Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Análisis Numérico I
Parcial III

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Edgar Santiago Ochoa Quiroga
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Problema 1

Dada la función
$$f(x) = x + \frac{1}{x} - 2, \quad f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},$$
se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:
$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}.$$

- Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \to 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

Demostración. Primero mostraremos que la sucesion esta acotada inferiormente por 1. Esto se hara por induccion. Para el caso base como $x_0 > 1$, tenemos que
$$\frac{1}{x_0} < 1$$
Luego al multiplicar por -1 a ambos lados, y sumar 2 obtenemos que
$$2 - \frac{1}{x_0} > 2 - 1 = 1$$
Pero note que el lado izquierdo de la desigualdad es x_1, luego $x_1 > 1$, Ahora si suponemos que $x_k > 1$, por un argumento análogo al previo tenemos que $-\frac{1}{x_1} > -1$, luego sumando 2 tenemos que
$$x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} > 2 - 1 = 1.$$
De esta manera se prueba que la sucesión esta acotada interiormente por 1.
Ahora probemos por inducción nuevamente, que es monótona decreciente. Primero el caso base.
Si $x_0 > 1$, tenemos que $x_0 - 1 > 0$, luego $(x_0 - 1)^2 > 0$, si expandimos el binomio obtenemos que $x_0^2 - 2x_0 + 1 > 0$, luego como en particular $x_0 > 0$, podemos dividir en la desigualdad, obteniendo así
$$x_0 - 2 + \frac{1}{x_0} > 0.$$

Si reorganizamos tenemos que

$$x_0 > 2 - \frac{1}{x_0} = x_1.$$

Probando así el caso base. Ahora si suponemos que $x_{k-1} > x_k$, note que como están acotadas interiormente por 1, podemos asegurar que

$$\frac{1}{x_{k-1}} < \frac{1}{x_k}.$$

Multiplicando por -1 y sumando 2 a ambos lados obtenemos que

$$2 - \frac{1}{x_{k-1}} > 2 - \frac{1}{x_k}.$$

Pero por la definición de la sucesión, esto es

$$x_k > x_{k+1}.$$

Mostrando así que es monótona decreciente. Luego como es una sucesión monótona, decreciente y acotada interiormente, sabemos que converge, es decir $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Luego considerando un termino arbitrario de la sucesión

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n},$$

Si hacemos que $n \to \infty$, tenemos que

$$x = 2 - \frac{1}{x},$$

luego multiplicando por x y juntando todo a un lado

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

factorizando obtenemos que $(x-1)^2 = 0$, así concluimos que $x = 1$, es decir que nuestra sucesión converge a 1. Note que de base tenemos la iteración definida es la función

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

Primero dependemos de como estemos definiendo el dominio, ya que para el teorema de punto fijo necesitamos que el espacio sobre el que trabajamos sea completo. Como estamos asumiendo que $x_0 > 1$, asumiremos que estamos definiendo g sobre $[1, \infty)$, en caso contrario esa es la hipótesis que no se cumple. De igual manera podemos notas que la función dada no es contracción. Mostremos esto por contradicción. Si fuera contracción existe $0 < k < 1$ tal que

$$\left|g(x) - g(y)\right| \leq k|x - y|$$

Para todo $x, y \in [1, \infty]$ diferentes. En particular tomemos $y = 1$. Luego tenemos que

$$\left|2 - \frac{1}{x} - \left(2 - \frac{1}{1}\right)\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right| \leq k|x - 1|.$$

Como $x > 1$ ya que tiene que ser diferente a y tenemos que

$$\frac{1}{x} \leq k,$$

Pero note que independientemente del k fijado, tomando un x lo suficientemente cercano a 1, la desigualdad es al contrario. Mostrando así que no es contracción.

- Dar un algoritmo para aproximar la raíz de f que converja cuadráticamente.

Solución. Lo primero que podríamos pensar es usar el método de Newton, pero note que

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Si evaluamos en $r = 1$ note que $f'(1) = 0$, pero ademas

$$f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

por lo que $f''(1) = 2 \neq 0$. Esto quiere decir que 1 es un cero de multiplicidad 2, pero sabemos que Newton para multiplicidad mayor que uno no converge cuadraticamente. Por lo que la idea sera usar el método de Newton Modificado cuando se conoce la multiplicidad del cero. Para esto si el método de Newton era

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

entonces como la multiplicidad del cero es 2 tenemos que

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - 2\frac{x_n + \dfrac{1}{x_n} - 2}{1 - \dfrac{1}{x_n^2}},$$

si simplificamos un poco esta expresión tenemos que

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{(x_n^2 - 2x_n + 1)x_n}{x_n^2 - 1} = x_n - 2\frac{x_n(x_n - 1)}{x_n + 1} = x_n\left(1 - 2\frac{x_n - 1}{x_n + 1}\right) = x_n\frac{3 - x_n}{x_n + 1}.$$

Este sera nuestro algoritmo con convergencia cuadrática. Sabemos que al ser una modificación de Newton la aproximación convergerá a 1 siempre y cuando x_0 sea lo suficientemente cercano a la raíz, por lo que nos preocuparemos solo por el siguiente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - 1|}{|x_n - 1|^2},$$

Si este resulta ser finito tendremos la convergencia cuadrática deseada. Primero note que

$$\frac{|x_{n+1} - 1|}{|x_n - 1|^2} = \frac{\left|x_n\dfrac{3 - x_n}{x_n + 1} - 1\right|}{|x_n - 1|^2} = \frac{|3x_n - x_n^2 - x_n - 1|}{|x_n + 1||x_n - 1|^2} = \frac{|(x_n - 1)^2|}{|x_n + 1||x_n - 1|^2} = \frac{1}{|x_n + 1|}.$$

Luego
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-1|}{|x_n-1|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n+1|} = \frac{1}{2}.$$
Por lo que este algoritmo tiene convergencia cuadrática como lo deseábamos.

Ʊ̬Ʊ

2. Problema 2

Sea
$$f(x) = (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_d),$$
donde $r_1 < r_2 < \ldots < r_d$.

- Probar que si $x_0 > r_d$ la sucesión de Newton-Raphson converge a r_d.

Demostración. Escribamos $f(x) = (x-r_d)g(x)$ con $g(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_{d-1})$. De esta manera, $f'(x) = g(x) + (x-r_d)g'(x)$, luego la iteración del metodo de Newton Raphson es de la forma:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k-r_d)g(x)}{(x_k-r_d)g'(x_k)+g(x_k)}$$
Ahora asuma que $x_0 > r_d$, es decir $x_0 - r_d > 0$, esto implica que $x_0 - r_i > 0$ para $i = 1, \ldots, a$ pues r_d es la mayor raíz de $f(x)$. Con esto en mente note que:
$$\begin{aligned} x_1 - r_d &= x_0 - r_d - \frac{(x_0-r_d)g(x)}{(x_0-r_d)g'(x_0)+g(x_0)} \\ &= (x_0-r_d)\left(1 - \frac{g(x_0)}{(x_0-r_d)g'(x_0)+g(x_0)}\right) \end{aligned}$$
Ahora, veamos que $g'(x_0) > 0$:
$$g'(x_0) = \sum_{i=1}^{d-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d-1}(x_0-r_j)\right)$$
Como cada factor de cada producto es positivo, tenemos que cada sumando es positivo, y por lo tanto $g'(x_0) > 0$,luego $(x_0-r_d)g'(x_0) + g(x) > g(x)$. Así
$$0 < \frac{g(x_0)}{(x_0-r_d)g'(x_0)+g(x_0)} < 1$$
Y así
$$x_1 - r_d = (x_0-r_d)\left(1 - \frac{g(x_0)}{(x_0-r_d)g'(x_0)+g(x_0)}\right) > 0$$
Por lo tanto $x_1 - r_d > 0$. Procediendo de manera inductiva llegamos a que $x_k - r_d > 0$ y además, como
$$0 < \left(1 - \frac{g(x_{k-1})}{(x_{k-1}-r_d)g'(x_{k-1})+g(x_{k-1})}\right) < 1$$

Vemos que existe una constante $M \in (0,1)$ tal que $x_k - r_d < M(x_{k+1} - r_d)$ lo cual implica que $x_k - r_d < M^k(x_0 - r_d)$, como $M^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$, tenemos que x_k converge a r_d

□

- Para un polinomio
$$P(x) = a_d x^d + \cdots + a_0, \quad a_d \neq 0,$$
tal que sus d raíces son reales y distintas, se propone el siguiente método para aproximar todas sus raíces:
    - Se comienza con un valor x_0 mayor que
    $$M = \text{máx}\left\{1, \sum_{i=0}^{d-1} \frac{|a_i|}{|a_d|}\right\}.$$
    - Se genera a partir de x_0 la sucesión de Newton-Raphson, que, según el ítem anterior, converge a la raíz más grande de P, llamémosla r_d; obteniéndose de este modo un valor aproximado $\tilde{r_d}$.
    - Se divide P por $x - \tilde{r_d}$ y se desprecia el resto, dado que $r_d \approx \tilde{r_d}$. Se redefine ahora P como el resultado de esta división y se comienza nuevamente desde el primer ítem, para hallar las otras raíces.
- Aplicar este método para aproximar todas las raíces del polinomio
$$P(x) = 2x^3 - 4x + 1.$$

Solución. Para implementar éste metodo en Matlab tendremos en cuenta varios aspectos importantes: si tenemos $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$, su derivada es $P'(x) = d a_d x^{d-1} + \ldots + a_2 x + a_1$, con lo cual podemos definir dos funciones tales que dada una lista de coeficientes y una variable x, podemos evaluar $P(x)$ y $P'(x)$, además, sabemos que evaluar directamente es muy costoso computacionalmente, pues a medida que aumenta el grado del polinomio, hay que efectuar muchas operaciones tan solo para calcular x^d, por lo tanto escribimos $P(x) = x(x(\cdots(a_d x + a_{d-1})\cdots) + a_1) + a_0$ y hacemos lo mismo con $P'(x)$. Tambien consideramos que al dividir por $x - r_i$, podemos aplicar regla de Ruffini o división sintética, es decir, si tenemos $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y dividimos entre $b(x) = x - r$ obtendremos un polinomio $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ a partir de la siguiente regla de recurrencia:

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + r b_{n-1} \\
&\vdots \\
b_0 &= a_1 + r b_1
\end{aligned}$$

Note que en este caso omitimos el residuo de la división, pues solo nos importa obtener los coeficientes.

Ya con todo esto, podemos aplicar el método de Newton-Rapshon al polinomio dado, de donde obtuvimos que sus raíces son $r_1 = -1{,}525687120865518$, $r_2 = 0{,}258652022504153$ y $r_3 = 1{,}267035098361366$. Al evaluar el polinomio en cada raíz obtenemos que $P(r_1) = 0{,}111022302462516 \times 10^{-15}$, $P(r_2) = -0{,}888178419700125 \times 10^{-15}$ y

$P(r_3) = -0{,}666133814775094 \times 10^{-15}$. Con esto podemos observar que el método de Newton-Raphson aproxima muy bien las raíces, pues aunque al hacer división sintética nos arriesgamos a perder un coeficiente, las aproximaciones resultantes son muy exactas, con una precisión de 15 cifras decimales.

3. Problema 3

Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a+h, \ldots, x_n = b$, donde $h = \dfrac{b-a}{n}$. Considerar la poligonal $l(x)$ que interpola a f en los puntos $x_i, i = 0 \ldots n$. Probar que

a)

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Demostración. Primero recordemos que $l(x) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) + f(x_i)$ para $[x_i, x_{i+1}]$, note que por el teorema de Taylor

$$l(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(c_1)}{2}(x_{i+1} - x_i)(x - x_i), \text{ con } c_1 \in (x_i, x),$$

luego

$$f(x) - l(x) = (f(x) - f(x_i)) - \left(f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(c_1)}{2}(x_{i+1} - x_i)(x - x_i)\right).$$

Aplicando nuevamente teorema de Taylor

$$f(x) - f(x_i) = (x - x_i)f'(x_i) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - x_i)^2, \text{ con } c_2 \in (x_i, x),$$

ahora juntando las identidades obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x) - l(x) &= \frac{f''(c_2)}{2}(x - x_i)^2 - \frac{f''(c_1)}{2}(x - x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{2}(x - x_i)(f''(c_2)(x - x_i) - f''(c_1)(x_{i+1} - x_i)). \end{aligned}$$

por la continuidad de f'', existe un C tal que

$$f(x) - l(x) = \frac{1}{2}(x - x_i)f''(C)((x - x_i) - (x_{i+1} - x_i)) = \frac{1}{2}f''(C)(x - x_i)(x - x_{i+1}).$$

Finalmente, para $x \in [x_i, x_{i+1}]$ obtenemos que

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{2}|f''(C)|(x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{h^2}{2}|f''(C)|,$$

por tanto en el intervalo $[a.b]$ se sigue que

$$|f(x) - l(x)| \leq= \frac{h^2}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

□

b)

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Demostración. Como $l(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) + f(x_i) = f'(C)(x - x_i) + f(x_i)$, tenemos que $l'(x) = f'(C)$ para algún $C \in (x_i, x_{i+1})$ por el teorema del valor medio, utilizando las identidades del punto anterior, se sigue que

$$f'(x) = f'(x_i)(x - x_i)' + \frac{f''(c_2)}{2}((x - x_i)^2)' = f'(x_i) + f''(c_2)(x - x_i)$$

de la misma manera

$$f'(C) = f'(x_i) + f''(c_3)(C - x_i)$$

con $c_3 \in (C, x_i)$ ya que no necesiramente es el mismo c_2, ahora juntando las identidades se sigue que

$$\begin{aligned} |f'(x) - l'(x)| &= |f'(x_i) + f''(c_2)(x - x_i) - f'(x_i) - f''(c_3)(C - x_i)| \\ &= |f''(c_2)(x - x_i) - f''(c_3)(C - x_i)| \\ &\leq (x - C)|f''(\omega)|, \end{aligned}$$

donde la existencia de ω se sigue de que $f \in C^2[a,b]$. Ahora, en el intervalo $[a,b]$ la cota que obtenemos es

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

□

4. Problema 4: Silueta de la Mano

Para dibujar la silueta de su mano, siga los siguientes pasos:

- Preparamos una tabla de abcisas y ordenadas usando los siguientes comandos de MATLAB:

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

- Dibuje su mano en un papel y póngalo sobre la pantalla del computador. Use el ratón para seleccionar alrededor de 37 puntos que delineen su mano (como se muestra en la figura). Termine la instrucción `ginput` oprimiendo enter.

- Grafique los puntos (x, y) obtenidos y la mano correspondiente mediante el comando `plot` de MATLAB.

- Implemente el método de splines cúbicos.
- Interpole por separado los puntos (i, x_i) e (i, y_i) mediante splines cúbicos usando su programa.
- Grafique la curva parametrizada que se obtiene.
- Estime el área de su mano usando la fórmula del área de Gauss:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n\right|.$$

Solución. Primero comenzamos ejecutando los comandos sugeridos para conocer su funcionamiento, graficamos los puntos seleccionados y obtuvimos un resultado poco suave, el que justamente queremos interpolar por splines cúbicos, realizamos esto primero con el comando predefinido en Matlab. Como la curva de la mano es paramétrica (no necesariamente es función), tomamos las coordenadas (x_i, y_i) y realizamos interpolación componente por componente, es decir encontramos splines para cada componente en función de t, exáctamente lo mismo hicimos con nuestro código.

Recordemos que para splines cúbicos los polinomios deben cumplir varias condiciones, en este caso vamos a implementar una spline cúbica natutal, por lo que estas condiciones se obtienen de solucionar el sistema

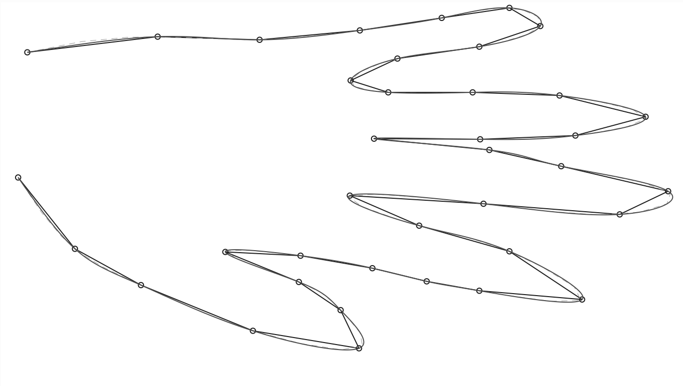
$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde $a_k = 2(h_{k-1} + h_k)$, $d_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}, k = 1, \ldots, n-1$, $b_k = h_k$, $k = 1, \ldots, n-2$ y σ_i son los coeficientes de los polinomios, $\sigma_0 = \sigma_n = 0$. En este caso debemos solucionar dos sistemas de este tipo, uno para $x(t)$ y otro para $y(t)$, con lo que vamos a tomar un tamaño de paso uniforme $h = 1$ por lo tanto la matriz se vuelve la siguiente

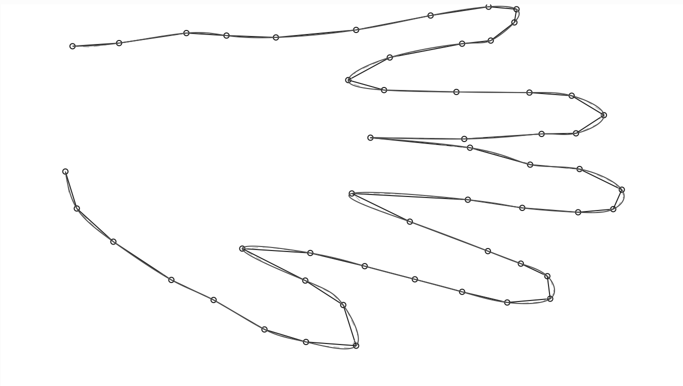
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

por lo que implementamos el algoritmo de Thomas para matrices tridiagonales para encontrar los coeficientes de manera óptima, posteriormente generamos los polinomios con estos coeficientes y graficamos la curva paramétrica y finalmente estimamos el área con las manos de los miembros de nuestro grupo. El código final que implementamos lo adjuntamos en un cuaderno de Jupyter. Obtuvimos los siguientes resultados, en donde las lineas puntadas son la solución de Matlab, se evidencia que el código es bueno ya que su diferencia es muy pequeña.

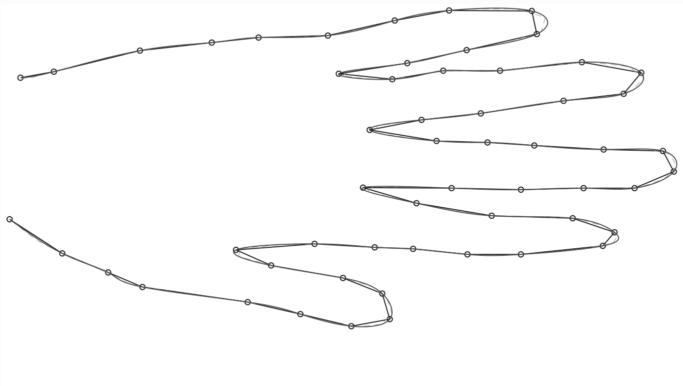
La primera mano con 37 puntos



El área aproximada fue 0.2479, como se observa la precisión es mejorable por lo que de ahora en adelante usaremos más puntos, observe ahora cuando implementamos más puntos



y obtenemos un área aproximada de 0.2533, es de esperar que en los parte donde los dedos se curvan se necesiten de más puntos. Para la tercera mano obtuvimos



y un área de 0.3121.

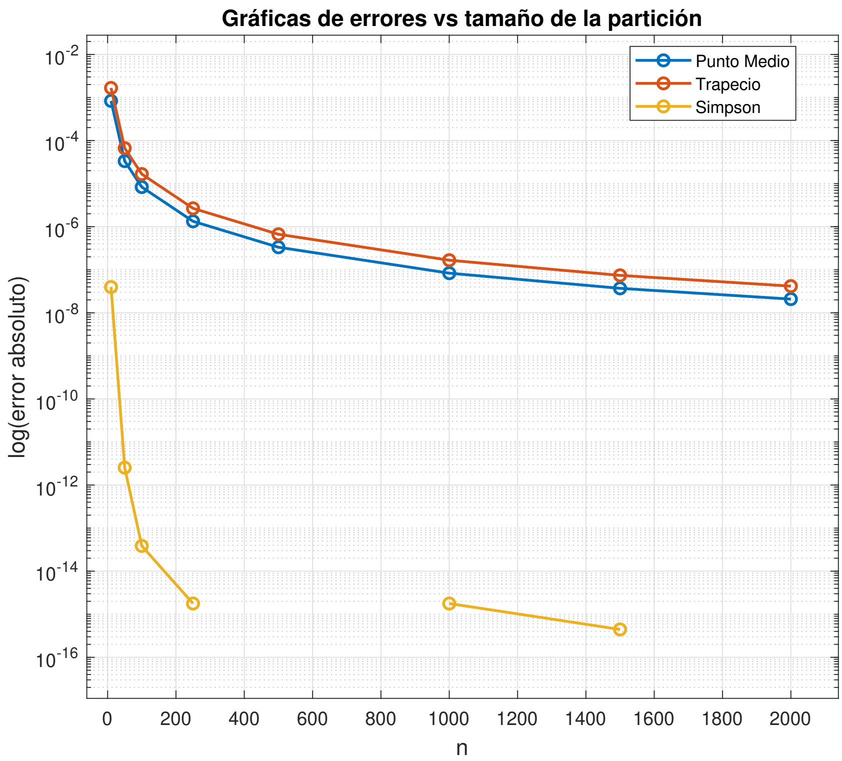
5. Problema 5: Integración Numérica

Se tiene la integral

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi.$$

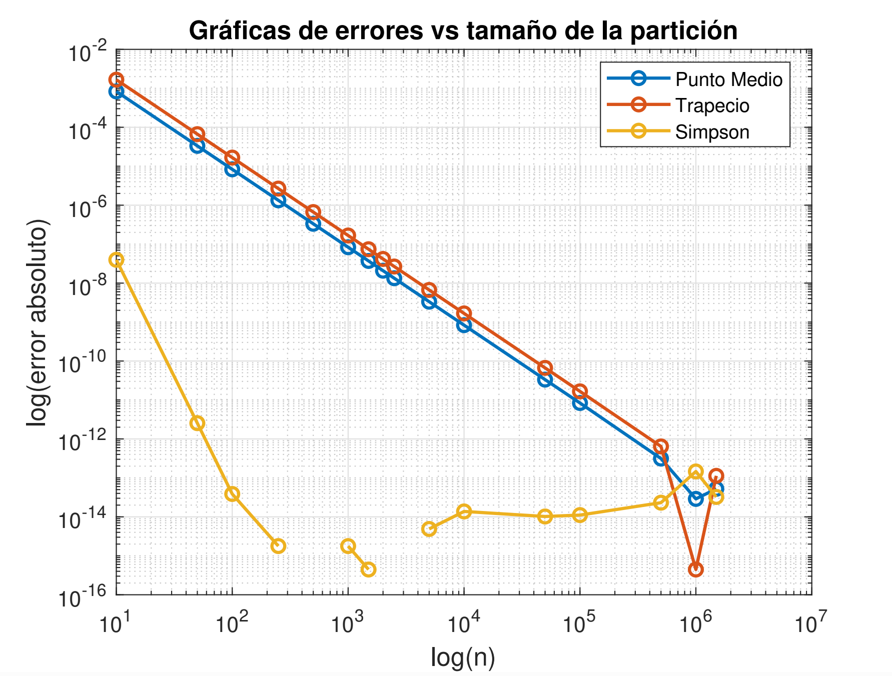
- Use las reglas compuestas del punto medio, del trapecio y de Simpson para aproximar I para varios tamaños de paso de integración $h_n = 1/n$, $n = 10, 50, 100, 250, 500, 1000, 1500, 2000$. Grafique el logaritmo del error absoluto versus n para cada paso. Describa el efecto de redondeo de los errores cuando $h \to 0$.

Solución. Al implementar los distintos métodos de integración numérica, obtuvimos la siguiente gráfica para los diferentes tamaños de paso:



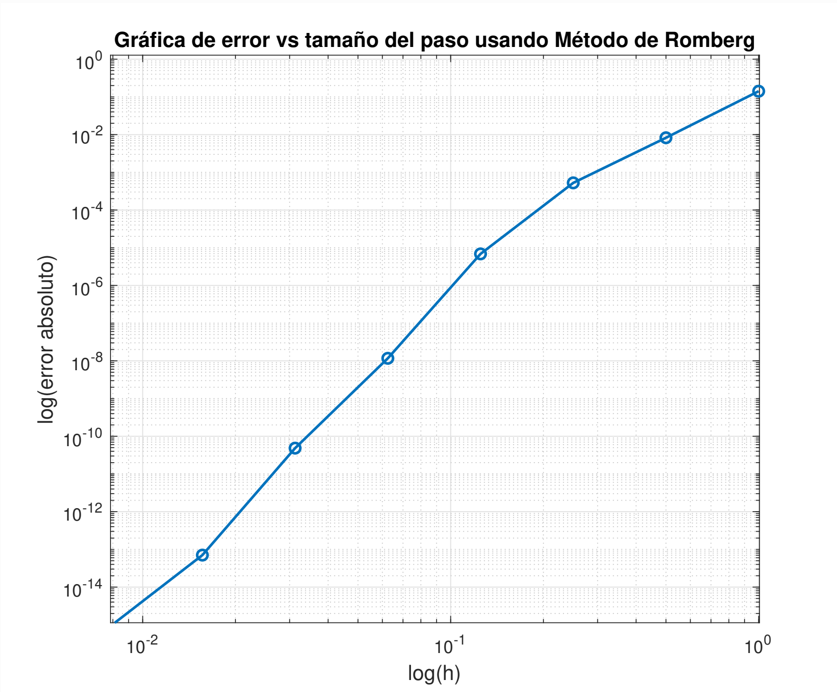
Podemos observar que para las reglas del punto medio y del trapecio el comportamiento del logaritmo del error absoluto versus n, el error decae de manera exponencial, Para el caso de la regla de Simpson obtenemos valores que no parecen seguir una tendencia clara, pues para, por ejemplo una partición de 500 puntos o 2000 puntos, se tiene un error tan pequeño que la maquina lo reporta como 0.

Ahora, si aumentamos el tamaño de las particiones, vemos que el error empieza a aumentar en el caso de la regla de Simpson, lo cual puede deberse a que éste metodo requiere de más operaciones, y a medida que aumenta el número de puntos se va propagando el error. Para el caso de las reglas del trapecio y del punto medio, se puede observar que el redondeo del error es más estable. Esto se puede observar en la siguiente gráfica, en la que comparamos el logaritmo del error absoluto contra el logaritmo del tamaño de la partición



- Implemente el método de integración de Romberg para calcular I. Grafique el logaritmo del error en los términos diagonales en la tabla de extrapolación versus $\log h$. Verifique sus resultados con la teoría.

Solución. Al implementar el método de Romberg, la gráfica de los errores versus log(h), es la siguiente:



Según la teoría, el error de cada aproximación es del orden de $O(h_K^{2K})$, donde K es la fila correspondiente a la aproximación en la tabla de extrapolación, en nuestro caso, debemos obtener que el error es del orden de $O(1/2^k)$, con lo cual podriamos esperar que a medida que el tamaño del paso aumenta, el tamaño del exponente en la gráfica obtenida, se duplique. Notamos que éste comportamiento se pude apreciar de manera aproximada en la gráfica, por lo cual es consistente con la teoría.