

Sobre el teorema de los números primos en progresiones aritméticas

Mateo Andrés Manosalva Amaris

Trabajo dirigido por John Jaime Rodriguez

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

Resumen

El teorema de los números primos nos dice que en el límite, el cociente $\frac{\pi(x) \log x}{x}$ tiende a 1, es decir, que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ donde $\pi(x)$ es la función contadora de primos. En progresiones aritméticas $a + kq$ con $(a, q) = 1$, tenemos que $\pi(a, q, x)$; la función contadora restringida a la progresión, tiene el comportamiento asintótico $\pi(a, q, x) \sim \frac{x}{\phi(q) \log x}$, es decir, los primos se distribuyen uniformemente en las clases de residuos módulo q . En este trabajo se presentará la prueba de este resultado y las ideas subyacentes. Para esto, haremos uso de la teoría Tauberiana, lo que nos permitirá presentar una prueba detallada y corta, que se seguirá estudiando la no nulidad de $L(\chi, s)$ y algunas propiedades de los caracteres y series de Dirichlet.

El Teorema de Dirichlet

Desde los tiempos de Euclides se sabe que existen infinitos números primos, sin embargo no se conocía mucho mucho sobre su distribución,

- ¿Existen infinitos números primos de la forma $a + kn$?
- ¿Cómo se distribuyen los números primos en cada una de las clases de equivalencia módulo n ?

El argumento de Euclides provenía de ver que si existen finitos números primos, digamos p_1, \dots, p_n , entonces $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ no es divisible por ningún primo p_i .

Teorema (Dirichlet) Dados a y d primos relativos, existen infinitos primos de la forma

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

Teorema (Euler) La suma $\sum_p \frac{1}{p}$ es divergente.

La idea de Euler consiste en explotar la identidad

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

de donde obtiene que

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(p)^{ks}} \right) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} \right), \quad \Re(s) > 1$$

La idea de Dirichlet

Sea $f(n)$ la función característica de la progresión aritmética, es decir

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv a \pmod{m} \\ 0, & n \not\equiv a \pmod{m} \end{cases}$$

en el caso de que $f(n)$ sea completamente multiplicativa tendríamos un producto de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

y así por argumentos análogos a los de Euler se tendría que

$$\log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) = \sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

Lamentablemente, $f(n)$ generalmente no es multiplicativa.

El camino para probar este teorema es ver que $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x$, donde

$\Lambda(n)$ es la función de Von Mangoldt, $\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k, k \geq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Teoremas tauberianos

Proposición: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ una serie de potencias centrada en 0 y con radio de convergencia 1, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

Los teoremas tauberianos son recíprocos condicionales del teorema de Abel.

Proposición (Tauber, 1897) Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias que converge absolutamente para $|x| < 1$. Si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A$ y se cumple la condición $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

Teorema de Wiener-Ikehara

Sean $a_n \geq 0$ y $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ una serie absolutamente convergente. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

- La función $F(s)$ se extiende a una función analítica en la región $\Re(s) \geq 1$ con un único polo simple en $s = 1$, cuyo residuo es 1.
- $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = O(x)$.

Entonces, se tiene que $A(x) = x + o(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Aplicando el teorema anterior a la serie de Dirichlet $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, se obtiene el TNP, como corolario de

$$\zeta(1 + it) \neq 0, \text{ para todo } t \neq 0.$$

Teorema (Korevaar y Zagier) Para $t \geq 0$, sea $f(t)$ una función acotada y localmente integrable y sea

$$g(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

para $\Re(s) > 0$. Si $g(s)$ tiene continuación analítica a $\Re(s) \geq 0$, entonces $\int_0^{\infty} f(t) dt$ existe y es igual a $g(0)$. La prueba consiste en estimar la integral

$$I_C = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(s) - g_T(s)) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s} ds = g(0) - g_T(0),$$

donde C es el siguiente contorno

Obtenemos

$$g(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(0).$$

Teorema (Korevaar y Zagier) Sean $a_n \geq 0$ y $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$, si la integral $\int_1^{\infty} \frac{A(x) - x}{x^2} dx$ converge, entonces $A(x) \sim x$

Aplicando lo anterior y sabiendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{\infty} \frac{A(t) - t}{t^{s+1}} dt,$$

se obtiene una prueba del teorema tauberiano.

La familia pepa

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl.

Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula. Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.