Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General
Taller II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Demostrar que toda variedad es regular y, por lo tanto, metrizables.

   Demostración. Sea $x \in X$, como X es m-variedad,entonces dada U una vecindad de x, tenemos que U es homeomorfo $V \subset \mathbb{R}^m$. Sea h es homeomorfismo, como $\mathbb{R}^m$ es localmente compacto, entonces dada una vecindad W de $h(x)$ existe un K compacto tal que

   $$W_{h(x)} \subset K \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

   y como h es homeomorfismo

   $$h^{-1}(W_{h(x)}) \subset h^{-1}(K) \subset U$$

   con $h^{-1}(W_{h(x)})$ vecindad de x y $h^{-1}(K)$ compacto. Esto prueba que X es local localmente compacto, como localmente compacto y Haussdorf implica regular entonces hemos probado que toda variedad es regular, por la definición de variedad tenemos que esta es 2-contable, luego por el teorema de Urysohn toda variedad es metrizable. □

2. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Suponga que para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x y un entero positivo k tal que U puede ser embedido en $\mathbb{R}^k$. Mostrar que X puede ser embedido en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.

   Demostración. Como X es Haussdorf y compacto entonces es normal, luego podemos cubrir a X con un número finito de $\{U_i\}$ que pueden ser embedidos en $\mathbb{R}^{k_i}$, sean $\{g_i\}$ los embedimientos correspondientes, como X es normal, tenemos una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ dominada por $\{U_i\}$. Sea $A_i = \operatorname{supp}(\phi_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$ defina la función $h_i : X \to \mathbb{R}^{k_i}$ como

   $$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \ldots, 0) & \text{si } x \in X - A_i \end{cases}$$

   Ahora defina

   $$F : X \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_n}}$$

   como

   $$F(x) = \big(\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), h_1(x), \ldots, h_n(x)\big).$$

   Claramente F es continua pues es continua componente a componente y ya habíamos probado que h_i es continua, basta ver que F es inyectiva. Suponga $F(x) = F(y)$, entonces $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Ahora como $\phi_i(x) > 0$ para algún i, $\phi_i(y) > 0$ también, luego $x, y \in U_i$. Así

   $$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

se concluye que $g_i(x) = g_i(y)$. Pero $g_i : U_i \to \mathbb{R}^{k_i}$ es inyectiva, esto es $x = y$.

□

3. Sea X un espacio de Hausdorff tal que cada punto de X tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Mostrar que si X es compacto, entonces X es una m-variedad.

   Demostración. Como X es compacto, Haussdorf y todo $x \in X$ tiene una vecidad U_x que puede ser embedida en $\mathbb{R}^k$, entonces X puede ser embedido en $\mathbb{R}^N$ para algún N por el punto anterior. Esto es que X es homeomorfo a un $V \subset \mathbb{R}^N$ y como $\mathbb{R}^N$ es 2-contable entonces V también y por tanto X. □

4. Una familia indexada $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de X se dice *familia indexada puntualmente finita* si cada $x \in X$ pertenece a A_α solo para un número finito de valores de α. **Lema (de la contracción)**. Sea X un espacio normal; sea $\{U_1, U_2, \ldots\}$ un cubrimiento indexado puntualmente finito de X. Entonces, existe un cubrimiento indexado $\{V_1, V_2, \ldots\}$ de X tal que $\bar{V}_n \subset U_n$ para cada n.

   Demostración. Sea
$$A_1 = X - \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} U_i\right)$$
   A_1 es cerrado en X y además está contenido en U_1 pues $\{U_1, U_2, \ldots\}$ cubre a X, por normalidad existe V_1 tal que $A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$. Además $\{V_1, U_2, \ldots\}$ cubre a X.

   De manera recursiva, si son dados $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ tales que $\overline{V_i} \subseteq U_i$ y $\{V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots\}$ cubre a X, defina
$$A_k = X - (V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}) - \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} U_i\right)$$
   A_k es cerrado en X y $A_k \subseteq U_k$, luego existe V_k tal que $A_k \subseteq V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq U_k$. Así $\{V_1, \ldots, V_k, U_{k+1}, \ldots\}$ cubre a X.

   Queremos ver que $\{V_1, V_2, \ldots\}$ cubre a X. Sea $x \in X$, como $\{U_1, U_2, \ldots\}$ es una familia indexada puntualmente finita, $x \in U_k$ para finitos índices k, tome n el mayor natural tal que $x \in U_n$, es decir $x \notin U_k$ para $k > n$, luego, como $\{V_1, \ldots, V_n, U_{n+1}, \ldots\}$ cubre a X, debe existir un $k \leq n$ tal que $x \in V_k$, así $\{V_1, V_2, \ldots\}$ cubre a X. □

5. La condición de Hausdorff es una parte esencial en la definición de una variedad; no se sigue de las otras partes de la definición. Considere el siguiente espacio: Sea X la unión del conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ y el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Se topologiza X tomando como base la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que no contienen al 0, junto con todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$ y todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$, para $a > 0$. El espacio X se llama *la recta con dos orígenes.*

   a) Verificar que esto es una base para una topología.

      Demostración. Denote por $\mathscr{B}$ a la colección dada en el enunciado.

      Sea $x \in X$, veamos que existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$, para esto tenemos dos casos:

      i. Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tome el intervalo $(0, x+1)$ si $x > 0$, si no, tome $(x-1, 0)$.
      ii. Si $x \in \{p, q\}$ tome $(-a, 0) \cup \{x\} \cup (0, a)$.

      Ahora sea $x \in U_1 \cap U_2$ donde $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$, tenemos los siguientes casos:

      i. Si U_1 y U_2 son intervalos abiertos que no contienen al 0, i.e., $U_1 = (a, b)$ y $U_2 = (c, d)$ considere $U_3 = (e, f)$ donde $e = \text{máx}\{a, c\}$ y $f = \text{mín}\{b, d\}$.

ii. Si U_1 es un intervalo abierto que no contiene al 0 y $U_2 = (-a,0) \cup \{y\} \cup (0,a)$, donde $a > 0$ y $y \in \{p,q\}$. Tenemos que $U_1 = (b,c)$, Si $b < 0$ necesariamente $c < 0$, luego podemos tomar $U_3 = (e,c)$ donde $e = \text{máx}\{-a,b\}$. Ahora, si $b > 0$, tome $U_3 = (b,e)$ donde $e = \text{mín}\{a,c\}$.
iii. Si U_1 y U_2 son de la forma $(-a_1,0) \cup \{y\} \cup (0,a_1)$ y $(-a_2,0) \cup \{y\} \cup (0,a_2)$ con $y \in \{p,q\}$, tome $U_3 = (-a,0) \cup \{y\} \cup (0,a)$ con $a = \text{mín}\{a_1,a_2\}$.
iv. Si U_1 es de la forma $(-a,0) \cup \{p\} \cup (0,a)$ y U_2 es de la forma $(-b,0) \cup \{q\} \cup (0,b)$, entonces x debe pertenecer o bien a $(-a,0) \cap (-b,0)$ o bien $(0,a) \cap (0,b)$, en cualquiera de los dos casos procedemos como en el caso i.

De ésta forma, para cada caso conseguimos un U_3 tal que $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$, concluyendo así que $\mathscr{B}$ es una base. □

b) Mostrar que cada uno de los espacios $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} f : X - \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{si } x = q \end{cases} \end{aligned}$$

f claramente es biyectiva, hay que ver que es contínua, note que $f|_{\mathbb{R}-\{0\}} = Id_{\mathbb{R}-\{0\}}$, luego, si probamos que f es contínua en q tendremos que f es contínua. Sea U una vecindad básica de $0 = f(q)$, es decir $U = (a,b)$ con $a < 0 < b$, luego $f^{-1}(U) = (a,0) \cup \{q\} \cup (0,b)$ si tomamos $0 < c \leq \text{mín}\{|a|,|b|\}$, tenemos que $(-c,0) \cup \{q\} \cup (0,c)$ es una vecindad de q contenida en $f^{-1}(U)$, por lo tanto f es contínua en q. Ahora veamos que f es abierta, para esto solo necesitamos verificar que la imagen de un abierto básico es abierta en $\mathbb{R}$, sea U un abierto básico de $X - \{p\}$, si U es un intervalo abierto que no contiene al 0, $f(U)$ es él mismo, si U es de la forma $(-a,0) \cup \{q\} \cup (0,a)$, entonces $f(U) = (-a,a)$, el cual es abierto en $\mathbb{R}$, por tanto al ser f continua, biyectiva y abierta, es un homeomorfismo. Para ver que $X - \{q\}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ la prueba es análoga. □

c) Mostrar que X satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.

Demostración. Sea $x \in X$, veamos que $\{x\}$ es cerrado. Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tenemos que

$$X - \{x\} = (-\infty,x) \cup [(x,0) \cup \{p\} \cup (0,-x)] \cup [(x,0) \cup \{q\} \cup (0,-x)] \cup (0,\infty), \text{ si } x < 0$$
$$X - \{x\} = (-\infty,0) \cup [(-x,0) \cup \{p\} \cup (0,x)] \cup [(-x,0) \cup \{q\} \cup (0,x)] \cup (x,\infty), \text{ si } x > 0$$

Ademas

$$X - \{p\} = (-\infty,0) \cup [(-a,0) \cup \{q\} \cup (0,a)] \cup (0,\infty)$$

y

$$X - \{q\} = (-\infty,0) \cup [(-a,0) \cup \{p\} \cup (0,a)] \cup (0,\infty)$$

para algún $a > 0$, de ésta manera $X - \{x\}$ es abierto para todo $x \in X$ y por lo tanto $\{x\}$ es cerrado. Para ver que X no es Hausdorff, tome p y q y sean U_p, U_q vecindades de p y q respectivamente, tales que $q \neq U_p$ y $p \neq U_q$. Ya que U_p es abierto, existe $(-a,0) \cup p \cup (0,a) \subseteq U_p$ para algún $a > 0$, de manera análoga existe $(-b,0) \cup \{q\} \cup (0,b) \subseteq U_q$ con $b > 0$, ahora tome $c = \text{mín}\{a,b\}$, note que $(-c,0) \cup (0,c) \subseteq U_p \cap U_q$, luego X no puede ser Hausdorff. □

d) Mostrar que X satisface todas las condiciones para ser una 1-variedad, excepto la condición de Hausdorff.

Demostración. Para ver que X tiene una base contable, considere la colección de los intervalos abiertos con extremos racionales, los conjuntos de la forma $(-r, 0) \cup \{p\} \cup (0, r)$ y los conjuntos de la forma $(-r, 0) \cup \{q\} \cup (0, r)$ con $r \in \mathbb{Q}^+$. Esta colección es contable, pues es unión finita de conjuntos contables, además, por la densidad de los racionales, forma una base para X.

Ahora, veamos que dado $x \in X$ existe una vecindad de x que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}$, Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, tenemos que existen $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $x \in (a, b)$ y $0 \notin (a, b)$, además (a, b) es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Por (b), tenemos que $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ son vecindades de q y p, respectivamente, que son homeomorfas a $\mathbb{R}$. Por lo tanto X cumple todas las condiciones de una 1-variedad, excepto ser Hausdorff. $\square$