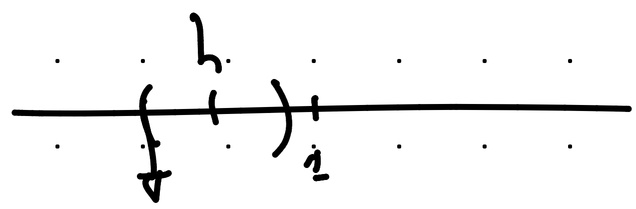
1. Decimos que una serie de numeros complejos $\sum_1^\infty z_n$ converge **absolutamente**, si la serie de numeros reales $\sum_1^\infty |z_n|$ converge. Si la serie converge, pero no absolutamente, se dice condicionalmente convergente. Demostrar el **test de la raiz**: Sea $lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|z_k|} = L$. Entonces la serie $\sum_1^\infty z_n$, converge absolutamente si $L<1$, y diverge si $L>1$

Demostración:

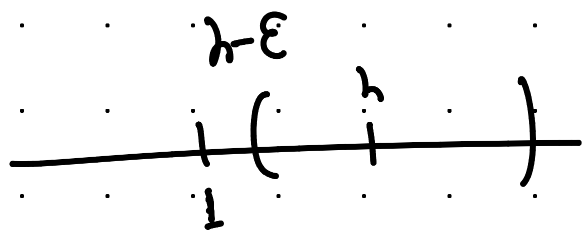


Tenemos que $\lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \to \exists\ \varepsilon > 0$ tq

$L+\varepsilon<1$ $\forall n$ tq $N<n$ $\sqrt[n]{|z_n|} < L+\varepsilon$

$\to |z_n| < (L+\varepsilon)^n \to \sum_{n=N}^{\infty} |z_n| < \sum_{n=N}^{\infty} (L+\varepsilon)^n$

acabo



Dado $\varepsilon>0$ tq $L-\varepsilon>1$ y dado $m>0$ $\exists\ n>m$ tq

$\sqrt[n_m]{|z_{n_m}|} > L-\varepsilon \to |z_{nm}| > (L-\varepsilon)^{n_m}$

$\sum_{m=1}^{\infty} |z_{nm}| > \sum_{m=1}^{\infty} (L-\varepsilon)^{n_m}$

↳ $L-\varepsilon>1 \to$ diverge ☒

2. Estudie la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n + sen(\frac{n\pi}{2})\right]^n}{3^n}$$

$$\frac{\left|(-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{3} \longrightarrow \pi(3 \bmod 4) \quad \pi(1 \bmod 4)$$

$$= \frac{2}{3}$$

3. Enuncie y demuestre el **tes de comparación** para convergencia o divergencia de series complejas.

Sean b_n y a_n suceciones de $\# \in \mathbb{C}$ entonces si existe N tq $\forall n \geq N$ $|a_n| \leq K|b_n|$, entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ Converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

Demostração: Dado $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left| S_{|a|}(m) - S_{|a|}(n) \right| \leq K \left| S_{|b|}(m) - S_{|b|}(n) \right| < \varepsilon$$

entonces $S_a(n)$ es de cauchy (Sucesión de $\mathbb{R}$) converge

4. Enuncie y demuestre el **test de la razón** para convergencia de series complejas.

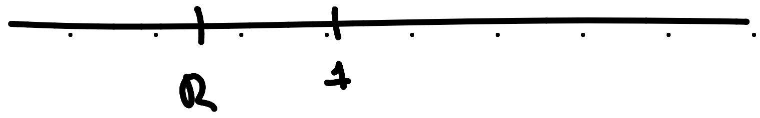
Enunciado dada una serie $\sum a_n$ de $\# \in \mathbb{C} \neq 0$ y sea $r = \liminf_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

① la serie converge absolutamente si $R < 1$

② la serie diverge si $r > 1$

③ Si $r \leq 1 \leq R$ lascon

Demonstração: ①



$\exists\, \varepsilon$ tq $0<R+\varepsilon<1$ $\rightarrow$ como R es limsup $\exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n>N$ $\rightarrow$

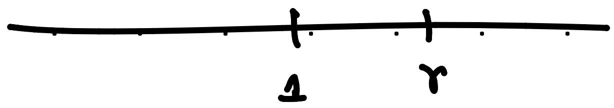
$$|a_{N+1}| \leq (R+\varepsilon)\,|a_N|$$

$$\rightarrow \quad |a_{N+M}| \leq (R+\varepsilon)|a_{N+M-1}| \leq (R+\varepsilon)^2 |a_{N+M-2}| \leq (R+\varepsilon)^M |a_N|$$

$$\rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (R+\varepsilon)^m\,|a_N|$$

y $|R+\varepsilon|<1$ $\boxtimes$

②



entonces dado $\varepsilon>0$ tq $r-\varepsilon>1$, y como r es un liminf $\rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N$ $\rightarrow$

$$|r-\varepsilon| \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$\rightarrow$ $|a_n||r-\varepsilon| \leq |a_{n+1}|$ entonces

$$|a_N|\,|r-\varepsilon|^m \leq |a_{N+m}|$$

$$\to \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, |r-\varepsilon|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

③ Claim $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \zeta(1)$, note que $\zeta(1) = O(\log n)$

y $\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Now claim $\zeta(2)$ is well known that $\zeta(2) = \pi^2/6$

y además

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = O(1)$$

Its easy to check that $\zeta(s) \neq 0$ for $Re(s) = 1$

* Exercise: $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$ as $x \to \infty$

→ Mean value of $\frac{1}{\zeta(s)}$

⑤ Estudie la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} i^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{log(n)}{n!} i^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ni^n}{log\ n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$$

Demostración:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right| \cancel{|i^n|} \to \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\right|^{n^2}} = \left|\frac{n}{n+1}\right|^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1-1}{n+1} \right|^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right|^n$$

$$\ll \lim_{n\to\infty} \left| 1 - \frac{1}{n} \right|^n$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log(n)}{n!} i^n \longrightarrow \ll \sqrt[n]{\frac{|\log(n)|}{|n^n e^{-n}|}} = \frac{1}{n e^{-1}} \sqrt[n]{\log n}$$

$$\ll \frac{e}{n} \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne} \sqrt[n]{n} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \longrightarrow \sqrt[n]{\frac{|(\sqrt{3}+i)|^n}{5^{n/2}}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n i^n}{\log n} \gg \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$$ xd

6. Demostrar que si la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge en un punto z_1 y diverge en un punto z_2, entonces converge absolutamente en la región $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, y diverge en la región $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$

La absolutament

Demostración: Sea $w = z - z_0$ y $w_1 = z_1 - z_0$

$\longrightarrow \quad |w| < |w_1| \longrightarrow \left| \sum_{n=N}^{m} |a_n||w|^n \right| < \sum_{n=N}^{m} |a_n||w_1|^n$

$< \varepsilon$

Se uno $w_2 = z_2 - z_0 \quad |w| > |w_2|$

$$\left| \sum_{n=0}^{M} a_n(w_2)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n (w_2)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n (w_2)^n \right|$$

$\parallel$

$S^*(n)$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{m} |a_n| |w_2|^n$$

$$< \sum_{n=N+1}^{m} |a_n| |w|^n$$

$\varepsilon < \sum_{n=N+1}^{m} |a_n| |w|^n$ y por tanto $S^*(n)$

no es de cauchy

7. Se define el radio de convergencia de la serie $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$, por

$$R = \frac{1}{lim_{n\to\infty} sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

donde los a_k son los coeficientes de la serie de potencias $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$. Demostrar que si $R = 0$, entonces la serie de potencias converge solo para z_0. Si $R = \infty$, la serie converge absolutamente para todo z. Si $0 < R < \infty$, la serie de potencias converge absolutamente para $|z - z_0| < R$, y diverge para $|z - z_0| > R$.

Demostración

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \quad tq \quad |a_m| > n^m \quad \forall m > N$

$|w|^m |a_m| > |n^m| |w|^m \longrightarrow$ diverge si $w \neq 0$

$\longrightarrow \quad w = z - z_0 \longrightarrow z = z_0 \quad$ Si $z = 0$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n > N$

$\rightarrow$ $|a_n| < \varepsilon^n$

$\rightarrow$ $|a_n||z|^n < |\varepsilon z|^n \longrightarrow$ converge si $|\varepsilon z| < 1$

$\rightarrow |z| < \frac{1}{\varepsilon}$ y por tomando ε chiquito $|z| < \infty$ rs

si $0 < R < \infty$ veamos que converge si $|z - z_0| < R$

Sea $w = z - z_0$, como $t = \lim \rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N \rightarrow$

$$|a_n| < (t+\varepsilon)^n$$

$$|a_n||w|^n < |(t+\varepsilon)w|^n \rightarrow |(t+\varepsilon)w| < 1$$

$\rightarrow |w| < \frac{1}{t+\varepsilon} \longrightarrow |w| < 1/t$

$\leftarrow$ dado $\varepsilon > 0$ y $N > 0$ $\exists m > N$ tq

$|w|(t-\varepsilon) < |a_m|^{1/m}|w| \rightarrow |w|^m (t-\varepsilon)^m < |a_m||w|^m$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(t-\varepsilon)w|^n$$ diverge si $|(t-\varepsilon)w| > 1$

$\rightarrow$ $|w| = |z - z_0| > \frac{1}{t-\varepsilon} > \frac{1}{t}$

8. Estudie la convergencia de las series

$$\sum_{0}^{\infty} n z^n \quad , \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3} \quad , \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n \to \lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\to R = \frac{1}{1} = 1 \quad \boxtimes$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3} \to \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^3} z^{n+1}}{\frac{1}{n^3} z^n} = \frac{n^3}{(n+1)^3} z$$

$$= z$$

converge si $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \to \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \lim \frac{1}{n^{1/2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{-1/2n}$$

$$= 1$$

$$R = 1 \quad \boxtimes$$

9. Hallar el radio de convergencia de las series

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(z-2+i)^n}{n!} \quad , \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(z-i)^n \quad , \sum_{1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(3n)^{\frac{1}{2}}}.$$

① $\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{e^{-n} n^n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{-1} n} = 0$

$$\to R = \frac{1}{0} = \infty \quad \boxtimes$$

② $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} \ll \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$$= 1$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(3n)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3n^{1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^{\frac{1}{2n}}}$$

$$\ll \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{1/n}(n^{1/n})^{1/2}}$$

$$= 1$$

$$\rightarrow R = 1 \quad |z+i| < 1$$

10. Demostrar que una serie de potencias es *uniformemente convergente* en el interior de su círculo de convergencia. Esto es, si R es el radio de convergencia de $\underline{\sum_0^\infty a_0(z-z_0)^n}$ y $0 < r < R$ entonces la serie converge uniformemente en $|z-z_0| \le r$.

Demostración: Sea $w = z - z_0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$,

$$b_n = \left| |a_n w^n| \right| \le |a_n| \, |r^n| \qquad \text{si} \quad |w| \le r$$

converge uniformemente

$$f_n = S_{b_n}(N)$$

11. Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$, una serie de potencias. Demuestre que en el circulo de convergencia, la serie representa una funcion analitica.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+h-z_0)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{n=10}^{\infty} a_n\left((z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n\right) \frac{1}{h}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{h\to 0} \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n)}{h}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n \quad \square$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n+1||a_{n+1}|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n+1|}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}}$$

12. Sea $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Sea $(z_n)|_{n=1}^{\infty}$, una sucesión que converge a z_0, tal que $z_n \neq z_0$, para $n = 1, 2, \ldots$. Si $f(z_n) = 0$, para $n = 1, 2, \ldots$, domostrar que $a_n = 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Domostración: z_n converge a z_0, además $f(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $z_n \neq z_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ además

$f(z)$ es una serie de potencias, $f(z)$ es analítica y por tanto continua. Como $z_n \to z_0$, dado $\delta > 0$ $\exists N$ tq si $n > N$ entonces

$|z_n - z_0| < \delta$ y por la continuidad dado $\varepsilon > 0$

$0 = |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$, dado $w \in B(z_0, \delta)$

$$0 = |f(z_n) - f(z_0)| \leq |\cancel{f(z_n)} - f(w)| + |f(w) - \cancel{f(z_0)}| < \cancel{2}\varepsilon$$

$$= \cancel{2}|f(w)|$$

$\to$ $f(w) = 0$ por tanto f es idénticamente 0

en la bola, esto es que $a_n = 0$

13. Sea $A \subseteq C$, un conjunto que contiene un punto limite z_0, suponga que $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n = \sum_0^\infty b_n(z-z_0)^n$, para todo $z \in A$. Demostrar $a_n = b_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Dem: $\exists A \in | h$.

$$0 = \sum_0^\infty \cancel{(a_n - b_n)}(z - z_0)^n$$

punto anterior

$z_0 \in A'$