UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
TOPOLOGÍA GENERAL

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre X. Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, ¿qué implica la conexidad de X en una topología sobre la otra?

2. Sea $\{A_n\}$ una secuencia de subespacios conexos de X, tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Demuestra que $\bigcup A_n$ es conexo.

3. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de X; sea A un subespacio conexo de X. Muestra que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, entonces $A \cup \left(\bigcup A_\alpha\right)$ es conexo.

4. Demuestra que si X es un conjunto infinito, entonces es conexo en la topología del complemento finito.

5. Un espacio es *totalmente disconexo* si sus únicos subespacios conexos son conjuntos de un solo punto. Muestra que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente desconexo. ¿Es cierto el recíproco?

6. Sea $A \subset X$. Muestra que si C es un subespacio conexo de X que intersecta tanto A como $X - A$, entonces C intersecta $\text{Bd}A$.

7. ¿Es el espacio $\mathbb{R}_\ell$ conexo? Justifica tu respuesta.

8. Determina si $\mathbb{R}^\omega$ es conexo en la topología uniforme.

9. Sea A un subconjunto propio de X, y sea B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, muestra que
$$(X \times Y) - (A \times B)$$
es conexo.

10. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios conexos; sea X el espacio producto
$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$
Sea $\mathbf{a} = (a_\alpha)$ un punto fijo de X.
    a) Dado cualquier subconjunto finito K de J, sea X_K el subespacio de X que consiste en todos los puntos $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ tales que $x_\alpha = a_\alpha$ para $\alpha \notin K$. Muestra que X_K es conexo.
    b) Demuestra que la unión Y de los espacios X_K es conexa.
    c) Demuestra que X es igual a la clausura de Y; concluye que X es conexo.

11. Sea $p : X \to Y$ un mapeo cociente. Demuestra que si cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ es conexo, y si Y es conexo, entonces X es conexo.

12. Sea $Y \subset X$; sean X e Y conexos. Demuestra que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ y $Y \cup B$ son conexos.