Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Sean τ y τ' dos topologías sobre X. Si $\tau' \supset \tau$, ¿qué implica la conexidad de X en una topología sobre la otra?

   Solución: Note que si X es conexo en la topología τ', entonces en la topología τ también lo es. Supongamos que no, entonces existen dos abiertos disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$, como $\tau \subset \tau'$ entonces $A, B \in \tau'$, luego X no sería conexo.

   La contrarrecíproca nos dice que si X es disconexo en τ entonces es disconexo en τ', sin embargo que X sea conexo en τ no implica conexidad en la topología τ'. Por ejemplo, considere los espacios topológicos $(\mathbb{R}, \tau)$, $(\mathbb{R}, \tau_\ell)$, con τ la topología usual y τ_ℓ la topología del límite inferior, es claro que $\tau \subset \tau_\ell$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es conexo en la topología usual, pero $\mathbb{R}_\ell$ no lo es. La prueba de esto se encuentra en el ejercicio 7.

2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subespacios conexos de X, tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Demuestra que $\bigcup A_n$ es conexo.

   Demostración. Supongamos que no, esto es

   $$\bigcup_n A_n = B \cup C$$

   con $B \cap C = \emptyset$ y $B, C \neq \emptyset$. Tomemos $A_1 \subset B$, en efecto

   $$I := \{i \in \mathbb{N} : A_i \subset C\} \neq \emptyset,$$

   de lo contrario $C = \emptyset$ y esto no es posible. El principio del buen orden garantiza que I tiene un elemento mínimo, digamos k, esto nos da que $A_{k-1} \subset B$, así $A_k \cap A_{k-1} = \emptyset$, una contradicción. □

3. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X; sea A un subespacio conexo de X. Muestra que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, entonces $A \cup \left(\bigcup A_\alpha\right)$ es conexo.

   Demostración. Note que

   $$A \cup \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (A \cup A_\alpha)$$

   y como $A \subset \bigcap_\alpha (A \cup A_\alpha)$, y $A \neq \emptyset$, El conjunto $\{A \cup A_\alpha\}_\alpha$ es una colección de subespacios conexos de X con un punto en común, de donde se conluye lo deseado. □

4. Demuestra que si X es un conjunto infinito, entonces es conexo en la topología del complemento finito.

   Demostración. Suponga que no, entonces $X = A \cup B$ con A, B abiertos disjuntos, como A y B son disjuntos tenemos que $B = A^c$, entonces B es finito ya que $A \in \tau$, como $B \in \tau$ y $A = B^c$, se sigue que A es finito, lo que contradice que X es infinito. □

5. Un espacio es *totalmente disconexo* si sus únicos subespacios conexos son conjuntos de un solo punto. Muestra que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente disconexo. ¿Es cierto el recíproco?

Demostración. En efecto $A = \{x\}$ donde $x \in X$ es conexo ya que no pueden haber dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión sea $\{x\}$. Si $|A| \geq 2$, note que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

y por tanto A no es conexo, ya que los singletones son abiertos disjuntos en la topología discreta.

$\square$

El recíproco no es cierto. $\mathbb{Q}$ no es conexo con la topología usual y los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos de un solo punto.

Si Y es un subespacio de $\mathbb{Q}$ que contiene dos puntos p y q, se puede elegir un número irracional a entre p y q, tal que

$$Y = (Y \cap (-\infty, a)) \cup (Y \cap (a, +\infty))$$

y la topología usual no es la misma topología discreta (los puntos en la topolgía usual de $\mathbb{Q}$ no son abiertos).

6. Sea $A \subset X$. Muestra que si C es un subespacio conexo de X que intersecta tanto A como $X - A$, entonces C intersecta ∂A.

   Demostración. Suponga que $C \cap \partial A = \emptyset$, como $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ entonces $C \cap A \subset \mathring{A}$, análogamente $\overline{X - A} = (X \overset{\circ}{-} A) \cup \partial(X - A)$ y $C \cap (X - A) \subset (X \overset{\circ}{-} A)$, además

   $$C = (C \cap A) \cup (C \cap (X - A)) \subset (X \overset{\circ}{-} A) \cup \mathring{A},$$

   como C es conexo, entonces C cae enteramente en $(X \overset{\circ}{-} A)$ o en $\mathring{A}$, esto contradice que C intersecta tanto a $X - A$ como a A. $\square$

7. ¿Es el espacio $\mathbb{R}_\ell$ conexo? Justifica tu respuesta.

   Falso, en efecto

   $$\mathbb{R}_\ell = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

   y esta es una disconexión.

8. Determina si $\mathbb{R}^\omega$ es conexo en la topología uniforme.

   Sean $A, B \subset \mathbb{R}^\omega$ los conjuntos de todas las sucesiones acotadas y no acotadas respectivamente. En efecto $A \cup B = \mathbb{R}^\omega$ y $A \cap B = \emptyset$, nos falta ver que A y B son abiertos y obtenemos una disconexión.

   Si $a \in A$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y dado $\varepsilon < 1$, en efecto

   $$B(a, \varepsilon) := \{b \in \mathbb{R}^\omega : \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon\},$$

   ya que eliminamos el mínimo entre $|a_n - b_n|$ y 1 presente en la métrica uniforme. Queremos ver que a es punto interior, esto es que dado $b \in B(a, \varepsilon)$, $b \in A$, en efecto

   $$|b_n| \leq |a_n - b_n| + |a_n| < \varepsilon + M.$$

   Si $a \in B$ el razonamiento es análogo, a es no acotada si

   $$\limsup_{n \to \infty} |a_n| = \infty$$

   y además tenemos que

$$|a_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n|,$$

de lo que se sigue que

$$\infty = \limsup_{n\to\infty} |a_n| \leq \varepsilon + \limsup_{n\to\infty} |b_n|.$$

Concluímos en cada caso que $b \in B(a,\varepsilon)$, luego A y B forman una disconexión.

9. Sea A un subconjunto propio de X, y sea B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, muestra que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

Demostración. Sea $\tilde{a} \in X - A$, entonces $\{\tilde{a}\} \times Y$ es conexo y además disyunto con $A \times B$, sea $\tilde{b} \in X - B$, luego $X \times \{\tilde{b}\}$ es conexo y disyunto de $A \times B$, en efecto

$$(\{\tilde{a}\} \times Y) \cup (X \times \{\tilde{b}\})$$

es conexo ya que tienen el punto $(\tilde{a}, \tilde{b})$ en común. Más aún

$$(X \times Y) - (A \times B) = \left(\bigcup_{b \in Y - B} \left((\{\tilde{a}\} \times Y) \cup (X \times \{b\}) \right) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in X - A} \left((\{a\} \times Y) \cup (X \times \{\tilde{b}\}) \right) \right)$$

es conexo. □

10. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios conexos; sea X el espacio producto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X.

a) Dado cualquier subconjunto finito K de J, sea X_K el subespacio de X que consiste en todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$. Muestra que X_K es conexo.

Demostración. Sea $K = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset J$,

$$\begin{aligned} f : X_K &\longrightarrow X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n} \\ x &\longmapsto f(x) = (x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo ya que cada componente es continua y la función es abierta porque el producto cartesiano de abiertos es abierto, la biyectividad es inmediata. Esto nos da que X_K es conexo dado que $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$ es producto finito de conexos.

□

b) Demuestra que la unión Y de los espacios X_K es conexa.

Demostración. En efecto $a \in X_K$, $K \subset J$, $|K| \leq \infty$, entonces

$$\bigcup_K X_K$$

es conexo porque es unión de conexos que comparten un punto. □

c) Demuestra que X es igual a la clausura de Y; concluye que X es conexo.

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in X$ y $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ una vecindad de $\mathbf{x}$, tenemos entonces que $U_\alpha = X_\alpha$ para todos salvo finitos índices α; de esta manera, existe un elemento $\mathbf{y} \in U$ tal que $y_\alpha = a_\alpha$ para todos salvo finitos índices α. Por lo tanto $U \cap Y \neq \emptyset$. De esta manera $X = \overline{Y}$; y ya que la clausura de un subespacio conexo de X es conexa, tenemos que X es conexo. □

11. Sea $p : X \to Y$ un mapeo cociente. Demuestra que si cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ es conexo, y si Y es conexo, entonces X es conexo.

Demostración. Supongamos que U y V son una disconexión de X, si $y \in p(U)$, entonces $y = p(x)$ para algún $x \in U$, por tanto $x \in p^{-1}(\{y\})$. $p^{-1}(\{y\})$ es conexo y $x \in U \cap p^{-1}(\{y\})$, tenemos que $p^{-1}(\{y\}) \subset U$, por tanto, $p^{-1}(\{y\}) \subset U$ para todo $y \in p(U)$, así pues $p^{-1}(p(U)) \subset U$. Como $U \subset p^{-1}(p(U))$ tenemos que $U = p^{-1}(p(U))$, análogamente $V = p^{-1}(p(V))$.

Como p es un mapa cociente, $p(U)$ y $p(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de Y, además $p(U) \cup p(V) = Y$ ya que p es sobreyectiva, por lo que $p(U)$ y $p(V)$ son una disconexión de Y

$$p^{-1}(p(U) \cap P(V)) = p^{-1}(p(U)) \cap p^{-1}(p(V)) = U \cap V = \emptyset,$$

lo que contradice el hecho de que Y es conexo. □

12. Sea $Y \subset X$; sean X y Y conexos. Demuestra que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ y $Y \cup B$ son conexos.

Demostración. Suponga que $Y \cup A$ no es conexo, esto es $Y \cup A = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, como Y es conexo, entonces $Y \subset Y \cup A \subset U \cup V$, de esto se sigue $Y \subset U$ o $Y \subset V$.

Suponga que $Y \subset U$, entonces $V \subset A$, como $A \cup B = X - Y$ con $A \cap B = \emptyset$, tenemos que

$$Y \cup (X - Y) = (Y \cup A) \cup B = X = U \cup V \cup B,$$

Ya que U y V forman una separación de $Y \cup A$, ningún punto de acumulación de U está en V, además, como $A \cup B$ es una separación de $X - Y$ y $U \subset A$, entonces B no contiene ningún punto de acumulación de U. Por lo tanto U es un subconjunto propio de X que es abierto y cerrado, de donde se sigue que X no es conexo, llegando a una contradicción. El caso $Y \cup B$ es análogo. □