1. Sea Ω un abierto del plano complejo, y f una función definida sobre Ω. Demuestre que f es diferenciable en $z \in \Omega$ si y sólo si existe una función ϕ tal que:

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \phi(h) = 0 \\ f(z+h) - f(z) = a\,h + h\,\phi(h), \end{cases}$$

con a un número complejo.

Demostración:

Suponga q f es diferenciable en z, entonces

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)\,h + R_z(h)$$

con $R_z(h)/h \to 0$ ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z) + \cancelto{0}{\lim_{h\to 0} R_z(h)/h} = f'(z)$$

luego $\phi(h) = R_z(h)/h$

$\Leftarrow$ Suponga que $f(z+h) = f(z) + ah + h\,\phi(h)$

con $\phi(h) \to 0$ cuando $h \to 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} a + \phi(h)$$

$$= a$$

2. Usando, el punto anterior, determine la derivada de la función compuesta. Es decir si Ω y Ω_1 son abiertos del plano, $f : \Omega \to \Omega_1$, es derivable en $z \in \Omega$ y $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ con $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ es derivable en $w = f(z)$ entonces $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

Demostración:

$$g(f(z+h)) = g(f(z) + f'(z)h + h\,\phi_1(h))$$
$$= g(f(z) + h(f'(z) + \phi_1(h)))$$
$$= g(f(z)) + \underline{g'(f(z))\,h(f'(z) + \phi_1(h))}$$
$$+\phi_2(h(f'(z)+\phi_1(h)))\,h(f'(z)+\phi_1(h))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(z+h)) - g(f(z))}{h} = g'(f(z))(f'(z) + \cancel{\phi_1(h)}^{\to 0})$$
$$h \to 0 \quad + \phi_2(\cancel{h}^{\to 0}(f'(z)+\phi_1(h)))(f'(z)\cancel{+\phi_1(h)}^{\to 0})$$

$$= g'(f(z))\,f'(z)$$

3. Derivar:

$$3z^2 - 2z; \quad (1-4z^2)^3; \quad \frac{z-1}{2z+1}\,\text{para}\,(z \neq \frac{-1}{2}); \quad \frac{(1+z^2)^4}{z^2}\,\text{para}\,(z \neq 0)$$

- $6z - 2$, • $3(1-4z^2)^2(-8z)$, • $\dfrac{\cancel{2z}+1 - \cancel{2z}+2}{(2z+1)^2}$ $\overset{3}{}$

- $$\frac{4(1+z^2)^3(2\cancel{z}^{\,}) - 2\cancel{z}(1+z^2)^4}{z^{\cancel{4}\,3}} = \frac{(1+z^2)^3(8 - 2(1+z^2))}{z^3}$$

4. Mostrar que si f es derivable en z_0 entonces es continua.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,(z - z_0)$$

$$= f'(z_0)\,0 \quad \square$$

5. Hallar el dominio de Analiticidad de las siguientes funciones:

- $(z - \frac{1}{z})^2$.
- $\frac{z+i}{z-2}$.
- $\frac{i}{z^3}$.

$$(z+h) - \frac{1}{z+h}$$

$$\bullet \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z^2} + h^2 + 2hz + \frac{1}{(z+h)^2} \cancel{-2} - \cancel{z^2} - \frac{1}{z^2} + \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h + 2z + \frac{1}{h(z+h)^2} + \frac{1}{-hz^2}$$

$$= 2z + \lim_{h \to 0} h + \frac{1}{h}\left(\frac{-(z+h)^2 + z^2}{(z+h)^2 z^2}\right)$$

$$= 2z + \lim_{h \to 0} h + \frac{1}{\cancel{h}}\left(\frac{-\cancel{(h)}(2z+h)}{(z+h)^2 z^2}\right)$$

$$= 2z + \lim_{h \to 0} h - \frac{2z + \overset{\to 0}{h}}{(z + \overset{\to 0}{h})^2 z^2}$$

$z \neq 0$

$$\Rightarrow 2z - \frac{2}{z^3}$$

$$\bullet \left(\frac{z+i}{z-2}\right)' = \frac{(z-2) - (z+i)}{(z-2)^2}$$

$\boxed{z \neq 2}$

$$\bullet \left(\frac{i}{z^3}\right)' = i(z^{-3})' = -3i\, z^{-4}$$

$z \neq 0$

6. Sea $f(z)$ una función de varible compleja de valor real. Domostrar que se de debe tener o bien $f'(z_0) = 0$ o bien f no es diferenciable en z_0, con z_0 en el dominio de f.

$$f(z) = U(x,y) + i\,\cancel{V(x,y)}^{\to 0}$$

$$U_x(x_0, y_0) = \cancel{V_y(x_0, y_0)}^{\to 0} \quad y \quad \cancel{V_x(x_0, y_0)}^{\to 0} = -U_y(x_0, y_0)$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{U_x} & \cancel{U_y} \\ \cancel{V_x} & \cancel{V_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \boxtimes$$

Si $f'(z_0) \neq 0 \rightarrow U_x \neq 0$ o $U_y \neq 0$

7. Sea $f(z)$ una función de variable compleja, de valor *puramente imaginario*. Demuestre la misma conclusión del punto anterior.

Demostración

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_x & V_y \end{pmatrix}$$ además $U_x = V_y$ y $V_x = -U_y$

y acabó $\boxtimes$

8. Demostrar que las funciones $Re(z)$, $Im(z)$ and $|z|$, no son analíticas en el plano complejo.

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2} \quad y$$

$$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z}{2i} - \frac{\bar{z}}{2i} \quad y \quad ya$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\bar{z}} + \bar{h} - \cancel{\bar{z}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2}$$

Si $h_1 = 0 \rightarrow \lim = -1$, si $h_2 = 0 \rightarrow \lim = 1 \quad \boxtimes$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{z}\sqrt{\bar{z}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|z+h| - |z|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h(|z+h| + |z|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\bar{z}}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{z\bar{h} + \bar{z}h + h\bar{h}}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{z\bar{h}}{h(|z+h|+|z|)} + \cancel{\frac{\bar{z}}{|z+h|+|z|}} + \cancel{\frac{\bar{h}}{|z+h|+|z|}}$$

NO EXISTE

9. Demostrar que las funciones $zRe(z)$ y $zIm(z)$, son diferenciables en cero, pero no analíticas.

Demostración: $z\,Re(z) = \frac{z(z+\bar{z})}{2} = \frac{z^2}{2} + \cancel{\frac{|z|^2}{2}}$ Ñao Ñao ,

$z\,Im(z) = \frac{z(z-\bar{z})}{2i} = \frac{z^2}{2i} - \cancel{\frac{|z|^2}{2i}}$ Ñao Ñao

pero en 0 sí

10. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0, \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Demostrar que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$, pero $f'(0)$ no existe.

Demostración: $\frac{\bar{z}^2}{z} = \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \frac{(x-yi)^3}{x^2+y^2}$

$$= \frac{x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + iy^3}{x^2+y^2}$$

U $= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}$ V

$$U_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$U_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0, \quad V_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$V_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1 \qquad \boxed{} \leftarrow$$ CUMPLE CAUCHY

$$\lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}^2}{h^2} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^2 = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left(\frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2}\right)^2$$

Si $h_1 = h^2$ $\lim = -1$ y $h_1 = 0$ $\lim = 1$ $\boxed{} \leftarrow$

(1) NOTAS DE SANDRA.

12. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Concluir como el punto anterior.

Note q' $\frac{\bar{z}^3}{|z|^2} = \frac{\bar{z}^3}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2}{z}$ y por el punto 10 acabó

13. Sea

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}}, & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Concluir como en el punto anterior.

Demostración: $-\frac{1}{z^4} = \frac{-\bar{z}^4}{|z|^8} = -\frac{(x-yi)^4}{(x^2+y^2)^4}$

$$-\frac{(x^2-y^2-2yix)(x^2-y^2-2yix)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{-x^4+4yix^3-y^4-4y^3ix+6y^2x^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}+i\,\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\to \exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}+i\,\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\exp\left(i\,\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\left(\cos\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)+i\sin\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)\right)$$

$$U=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\cos\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$V=\exp\left(\frac{6y^2x^2-y^4-x^4}{(x^2+y^2)^4}\right)\sin\left(\frac{4yx^3-4y^3x}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$$U_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\exp(-h^4/h^8)/h=0$$

$$V_x(0,0)=\lim_{h\to 0} 0/h=0,\quad V_y=0$$

y

$U_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \exp(-h^4/h^8)/h = 0$ entonces cumple

$\left(\frac{-\bar{z}^4}{|z|^8}\right)$

cauchy - rieman.

$$\lim_{h \to 0} \exp\left(\frac{-\bar{h}^4}{|h|^8}\right) / h = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\exp(-(h_1 - ih_2)^4 / (h_1 + ih_2)^8)}{h_1 + ih_2}$$

si $h_2 = 0 \to \lim = 0$, si $h_1 = h_2$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\exp(+4\cancel{(h_2)^4}/(16 (h_2)^{\cancel{8}\,4}))}{(1+i)h_2} = \infty$$ y ya

14. Sea f analítica en un dominio D. Demostrar que f es constante en D si y solo si cada una de las siguientes condiciones se satisfacen:

- $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$.
- $Re(f(z)) = K$, con K constante, para todo $z \in D$.
- $Im(f(z)) = K$, con K constante, para todo $z \in D$.
- $|f(z)| = K$, con K constante, para todo $z \in D$.
- $Arg(f(z)) = K$, con K constante, para todo $z \in D$.
- $\overline{f(z)}$ es analítica en D.

Demostración: Si f es constante acabó, suponga que $f'(z)=0$

entonces $\begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\to f'(z) = U_x(x,y) + i V_x(x,y) = 0 \to$

$\begin{pmatrix} 0 & U_y \\ 0 & V_y \end{pmatrix}$ por caucho $\to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

U(x,y) y V(x,y) son constantes y y ya

①, ② y ③ se vienen, ④ → constante

$$|f(z)| = |U(x,y) + iV(x,y)| = \sqrt{U^2(x,y) + V^2(x,y)} = K$$

$$\partial_x U^2(x,y) + V^2(x,y) = 0 \to \cancel{2}U(x,y)U_x(x,y) + \cancel{2}V(x,y)V_x(x,y) = 0$$

$$U^2(x,y)U_x(x,y) = V(x,y)\cancel{U_y(x,y)}U(x,y)$$

$$V(x,y)U(x,y)\cancel{U_y(x,y)} = -V^2(x,y)U_x(x,y)$$

Sumando: $\underbrace{(U^2(x,y) + V^2(x,y))}_{K}(\cancel{U_x(x,y)}^{\to 0}) = 0$

$$V(x,y)\cancel{U(x,y)}U_x(x,y) = V^2(x,y)U_y(x,y)$$

$$U^2(x,y)U_y(x,y) = -V(x,y)\cancel{U_x(x,y)}U(x,y)$$

Sumando: $\underbrace{(U^2(x,y) + V^2(x,y))}_{K}(\cancel{U_y(x,y)}^{\to 0}) = 0$

y se vino en ④