Taller I

Bourbaki

10 de noviembre de 2024

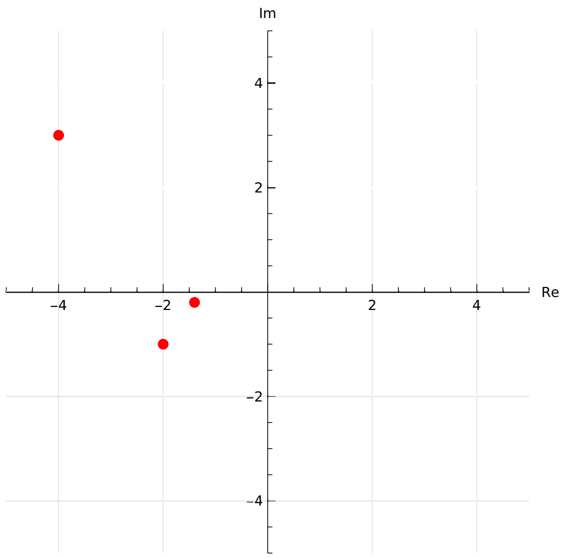
1. Representar gráficamente:

$$(1-2i)+(-3+i); \quad (2+i)(-1+2i); \quad \frac{-2+4i}{1-3i}.$$

Note que:

$$\frac{-2+4i}{1-3i} = \frac{-2+4i}{1-3i}\frac{(1+3i)}{(1+3i)} = \frac{(-2+4i)(1+3i)}{10} = -\frac{7}{5} - \frac{i}{5}$$

y con eso se obtiene la gráfica chingona



2. Calcular el argumento principal, y escribir en forma polar $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

   Haciendo unas cuenticas todas cacorras pero que irá a hacer su puta madre

$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3} = \frac{(1-i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}+i)^3}{((\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i))^3} = \frac{(1-i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}+i)^3}{64} = 8i + 8\sqrt{3},$$

   luego el argumento principal es $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, además $\sqrt{8^2+8^2\times 3} = 16$, esto es

$$z = 16exp\left(i\frac{\pi}{6}\right),$$

pero pues yo soy un guevon y no me acordé de que es más fácil elevar cuando el número está en forma polar, entonces

$$z = \frac{(2\exp(i\arctan(-\sqrt{3})))^7}{(2\exp(i\arctan(-1/\sqrt{3})))^3} = 2^4\exp(i(7\arctan(-\sqrt{3}) - 3\arctan(-1/\sqrt{3}))),$$

y en efecto $7\arctan(-\sqrt{3}) - 3\arctan(-1/\sqrt{3}) + 2\pi = \dfrac{\pi}{6}$

3. Mostrar que el triangulo de vertices z_1, z_2, z_3 es equilatero, si y solo si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

Para este punto primero note que dado un triángulo equilatero, podemos escribir a sus vértices de la forma

$$z_1 = r^{1/3}\exp\left(\frac{i\theta_1}{3}\right) + w, \quad z_2 = r^{1/3}\exp\left(\frac{i\theta_2}{3}\right) + w \quad \text{y} \quad z_3 = r^{1/3}\exp\left(\frac{i\theta_3}{3}\right) + w,$$

con $w \in \mathbb{C}$, luego los vértices del triángulo equilátero son soluciones del polinomio $(z-a)^3 - b = 0 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$, en efecto

$$\begin{aligned}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) &= z^3 - z^2(z_2+z_1+z_3) + z(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3) - z_1z_2z_3\\ &= (z-a)^3 - b\\ &= z^3 - z^2(3a) + z(3a^2) - b - a^3.\end{aligned}$$

Ahora comparando coeficientes obtenemos que $3a = z_1 + z_2 + z_3$ y $3a^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$, esto es

$$3(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) = (z_1 + z_2 + z_3)^2$$

de donde se sigue la equivalencia deseada.

4. Mostrar que la suma de los angulos interiores de un triangulo es π

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ vertices de un triangulo cualquiera y $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi)$ los respectivos angulos. Primero note que si trasladamos el triangulo tal que el vertice z_1 quede sobre el origen, los vertices del triangulo en sentido antihorario son $0, z_2 - z_1$ y $z_3 - z_1$. donde el angulo entre estos dos vectores sigue siendo θ_1 ya que trasladar no afecta los angulos. Recordemos que $e^{i\theta_1}$ rota a un vector a traves del origen el angulo θ_1 en sentido antihorario, asi $(z_2 - z_1)e^{i\theta_1} = r_1(z_3 - z_1)$, donde r_1 es un factor de escalacion. Haciendo el mismo proceso para los verices z_2 y z_3 tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases}(z_2 - z_1)e^{i\theta_1} = r_1(z_3 - z_1),\\ (z_3 - z_2)e^{i\theta_2} = r_2(z_1 - z_2),\\ (z_1 - z_3)e^{i\theta_3} = r_3(z_2 - z_3).\end{cases}$$

Luego

$$\begin{cases}e^{i\theta_1} = r_1\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},\\ e^{i\theta_2} = r_2\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2},\\ e^{i\theta_3} = r_3\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.\end{cases}$$

Tomando el argumento principal en ambos lados de la ecuacion obtenemos

$$\begin{cases} \theta_1 = \operatorname{Arg}\left(r_1 \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right), \\ \theta_2 = \operatorname{Arg}\left(r_2 \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right), \\ \theta_3 = \operatorname{Arg}\left(r_3 \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right). \end{cases}$$

Recordemos que el argumento del producto de dos complejos es igual a la suma de los argumentos, luego

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \operatorname{Arg}\left(r_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) + \operatorname{Arg}\left(r_2 \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) + \operatorname{Arg}\left(r_3 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) \\ &= \operatorname{Arg}\left(\left(r_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)\left(r_2 \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right)\left(r_3 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right)\right) \\ &= \operatorname{Arg}(-r_1 r_2 r_3) \\ &= \operatorname{Arg}(r_1 r_2 r_3 e^{i\pi}) \\ &= \pi \end{aligned}$$

5. Mostrar que

- $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

  En efecto

$$\begin{aligned} \sin(x + 2x) &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \cos x(\sin x \cos x + \cos x \sin x) \\ &= \sin x \left(1 - 2\sin^2 x\right) + 2\cos^2 x \sin x \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x \\ &= \sin x \left(1 + 2\cos^2 x\right) - 2\sin^3 x \\ &= \sin x \left(\sin^2 x + 3\cos^2 x\right) - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x \end{aligned}$$

- $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

  En efecto

$$\begin{aligned} \cos(x + 2x) &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - 2\sin x(\sin x \cos x) \\ &= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

- $\cos 8x + 28\cos 4x + 35 = 64\left(\cos^8 x + \sin^8 x\right)$

  Recordemos que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, luego $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$ Luego sigo me dio pereza hacer esto :p

6. Graficar las raices cuartas de $i, -16, -2+2i\sqrt{3}$

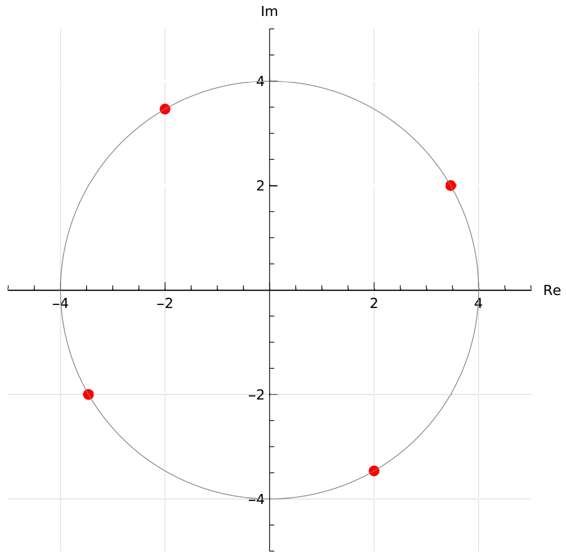
   En este solo vamos a poner el último porque el Sercoya dijo que todos son cuadrados (ese es el rey de la pedancia), además los otros ejercicios son iguales, note que

$$r = \sqrt{4+4\times 3} = 4 \quad \text{además } \theta = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3},$$

   de esto se sigue que los puntos son de la forma

$$z = \exp\left(i\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3.$$

   Obtenemos la gráfica chingona

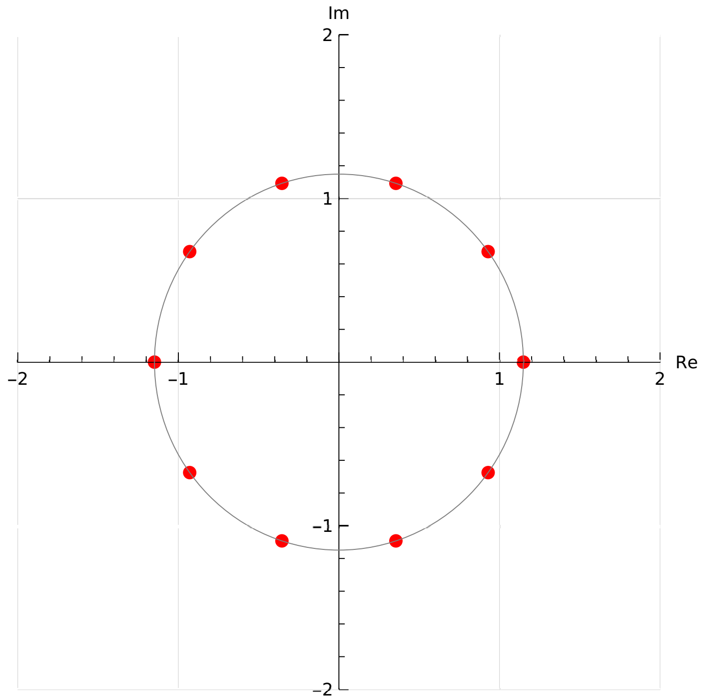


7. Resolver la ecuación $z^{10}+4=0$

   Note que $z^{10} = 4e^{i\pi}$, entonces las soluciones son de la forma

$$z = 4^{\frac{1}{10}}\exp\left(i\left(\frac{\pi+2\pi k}{10}\right)\right) \quad k = 0,\ldots,9$$

   y pues para rellenar espacio mire otra chingona



8. Mostrar que las raices de la ecuación $(z+1)^5 + z^5 = 0$, estan sobre la recta $x = -\frac{1}{2}$
   Note que la ecuación se puede escribir como

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1 = \exp(i\pi)$$

de donde se sigue que $\dfrac{z+1}{z} = w = \exp\left(i\left(\dfrac{\pi + 2\pi k}{5}\right)\right)$ con $k = 0, \ldots, 4$, en efecto

$$\Re(z) = \Re\left(\frac{1}{w-1}\right) = \Re\left(\frac{\overline{w}-1}{|w-1|^2}\right)$$

tomando $w = a + bi$ y sabiendo que $|w| = 1$ se sigue que

$$\Re(z) = \Re\left(\frac{a - bi - 1}{(a-1)^2 + b^2}\right) = \frac{a-1}{(a-1)^2+b^2} = \frac{a-1}{a^2 - 2a + 1 + b^2} = \frac{a-1}{2(1-a)} = -\frac{1}{2}$$

9. Mostrar que para $n \neq 0$, las raices de la ecuación $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$, estan dadas por

$$z_k = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{4n}, n \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Note que podemos escribir la ecuación de la forma

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = -1 = e^{i\pi}$$

tomando $w = \dfrac{1+z}{1-z}$, vemos que $w - zw = 1 + z$, entonces $w - 1 = z(1+w)$, esto es

$$\begin{aligned} z &= \frac{w-1}{w+1} \\ &= \frac{w-1}{w+1}\frac{\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{w\overline{w}+w-\overline{w}-1}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1}. \end{aligned}$$

Es claro que $|w| = 1$, entonces

$$z = \frac{w-\overline{w}}{2+w+\overline{w}}\frac{2i\mathrm{Im}(w)}{2(1+\Re(w))} = \frac{i\mathrm{Im}(w)}{1+\Re(w)}.$$

Note que $w_k = exp\left(i\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$, entonces:

$$z_k = i\frac{\sin(\theta_k)}{1+\cos(\theta_k)} = i\tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = i\tan\left(\frac{\pi(2k+1)}{4n}\right)$$

10. Calcular $(-3+4i)^{\frac{3}{2}}$, primero tomando la raíz cuadrada y el resultado elevarlo al cubo, y segundo, invirtiendo el procedimiento.

    Note que

$$z^{1/2} = \sqrt{5}\ \exp\left(\frac{i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi k\right)\right), \quad k = 0, 1$$

$$z_0^{3/2} = 5\sqrt{5}\ \exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right), \quad z_1^{3/2} = 5\sqrt{5}\ \exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi\right)\right)$$

    Por otro lado

$$z^3 = 5^3\ \exp\left(3i\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right)$$

$$z_0^{3/2} = 5\sqrt{5}\ \exp\left(\frac{3i}{2}\left(3\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right), \quad z_1^{3/2} = 5\sqrt{5}\ \exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

    Se puede ver que en efecto en este caso da igual el orden de tomar la potencia dado que al distribuir $\frac{3}{2}$ en las expresiones anteriores obtenemos por un lado un ángulo $\phi + 3\pi$ y por el otro $\phi + \pi$ que sabemos que son el mismo ángulo, esto pasa porque 3 y 2 son primos relativos xd.

    Toca acordarse de que $\left(z^{1/n}\right)^m$ tiene menos elementos que $(z^m)^{1/n}$ si $(m, n) > 1$

11. Calcular $(-3+4i)^{-\frac{3}{2}}$.

    Sea $z = (-3+4i)$, note que $z^{-3} = \frac{1}{125}\exp\left(i\left(-3\pi + 3\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$, entonces

$$z^{-3/2} = \frac{\sqrt{5}}{25}\exp\left(\frac{i}{2}\left(-3\pi + 3\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + 2\pi k\right)\right), \quad k = 0, 1$$