

1. Sean  $\tau$  y  $\tau'$  dos topologías sobre  $X$ . Si  $\tau' \supset \tau$ , ¿qué implica la conexidad de  $X$  en una topología sobre la otra?

**Solución:** Note que si  $X$  es conexo en la topología  $\tau'$ , entonces en la topología  $\tau$  también lo es. Supongamos que no, entonces existen dos abiertos disjuntos  $A$  y  $B$  tales que  $X = A \cup B$ , como  $\tau \subset \tau'$  entonces  $A, B \in \tau'$ , luego  $X$  no sería conexo.

La contrarrecíproca nos dice que si  $X$  es desconexo en  $\tau$  entonces es desconexo en  $\tau'$ , sin embargo que  $X$  sea conexo en  $\tau$  no implica conexidad en la topología  $\tau'$ . Por ejemplo, considere los espacios topológicos  $(\mathbb{R}, \tau)$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_\ell)$ , con  $\tau$  la topología usual y  $\tau_\ell$  la topología del límite inferior, es claro que  $\tau \subset \tau_\ell$ . Sabemos que  $\mathbb{R}$  es conexo en la topología usual, pero  $\mathbb{R}_\ell$  no lo es. La prueba de esto se encuentra en el ejercicio 7.

2. Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de subespacios conexos de  $X$ , tal que  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  para todo  $n$ . Demuestra que  $\bigcup A_n$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que no, esto es

$$\bigcup_n A_n = B \cup C$$

con  $B \cap C = \emptyset$  y  $B, C \neq \emptyset$ . Tomemos  $A_1 \subset B$ , en efecto

$$I := \{i \in \mathbb{N} : A_i \subset C\} \neq \emptyset,$$

de lo contrario  $C = \emptyset$  y esto no es posible. El principio del buen orden garantiza que  $I$  tiene un elemento mínimo, digamos  $k$ , esto nos da que  $A_{k-1} \subset B$ , así  $A_k \cap A_{k-1} = \emptyset$ , una contradicción.  $\square$

3. Sea  $\{A_\alpha\}$  una colección de subespacios conexos de  $X$ ; sea  $A$  un subespacio conexo de  $X$ . Muestra que si  $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$  para todo  $\alpha$ , entonces  $A \cup (\bigcup A_\alpha)$  es conexo.

*Demostración.* Note que

$$A \cup \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (A \cup A_\alpha)$$

y como  $A \subset \bigcap_\alpha (A \cup A_\alpha)$ , y  $A \neq \emptyset$ , El conjunto  $\{A \cup A_\alpha\}_\alpha$  es una colección de subespacios conexos de  $X$  con un punto en común, de donde se concluye lo deseado.  $\square$

4. Demuestra que si  $X$  es un conjunto infinito, entonces es conexo en la topología del complemento finito.

*Demostración.* Suponga que no, entonces  $X = A \cup B$  con  $A, B$  abiertos disjuntos, como  $A$  y  $B$  son disjuntos tenemos que  $B = A^c$ , entonces  $B$  es finito ya que  $A \in \tau$ , como  $B \in \tau$  y  $A = B^c$ , se sigue que  $A$  es finito, lo que contradice que  $X$  es infinito.  $\square$

5. Un espacio es *totalmente desconexo* si sus únicos subespacios conexos son conjuntos de un solo punto. Muestra que si  $X$  tiene la topología discreta, entonces  $X$  es totalmente desconexo. ¿Es cierto el recíproco?

*Demostración.* En efecto  $A = \{x\}$  donde  $x \in X$  es conexo ya que no pueden haber dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión sea  $\{x\}$ . Si  $|A| \geq 2$ , note que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

y por tanto  $A$  no es conexo, ya que los singletons son abiertos disjuntos en la topología discreta.  $\square$

El recíproco no es cierto.  $\mathbb{Q}$  no es conexo con la topología usual y los únicos subespacios conexos de  $\mathbb{Q}$  son los conjuntos de un solo punto.

Si  $Y$  es un subespacio de  $\mathbb{Q}$  que contiene dos puntos  $p$  y  $q$ , se puede elegir un número irracional  $a$  entre  $p$  y  $q$ , tal que

$$Y = (Y \cap (-\infty, a)) \cup (Y \cap (a, +\infty))$$

y la topología usual no es la misma topología discreta (los puntos en la topología usual de  $\mathbb{Q}$  no son abiertos).

6. Sea  $A \subset X$ . Muestra que si  $C$  es un subespacio conexo de  $X$  que intersecta tanto  $A$  como  $X - A$ , entonces  $C$  intersecta  $\partial A$ .

*Demostración.* Suponga que  $C \cap \partial A = \emptyset$ , como  $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$  entonces  $C \cap A \subset \overset{\circ}{A}$ , análogamente  $\overline{X - A} = (X - \overset{\circ}{A}) \cup \partial(X - A)$  y  $C \cap (X - A) \subset (X - \overset{\circ}{A})$ , además

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap (X - A)) \subset (X - \overset{\circ}{A}) \cup \overset{\circ}{A},$$

como  $C$  es conexo, entonces  $C$  cae enteramente en  $(X - \overset{\circ}{A})$  o en  $\overset{\circ}{A}$ , esto contradice que  $C$  intersecta tanto a  $X - A$  como a  $A$ .  $\square$

7. ¿Es el espacio  $\mathbb{R}_\ell$  conexo? Justifica tu respuesta.

**Falso**, en efecto

$$\mathbb{R}_\ell = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

y esta es una desconexión.

8. Determina si  $\mathbb{R}^\omega$  es conexo en la topología uniforme.

Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^\omega$  los conjuntos de todas las sucesiones acotadas y no acotadas respectivamente. En efecto  $A \cup B = \mathbb{R}^\omega$  y  $A \cap B = \emptyset$ , nos falta ver que  $A$  y  $B$  son abiertos y obtenemos una desconexión.

Si  $a \in A$ , es decir, existe  $M > 0$  tal que  $|a_n| < M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ; y dado  $\varepsilon < 1$ , en efecto

$$B(a, \varepsilon) := \{b \in \mathbb{R}^\omega : \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon\},$$

ya que eliminamos el mínimo entre  $|a_n - b_n|$  y 1 presente en la métrica uniforme. Queremos ver que  $a$  es punto interior, esto es que dado  $b \in B(a, \varepsilon)$ ,  $b \in A$ , en efecto

$$|b_n| \leq |a_n - b_n| + |a_n| < \varepsilon + M.$$

Si  $a \in B$  el razonamiento es análogo,  $a$  es no acotada si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$$

y además tenemos que

$$|a_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n|,$$

de lo que se sigue que

$$\infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| \leq \varepsilon + \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|.$$

Concluimos en cada caso que  $b \in B(a, \varepsilon)$ , luego  $A$  y  $B$  forman una desconexión.

9. Sea  $A$  un subconjunto propio de  $X$ , y sea  $B$  un subconjunto propio de  $Y$ . Si  $X$  e  $Y$  son conexos, muestra que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

*Demostración.* Sea  $\tilde{a} \in X - A$ , entonces  $\{\tilde{a}\} \times Y$  es conexo y además disjunto con  $A \times B$ , sea  $\tilde{b} \in X - B$ , luego  $X \times \{\tilde{b}\}$  es conexo y disjunto de  $A \times B$ , en efecto

$$(\{\tilde{a}\} \times Y) \cup (X \times \{\tilde{b}\})$$

es conexo ya que tienen el punto  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  en común. Más aún

$$(X \times Y) - (A \times B) = \left( \bigcup_{b \in Y - B} ((\{\tilde{a}\} \times Y) \cup (X \times \{b\})) \right) \cup \left( \bigcup_{a \in X - A} ((\{a\} \times Y) \cup (X \times \{\tilde{b}\})) \right)$$

es conexo. □

10. Sea  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una familia indexada de espacios conexos; sea  $X$  el espacio producto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea  $\mathbf{a} = (a_\alpha)$  un punto fijo de  $X$ .

- a) Dado cualquier subconjunto finito  $K$  de  $J$ , sea  $X_K$  el subespacio de  $X$  que consiste en todos los puntos  $\mathbf{x} = (x_\alpha)$  tales que  $x_\alpha = a_\alpha$  para  $\alpha \notin K$ . Muestra que  $X_K$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset J$ ,

$$\begin{aligned} f: X_K &\longrightarrow X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n} \\ x &\longmapsto f(x) = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo ya que cada componente es continua y la función es abierta porque el producto cartesiano de abiertos es abierto, la biyectividad es inmediata. Esto nos da que  $X_K$  es conexo dado que  $X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n}$  es producto finito de conexos. □

- b) Demuestra que la unión  $Y$  de los espacios  $X_K$  es conexa.

*Demostración.* En efecto  $a \in X_K$ ,  $K \subset J$ ,  $|K| \leq \infty$ , entonces

$$\bigcup_K X_K$$

es conexo porque es unión de conexos que comparten un punto. □

- c) Demuestra que  $X$  es igual a la clausura de  $Y$ ; concluye que  $X$  es conexo.

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x} \in X$  y  $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$  una vecindad de  $\mathbf{x}$ , tenemos entonces que  $U_\alpha = X_\alpha$  para todos salvo finitos índices  $\alpha$ ; de esta manera, existe un elemento  $\mathbf{y} \in U$  tal que  $y_\alpha = a_\alpha$  para todos salvo finitos índices  $\alpha$ . Por lo tanto  $U \cap Y \neq \emptyset$ . De esta manera  $X = \overline{Y}$ ; y ya que la clausura de un subespacio conexo de  $X$  es conexa, tenemos que  $X$  es conexo. □

11. Sea  $p: X \rightarrow Y$  un mapeo cociente. Demuestra que si cada conjunto  $p^{-1}(\{y\})$  es conexo, y si  $Y$  es conexo, entonces  $X$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $U$  y  $V$  son una desconexión de  $X$ , si  $y \in p(U)$ , entonces  $y = p(x)$  para algún  $x \in U$ , por tanto  $x \in p^{-1}(\{y\})$ .  $p^{-1}(\{y\})$  es conexo y  $x \in U \cap p^{-1}(\{y\})$ , tenemos que  $p^{-1}(\{y\}) \subset U$ , por tanto,  $p^{-1}(\{y\}) \subset U$  para todo  $y \in p(U)$ , así pues  $p^{-1}(p(U)) \subset U$ . Como  $U \subset p^{-1}(p(U))$  tenemos que  $U = p^{-1}(p(U))$ , análogamente  $V = p^{-1}(p(V))$ .

Como  $p$  es un mapa cociente,  $p(U)$  y  $p(V)$  son conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de  $Y$ , además  $p(U) \cup p(V) = Y$  ya que  $p$  es sobreyectiva, por lo que  $p(U)$  y  $p(V)$  son una desconexión de  $Y$

$$p^{-1}(p(U) \cap p(V)) = p^{-1}(p(U)) \cap p^{-1}(p(V)) = U \cap V = \emptyset,$$

lo que contradice el hecho de que  $Y$  es conexo. □

12. Sea  $Y \subset X$ ; sean  $X$  y  $Y$  conexos. Demuestra que si  $A$  y  $B$  forman una separación de  $X - Y$ , entonces  $Y \cup A$  y  $Y \cup B$  son conexos.

*Demostración.* Suponga que  $Y \cup A$  no es conexo, esto es  $Y \cup A = U \cup V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ , como  $Y$  es conexo, entonces  $Y \subset Y \cup A \subset U \cup V$ , de esto se sigue  $Y \subset U$  o  $Y \subset V$ .

Suponga que  $Y \subset U$ , entonces  $V \subset A$ , como  $A \cup B = X - Y$  con  $A \cap B = \emptyset$ , tenemos que

$$Y \cup (X - Y) = (Y \cup A) \cup B = X = U \cup V \cup B,$$

Ya que  $U$  y  $V$  forman una separación de  $Y \cup A$ , ningún punto de acumulación de  $U$  está en  $V$ , además, como  $A \cup B$  es una separación de  $X - Y$  y  $U \subset A$ , entonces  $B$  no contiene ningún punto de acumulación de  $U$ . Por lo tanto  $U$  es un subconjunto propio de  $X$  que es abierto y cerrado, de donde se sigue que  $X$  no es conexo, llegando a una contradicción. El caso  $Y \cup B$  es análogo. □