G. **[Sugerencia: Si $x \in G$, entonces xC es la componente de G que contiene a x.]**

10. Sea X un espacio topológico. Definimos $x \sim y$ si no existe una separación $X = A \cup B$ de X en conjuntos abiertos disjuntos tal que $x \in A$ y $y \in B$.

   a) Demuestra que esta relación es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman **quasicomponentes** de X.

   b) Demuestra que cada componente de X está contenida en una quasicomponente de X, y que las componentes y las quasicomponentes de X son iguales si X es localmente conexo.

   c) Sea $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ y sea $-K = \{-1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Determina las componentes, las componentes camino y las quasicomponentes de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= (K \times [0,1]) \cup \{0 \times 0\} \cup \{0 \times 1\}, \\
B &= A \cup ([0,1] \times \{0\}), \\
C &= (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K).
\end{aligned}$$