Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Análisis Numérico I
Parcial III

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres ....

1. Problema 1

Dada la función
$$f(x) = x + \frac{1}{x} - 2, \quad f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},$$
se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:
$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}.$$

- Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?
- Dar un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente.

2. Problema 2

Sea
$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_d),$$
donde $r_1 < r_2 < \dots < r_d$.

- Probar que si $x_0 > r_d$ la sucesión de Newton-Raphson converge a r_d.
- Para un polinomio
$$P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0, \quad a_d \neq 0,$$
tal que sus d raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método para aproximar todas sus raíces:
  - Se comienza con un valor x_0 mayor que
  $$M = \max\left\{1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\right\}.$$
  - Se genera a partir de x_0 la sucesión de Newton-Raphson, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de P, llamémosla r_d; obteniéndose de este modo un valor aproximado $\tilde{r_d}$.

- Se divide P por $x - \tilde{r_d}$ y se desprecia el resto, dado que $r_d \approx \tilde{r_d}$. Se redefine ahora P como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.

- Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio

$$P(x) = 2x^3 - 4x + 1.$$

3. Problema 3

Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a+h, \ldots, x_n = b$, donde $h = \dfrac{b-a}{n}$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos $x_i, i = 0 \ldots n$. Probar que

a)

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

.

b)

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

.

4. Problema 4: Silueta de la Mano

Para dibujar la silueta de su mano, siga los siguientes pasos:

- Preparamos una tabla de abcisas y ordenadas usando los siguientes comandos de MATLAB:

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

- Dibuje su mano en un papel y póngalo sobre la pantalla del computador. Use el ratón para seleccionar alrededor de 37 puntos que delineen su mano (como se muestra en la figura). Termine la instrucción `ginput` oprimiendo enter.

- Grafique los puntos (x,y) obtenidos y la mano correspondiente mediante el comando `plot` de MATLAB.

- Implemente el método de splines cúbicos.

- Interpole por separado los puntos (i, x_i) e (i, y_i) mediante splines cúbicos usando su programa.

- Grafique la curva parametrizada que se obtiene.

- Estime el área de su mano usando la fórmula del área de Gauss:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n\right|.$$

5. Problema 5: Integración Numérica

Se tiene la integral

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

- Use las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar I para varios tamaños de paso de integración $h_n = 1/n$, $n = 10, 50, 100, 250, 500, 1000, 1500, 2000$. Grafique el logaritmo del error absoluto versus n para cada paso. Describa el efecto de redondeo de los errores cuando $h \to 0$.

- Implemente el método de integración de Romberg para calcular I. Grafique el logaritmo del error en los términos diagonales en la tabla de extrapolación versus $\log h$. Verifique sus resultados con la teoría.