Taller II

Bourbaki

10 de noviembre de 2024

1. Mostrar que si $e^z = e^w$ entonces existe un entero k tal que $w = z + 2k\pi i$.

Demostración. Supongamos que $e^z = e^w$, $z = a + bi$, $w = c + di$, entonces

$$e^a e^{bi} = e^c e^{di},$$

es claro que $|e^z| = |e^w|$ y por tanto $e^a = e^c$, por la inyectividad de la exponencial $a = c$, además $e^{bi} = e^{di}$, esto es

$$\cos(b) + i\sin(b) = \cos(d) + i\sin(d),$$

como estas ecuaciones determinan un único punto en la circúnferencia, entonces $(d - b) = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} w - z &= c + di - a - bi \\ &= a - a + i(d - b) \\ &= i(2\pi k), \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

$\square$

2. Si θ es real, mostrar que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Demostración. Pues lo que pasa es que eso es trivial allí, note que los numeradores son un complejo más su conjugado y un complejo menos su conjugado, entonces usted se acuerda que Pastrán dijo que eso daba 2 veces la parte real y 2i la parte imaginaria, o sea

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{2\cos(\theta)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{2\cos(\theta)}{2i} = \frac{2i\sin(\theta)}{2i}$$

y fecho. $\square$

3. Si en las expresiones del ejercicio (2) definimos $\cos z$, $\sin z$ reemplazando θ por z, mostrar que los ceros de $\cos z$ y $\sin z$ coinciden con los ceros de las funciones trigonométricas reales correspondientes.

Demostración. Reemplazando z en las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \Re(e^{iz}) = \Re(\cos(z)+i\sin(z)) = \cos(z)$$

análogamente $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$, luego los ceros coinciden en ambas expreciones deprontro estoy tirando burradas xd $\square$

4. Probar que para $z \neq 1$, se tiene

$$1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Demostración. Supongamos que usted ya vió integración y series, entonces

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + zS(n) - z^{n+1},$$

así $S(n) - zS(n) = 1 - z^{n+1}$, esto es $S(n) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ y fecho. $\square$

5. Tomando la parte real del ejercicio precedente, probar

$$1+\cos\theta+\cos(2\theta)+\cdots+\cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

para $0<\theta<2\pi$.

En este punto voy a usar exp para denotar la exponencial porque si no se vería horrible

Demostración. Note que si tomamos $|z|=1$, entonces $z=\exp(i\theta)$, de esto se sigue que

$$\Re\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\Re(z^k) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kn)$$

por el punto anterior también tenemos que

$$\begin{aligned}
\Re\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right) &= \Re\left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right)\\
&= \Re\left(\frac{\exp\left(i(n+1)\theta)\right)-1}{\exp(i\theta)-1}\right)\\
&= \Re\left(\frac{\exp(i(n+1)\theta/2)}{\exp(i\theta/2)}\frac{\exp(-i(n+1)\theta/2)-\exp(i(n+1)\theta/2)}{\exp(-i\theta/2)-\exp(i\theta/2)}\right).
\end{aligned}$$

Note que el último término de la derecha de puede escribir como

$$\Re\left(\exp(in\theta/2)\frac{\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{\sin(\theta/2)}\right) = \cos(n\theta/2)\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

además

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\theta n}{2}+\frac{\theta(n+1)}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}-\frac{n\theta}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\theta(2n+1)}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\theta\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}$$

dividiendo entre $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ fecho.

$\square$

6. Sea $|a|<1$. Probar: $1-\left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right|$ tiene el mismo signo que $1-|z|$.

7. Identifique las siguientes regiones:

   a) $|z-i|\leq 1$.
   b) $|z-1|>|z-3|$.
   c) $\dfrac{1}{z}=\overline{z}$.
   d) $|z^2-1|<1$.
   e) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=1$.
   f) $|z|^2=\operatorname{Im}(z)$.

8. **Definición 1**: Un conjunto se dice conexo si dados dos puntos diferentes en el conjunto, estos se pueden unir por una poligonal (formada por un número finito de segmentos rectos) contenida en el conjunto. Si además el conjunto es abierto, se le llama entonces *Dominio*.

   Definición 2: Un punto $w\in S\subset\mathbb{C}$, se dice es de acumulación si todo $D(w;r)\setminus\{w\}$, $r>0$ contiene al menos un punto de S (en particular, contiene infinitos puntos de S). Clasifique los conjuntos siguientes según sean abiertos, cerrados, acotados, conexos, dominios; encontrar además sus puntos de acumulación y de adherencia.

   a) $|z-1|<1$.
   b) $|\operatorname{Im}(z)|<3$.
   c) $|z+i|+|z-i|=1$.
   d) $0<|z|<2$.
   e) $0<\arg(z)<\frac{\pi}{6}$.
   f) $\operatorname{Re}(z^2)\geq 0$.
   g) $\operatorname{Re}(z-i\overline{z})\geq 0$.