

1. Sean τ y τ' dos topologías sobre X . Si $\tau' \supset \tau$, ¿qué implica la conexidad de X en una topología sobre la otra?

Solución: Note que si X es conexo en la topología τ' , entonces en la topología τ también lo es. Supongamos que no, entonces existen dos abiertos disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$, como $\tau \subset \tau'$ entonces $A, B \in \tau'$, luego X no sería conexo.

La contrarrecíproca nos dice que si X es desconexo en τ entonces es desconexo en τ' , sin embargo que X sea conexo en τ no implica conexidad en la topología τ' . Por ejemplo, considere los espacios topológicos (\mathbb{R}, τ) , (\mathbb{R}, τ_ℓ) , con τ la topología usual y τ_ℓ la topología del límite inferior, es claro que $\tau \subset \tau_\ell$. Sabemos que \mathbb{R} es conexo en la topología usual, pero \mathbb{R}_ℓ no lo es. La prueba de esto se encuentra en el ejercicio 7.

2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subespacios conexos de X , tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n . Demuestra que $\bigcup A_n$ es conexo.

Demostración. Supongamos que no, esto es

$$\bigcup_n A_n = B \cup C$$

con $B \cap C = \emptyset$ y $B, C \neq \emptyset$. Tomemos $A_1 \subset B$, en efecto

$$I := \{i \in \mathbb{N} : A_i \subset C\} \neq \emptyset,$$

de lo contrario $C = \emptyset$ y esto no es posible. El principio del buen orden garantiza que I tiene un elemento mínimo, digamos k , esto nos da que $A_{k-1} \subset B$, así $A_k \cap A_{k-1} = \emptyset$, una contradicción. \square

3. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X ; sea A un subespacio conexo de X . Muestra que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α , entonces $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ es conexo.

Demostración. Note que

$$A \cup \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (A \cup A_\alpha)$$

y como $A \subset \bigcap_\alpha (A \cup A_\alpha)$, y $A \neq \emptyset$, El conjunto $\{A \cup A_\alpha\}_\alpha$ es una colección de subespacios conexos de X con un punto en común, de donde se concluye lo deseado. \square

4. Demuestra que si X es un conjunto infinito, entonces es conexo en la topología del complemento finito.

Demostración. Suponga que no, entonces $X = A \cup B$ con A, B abiertos disjuntos, como A y B son disjuntos tenemos que $B = A^c$, entonces B es finito ya que $A \in \tau$, como $B \in \tau$ y $A = B^c$, se sigue que A es finito, lo que contradice que X es infinito. \square

5. Un espacio es *totalmente desconexo* si sus únicos subespacios conexos son conjuntos de un solo punto. Muestra que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente desconexo. ¿Es cierto el recíproco?

Demostración. En efecto $A = \{x\}$ donde $x \in X$ es conexo ya que no pueden haber dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión sea $\{x\}$. Si $|A| \geq 2$, note que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

y por tanto A no es conexo, ya que los singletons son abiertos disjuntos en la topología discreta. \square

El recíproco no es cierto. \mathbb{Q} no es conexo con la topología usual y los únicos subespacios conexos de \mathbb{Q} son los conjuntos de un solo punto.

Si Y es un subespacio de \mathbb{Q} que contiene dos puntos p y q , se puede elegir un número irracional a entre p y q , tal que

$$Y = (Y \cap (-\infty, a)) \cup (Y \cap (a, +\infty))$$

y la topología usual no es la misma topología discreta (los puntos en la topología usual de \mathbb{Q} no son abiertos).

6. Sea $A \subset X$. Muestra que si C es un subespacio conexo de X que intersecta tanto A como $X - A$, entonces C intersecta ∂A .

Demostración. Suponga que $C \cap \partial A = \emptyset$, como $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ entonces $C \cap A \subset \overset{\circ}{A}$, análogamente $\overline{X - A} = (X - \overset{\circ}{A}) \cup \partial(X - A)$ y $C \cap (X - A) \subset (X - \overset{\circ}{A})$, además

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap (X - A)) \subset (X - \overset{\circ}{A}) \cup \overset{\circ}{A},$$

como C es conexo, entonces C cae enteramente en $(X - \overset{\circ}{A})$ o en $\overset{\circ}{A}$, esto contradice que C intersecta tanto a $X - A$ como a A . \square

7. ¿Es el espacio \mathbb{R}_ℓ conexo? Justifica tu respuesta.

Falso, en efecto

$$\mathbb{R}_\ell = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

y esta es una desconexión.

8. Determina si \mathbb{R}^ω es conexo en la topología uniforme.

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^\omega$ los conjuntos de todas las sucesiones acotadas y no acotadas respectivamente. En efecto $A \cup B = \mathbb{R}^\omega$ y $A \cap B = \emptyset$, nos falta ver que A y B son abiertos y obtenemos una desconexión.

Si $a \in A$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y dado $\varepsilon < 1$, en efecto

$$B(a, \varepsilon) := \{b \in \mathbb{R}^\omega : \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon\},$$

ya que eliminamos el mínimo entre $|a_n - b_n|$ y 1 presente en la métrica uniforme. Queremos ver que a es punto interior, esto es que dado $b \in B(a, \varepsilon)$, $b \in A$, en efecto

$$|b_n| \leq |a_n - b_n| + |a_n| < \varepsilon + M.$$

Si $a \in B$ el razonamiento es análogo, a es no acotada si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$$

y además tenemos que

$$|a_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n|,$$

de lo que se sigue que

$$\infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| \leq \varepsilon + \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|.$$

Concluimos en cada caso que $b \in B(a, \varepsilon)$, luego A y B forman una desconexión.

9. Sea A un subconjunto propio de X , y sea B un subconjunto propio de Y . Si X e Y son conexos, muestra que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

Demostración. Sea $\tilde{a} \in X - A$, entonces $\{\tilde{a}\} \times Y$ es conexo y además disjunto con $A \times B$, sea $\tilde{b} \in X - B$, luego $X \times \{\tilde{b}\}$ es conexo y disjunto de $A \times B$, en efecto

$$(\{\tilde{a}\} \times Y) \cup (X \times \{\tilde{b}\})$$

es conexo ya que tienen el punto (\tilde{a}, \tilde{b}) en común. Más aún

$$(X \times Y) - (A \times B) = \left(\bigcup_{b \in Y - B} ((\{\tilde{a}\} \times Y) \cup (X \times \{b\})) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in X - A} ((\{a\} \times Y) \cup (X \times \{\tilde{b}\})) \right)$$

es conexo. □

10. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios conexos; sea X el espacio producto

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X .

- a) Dado cualquier subconjunto finito K de J , sea X_K el subespacio de X que consiste en todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$. Muestra que X_K es conexo.

Demostración. Sea $K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset J$,

$$\begin{aligned} f: X_K &\longrightarrow X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n} \\ x &\longmapsto f(x) = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo ya que cada componente es continua y la función es abierta porque el producto cartesiano de abiertos es abierto, la biyectividad es inmediata. Esto nos da que X_K es conexo dado que $X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n}$ es producto finito de conexos. □

- b) Demuestra que la unión Y de los espacios X_K es conexa.

Demostración. En efecto $a \in X_K$, $K \subset J$, $|K| \leq \infty$, entonces

$$\bigcup_K X_K$$

es conexo porque es unión de conexos que comparten un punto. □

- c) Demuestra que X es igual a la clausura de Y ; concluye que X es conexo.

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in X$ y $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ una vecindad de \mathbf{x} , tenemos entonces que $U_\alpha = X_\alpha$ para todos salvo finitos índices α ; de esta manera, existe un elemento $\mathbf{y} \in U$ tal que $y_\alpha = a_\alpha$ para todos salvo finitos índices α . Por lo tanto $U \cap Y \neq \emptyset$. De esta manera $X = \overline{Y}$; y ya que la clausura de un subespacio conexo de X es conexa, tenemos que X es conexo. □

11. Sea $p: X \rightarrow Y$ un mapeo cociente. Demuestra que si cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ es conexo, y si Y es conexo, entonces X es conexo.

Demostración. Supongamos que U y V son una desconexión de X , si $y \in p(U)$, entonces $y = p(x)$ para algún $x \in U$, por tanto $x \in p^{-1}(\{y\})$. $p^{-1}(\{y\})$ es conexo y $x \in U \cap p^{-1}(\{y\})$, tenemos que $p^{-1}(\{y\}) \subset U$, por tanto, $p^{-1}(\{y\}) \subset U$ para todo $y \in p(U)$, así pues $p^{-1}(p(U)) \subset U$. Como $U \subset p^{-1}(p(U))$ tenemos que $U = p^{-1}(p(U))$, análogamente $V = p^{-1}(p(V))$.

Como p es un mapa cociente, $p(U)$ y $p(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos de Y , además $p(U) \cup p(V) = Y$ ya que p es sobreyectiva, por lo que $p(U)$ y $p(V)$ son una desconexión de Y

$$p^{-1}(p(U) \cap p(V)) = p^{-1}(p(U)) \cap p^{-1}(p(V)) = U \cap V = \emptyset,$$

lo que contradice el hecho de que Y es conexo. □

12. Sea $Y \subset X$; sean X y Y conexos. Demuestra que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ y $Y \cup B$ son conexos.

Demostración. Suponga que $Y \cup A$ no es conexo, esto es $Y \cup A = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, como Y es conexo, entonces $Y \subset Y \cup A \subset U \cup V$, de esto se sigue $Y \subset U$ o $Y \subset V$.

Suponga que $Y \subset U$, entonces $V \subset A$, como $A \cup B = X - Y$ con $A \cap B = \emptyset$, tenemos que

$$Y \cup (X - Y) = (Y \cup A) \cup B = X = U \cup V \cup B,$$

Ya que U y V forman una separación de $Y \cup A$, ningún punto de acumulación de U está en V , además, como $A \cup B$ es una separación de $X - Y$ y $U \subset A$, entonces B no contiene ningún punto de acumulación de U . Por lo tanto U es un subconjunto propio de X que es abierto y cerrado, de donde se sigue que X no es conexo, llegando a una contradicción. El caso $Y \cup B$ es análogo. □