Taller IV

Bourbaki

6 de diciembre de 2024

1. Siendo a, b, c, z_0 constantes complejas, demostrar:

$$\lim_{z\to z_0} c = c; \quad \lim_{z\to z_0} (az+b) = az_0 + b; \quad \lim_{z\to z_0} (z^2+c) = z_0^2 + c$$

$$\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0); \quad \lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}; \quad \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{z} = 0$$

Solucao: $\lim_{z\to z_0} c = c$, note que dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta =$lo que le de la gana

$$|f(z) - f(z_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon$$

$\lim_{z\to z_0}(az+b) = az_0 + b$, eso es trivial allí. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, note que si $|z - z_0| < \delta$ entonces

$$|f(z) - f(z_0)| = |az + b - az_0 - b| = |a||z - z_0| < |a|\delta = \epsilon.$$

Luego viene uno que usted tiene que hacer cositas pero pues no deja de ser una maricada, $\lim_{z\to z_0}(z^2 + c) = z_0^2 + c$. Usted primero agarre $\delta_1 \leq 1$, note que si

$$|z| - |z_0| \leq |z - z_0| < \delta \leq 1$$

entonces

$$|z + z_0| \leq |z| + |z_0| < 1 + 2|z_0|$$

entonces ponga $\delta_2 = \frac{\epsilon}{1+2|z_0|}$ y su delta es $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, y eso le sirve para todo epsilon porque pille:

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0||z + z_0| < \epsilon$$

y por eso es que uno debe parar bolas en diferencial.

$\lim_{z\to z_0} \Re(z) = \Re(z_0)$, sea $\delta = \sqrt{\epsilon}$, note que para todo $\epsilon > 0$

$$|\Re(z) - \Re(z_0)| = |\Re(z - z_0)| \leq |z - z_0|^2 < \delta^2 = \epsilon$$

$\lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}$, sea $\delta = \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, tenemos que:

$$|\overline{z}-\overline{z_0}| = |\overline{z-z_0}| = |z-z_0| < \epsilon.$$

Para el último tome $\delta = \epsilon$, note que para todo $\epsilon > 0$ tenemos que

$$\left|\frac{\overline{z}^2}{z}\right| = \frac{|\overline{z}||\overline{z}|}{|z|} = |\overline{z}| = |z| \leq \epsilon.$$

2. Calcular:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}; \quad \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3}; \quad \lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1}$$

   Ahí dice calcular, entonces eso da 4, infinito y el otro también, si no me cree pues hagalo ud

3. Demostrar que si f es continua y no nula en un punto z_0, entonces $f(z) \neq 0$ para todo z en alguna vecindad de z_0 (V_{z_0}).

   Demostración. Suponga que no, ahí van a pasar cosas, lo que pasa allí es que existe $z \in B(z_0, \delta)$ tal que $f(z) = 0$ tome $\epsilon = |f(z_0)|$, como en esa bola la función es continua entonces

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0)| < \epsilon = |f(z_0)|$$

   si pilla que le contradice cosas? □

4. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto. Mostrar que si f es una función continua definida sobre A, entonces $f(A)$ es compacto.

   Demostración. Sea $\{z_n\}$ una sucesión en A, como A es compacto entonces tiene una subsucesión convergente, digamos $\{z_k\}$ que converge a z, esto que dado $\delta > 0$, existe un K tal que si $k > K$ entonces $|z_k - z| < \delta$, por la continuidad $|f(z_k) - f(z)| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Acabó porque eso le dice que allá la sucesión $f(z_k)$ converge. □

5. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que f tiene un máximo sobre A.

   Demostración. Facilito, como f es contínua y A es compacto, $f[A]$ es compacto en $\mathbb{R}$, y como en $\mathbb{R}$ todo conjunto compacto es cerrado y acotado, pues por la completez, $f[A]$ tiene supremo, además $\sup\{f[A]\} \in f[A]$ pues $f[A]$ es cerrado, en otras palabras, $f[A]$ tiene máximo. □

6. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto, y $f : A \to \mathbb{C}$ una función continua. Demostrar que f es uniformemente continua.

   Demostración. Suponga que no, luego existe $\epsilon > 0$ tal que si $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ existen $z_n, w_n \in A$ tales que $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ pero $|f(z_n) - f(w_n)| > \epsilon$.

   Como A es compacto y $\{z_n\} \subseteq A$, existe una subsucesión $\{z_i\}_{i\in I}$ con $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que dado ϵ, existe $N \in I$ tal que si $i > N$ entonces $|z_i - z| < \frac{\epsilon}{3}$ para algún $z \in A$.

   Ya que a cada z_n le corresponde un w_n, tenemos la subsucesión $\{w_i\}_{i\in I} \subseteq A$ y de nuevo por la compacidad de A, obtenemos una subsucesión $\{w_j\}_{j\in J}$ con $J \subseteq I$ de manera que existe $M \in J$ tal que si $j > M$ entonces $|w_j - w| < \frac{\epsilon}{3}$. También tenemos que existe $L \in J$ tal que si $j > L$, entonces $\frac{1}{j} < \frac{\epsilon}{3}$.

Aplicando desigualdad triangular dos veces y tomando $K = \max\{N, M, L\}$, tenemos que si $j > K$, entonces:

$$|z - w| \leq |z - z_j| + |z_j - w_j| + |w_j - w| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Así, tenemos que $z = w$.

Como f es contínua, tenemos que si $j > K$, $|f(z_j) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|f(w_j) - f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$, en conclusión:

$$|f(z_j) - f(w_j)| \leq |f(z_j) - f(z)| + |f(z) - f(w)| + |f(w) - f(w_j)| = |f(z_j) - f(z)| + |f(w) - f(w_j)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo cual contradice que $|f(z_n) - f(z_w)| > \epsilon$.

$\square$

Esta prueba es una porquería pero así tocaba hacerla entonces bueno, fecho.