



# Sobre el teorema de los números primos en progresiones aritmética

Mateo Andrés Manosalva Amaris

Trabajo dirigido por John Jaime Rodriguez

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

## Resumen

El teorema de los números primos nos dice que en el límite, el cociente  $\frac{\pi(x)\log x}{x}$  tiende a 1, es decir, que  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$  donde  $\pi(x)$  es la función contadora de primos. En progresiones aritméticas  $a+kq$  con  $(a,q)=1$ , tenemos que  $\pi(a,q,x)$ ; la función contadora restringida a la progresión, tiene el comportamiento asintótico  $\pi(a,q,x) \sim \frac{x}{\phi(q)\log x}$ , es decir, los primos se distribuyen uniformemente en las clases de residuos módulo  $q$ . En este trabajo se presentará la prueba de este resultado y las ideas subyacentes. Para esto, haremos uso de la teoría Tauberiana, lo que nos permitirá presentar una prueba detallada y corta, que se seguirá estudiando la no nulidad de  $L(\chi,s)$  y algunas propiedades de los caracteres y series de Dirichlet.

## El Teorema de Dirichlet

Desde los tiempos de Euclides se sabe que existen infinitos números primos, sin embargo no se conocía mucho mucho sobre su distribución,

- ¿Existen infinitos números primos de la forma  $a+kn$ ?
- ¿Cómo se distribuyen los números primos en cada una de las clases de equivalencia módulo  $n$ ?

El argumento de Euclides provenía de ver que si existen finitos números primos, digamos  $p_1,\dots,p_n$ , entonces  $p_1p_2\cdots p_n+1$  no es divisible por ningún primo  $p_i$ .

**Teorema (Dirichlet)** Dados  $a$  y  $d$  primos relativos, existen infinitos primos de la forma

$$a,a+d,a+2d,a+3d,\dots$$

**Teorema (Euler)** La suma  $\sum_p \frac{1}{p}$  es divergente.

La idea de Euler consiste en explotar la identidad

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

de donde obtiene que

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(p)^{ks}} \right) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} \right), \quad \Re(s) > 1$$

## La idea de Dirichlet

Sea  $f(n)$  la función característica de la progresión aritmética, es decir

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv a \pmod{m} \\ 0, & n \not\equiv a \pmod{m} \end{cases}$$

en el caso de que  $f(n)$  sea completamente multiplicativa tendríamos un producto de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

y así por argumentos análogos a los de Euler se tendría que

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right) = \sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

Lamentablemente,  $f(n)$  generalmente no es multiplicativa.

## Caracteres

**Definición:** Sea  $G$  un grupo,  $\chi$  es un carácter de  $G$  si  $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  y satisface que para todo  $a,b \in G$ ,  $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ .

**Teorema (Ortogonalidad)** Sea  $G$  un grupo abeliano finito. Entonces

(i) Si  $\chi$  y  $\psi$  son caracteres de  $G$

$$\sum_{g \in G} \psi(g) \overline{\chi}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{si } \psi = \chi; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

(ii) Si  $g$  y  $h$  son elementos de  $G$

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) \overline{\chi}(h) = \begin{cases} |G|, & \text{si } g = h \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

El conjunto de caracteres forma un grupo con la multiplicación puntual, lo denotamos  $\widehat{G}$

**Definición:** Sea  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos su transformada de Fourier como la función  $\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi}(g).$$

**Teorema (Representación de Fourier)** Dada  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , tenemos la representación en “serie” de Fourier

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(g).$$

Diremos que un carácter de Dirichlet es una extensión periódica de un carácter de  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  a  $\mathbb{N}$

Obtenemos la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \chi(a^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

y la prueba se sigue de estudiar la expresión

$$\frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \chi(a^{-1}) \log L(s, \chi) = \sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} + O(1).$$

**Teorema (De La Vallée Poussin)**

$$\pi(a,m,x) \sim \frac{x}{\varphi(m)\log x}$$

Primero vamos a estudiar que ocurre con primos de la forma  $2k+1$ . La expreción toma la forma

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

El camino para probar este teorema es ver que  $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x$ , donde  $\Lambda(n)$  es la función de Von

$$\text{Mangolth}, \Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k, k \geq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

## Teoremas tauberianos

**Proposición:** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  una serie de potencias centrada en 0 y con radio de convergencia 1, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

Los teoremas tauberianos son recíprocos condicionales del teorema de Abel.

**Proposición (Tauber, 1897)** Sea  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie de potencias que converge absolutamente para

$|x| < 1$ . Si  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A$  y se cumple la condición  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ .

## Teorema de Wiener-Ikehara

Sean  $a_n \geq 0$  y  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  una serie absolutamente convergente. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- La función  $F(s)$  se extiende a una función analítica en la región  $\Re(s) \geq 1$  con un único polo simple en  $s = 1$ , cuyo residuo es 1.
- $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = O(x)$ .

Entonces, se tiene que  $A(x) = x + o(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Aplicando el teorema anterior a la serie de Dirichlet  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ , se obtiene el TNP, como corolario de

$$\zeta(1+it) \neq 0, \text{ para todo } t \neq 0.$$

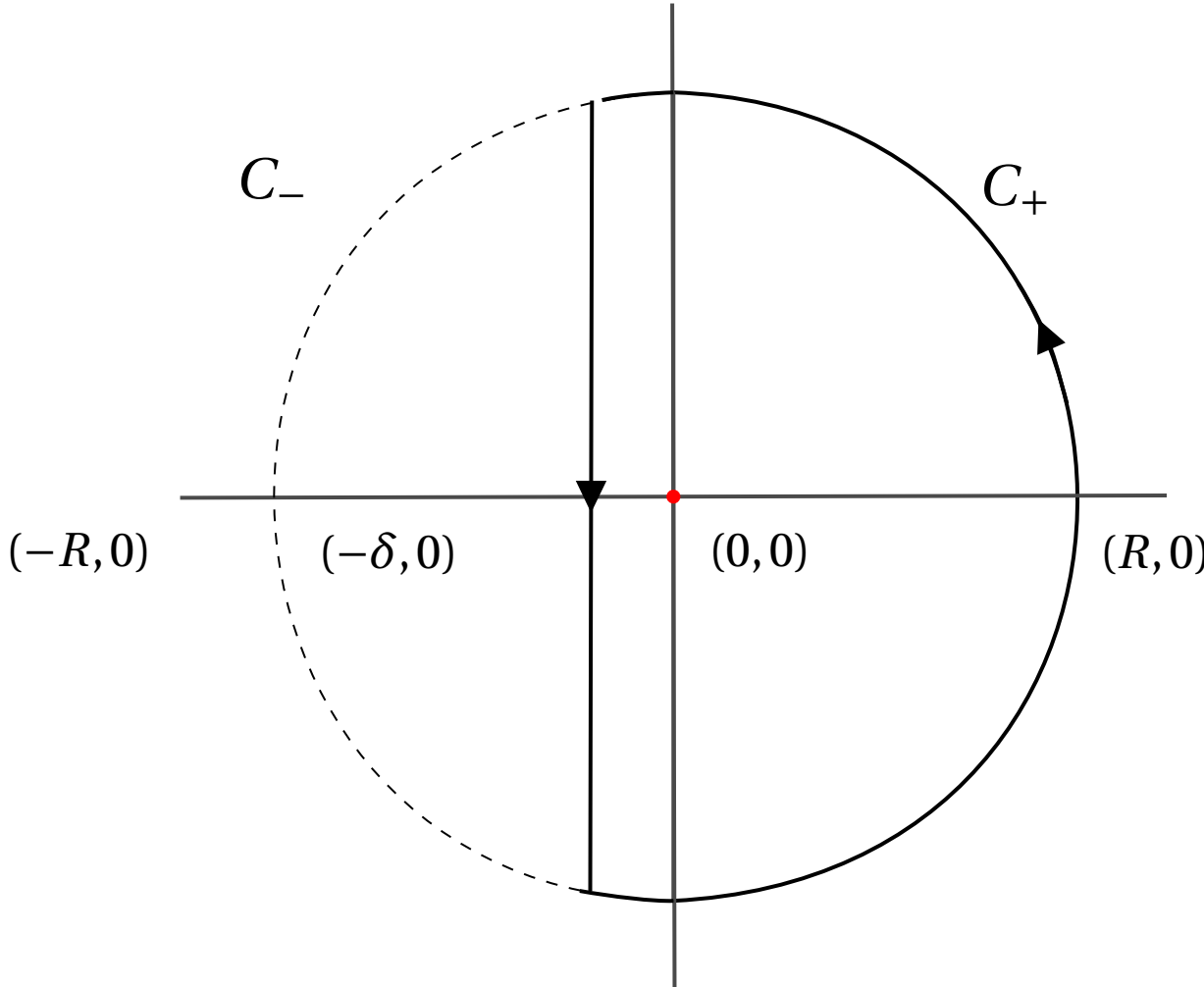
**Teorema (Korevaar y Zagier)** Para  $t \geq 0$ , sea  $f(t)$  una función acotada y localmente integrable y sea

$$g(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

para  $\Re(s) > 0$ . Si  $g(s)$  tiene continuación analítica a  $\Re(s) \geq 0$ , entonces  $\int_0^{\infty} f(t) dt$  existe y es igual a  $g(0)$ . La prueba consiste en estimar la integral

$$I_C = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(s) - g_T(s)) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s} ds = g(0) - g_T(0),$$

donde  $C$  es el siguiente contorno



Obtenemos

$$g(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0).$$

**Teorema (Korevaar y Zagier)** Sean  $a_n \geq 0$  y  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ , si la integral  $\int_1^{\infty} \frac{A(x) - x}{x^2} dx$  converge, entonces  $A(x) \sim x$

Aplicando lo anterior y sabiendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{A(t) - t}{t^{s+1}} dt,$$

se obtiene una prueba del teorema tauberiano.

## Distribución de los primos en progresiones aritmética

En progresiones aritmética la idea es la misma, el teorema tauberiano se puede extender a una serie de Dirichlet con coeficientes complejos, aplicamos el teorema a la función

$$\sum_{n \equiv a \pmod{m}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) \left( -\frac{L'}{L}(s, \chi) \right)$$

que tiene residuo  $\frac{1}{\varphi(m)}$ . Esto nos da que  $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{m}}} \Lambda(n) \sim \frac{x}{\varphi(m)}$ , lo que prueba el TNP en progresiones aritmética.

La desventaja de los teoremas tauberianos es que no nos permiten controlar el error, puesto que sus estimación son del orden  $o$ —pequeña.

## Los casos 4k+1 y 4k+3

Tenemos que  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{1,3\}$ , tendremos dos caracteres de Dirichlet, el trivial que manda todo a 1, y otro que envía al 1 en 1 y al 3 en -1.

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p \equiv 1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 3} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s), \quad L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},$$

obtenemos que

$$\log(L(s, \chi_0)) = \sum_{p \equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} + O(1), \quad \log(L(s, \chi_1)) = \sum_{p \equiv 1(4)} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \equiv 3(4)} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

## Referencias

- [1]R. Murty. Problems in analytic number theory    [2]T. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory.  
[3]Iwaniec and Kowalski. Analytic number theory.    [4]P. Pongsriiam. Analytic Number Theory for Beginners.