13

Demostración: $K \geq 2$

$$zJ_k'(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \frac{(2n+k)\, z^{2n+k}}{2^{2n+k}} = A$$

$$z^2 J_k''(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \frac{(2n+k)(2n+k-1)\, z^{2n+k-2}}{2^{2n+k}} = B$$

$$A+B = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \frac{(2n+k)^2}{2^{2n+k}} z^{2n+k}$$

$$\rightarrow A+B-k^2 J_k(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \frac{(4n^2+4nk+\cancel{k^2})}{2^{2n+k}} z^{2n+k}$$

$$\cancel{-\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \frac{k^2}{2^{2n+k}} z^{2n+k}}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \frac{4n(n+k)}{2^{2n+k}} z^{2n+k}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+k-1)!\, 2^{2n+k-2}} z^{2n+k}$$

$n+1 = n$

$$= -\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!\, 2^{2n+k}} z^{2n+k+2}$$

$$= -z^2 J_k(z) \quad \square$$

Si $k=1$

$$zJ_1'(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{(2n+1)}{2^{2n+1}} z^{2n+1} \quad \text{A}$$

$$z^2J_1''(z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{(2n+1)(2n)}{2^{2n+1}} z^{2n+1} \quad \text{B}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{(2n+1)(2n)}{2^{2n+1}} z^{2n+1}$$

$$n(4n+4)$$

$$\text{A} + \text{B} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \frac{4n^2+4n\cancel{+1}}{2^{2n+1}} z^{2n+1}$$

$-J_k(z)$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1} n}{n!(n)! \, 2^{2n-1}}$$

$$= \sum_1^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(n-1)! \, 2^{2n-1}}$$

$w+1=n$

$$= -\sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+3}}{(n+1)! \, n! \, 2^{2n+1}} = -z^2 J_1(z) \; \square$$

8. Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, con radio de convergencia r. Probar:

- $g(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia de f.

Trivial $\square$

- f es holomorfica en $D(0,r)$ y $f'(z) = g(z)$.

Demostración: $f(z+h) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z+h)^n$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n \left(z^n + h z^{n-1} h + h^2 P_n(z,h) \right)$$

$P_n(z,h) = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}$, sea $|z|<r$ y $\delta>0$ tq $|z|+\delta<r$, tomamos $|h|<\delta$, esto nos da que

$$|P_n(z,h)| \leq P_n(|z|,\delta)$$

$$f(z+h) - f(z) - \sum n a_n z^{n-1} h = \sum_{0}^{\infty} a_n \left(h z^{n-1} h + h^2 P_n(z,h) \right) - \sum_{n} a_n z^{n-1} h$$

$$= \sum_{0}^{\infty} a_n h^2 P_n(z,h)$$

luego

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum n a_n z^{n-1} \right| = \left| h \sum_{0}^{\infty} a_n P_n(z,h) \right|$$

$$\leq |h| \sum_{0}^{\infty} |a_n| P_n(|z|,\delta)$$

$|h| \to 0$

$|h|<\delta>0$ $=0$ $\boxtimes$

$|z|+\delta<r$

y listo cayo, no sea loroto

- Pruebe $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Demostración:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} k!\, a_n\, z^{n-k} = k!\, a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} k!\, a_n\, z^{n-k}$$

$$\to \quad f^{(k)}(0) = k!\, a_k \Rightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \boxtimes$$

- Sea $h(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$. Pruebe que h tiene radio de convergencia r. (Note que $h'(z) = f(z)$, h se le llama primitiva de f).

Demonstração $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\cancel{\sqrt[n]{n+1}}}$ $\boxtimes$

// ——— // ——— // ——— //

① Note que $f'(0) = a_1 \neq 0$ y por el teorema 6.1 se uno $\boxtimes$

④ Demostración: Sea z_0 tq $|f(z_0)| \geq |f(z)| \ \forall z \in U$,

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n$$

Suponga que $f(z)$ no el localmente constante

$$|f(z)| \neq |a_0|$$

Sea $V \subseteq U$ abierto, por el teorema 6.1, f es isomorfismo analítico $\to f(V)$ es abierto, esto es que existe un disco $D(a_0, s) \subseteq f(V)$ y por lo tanto el conjunto $|f(z)|$, $z \in f(V)$ contiene un intervalo abierto de $|a_0|$

$$|f(z)| > |f(z_0)| = |a_0| \quad \text{para algún } z.$$

y por tanto $|f(z_0)|$ no es el máximo ☑

⑤ **Demostración:** Note q $e^{f(z)}$ es analítica (composición) entonces como $f(z) = u(z) + i v(z)$

$$|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$$ y por tanto

si $Re(f)$ tiene un máximo $\to f(z)$ y corolario

⑥ **Demostración:** Análogamente

$$|e^{-i f(z)}| = e^{v(z)}$$ entonces si $Im(f)$

tiene un máximo $\to f(z)$ también ☑

⑦ **Demostración:** Suponga que no, entonces $1/f(z)$ es una función analítica

$$f(z) = a_d z^d \left(\frac{a_0}{a_d z^d} + \frac{a_1 z}{a_d z^d} + \cdots + 1 \right)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\cancel{a_d z^d \left(\frac{a_0}{a_d z^d} + \cdots + 1 \right)}_{\infty}} = 0 \qquad \left(\lim_{|z| \to \infty} 1/f(z) = 0 \right)$$

$|z| \to \infty$

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $f(\alpha) \neq 0$ y $R > 0$ suficientemente grande tq $|\alpha| < R$ y si $|z| \geq R$, entonces

$$\frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{|f(\alpha)|}$$

Sea S el disco cerrado centrado en el origen (S es coco)

$\frac{1}{|f(z)|}$ es continua en S, tiene un máximo, digamos z_0.

por construcción, $z_0 \notin \partial S$, $z \in \operatorname{Int} S \to \frac{1}{|f(z)|}$ localmente constante y contradicción $\square$

② Demostración

Sea

$$f(z) = a_m z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n \qquad a_m \neq 0$$

$$= a_m z^m (1 + h(z))$$

$\exists\, a \in \mathbb{C}$ tq $a_m = a^m \to f(z) = (az(1 + h_1(z)))^m$

Con $h_1(z)$ tq

$$(1+h_1(z))^m = 1+h(z)$$

Sea $f_1(z) = (a_1 z(1+h_1(z))$ (Cumple ser localmente abierta)

y la función

$$w \longrightarrow w^k \quad \text{es abierta}$$

luego $f(z)$ es localmente abierta. $\boxtimes$

Como cualquier abierto es unión de discos acabó $\boxtimes$

③ Demostración f es analítica

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$$

note que, como f es inyectiva $m=1$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

luego como f es biyectiva, por el teorema 6.1, tiene inversa y su inversa es analítica $\boxtimes$

⑨ Demostración

$$f(z) \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \longrightarrow f'(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cancel{2n}\, z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\to f''(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \boxed{\checkmark}$$

⑩ Demostración: $f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}$

$$\to z f'(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2n}\,(2n)}{(n!)^2} \quad A$$

$$z^2 f''(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)\,z^{2n}}{(n!)^2} \quad B$$

$$4z^2 f(z) = \sum_{0}^{\infty} 4\,\frac{z^{2n+2}}{(n!)^2}$$

$$A+B = \sum_{1}^{\infty} \frac{4n^2\,z^{2n}}{(n!)^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{4(n+1)^2\,z^{2n+2}}{(n+1)!\,(n+1)!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{4\,z^{2n+2}}{(n!)^2}$$

$$= 4z^2 \cdot f(z) \quad \boxed{\checkmark}$$

⑪ Demonstração: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n$

$$\to f'(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\cancel{(2n+1)}\,z^{2n}}{\cancel{2n+1}}(-1)^n = \sum_{0}^{\infty} z^{2n}(-1)^n$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (-z^2)^n$$

$$= \frac{1}{z^2+1} \quad \square$$

⑫ Demostraçinho: $J(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$

$$z J'(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)}{(n!)^2 2^{2n}} z^{2n} \qquad A$$

$$z^2 J''(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} z^{2n} \qquad B$$

$$A+B = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n)}{(n!)^2 2^{2n}} z^{2n}$$

$$= -\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4(n+1)^2 z^{2n+2}}{(n+1)!^2 \, 2^{2n+2}}$$

$$= -\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{(n!)^2 \, 2^{2n}} = -z^2 J(z) \quad \square$$