Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General
Taller II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

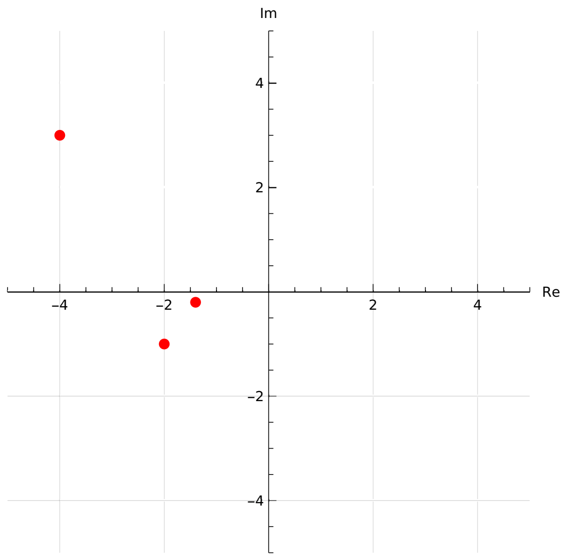
1. Representar gráficamente:

$$(1-2i)+(-3+i); \quad (2+i)(-1+2i); \quad \frac{-2+4i}{1-3i}.$$

Note que:

$$\frac{-2+4i}{1-3i} = \frac{-2+4i}{1-3i}\frac{(1+3i)}{(1+3i)} = \frac{(-2+4i)(1+3i)}{10} = -\frac{7}{5} - \frac{i}{5}$$

y con eso se obtiene la gráfica chingona



2. Calcular el argumento principal, y escribir en forma polar $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

   Haciendo unas cuenticas todas cacorras pero que irá a hacer su puta madre

$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3}-i)^3} = \frac{(1-i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}+i)^3}{((\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i))^3} = \frac{(1-i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}+i)^3}{64} = 8i + 8\sqrt{3},$$

   luego el argumento principal es $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, además $\sqrt{8^2+8^2\times 3} = 16$, esto es

$$z = 16exp\left(i\frac{\pi}{6}\right),$$

   pero pues yo soy un guevon y no me acordé de que es más fácil elevar cuando el número está en forma polar, entonces

$$z = \frac{(2exp(i\arctan(-\sqrt{3})))^7}{(2exp(i\arctan(-1/\sqrt{3})))^3} = 2^4 exp(i(7\arctan(-\sqrt{3}) - 3\arctan(-1/\sqrt{3}))),$$

y en efecto $7\arctan(-\sqrt{3}) - 3\arctan(-1/\sqrt{3}) + 2\pi = \dfrac{\pi}{6}$

3. Mostrar que el triangulo de vertices z_1, z_2, z_3 es equilatero, si y solo si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

Para este punto primero note que dado un triángulo equilatero, podemos escribir a sus vértices de la forma

$$z_1 = r^{1/3} exp\left(\frac{i\theta_1}{3}\right) + w, \quad z_2 = r^{1/3} exp\left(\frac{i\theta_2}{3}\right) + w \quad \text{y} \quad z_3 = r^{1/3} exp\left(\frac{i\theta_3}{3}\right) + w,$$

con $w \in \mathbb{C}$, luego los vértices del triángulo equilátero son soluciones del polinomio $(z-a)^3 - b = 0 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$, en efecto

$$\begin{aligned}
(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) &= z^3 - z^2(z_2 + z_1 + z_3) + z(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - z_1 z_2 z_3 \\
&= (z-a)^3 - b \\
&= z^3 - z^2(3a) + z(3a^2) - b - a^3.
\end{aligned}$$

Ahora comparando coeficientes obtenemos que $3a = z_1 + z_2 + z_3$ y $3a^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$, esto es

$$3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) = (z_1 + z_2 + z_3)^2$$

de donde se sigue la equivalencia deseada.

4. Mostrar que la suma de los angulos interiores de un triangulo es π

   Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ vertices de un triangulo cualquiera y $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi)$ los respectivos angulos. Primero note que si trasladamos el triangulo tal que el vertice z_1 quede sobre el origen, los vertices del triangulo en sentido antihorario son $0, z_2 - z_1$ y $z_3 - z_1$. donde el angulo entre estos dos vectores sigue siendo θ_1 ya que trasladar no afecta los angulos. Recordemos que $e^{i\theta_1}$ rota a un vector a traves del origen el angulo θ_1 en sentido antihorario, asi $(z_2 - z_1)e^{i\theta_1} = r_1(z_3 - z_1)$, donde r_1 es un factor de escalacion. Haciendo el mismo proceso para los verices z_2 y z_3 tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases}
(z_2 - z_1)e^{i\theta_1} = r_1(z_3 - z_1), \\
(z_3 - z_2)e^{i\theta_2} = r_2(z_1 - z_2), \\
(z_1 - z_3)e^{i\theta_3} = r_3(z_2 - z_3).
\end{cases}$$

   Luego

$$\begin{cases}
e^{i\theta_1} = r_1 \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \\
e^{i\theta_2} = r_2 \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \\
e^{i\theta_3} = r_3 \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.
\end{cases}$$

   Tomando el argumento principal en ambos lados de la ecuacion obtenemos

$$\begin{cases}
\theta_1 = Arg\left(r_1 \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right), \\
\theta_2 = Arg\left(r_2 \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right), \\
\theta_3 = Arg\left(r_3 \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right).
\end{cases}$$

Recordemos que el argumento del producto de dos complejos es igual a la suma de los argumentos, luego

$$\begin{aligned}\theta_1+\theta_2+\theta_3 &= Arg\left(r_1\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)+Arg\left(r_2\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)+Arg\left(r_3\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right)\\ &= Arg\left(\left(r_1\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)\left(r_2\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)\left(r_3\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}\right)\right)\\ &= Arg(-r_1r_2r_3)\\ &= Arg(r_1r_2r_3e^{i\pi})\\ &= \pi\end{aligned}$$

5. Mostrar que

- $\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

  En efecto

$$\begin{aligned}\sin(x+2x) &= \sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x\\ &= \sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\cos x(\sin x\cos x+\cos x\sin x)\\ &= \sin x\left(1-2\sin^2 x\right)+2\cos^2 x\sin x\\ &= \sin x-2\sin^3 x+2\cos^2 x\sin x\\ &= \sin x\left(1+2\cos^2 x\right)-2\sin^3 x\\ &= \sin x\left(\sin^2 x+3\cos^2 x\right)-2\sin^3 x\\ &= 3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x\end{aligned}$$

- $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

  En efecto

$$\begin{aligned}\cos(x+2x) &= \cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x\\ &= \cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-2\sin x(\sin x\cos x)\\ &= \cos^3 x-\cos x\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x\\ &= \cos^3 x-3\sin^2 x\cos x\end{aligned}$$

- $\cos 8x+28\cos 4x+35 = 64\left(\cos^8 x+\sin^8 x\right)$

  Recordemos que $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$, luego $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x = 1$ Luego sigo me dio pereza hacer esto :p

6. Graficar las raices cuartas de $i, -16, -2+2i\sqrt{3}$

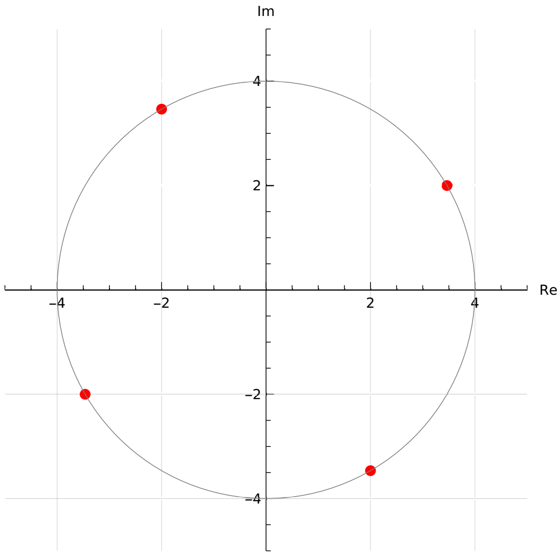
   En este solo vamos a poner el último porque el Sercoya dijo que todos son cuadrados (ese es el rey de la pedancia), además los otros ejercicios son iguales, note que

$$r=\sqrt{4+4\times 3}=4 \qquad \text{además } \theta=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\pi=\frac{2\pi}{3},$$

   de esto se sigue que los puntos son de la forma

$$z = exp\left(i\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Obtenemos la gráfica chingona

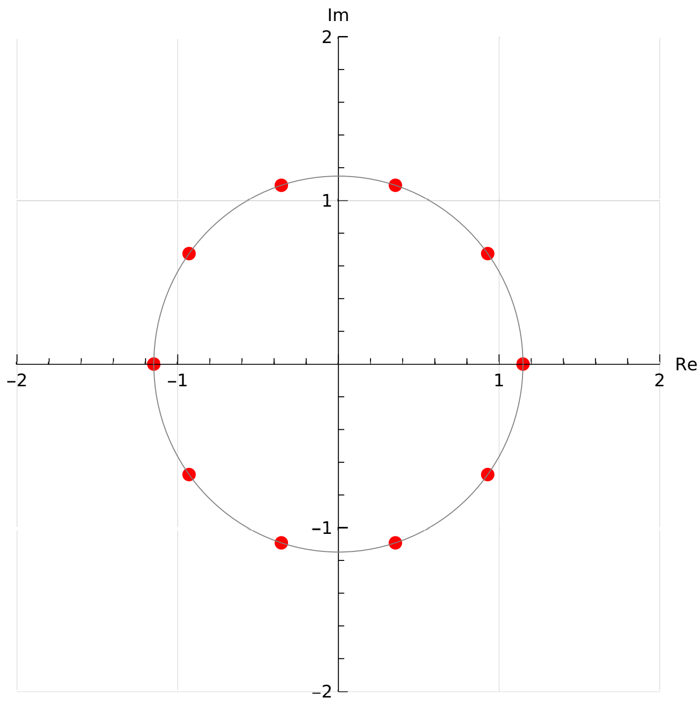


7. Resolver la ecuación $z^{10}+4=0$

   Note que $z^{10} = 4e^{i\pi}$, entonces las soluciones son de la forma

$$z = 4^{\frac{1}{10}} exp\left(i\left(\frac{\pi+2\pi k}{10}\right)\right) \quad k = 0, \ldots, 9$$

   y pues para rellenar espacio mire otra chingona



8. Mostrar que las raices de la ecuación $(z+1)^5+z^5=0$, estan sobre la recta $x=-\frac{1}{2}$

   Note que la ecuación se puede escribir como

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^5=-1=exp(i\pi)$$

   de donde se sigue que $\dfrac{z+1}{z}=w=exp\left(i\left(\dfrac{\pi+2\pi k}{5}\right)\right)$ con $k=0,\dots,4$, en efecto

$$\Re(z)=\Re\left(\frac{1}{w-1}\right)=\Re\left(\frac{\overline{w}-1}{|w-1|^2}\right)$$

   tomando $w=a+bi$ y sabiendo que $|w|=1$ se sigue que

$$\Re(z)=\Re\left(\frac{a-bi-1}{(a-1)^2+b^2}\right)=\frac{a-1}{(a-1)^2+b^2}=\frac{a-1}{a^2-2a+1+b^2}=\frac{a-1}{2(1-a)}=-\frac{1}{2}$$

9. Mostrar que para $n\neq 0$, las raices de la ecuación $(1+z)^{2n}+(1-z)^{2n}=0$, estan dadas por

$$z_k=i\tan\frac{(2k+1)\pi}{4n}, n\in\mathbb{Z}^+,\quad k=0,1,2,\dots$$

Note que podemos escribir la ecuación de la forma

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=-1=e^{i\pi}$$

tomando $w=\dfrac{1+z}{1-z}$, vemos que $w-zw=1+z$, entonces $w-1=z(1+w)$, esto es

$$\begin{aligned} z&=\frac{w-1}{w+1}\\ &=\frac{w-1}{w+1}\frac{\overline{w}+1}{\overline{w}+1}\\ &=\frac{w\overline{w}+w-\overline{w}-1}{w\overline{w}+w+\overline{w}+1}. \end{aligned}$$

Es claro que $|w|=1$, entonces

$$z=\frac{w-\overline{w}}{2+w+\overline{w}}\frac{2iIm(w)}{2(1+\Re(w))}=\frac{iIm(w)}{1+\Re(w)}.$$

Note que $w_k=exp\left(i\dfrac{\pi(2k+1)}{2n}\right)$, $k=0,1,\dots$, entonces:

$$z_k=i\frac{\sin(\theta_k)}{1+cos(\theta_k)}=i\tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right)=i\tan\left(\frac{\pi(2k+1)}{4n}\right)$$

10. Calcular $(-3+4i)^{\frac{3}{2}}$, primero tomando la raíz cuadrada y el resultado elevarlo al cubo, y segundo, invirtiendo el procedimiento.

    Note que

$$z^{1/2}=\sqrt{5}\exp\left(\frac{i}{2}\left(\pi+\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+2\pi k\right)\right),\quad k=0,1$$

$$z_0^{3/2} = 5\sqrt{5}\exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right), \quad z_1^{3/2} = 5\sqrt{5}\exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi\right)\right)$$

Por otro lado

$$z^3 = 5^3 \exp\left(3i\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right)$$

$$z_0^{3/2} = 5\sqrt{5}\exp\left(\frac{3i}{2}\left(3\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\right), \quad z_1^{3/2} = 5\sqrt{5}\exp\left(\frac{3i}{2}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Se puede ver que en efecto en este caso da igual el orden de tomar la potencia dado que al distribuir $\frac{3}{2}$ en las expresiones anteriores obtenemos por un lado un ángulo $\phi + 3\pi$ y por el otro $\phi + \pi$ que sabemos que son el mismo ángulo, esto pasa porque 3 y 2 son primos relativos xd.

Toca acordarse de que $\left(z^{1/n}\right)^m$ tiene menos elementos que $(z^m)^{1/n}$ si $(m, n) > 1$

11. Calcular $(-3+4i)^{-\frac{3}{2}}$.

    Sea $z = (-3+4i)$, note que $z^{-3} = \frac{1}{125} exp\left(i\left(-3\pi + 3\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$, entonces

$$z^{-3/2} = \frac{\sqrt{5}}{25} exp\left(\frac{i}{2}\left(-3\pi + 3\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + 2\pi k\right)\right), \quad k = 0, 1$$