Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General
Taller II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Demostrar que toda variedad es regular y, por lo tanto, metrizables.

   Demostración. Sea $x \in X$, como X es m-variedad,entonces dada U una vecindad de x, tenemos que U es homeomorfo $V \subset \mathbb{R}^m$. Sea h es homeomorfismo, como $\mathbb{R}^m$ es localmente compacto, entonces dada una vecindad W de $h(x)$ existe un K compacto tal que

   $$W_{h(x)} \subset K \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

   y como h es homeomorfismo

   $$h^{-1}(W_{h(x)}) \subset h^{-1}(K) \subset U$$

   con $h^{-1}(W_{h(x)})$ vecindad de x y $h^{-1}(K)$ compacto. Esto prueba que X es local localmente compacto, como localmente compacto y Haussdorf implica regular entonces hemos probado que toda variedad es regular, por la definición de variedad tenemos que esta es 2-contable, luego por el teorema de Urysohn toda variedad es metrizable. □

2. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Suponga que para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x y un entero positivo k tal que U puede ser embedido en $\mathbb{R}^k$. Mostrar que X puede ser embedido en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.

   Demostración. Como X es Haussdorf y compacto entonces es normal, luego podemos cubrir a X con un número finito de $\{U_i\}$ que pueden ser embedidos en $\mathbb{R}^{k_i}$, sean $\{g_i\}$ los embedimientos correspondientes, como X es normal, tenemos una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ dominada por $\{U_i\}$. Sea $A_i = \operatorname{supp}(\phi_i)$, para cada $i = 1, \dots, n$ defina la función $h_i : X \mapsto \mathbb{R}^m$ como

   $$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ \mathbf{0} = (0, \dots, 0) & \text{si } x \in X - A_i \end{cases}$$

   Ahora defina

   $$F : X \longrightarrow (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}})$$

   como

   $$F(x) = \big(\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), h_1(x), \dots, h_n(x)\big).$$

   Claramente F es continua pues es continua componente a componente y ya habíamos probado que h_i es continua, basta ver que F es inyectiva. Suponga $F(x) = F(y)$, entonces $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Ahora como $\phi_i(x) > 0$ para algún i, $\phi_i(y) > 0$ también, luego $x, y \in U_i$. Así

   $$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y)$$

se concluye que $g_i(x) = g_i(y)$. Pero $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva, esto es $x = y$.

$\square$

3. Sea X un espacio de Hausdorff tal que cada punto de X tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Mostrar que si X es compacto, entonces X es una m-variedad.

   Demostración. Como X es compacto, Haussdorf y todo $x \in X$ tiene una vecidad U_x que puede ser embedida en $\mathbb{R}^k$, entonces X puede ser embedido en $\mathbb{R}^N$ para algún N por el punto anterior. Esto es que X es homeomorfo a un $V \subset \mathbb{R}^N$ y como $\mathbb{R}^N$ es 2-contable entonces V también y por tanto X. $\square$

4. Una familia indexada $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de X se dice *familia indexada puntualmente finita* si cada $x \in X$ pertenece a A_α solo para un número finito de valores de α. **Lema**. Sea X un espacio normal; sea $\{U_1, U_2, \ldots\}$ una cobertura indexada puntualmente finita de X. Entonces, existe una cobertura indexada $\{V_1, V_2, \ldots\}$ de X tal que $\bar{V}_n \subset U_n$ para cada n.

5. La condición de Hausdorff es una parte esencial en la definición de una variedad; no se sigue de las otras partes de la definición. Considere el siguiente espacio: Sea X la unión del conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ y el conjunto de dos puntos $\{p, q\}$. Se topologiza X tomando como base la colección de todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que no contienen 0, junto con todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{p\} \cup (0, a)$ y todos los conjuntos de la forma $(-a, 0) \cup \{q\} \cup (0, a)$, para $a > 0$. El espacio X se llama *la recta con dos orígenes*.

   a) Verificar que esto es una base para una topología.
   b) Mostrar que cada uno de los espacios $X - \{p\}$ y $X - \{q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
   c) Mostrar que X satisface el axioma T_1, pero no es de Hausdorff.
   d) Mostrar que X satisface todas las condiciones para ser una 1-variedad, excepto la condición de Hausdorff.