Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General
Taller II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. a) Un G_δ*-conjunto* en un espacio X es un conjunto A que es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X. Demuestra que en un espacio T_1 de primera numerabilidad, cada conjunto unitario es un G_δ-conjunto.

   b) Existe un espacio familiar en el cual cada conjunto unitario es un G_δ-conjunto, pero que no satisface el axioma de primera numerabilidad. ¿Cuál es?

   La terminología proviene del alemán. La "G" representa "Gebiet," que significa "conjunto abierto," y la "δ" representa "Durchschnitt," que significa "intersección."

2. Demuestra que si X tiene una base numerable $\{B_n\}$, entonces toda base $\mathscr{C}$ de X contiene una base numerable para X. *[Sugerencia: Para cada par de índices n, m para los cuales sea posible, elige $C_{n,m} \in \mathscr{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.]*

3. Sea X un espacio con una base numerable; sea A un subconjunto no numerable de X. Demuestra que incontablemente muchos puntos de A son puntos de acumulación de A.

4. Demuestra que todo espacio métrico compacto X tiene una base numerable. *[Sugerencia: Sea $\mathscr{A}_n$ un recubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.]*

5. a) Demuestra que todo espacio métrico con un subconjunto denso numerable tiene una base numerable.

   b) Demuestra que todo espacio métrico de Lindelöf tiene una base numerable.

6. Demuestra que $\mathbb{R}_\ell$ e I_0^2 no son metrizables.

7. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface S_Ω? ¿Qué ocurre con $\bar{S}_\Omega$?

8. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme?

9. Sea A un subespacio cerrado de X. Demuestra que si X es Lindelöf, entonces A es Lindelöf. Muestra con un ejemplo que si X tiene un subconjunto denso numerable, A no necesariamente tiene un subconjunto denso numerable.

10. Demuestra que si X es un producto numerable de espacios con subconjuntos densos numerables, entonces X tiene un subconjunto denso numerable.

11. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Demuestra que si X es Lindelöf, o si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces $f(X)$ satisface la misma condición.

12. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y abierta. Demuestra que si X satisface el primer o segundo axioma de numerabilidad, entonces $f(X)$ satisface el mismo axioma.

13. Demuestra que si X tiene un subconjunto denso numerable, entonces toda colección de conjuntos abiertos disjuntos en X es numerable.

14. Demuestra que si X es Lindelöf y Y es compacto, entonces $X \times Y$ es Lindelöf.

15. Considera $\mathbb{R}^I$ con la métrica uniforme, donde $I = [0,1]$. Sea $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ el subespacio de funciones continuas. Demuestra que $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ tiene un subconjunto denso numerable, y por lo tanto una base numerable.

    [Sugerencia: Considera aquellas funciones continuas cuyos gráficos consisten en un número finito de segmentos de línea con extremos racionales.]

16. *a*) Demuestra que el espacio producto $\mathbb{R}^I$, donde $I = [0,1]$, tiene un subconjunto denso numerable.

    b) Demuestra que si J tiene cardinalidad mayor que $\mathscr{P}(\mathbb{Z}_+)$, entonces el espacio producto $\mathbb{R}^J$ no tiene un subconjunto denso numerable.

    [Sugerencia: Si D es denso en $\mathbb{R}^J$, define $f : J \to \mathscr{P}(D)$ por la ecuación $f(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}((a,b))$, donde (a,b) es un intervalo fijo en $\mathbb{R}$.]

*17. Considera $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de la caja. Sea $\mathbb{Q}^\infty$ el subespacio que consiste en secuencias de racionales que terminan en una cadena infinita de ceros. ¿Cuáles de nuestros cuatro axiomas de numerabilidad satisface este espacio?

*18. Sea G un grupo topológico de primera numerabilidad. Demuestra que si G tiene un subconjunto denso numerable, o es Lindelöf, entonces G tiene una base numerable.

    [Sugerencia: Sea $\{B_n\}$ una base numerable en e. Si D es un subconjunto denso numerable de G, demuestra que los conjuntos dB_n, para $d \in D$, forman una base para G. Si G es Lindelöf, elige para cada n un conjunto numerable C_n tal que los conjuntos cB_n, para $c \in C_n$, cubran G. Demuestra que cuando n recorre $\mathbb{Z}_+$, estos conjuntos forman una base para G.]