Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Topología General
Taller II

Mateo Andrés Manosalva Amaris
Sergio Alejandro Bello Torres

1. Muestra que los números racionales $\mathbb{Q}$ no son localmente compactos

   Demostración. Consideremos $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual, el punto $0 \in \mathbb{Q}$ y una vecindad $U \subset \mathbb{Q}$ de 0, como U es abierto, por la propiedad arquimediana de los números racionales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{Q} \cap \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset U$, por la densidad de los irracionales en los reales, existe un irracional r en el intervalo $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ y por la propiedad arquimediana, existe un natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, note que $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ es cerrado en $\mathbb{Q}$, luego, si existiera un compacto que contiene a U, $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ sería compacto pues es un subconjunto cerrado de un compacto, sin embargo

   $$\bigcap_{n \geq k}^{\infty} \left(\left[r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q} \right) = \emptyset$$

   De esta manera, $\left[r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right] \cap \mathbb{Q}$ no es compacto y por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

   □

2. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios no vacíos.

   a) Demuestra que si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto para todos los valores de α, salvo un número finito.

   Demostración. Recordemos que las proyecciones son mapeos continuos y abiertos, supongamos que $\prod X_\alpha$ es localmente compacto. Sea $x \in \prod X_\alpha$, por la compacidad local existe un subespacio compacto C de $\prod X_\alpha$ que contiene a x y esta vecindad contiene un elemento de la base de $\prod X_\alpha$ que contiene a x, digamos U.

   Como estamos en la topología producto, entonces $U = \prod_\alpha U_\alpha$ donde $U_\alpha = X_\alpha$ para todo α salvo finitos índices, digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sea $\beta \neq \alpha_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $\pi_\beta(C)$ es un compacto que contiene a $\pi_\beta(U) = X_\beta$.

   Falta ver que los X_{α_i}, $i = 1, \ldots, n$ son localmente compactos. Sean $y \in X_{\alpha_i}$ y $x \in \prod X_\alpha$ tales que $x_{\alpha_i} = y$. Existe un compacto C que contiene un elemento de la base U tal que U es vecindad x, entonces $\pi_{\alpha_i}(C)$ es un subespacio compacto de X_{α_i} que contiene a la vecindad $\pi_{\alpha_i}(U)$ de x. □

   b) Prueba el recíproco, asumiendo el teorema de Tychonoff.

   Demostración. Sea $x \in \prod_\alpha X_\alpha$. Para cada α, existe un subespacio compacto C_α de X_α que contiene una vecindad U_α de x_α. Por hipótesis, para cada índice salvo finitos, podemos asumir que $C_\alpha = U_\alpha = X_\alpha$. Por el teorema de Tychonoff, $\prod_\alpha C_\alpha$ es compacto y contiene la vecindad $\prod_\alpha U_\alpha$ de x. Se sigue que $\prod_\alpha X_\alpha$ es localmente compacto. □

3. Sea X un espacio localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es continua, ¿se sigue que $f(X)$ es localmente compacto? ¿Qué ocurre si f es continua y abierta? Justifica tu respuesta.

   Falso: Sean $\mathbb{Q}_d$ los racionales con la topología discreta y $\mathbb{Q}$ los racionales con la topología usual. $\mathbb{Q}_d$ es localmente compacto ya que $\{x\}$ es una vecindad de x y $\{x\}$ es compacto, sin embargo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q}_d &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

   es continua y $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto (Ejercicio 1). Sin embargo si añadimos la hipótesis de que f es abierta, entonces es verdadera la proposición.

   Demostración. Sea $y \in f(X)$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, como X es localmente compacto, entonces existe un subespacio compacto C de X tal que C contiene una vecindad U de x. Obviamente $f(U) \subset f(C)$ y $f(U)$ es abierto porque f es abierta, además $f(C)$ es compacto, de lo que se sigue el resultado. □

4. Demuestra que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto en la topología uniforme.

   Demostración. Considere el $0 \in \mathbb{R}^\omega$, $0 = (0,0,0,0,\ldots)$. Suponga que $[0,1]^\omega$ es localmente compacto en 0, entonces existe un compacto C que contiene la bola $B(0,\epsilon) \subset [0,1]^\omega$, en efecto $\overline{B(0,\epsilon)} = [0,\epsilon]^\omega$. Como $[0,\epsilon]^\omega$ es un subconjunto cerrado de un compacto, entonces es compacto, pero esto es una contradicción ya que dado $U \subset [0,\epsilon)$, tenemos que

$$\bigcup_{k\geq 1} [0,\epsilon]^k \times U^{\omega-k}$$

   es un cubrimiento abierto de $[0,\epsilon]^\omega$ que no admite un subcubrimiento finito. □

5. Si $f : X_1 \to X_2$ es un homeomorfismo entre espacios Hausdorff localmente compactos, demuestra que f se extiende a un homeomorfismo de sus compactificaciones por un punto.

   Demostración. Suponga $f : X_1 \to X_2$ un homeomorfismo y definamos

$$\begin{aligned} g : Y_1 &\longrightarrow Y_2 \\ x &\longmapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1 \\ \tilde{y} & \text{si } x = y, \end{cases} \end{aligned}$$

   con Y_1, Y_2 las compactificaciones a un punto, g es un homeomorfismo entre Y_1 y Y_2. Sea V un abierto, $V \subset Y_2$. Tenemos dos casos, V es abierto de X_2 o $V = Y_2 - C$ con C compacto en X_2, el primer caso es trivial. Para el segundo caso note que

$$\begin{aligned} g^{-1}(V) &= g^{-1}(Y_2 - C) \\ &= Y_1 - g^{-1}(C) \\ &= Y_1 - K_1. \end{aligned}$$

   con K_1 compacto en X_1. Análogamente

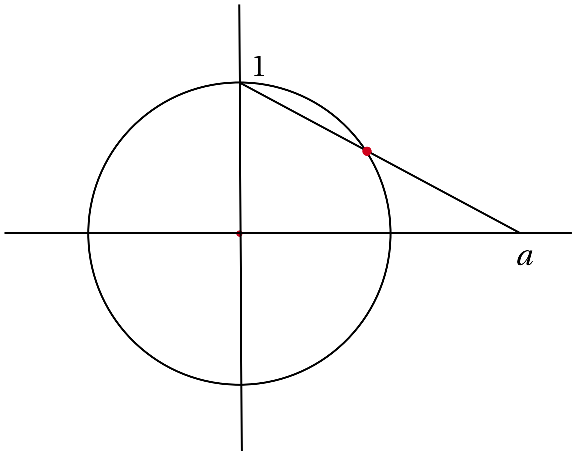
$$g(Y_1 - C) = Y_2 - g(C) = Y_2 - K_2$$

   con K_2 compacto en X_2.

   □

6. Demuestra que la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$ es homeomorfa al círculo S^1.

Demostración. Vamos a construir el homeomorfismo, este es la proyección estereográfica.



Por la ecuación de punto pendiente, la recta que se observa en el dibujo y que corta la circunferencia tiene la ecuación

$$y = \frac{-x}{a} + 1,$$

reemplazando esto en la ecuación del círculo ($x^2 + y^2 = 1$)obtenemos que

$$x^2 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} = 0,$$

así pues

$$x\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{a},$$

esto es

$$x = \frac{2a}{a^2+1}.$$

Finalmente, al reemplazar x en la ecuación de la recta, obtenemos que

$$y = \frac{-2}{a^2+1} + 1$$

que es el heomemorfimo ya que cuando $a \to \infty$ obtenemos el polo norte y la función establece una correspondencia entre un punto en la circunferencia y un punto en la recta (por la construcción que hicimos). Obviamente la función es biyectiva y continua y su inversa es continua xd.

□

7. Demuestra que la compactificación por un punto de S_Ω es homeomorfa a $\bar{S}_\Omega$.

8. Demuestra que la compactificación por un punto de $\mathbb{Z}_+$ es homeomorfa al subespacio $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ de $\mathbb{R}$.

Demostración. Veamos que $\mathbb{Z}_+$ y $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ poseen la topología discreta. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, note que $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z}_+ = \{n\}$, por lo tanto los puntos son abiertos en Z_+, de donde se sigue que $\mathbb{Z}_+$ posee la topología discreta. Ahora sea $\frac{1}{n} \in A$, note que $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, con lo cual, razonando de la misma manera que en el caso anterior, A posee la topología discreta, así la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Es un homeomorfismo, luego por el punto 5, sus compactificaciones a un punto son homeomorfas. Para mostrar que la compactificación a un punto de A es $A \cup \{0\}$ basta ver que $A' = \{0\}$ luego $\overline{A} = \{0\} \cup A$, como $A \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, es compacto y difiere en un punto de A. □

9. Demuestra que si G es un grupo topológico localmente compacto y H es un subgrupo, entonces G/H es localmente compacto.

Demostración. Sea p el mapa cociente y U un abierto en G, por definición de topología cociente $p(U)$ es abierto en G/H si y solo si $p^{-1}(p(U))$ es abierto en G, en efecto

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{h \in H} hU$$

y hU es abierto en G, concluímos que p es abierta. El teorema se sigue de aplicar el resultado del ejercicio 3. □

10. Demuestra que si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto en el punto x, entonces para cada vecindad U de x, existe una vecindad V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subset U$.

Demostración. Sea U una vecindad de x, como X es localmente compacto en x, existe un compacto $K \subset X$ tal que $x \in W \subset K$, con W una vecindad de x. Tenemos también que $U \cap W$ es una vecindad de x contenida en K, por lo tanto $K - (U \cap W)$ es cerrado en K. Como K es compacto y Hausdorff, existen dos abiertos disyuntos V_1 y V_2 tales que $x \in V_1$ y $K - (U \cap W) \subset V_2$. Considere $V = V_1 \cap U \cap W$, V es una vecindad de x que está contenida en U, además $\overline{V} \subset U$, en efecto $K - (U \cap W) = (K - U) \cup (K - W) \subset V_2$ y como V_2 es abierto, $V_2^c \subset U$ es un cerrado que contiene a V , por lo tanto $\overline{V} \subset U$. Además, como $\overline{V} \subset K$, es compacto. □

11.