UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ANÁLISIS NUMÉRICO I
PARCIAL III

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Problema 1

Dada la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - 2, \quad f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},$$

se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}.$$

- Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

- Dar un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente.

2. Problema 2

Sea

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_d),$$

donde $r_1 < r_2 < \dots < r_d$.

- Probar que si $x_0 > r_d$ la sucesión de Newton-Raphson converge a r_d.

  Demostración. Escribamos $f(x) = (x - r_d)g(x)$ con $g(x) = (x - r_1)\cdots(x - r_{d-1})$. De esta manera, $f'(x) = g(x) + (x - r_d)g'(x)$, luego la iteración del metodo de Newton Raphson es de la forma:

  $$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - r_d)g(x)}{(x_k - r_d)g'(x_k) + g(x_k)}$$

  Ahora asuma que $x_0 > r_d$, es decir $x_0 - r_d > 0$, esto implica que $x_0 - r_i > 0$ para $i = 1, \dots, a$ pues r_d es la mayor raíz de $f(x)$. Con esto en mente note que:

  $$\begin{aligned} x_1 - r_d &= x_0 - r_d - \frac{(x_0 - r_d)g(x)}{(x_0 - r_d)g'(x_0) + g(x_0)} \\ &= (x_0 - r_d)\left(1 - \frac{g(x_0)}{(x_0 - r_d)g'(x_0) + g(x_0)}\right) \end{aligned}$$

Ahora, veamos que $g'(x_0) > 0$:

$$g'(x_0) = \sum_{i=1}^{d-1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d-1} (x_0 - r_j) \right)$$

Como cada factor de cada producto es positivo, tenemos que cada sumando es positivo, y por lo tanto $g'(x_0) > 0$,luego $(x_0 - r_d)g'(x_0) + g(x) > g(x)$. Así

$$0 < \frac{g(x_0)}{(x_0 - r_d)g'(x_0) + g(x_0)} < 1$$

Y así

$$x_1 - r_d = (x_0 - r_d) \left(1 - \frac{g(x_0)}{(x_0 - r_d)g'(x_0) + g(x_0)} \right) > 0$$

Por lo tanto $x_1 - r_d > 0$. Procediendo de manera inductiva llegamos a que $x_k - r_d > 0$ y además, como

$$0 < \left(1 - \frac{g(x_{k-1})}{(x_{k-1} - r_d)g'(x_{k-1}) + g(x_{k-1})} \right) < 1$$

Vemos que existe una constante $M \in (0,1)$ tal que $x_k - r_d < M(x_{k+1} - r_d)$ lo cual implica que $x_k - r_d < M^k(x_0 - r_d)$, como $M^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$, tenemos que x_k converge a r_d

□

- Para un polinomio

$$P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0, \quad a_d \neq 0,$$

tal que sus d raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método para aproximar todas sus raíces:

  - Se comienza con un valor x_0 mayor que

$$M = \text{máx}\left\{ 1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|} \right\}.$$

  - Se genera a partir de x_0 la sucesión de Newton-Raphson, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de P, llamémosla r_d; obteniéndose de este modo un valor aproximado $\tilde{r_d}$.
  - Se divide P por $x - \tilde{r_d}$ y se desprecia el resto, dado que $r_d \approx \tilde{r_d}$. Se redefine ahora P como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.

- Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio

$$P(x) = 2x^3 - 4x + 1.$$

3. Problema 3

Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \ldots, x_n = b$, donde $h = \dfrac{b-a}{n}$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos $x_i, i = 0 \ldots n$. Probar que a)

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

.

b)

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

.

4. Problema 4: Silueta de la Mano

Para dibujar la silueta de su mano, siga los siguientes pasos:

- Preparamos una tabla de abcisas y ordenadas usando los siguientes comandos de MATLAB:

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

- Dibuje su mano en un papel y póngalo sobre la pantalla del computador. Use el ratón para seleccionar alrededor de 37 puntos que delineen su mano (como se muestra en la figura). Termine la instrucción `ginput` oprimiendo enter.
- Grafique los puntos (x, y) obtenidos y la mano correspondiente mediante el comando `plot` de MATLAB.
- Implemente el método de splines cúbicos.
- Interpole por separado los puntos (i, x_i) e (i, y_i) mediante splines cúbicos usando su programa.
- Grafique la curva parametrizada que se obtiene.
- Estime el área de su mano usando la fórmula del área de Gauss:
$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right|.$$

5. Problema 5: Integración Numérica

Se tiene la integral

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi.$$

- Use las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar I para varios tamaños de paso de integración $h_n = 1/n$, $n = 10, 50, 100, 250, 500, 1000, 1500, 2000$. Grafique el logaritmo del error absoluto versus n para cada paso. Describa el efecto de redondeo de los errores cuando $h \to 0$.
- Implemente el método de integración de Romberg para calcular I. Grafique el logaritmo del error en los términos diagonales en la tabla de extrapolación versus $\log h$. Verifique sus resultados con la teoría.